

J.-G. VAN DER CORPUT

J.-F. KOKSMA

**Sur l'ordre de grandeur de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann
dans la bande critique**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 22 (1930), p. 1-39

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1930_3_22__1_0

© Université Paul Sabatier, 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

SUR L'ORDRE DE GRANDEUR DE LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN DANS LA BANDE CRITIQUE

PAR

MM. J.-G. VAN DER CORPUT et J.-F. KOKSMA, à Groningue.

Afin de déduire l'ordre de grandeur de la fonction de Riemann $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ dans la bande $0 \leq \sigma \leq 1$, il suffit d'examiner la fonction dans la bande $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$, car la conduite de $\zeta(s)$, dans la bande $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ étant connue, l'égalité fonctionnelle

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cdot \Gamma(s) \cdot \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s)$$

nous la fournit dans la bande $0 \leq \sigma \leq 1$.

Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer ici en outre $t \geq e$, en vertu de l'égalité

$$|\zeta(\sigma - it)| = |\zeta(\sigma + it)|.$$

Comme la conduite de la fonction $\zeta(s)$ dans le rectangle $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$; $0 \leq t \leq e$ est suffisamment connue, nous poserons toujours $t > e$.

Le problème dont nous allons nous occuper, revient finalement à la recherche d'une borne supérieure de $|\zeta(\sigma + it)|$ pour les points

$$\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1, \quad t > e.$$

Comme cela ne sera pas plus difficile, nous examinerons au lieu de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, la fonction plus générale $\zeta(s, w)$ ($0 < w \leq 1$), qui pour $\sigma > 1$ est définie par la série

$$\zeta(s, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+w)^s}$$

et qui dans le cas spécial $w = 1$, est égale à $\zeta(s)$.

Dans ce mémoire nous allons démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION : *Désignons par g le nombre entier ≥ 3 , qui correspond à chaque nombre σ de l'intervalle $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$, tel que*

$$(1) \quad 1 - \frac{g}{\gamma - 2} \leq \sigma < 1 - \frac{g+1}{2\gamma - 2} \quad (1), \quad \gamma = 2^g.$$

Si $\lambda(\sigma)$ désigne la fonction de σ ($\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$), qui possède en les points

$$\sigma = 1 - \frac{g}{\gamma - 2} \quad (g = 3, 4, 5, \dots)$$

la valeur $\frac{1}{\gamma - 2}$ et qui est linéaire sur les segments

$$1 - \frac{g}{\gamma - 2} \leq \sigma \leq 1 - \frac{g+1}{2\gamma - 2},$$

et si en outre

$$0 < w \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq \sigma < 1, \quad t > e,$$

on a

$$(2) \quad \left| \zeta(s, w) - \frac{1}{w^s} \right| < c_1 \left(\frac{t^{\lambda(\sigma)}}{\log \frac{1}{1-\sigma}} + \frac{1}{\log \log t} \right) \log t^{(*)}.$$

(1) Cette correspondance est toujours possible, car si g parcourt la suite des nombres 3, 4, 5, ..., les nombres $1 - \frac{g}{\gamma - 2}$ (commençant par $1 - \frac{3}{8-2} = \frac{1}{2}$ et s'approchant de 1, si g croît indéfiniment), forment une suite toujours croissante, à cause de l'inégalité

$$1 - \frac{g+1}{2\gamma - 2} - \left(1 - \frac{g}{\gamma - 2} \right) = \frac{g\gamma - \gamma + 2}{(\gamma - 2)(2\gamma - 2)} > 0.$$

(2) Les nombres c_1, c_2, c_3, c_4 , etc., représenteront toujours des constantes positives et absolues, convenablement choisies.

Si σ ne coïncide avec aucun des points

$$1 - \frac{g'}{\gamma' - 2} \quad (g' \text{ entier } \geq 3, \quad \gamma' = 2^{g'}),$$

de sorte qu'un nombre positif β (ne dépendant que de σ) existe tel que

$$(3) \quad \left| 1 - \frac{g'}{\gamma' - 2} - \sigma \right| \geq \beta \quad (g' = 3, 4, 5 \dots),$$

on a encore

$$(4) \quad \left| \zeta(s, \omega) - \frac{1}{w^s} \right| < \frac{c_2}{\beta} t^{\lambda(\sigma)}.$$

REMARQUE : Supposons que g soit le nombre entier ≥ 3 correspondant à tout σ de $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$, moyennant l'inégalité (1).

Alors en mettant $\gamma = 2^g$, on a l'égalité

$$(5) \quad \lambda(\sigma) = \frac{(1 - \sigma)\gamma - 1}{g\gamma - \gamma + 2},$$

car le second membre est une fonction linéaire de σ dans l'intervalle (1) qui prend la valeur

$$\frac{\frac{g\gamma}{\gamma - 2} - 1}{g\gamma - \gamma + 2} = \frac{1}{\gamma - 2}$$

au point

$$\sigma = 1 - \frac{g}{\gamma - 2}$$

et qui pour

$$\sigma \rightarrow 1 - \frac{g + 1}{2\gamma - 2}$$

s'approche de la valeur

$$\frac{\frac{(g + 1)\gamma}{2\gamma - 2} - 1}{g\gamma - \gamma + 2} = \frac{1}{2\gamma - 2}.$$

Il y a donc continuité au point $1 - \frac{g + 1}{2\gamma - 2}$.

Nous avons jugé superflu la déduction des relations analogues à (2) et (4), relatives aux fonctions $L(s, \gamma)$, parce que ces relations résultent immédiatement des propriétés (2) et (4) en vertu de la relation connue

$$\begin{aligned} L(s, \gamma) &= \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\gamma(a)}{a^s} = \sum_{a=1}^k \gamma(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(kn+a)^s} \\ &= \frac{1}{k^s} \sum_{a=1}^k \gamma(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n + \frac{a}{k}\right)^s} = \frac{1}{k^s} \sum_{a=1}^k \gamma(a) \zeta\left(s, \frac{a}{k}\right) \end{aligned}$$

pour $\sigma > 1$, de sorte que la relation

$$L(s, \gamma) = \frac{1}{k^s} \sum_{a=1}^k \gamma(a) \zeta\left(s, \frac{a}{k}\right)$$

est valable, partout où les deux membres sont des fonctions analytiques de s .

Pour démontrer l'importance de la proposition, faisons les remarques suivantes :

1° A cause de la continuité de $\zeta(s, w)$ aux points $s = 1 + it$, il résulte de (2) immédiatement :

$$\left| \zeta(1 + it, w) - \frac{1}{w^s} \right| \leq c_1 \frac{\log t}{\log \log t}.$$

Cette relation a été trouvée par M. H. Weyl⁽¹⁾ dans le cas particulier $w = 1$.

2° Comme nous allons prouver, il découle de la relation (2) en outre

$$(6) \quad \left| \zeta(s, w) - \frac{1}{w^s} \right| < c_2 t^{\frac{1-\sigma}{\log \frac{1}{1-\sigma}} \log 2} \frac{\log t}{\log \log t}$$

pour $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$.

Ce résultat est plus précis qu'une relation analogue de MM. Hardy-Littlewood⁽²⁾ qui ont démontré l'inégalité

$$\left| \zeta(s, w) - \frac{1}{w^s} \right| < c_4 t^{\frac{c_3(1-\sigma)}{\log \frac{1}{1-\sigma}}} \frac{\log t}{\log \log t}$$

$$\left(\frac{1}{2} \leq \sigma < 1 \right)$$

qui contenait c_3 considéré seulement comme une constante positive absolue.

(1) H. WEYL. « Zur Abschätzung von $\zeta(1 + it)$ » Math. Zeitschrift, **10** (1921), p. 88-101.

(2) J.-E. LITTLEWOOD. « Researches in the theory of the Riemann ζ function »; Records of the London Math. Society, Febr. 10, 1922.

M. E. Landau⁽¹⁾ a simplifié la démonstration non publiée des deux auteurs sus-nommés et il a prouvé que :

Si $\frac{63}{64} \leq \sigma < 1$, on a

$$(7) \quad \left| \zeta(s, w) - \frac{1}{w^s} \right| < c_6 t^{\frac{4(1-\sigma)}{\log \frac{1}{1-\sigma}}} \frac{\log t}{\log \log t}.$$

Il saute aux yeux que ce résultat de M. Landau découle immédiatement de (6).

L'importance de la relation (7) de MM. Hardy-Littlewood-Landau découle du fait qu'elle fournit jusqu'à présent le meilleur résultat relatif à la distribution des nombres premiers, savoir que le nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux à x , figurant dans une série arithmétique dont la différence k ($k > 0$) et le terme initial sont premiers entre eux, est approximativement égal à

$$\frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{du}{\log u}$$

(où $\varphi(k)$ désigne le nombre des nombres naturels $\leq k$ et premiers par rapport à k), de façon que la différence entre le nombre susnommé des nombres premiers et l'expression $\frac{1}{\varphi(k)} \cdot \int_2^x \frac{du}{\log u}$ est d'une valeur absolue inférieure à

$$c_7 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{c_8} \sqrt{\log x \cdot \log \log x}} \quad (2)$$

3° Introduisons la fonction $\mu(\sigma)$ de Lindelöf qui, σ et w étant des nombres fixes, désigne la borne inférieure de tous les nombres μ' , pour lesquels il existe un nombre C indépendant de t (mais qui peut dépendre de σ , w et μ'), tel que pour $t > e$ on a

$$\left| \zeta(s, w) - \frac{1}{w^s} \right| < C t^{\mu'}.$$

Maintenant il résulte immédiatement de la proposition :

$$(8) \quad \mu(\sigma) \leq \lambda(\sigma) \quad \left(\frac{1}{2} \leq \sigma < 1 \right).$$

⁽¹⁾ E. LANDAU. « Über die ζ Funktion und die L Funktionen ». Math. Zeitschr. **20** (1924), p. 105-125. — Voir E. LANDAU. « Vorlesungen über Zahlentheorie », Band II, p. 38.

⁽²⁾ E. LANDAU. Voir le mémoire cité sous ⁽¹⁾ et « Vorlesungen ». Band II, p. 3-46.

Ce n'est pas la première fois qu'une borne supérieure de $\mu(\sigma)$ a été indiquée. MM. Hardy-Littlewood-Landau⁽¹⁾ ont démontré qu'on a dans l'intervalle $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$,

$$(9) \quad \mu(\sigma) \leq \nu(\sigma),$$

si $\nu(\sigma)$ désigne la fonction, qui dans les points

$$\sigma = 1 - \frac{1}{\rho} \quad (\rho = 2^r, \quad r \text{ entier} > 0)$$

prend la valeur

$$\frac{1}{(r+2)\rho}$$

et qui est linéaire sur les segments dans lesquels l'intervalle $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$ est partagé par les points $\sigma = 1 - \frac{1}{\rho}$, ($r = 1, 2, 3 \dots$).

Nous allons démontrer que sur l'intervalle $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, on a

$$(10) \quad \lambda(\sigma) < \nu(\sigma)$$

c.-à.-d. que l'inégalité (8) est meilleure que l'inégalité (9).

Pour $\sigma \rightarrow 1$, les fonctions $\lambda(\sigma)$ et $\nu(\sigma)$ s'approchent toutes les deux de zéro.

Dans le point $\sigma = \frac{1}{2}$ les deux inégalités (8) et (9) fournissent le même résultat, notamment

$$\mu(\sigma) \leq \frac{1}{6}.$$

Le seul résultat relatif à l'ordre de grandeur de la fonction $\zeta(s)$ qui est connu jusqu'à ce jour et qui ne découle pas de notre proposition, est l'inégalité suivante, déduite par M. A. Walfisz⁽²⁾

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| < c_0 t^{\frac{163}{988}} \quad (t > e)$$

(1) E. LANDAU. Voir le mémoire cité sous (1), p. 5, et « Vorlesungen », Band II, p. 55.

(2) A. WALFISZ. « Zur Abschätzung von $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ ». Nachrichten der Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen; Math.-physik. Klasse (1924), p. 155-158.

de laquelle il découle

$$\mu\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{163}{988}$$

et ce résultat est meilleur que la relation fournie par (8) à cause de la relation évidente

$$\frac{163}{988} < \frac{1}{6}.$$

Nous commençons par démontrer que (6) résulte de la proposition, par quoi toutes les conclusions mentionnées sous la 2^e remarque seront justifiées.

A cause de (5) on a

$$(11) \quad \lambda(\sigma) < \frac{(1-\sigma)\gamma}{g\gamma-\gamma} - \frac{1}{g\gamma} = \frac{1-\sigma}{g-1} - \frac{1}{g\gamma}.$$

A cause de $g \geq 3$ et de (1) on a en outre

$$2^{g-1} > \frac{2^{g+1}-2}{g+1} > \frac{1}{1-\sigma},$$

donc

$$g-1 > \frac{1}{\log 2} \cdot \log \frac{1}{1-\sigma},$$

de sorte qu'il découle de (11)

$$(12) \quad \lambda(\sigma) < \log 2 \cdot \frac{1-\sigma}{\log \frac{1}{1-\sigma}} - \frac{1}{g\gamma}.$$

Remarquons qu'en vertu de (1) on a

$$\frac{1}{1-\sigma} \geq \frac{2^g-2}{g}.$$

Puisque pour $g \geq 3$

$$\log \frac{2^g-2}{g} > \log 2^g - \log 2g = g \cdot \left(\log 2 - \frac{\log 2g}{g} \right) > \frac{g}{c_{10}},$$

nous trouvons de plus encore l'inégalité

$$(13) \quad \log \frac{1}{1-\sigma} > \frac{1}{c_{10}} \cdot g.$$

Distinguons maintenant deux cas différents :

1° Supposons $g \geq \log \log t$.

A cause de (13) on a

$$\log \frac{1}{1-\sigma} > \frac{1}{c_{10}} \log \log t,$$

de sorte qu'il résulte de (2) et de (12)

$$\begin{aligned} \left| \zeta(s, \omega) - \frac{1}{w^s} \right| &< c_1 \left(\frac{t^{\log 2 \cdot \frac{1-\sigma}{\log \frac{1}{1-\sigma}}}}{\frac{1}{c_{10}} \log \log t} + \frac{1}{\log \log t} \right) \log t \\ &\leq c_3 \cdot t^{\log 2 \cdot \frac{1-\sigma}{\log \frac{1}{1-\sigma}}} \frac{\log t}{\log \log t}. \end{aligned}$$

2° Supposons

$$g < \log \log t.$$

Alors on a

$$\gamma < 2^{\log \log t} = (\log t)^{\log 2},$$

d'où

$$-\frac{1}{g\gamma} \log t + \log \log t < -\frac{\log t}{\log \log t} \cdot \frac{1}{(\log t)^{\log 2}} + \log \log t < c_{11};$$

donc

$$t^{-\frac{1}{g\gamma}} \log t = e^{-\frac{1}{g\gamma} \log t + \log \log t} < e^{c_{11}},$$

de sorte qu'il découle de (12) et de la proposition

$$\left| \zeta(s, \omega) - \frac{1}{w^s} \right| < c_{12} \left(t^{\log 2 \cdot \frac{1-\sigma}{\log \frac{1}{1-\sigma}}} + \frac{\log t}{\log \log t} \right) < c_3 t^{\log 2 \cdot \frac{1-\sigma}{\log \frac{1}{1-\sigma}}} \frac{\log t}{\log \log t}.$$

Par ceci (6) est démontré complètement.

Ensuite nous allons montrer que la proposition est meilleure que l'inégalité (9) de MM. Hardy-Littlewood-Landau, mentionnée sous la 3° remarque, c.-à-d. nous allons prouver l'inégalité (10)

$$\lambda(\sigma) < \nu(\sigma), \quad \left(\frac{1}{2} < \sigma < 1 \right).$$

A cet effet, nous distinguons deux cas :

1° Soit

$$\sigma = 1 - \frac{1}{\rho}, \quad \rho = 2^r, \quad r \text{ entier } \geq 2.$$

A cause de (1) on a

$$\frac{g+1}{2\gamma-2} < 1 - \sigma = \frac{1}{\rho},$$

d'où il suit, g étant supérieur à 2,

$$\frac{2}{\gamma} = \frac{4}{2\gamma} < \frac{g+1}{2\gamma-2} < \frac{1}{\rho}$$

c.-à-d.,

$$2 \cdot 2^r < 2^g;$$

par conséquent

$$g \geq r+2.$$

Il résulte de $v(\sigma) = \frac{1}{(r+2)\rho}$ et de (5)

$$\begin{aligned} v(\sigma) - \lambda(\sigma) &= \frac{1}{(r+2)\rho} - \frac{\frac{1}{\rho}\gamma - 1}{g\gamma - \gamma + 2} = \frac{g\gamma - \gamma + 2 - (r+2)(\gamma - \rho)}{(r+2)\rho(g\gamma - \gamma + 2)} \\ &= \frac{(g-r-3)\gamma + (r+2)\rho + 2}{(g\gamma - \gamma + 2)\rho(r+2)}. \end{aligned}$$

Le dernier nombre est positif, si $g \geq r+3$.

Si $g = r+2$, c.-à-d. si $\gamma = 4\rho$, on a

$$v(\sigma) - \lambda(\sigma) = \frac{-4\rho + (r+2)\rho + 2}{(g\gamma - \gamma + 2)\rho(r+2)} = \frac{(r-2)\rho + 2}{(g\gamma - \gamma + 2)\rho(r+2)} > 0,$$

puisque $r \geq 2$.

2° Soit

$$1 - \frac{1}{\rho} < \sigma < 1 - \frac{1}{2\rho}$$

où

$$\rho = 2^r, \quad r \text{ entier } \geq 1.$$

Posons $\sigma_1 = 1 - \frac{1}{\rho}$, $\sigma_2 = 1 - \frac{1}{2\rho}$; alors il découle de ce qui précède

$$(14) \quad v(\sigma_2) > \lambda(\sigma_2) \quad \text{et} \quad v(\sigma_1) \geq \lambda(\sigma_1).$$

(Dans la dernière relation le signe d'égalité n'est valable que pour $\sigma_1 = \frac{1}{2}$; dans ce cas les deux membres sont égaux à $\frac{1}{6}$).

Puisque $v(\sigma)$ est une fonction linéaire de σ sur le segment $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, on a

$$(15) \quad (\sigma_2 - \sigma_1)v(\sigma) = (\sigma_2 - \sigma)v(\sigma_1) + (\sigma - \sigma_1)v(\sigma_2).$$

Sur ce segment, $\lambda(\sigma)$ est partout dérivable à droite, et il résulte de (5)

$$\lambda'(\sigma) = -\frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2}.$$

Le second membre de cette relation est une fonction toujours croissante de g , donc une fonction monotone non décroissante de σ . Alors on a

$$\frac{\lambda(\sigma_2) - \lambda(\sigma)}{\sigma_2 - \sigma} \geq \frac{\lambda(\sigma) - \lambda(\sigma_1)}{\sigma - \sigma_1},$$

c'est-à-dire

$$(16) \quad (\sigma_2 - \sigma_1)\lambda(\sigma) \leq (\sigma_2 - \sigma)\lambda(\sigma_1) + (\sigma - \sigma_1)\lambda(\sigma_2).$$

De (14), (15) et (16) il résulte $\lambda(\sigma) < v(\sigma)$.

Par ceci l'inégalité (10) est démontrée.

Maintenant nous passons à la démonstration de la proposition.

LEMME 1. — Si $\sigma > 0$, $s \neq 1$, on a pour tout nombre entier $m \geq 0$ la relation

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta(s, w) &= \sum_{n=0}^m \frac{1}{(n+w)^s} + \frac{1}{(s-1)(m+w)^{s-1}} \\ &- \frac{1}{2} \frac{1}{(m+w)^s} - \frac{1}{2} s(s+1) \int_m^{\infty} \frac{(u-E(u))^2 - (u-E(u))}{(u+w)^{s+2}} du, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle $E(u)$ figure le plus grand nombre entier $\leq u$.

DÉMONSTRATION : Pour tout nombre entier $h \geq 0$, on trouve en intégrant par parties

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} s(s+1) \int_h^{h+1} \frac{(u - E(u))^2 - (u - E(u))}{(u+w)^{s+2}} du \\ &= \frac{1}{2} s(s+1) \int_0^1 \frac{v^2 - v}{(v+h+w)^{s+2}} dv \\ &= \frac{1}{2} s \int_0^1 \frac{2v-1}{(v+h+w)^{s+1}} dv \\ &= -\frac{1}{2} \frac{2v-1}{(v+h+w)^s} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{dv}{(v+h+w)^s} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(h+1+w)^s} + \frac{1}{(h+w)^s} \right) + \int_h^{h+1} \frac{du}{(u+w)^s}. \end{aligned}$$

Moyennant la sommation sur $h = m, m+1, \dots$, on obtient pour $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} s(s+1) \int_m^\infty \frac{(u - E(u))^2 - (u - E(u))}{(u+w)^{s+2}} du \\ &= \frac{1}{2(m+w)^s} + \sum_{h=m+1}^\infty \frac{1}{(h+w)^s} - \int_m^\infty \frac{du}{(u+w)^s} \end{aligned}$$

et en calculant l'intégrale, on trouve que le terme final a la valeur

$$-\frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{(m+w)^{s-1}}.$$

A cause de ce résultat, on voit immédiatement que les deux membres de (17) s'accordent pour $\sigma > 1$. Et pour $\sigma > 0$, $s \neq 1$ ces deux membres sont des fonctions analytiques de s , d'où il résulte qu'ils sont identiques, si $\sigma > 0$, $s \neq 1$.

LEMME 2. — Si $t \geq 1$, $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$, on a

$$(18) \quad \left| \zeta(s, w) - \sum_{n=0}^{E\left(\frac{t}{3}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{13}.$$

REMARQUE. — Par ceci nous avons réduit l'examen de la fonction $\zeta(s, w)$ à l'examen de la somme

$$\sum_{n=0}^{E\left(\frac{t}{3}\right)} \frac{1}{(n+w)^s}.$$

DÉMONSTRATION : A cause de $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ et de $t \geq 1$, la valeur absolue du terme final du second membre de (17) est inférieure ou égale à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |s| \cdot (|s| + 1) \cdot \int_m^\infty \frac{1}{u^2} du &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{|s| \cdot (|s| + 1)}{m^{\frac{3}{2}}} \\ &\leq \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 \frac{t^2}{m^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient de (17), en posant $m = E\left(t^{\frac{4}{3}}\right)$,

$$\begin{aligned} &\left| \zeta(s, w) - \sum_{n=0}^{E\left(t^{\frac{4}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| \\ &< \frac{c_{43}}{3} \left(\frac{1}{|s| \cdot t^{\frac{4}{3}(\sigma-1)}} + \frac{1}{t^{\frac{4}{3}\sigma}} + \frac{t^2}{t^{\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}}} \right) \\ &< \frac{c_{43}}{3} \left(t^{-1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}} + t^{-\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}} + 1 \right) < 3 \frac{c_{43}}{3} t^0 = c_{43}. \end{aligned}$$

Afin d'examiner la somme $\sum_{n=0}^{E\left(t^{\frac{4}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s}$, nous allons nous servir d'un théorème de Van der Corput⁽¹⁾ qui sera notre lemme 3.

LEMME 3. — Supposons que sur le segment $a \leq x \leq b$ (a et b désignant des nombres entiers, $a < b$), la fonction réelle $f(x)$ soit k fois dérivable. Supposons en outre qu'il existe deux nombres positifs r et k , indépendants de x , tels que pour tous les nombres x du segment $a \leq x \leq b$, on a constamment l'inégalité

$$r \leq f^{(k)}(x) \leq R$$

ou constamment l'inégalité

$$-R \leq f^{(k)}(x) \leq -r.$$

Posons $K = 2^k$.

(1) J.-G. van der CORPUT. Neue Zahlentheoretische Abschätzungen (Zweite Mitteilung); Math. Zeitschrift **29** (1928), p. 397. — Voir la proposition 4, p. 426 et la remarque ajoutée. De cette proposition il suit que (19) est valable pour $c_{44} = 21$.

Alors on a

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_{n=a}^b e^{2\pi i f(n)} \right| < c_{14} (b-a) \\ \cdot \left\{ \left(\frac{r}{R^2} \right)^{-\frac{1}{k-2}} + (r(b-a)^k)^{-\frac{2}{k}} + \left(\frac{R}{r(b-a)} \right)^{-\frac{2}{k}} \right\}. \end{array} \right.$$

LEMME 4. — Supposons que k soit un nombre entier ≥ 2 , et que les deux nombres entiers N et N' remplissent la condition $1 \leq N < N' \leq 2N$.

Alors on a pour $K = 2^k$, $0 \leq w \leq 1$, $s = \sigma + it$, $t > 1$ et $\sigma \geq 0$ l'inégalité suivante :

$$(20) \quad \left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{15} N^{1-\sigma} \left\{ N^{-\frac{k}{k-2}} t^{\frac{1}{k-2}} + N^{-\frac{2}{k}} + t^{-\frac{2}{k}} \right\}.$$

DÉMONSTRATION : Nous appliquons le lemme 3 en posant

$$a = N, \quad b = N', \quad f(x) = -\frac{t}{2\pi} \log(x+w),$$

$$R = \frac{t}{2\pi} \cdot \frac{(k-1)!}{N^k},$$

$$r = \frac{t}{2\pi} \cdot \frac{(k-1)!}{3^k \cdot N^k}.$$

Maintenant les conditions du lemme 3 sont remplies, car pour $1 \leq N \leq n < N'$, à cause de l'égalité

$$|f^{(k)}(x)| = \frac{t}{2\pi} \cdot \frac{(k-1)!}{(x+w)^k}$$

on a les inégalités

$$|f^{(k)}(x)| \leq \frac{t}{2\pi} \cdot \frac{(k-1)!}{N^k} = R$$

et

$$|f^{(k)}(x)| \geq \frac{t}{2\pi} \cdot \frac{(k-1)!}{(2N+1)^k} \geq \frac{t}{2\pi} \cdot \frac{(k-1)!}{3^k \cdot N^k} = r;$$

il est évident que $f^{(k)}(x)$ est sur le segment $N \leq x \leq N'$ constamment positif ou constamment négatif.

Dans le second membre de (19), $(b-a)$ possède les exposants 1 , $1 - \frac{2k}{K}$,

et $1 - \frac{2}{K}$ qui tous les trois sont ≥ 0 . Ainsi à cause de $b - a \leq N$, la relation (19) reste valable quand nous remplaçons $(b - a)$ par N dans le membre droit.

Ainsi on obtient

$$(21) \left\{ \begin{aligned} & \left| \sum_{n=N}^{N'} e^{-it \log(n+w)} \right| \\ & < c_{14} N \left\{ \left(\frac{2\pi N^k}{3^k (k-1)! t} \right)^{-\frac{1}{K-2}} + \left(\frac{t}{2\pi} \cdot \frac{(k-1)!}{3^k \cdot N^k} \cdot N^k \right)^{-\frac{2}{K}} + \left(\frac{N}{3^k} \right)^{-\frac{2}{K}} \right\} \\ & < c_{16} N \left(N^{-\frac{k}{K-2}} t^{\frac{1}{K-2}} + t^{-\frac{2}{K}} + N^{-\frac{2}{K}} \right) \end{aligned} \right.$$

puisque

$$\begin{aligned} \left(\frac{3^k \cdot (k-1)!}{2\pi} \right)^{\frac{1}{K-2}} &< (3^k \cdot k^k)^{\frac{1}{K-2}} = e^{\frac{k \log k + k \log 3}{K-2}}, \\ \left(\frac{2\pi \cdot 3^k}{(k-1)!} \right)^{\frac{2}{K}} &< e^{\frac{2k \log 3 + 2 \log 2\pi}{K}} \end{aligned}$$

et

$$(3^k)^{\frac{2}{K}} = e^{\frac{2k \log 3}{K}}$$

sont des nombres bornés.

Moyennant la sommation par parties d'Abel la relation (20) résulte de (21) immédiatement, car l'expression $\frac{1}{(n+w)^\sigma}$ est une fonction toujours décroissante de n et on a

$$\frac{1}{(n+w)^\sigma} \leq \frac{1}{N^\sigma}$$

et

$$\frac{1}{(n+w)^\sigma} = \frac{1}{(n+w)^\sigma} \cdot \frac{1}{(n+w)^{it}} = \frac{1}{(n+w)^\sigma} \cdot e^{-it \log(n+w)}.$$

LEMME 5. — Si $1 < t \leq N$ et $N \leq n < N' \leq 2N$, on a

$$(22) \quad \left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^\sigma} \right| < 3c_{15} N^{1-\sigma} \cdot t^{-\frac{1}{2}}.$$

DÉMONSTRATION : En posant $k = 2$, nous concluons de (20), à cause de $N \geq t$

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{15} N^{1-\sigma} (N^{-1} t^{\frac{1}{2}} + N^{-\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) \\ \leq c_{15} N^{1-\sigma} (t^{-1} \cdot t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) = 3c_{15} N^{1-\sigma} t^{-\frac{1}{2}}.$$

LEMME 6. — Supposons que k soit un nombre entier ≥ 2 et posons $K = 2^k$. Alors tous les nombres entiers N et N' qui remplissent les inégalités

$$N \leq N' \leq 2N, \quad \text{et} \quad 1 \leq N \leq t^{\frac{2}{3}},$$

vérifient la relation

$$(23) \quad \left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{17} N^{1-\sigma - \frac{k}{K-2}} t^{\frac{1}{K-2}}.$$

DÉMONSTRATION : Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer $N \geq 2$, car si $N = 1$, le premier membre de (23) est égal à

$$\left| \frac{1}{(1+w)^s} \right| < 1 \quad \text{ou à} \quad \left| \frac{1}{(1+w)^s} + \frac{1}{(2+w)^s} \right| < 2,$$

de sorte qu'alors (23) est valable pour $c_{17} = 2$.

Si l'on pose

$$u_k = N^{-\frac{k}{K-2}} t^{\frac{1}{K-2}} \quad (k \geq 2, \quad K = 2^k),$$

on a

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = N^{-\frac{k+1}{2K-2}} t^{\frac{1}{2K-2}} N^{\frac{k}{K-2}} t^{-\frac{1}{K-2}} = \left(\frac{N^{kK-K+2}}{t^K} \right)^{\frac{1}{(K-2)(2K-2)}},$$

donc

$$(24) \quad u_{k+1} > u_k, \quad \text{si} \quad N > t^{\frac{K}{kK-K+2}}.$$

$$(25) \quad u_{k+1} \leq u_k, \quad \text{si} \quad N \leq t^{\frac{K}{kK-K+2}}.$$

Envisageons la puissance $t^{\frac{\rho}{r\rho-\rho+2}}$, dans laquelle r soit un nombre entier ≥ 2 et $\rho = 2^r$.

Cette puissance est égale à $t^{\frac{4}{8-4+2}} = t^{\frac{2}{3}} \gg N$, si $r = 2$; elle est une fonction décroissante de r , à cause de la relation

$$(26) \quad \frac{\rho}{r\rho - \rho + 2} - \frac{2\rho}{2(r+1)\rho - 2\rho + 2} \\ = \rho \left(\frac{1}{r\rho - \rho + 2} - \frac{1}{r\rho + 1} \right) > 0 \quad \text{pour } r \geq 2.$$

Si r croît indéfiniment, la puissance $t^{\frac{\rho}{r\rho - \rho + 2}}$ tend vers le nombre $1 < N$. Par conséquent un nombre entier $r \geq 2$ existe, tel que

$$N \leq t^{\frac{K}{kK - K + 2}}, \quad \text{si } k = 2, 3, \dots, r,$$

et

$$N > t^{\frac{K}{kK - K + 2}}, \quad \text{si } k \geq r + 1.$$

En vertu de (24) et (25), il en résulte

$$u_2 \geq u_3 \dots \geq u_r \geq u_{r+1} \leq u_{r+2} \leq u_{r+3} \dots$$

Le nombre u_k , donc aussi le second membre de (23), prend une valeur minima si $k = r + 1$. Il suffit de prouver (23) dans le cas $k = r + 1$, car le lemme étant prouvé pour cette valeur de k , est sûrement valable pour toute autre valeur entière de $k \geq 2$. Il résulte de la supposition $k = r + 1$

$$(27) \quad N \leq t^{\frac{\frac{1}{2}K}{(k-1)\frac{1}{2}K - \frac{1}{2}K + 2}} = t^{\frac{K}{kK - 2K + 4}}.$$

A cause du lemme 4 on a

$$(28) \quad \left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{15} N^{1-\sigma - \frac{k}{K-2}} \left(t^{\frac{1}{K-2}} + N^{\frac{k}{K-2} - \frac{2}{K}} + N^{\frac{k}{K-2}} \cdot t^{-\frac{2}{K}} \right).$$

Remarquons qu'à cause de (27) et de la relation

$$\left(\frac{k}{K-2} - \frac{2}{K} \right) \frac{K}{kK - K + 4} = \frac{kK - 2K + 4}{(K-2)(kK - 2K + 4)} = \frac{1}{K-2},$$

on a

$$(29) \quad N^{\frac{k}{K-2} - \frac{2}{K}} \leq t^{\frac{1}{K-2}}$$

et qu'on a encore à cause de (27)

$$(30) \quad N^{\frac{k}{K-2} - \frac{2}{K}} \leq t^{\frac{k}{K-2} \cdot \frac{K}{kK-2K+4} - \frac{2}{K}} \leq t^{\frac{1}{K-2}},$$

puisque

$$\begin{aligned} & \frac{1}{K-2} - \frac{kK}{(K-2)(kK-2K+4)} + \frac{2}{K} \\ = & -\frac{2(K-2)}{(K-2)(kK-2K+4)} + \frac{2}{K} = \frac{2}{K} - \frac{2}{kK-2K+4} \geq 0. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est évidente pour $k \geq 3$ et pour $k = 2$ on a l'égalité

$$\frac{2}{K} - \frac{2}{kK-2K+4} = \frac{2}{4} - \frac{2}{8-8+4} = 0.$$

La relation (23) résulte immédiatement de (28), (29) et (30) et par ceci nous avons démontré le lemme.

LEMME 7. — Supposons $g \geq 3$, $\gamma = 2^g$, g désignant le nombre entier qui correspond à chaque σ de l'intervalle $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$, moyennant l'inégalité (1).

Si $\lambda(\sigma)$ désigne la fonction définie dans la proposition, on a pour $t > e$

$$(31) \quad \left| \sum_{n=E(t)+1}^{E\left(t^{\frac{4}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{18} + \frac{c_{19}}{g} t^{\lambda(\sigma)} \cdot \log t$$

et en outre le membre gauche de (31) est inférieur à

$$\frac{c_{20}}{1-\sigma - \frac{g+1}{2\gamma-2}} t^{\lambda(\sigma)}.$$

DÉMONSTRATION : Écrivons

$$(32) \quad \sum_{n=E(t)+1}^{E\left(t^{\frac{4}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} = \sum_{h=0}^H \sum_{N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s},$$

où le nombre entier H est défini moyennant l'inégalité

$$(33) \quad E(2^H \cdot t) < E\left(t^{\frac{4}{3}}\right) \leq E(2^{H+1} \cdot t),$$

et où nous avons posé

$$\begin{aligned} N_h &= E(2^h t) + 1, \\ N'_h &= E(2^{h+1} t), \quad (0 \leq h \leq H-1) \\ N'_H &= E\left(t^{\frac{4}{3}}\right). \end{aligned}$$

Si nous appliquons le lemme 5 en posant $N = N_h$, $N' = N'_h$, nous obtenons pour $0 \leq h \leq H$

$$(34) \quad \left| \sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < 3 \cdot c_{15} N^{1-\sigma} t^{-\frac{1}{2}}.$$

A cause de $N_h \leq t^{\frac{4}{3}}$, il suit de (34)

$$(35) \quad \left| \sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < 3 \cdot c_{15} t^{\frac{4}{3}(1-\sigma)} t^{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot c_{15} t^{\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\sigma}.$$

Il résulte de (33)

$$(36) \quad 2^H t < t^{\frac{4}{3}},$$

donc

$$H + 1 < \frac{\log t^{\frac{4}{3}}}{\log 2} + 1 < c_{21} \log t,$$

de sorte que nous tirons de (35) et de (32) selon la dernière inégalité

$$(37) \quad \left| \sum_{n=E(t)+1}^{E\left(t^{\frac{4}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{22} t^{\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\sigma} \log t.$$

A cause de $N_h \leq 2^h t + 1 < 2^{h+1} t$, il résulte de (33) et de (34) en outre

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=\mathbb{E}(t)+1}^{\mathbb{E}(t^{\frac{4}{3}})} \frac{1}{(n+w)^s} \right| &< 3 \cdot c_{15} t^{-\frac{1}{2}} \sum_{h=0}^H (2^{h+1} \cdot t)^{1-\sigma} < 3 \cdot c_{15} t^{\frac{1}{2}-\sigma} \sum_{h=-\infty}^H 2^{(h+1)(1-\sigma)} \\ &= 3 \cdot c_{15} t^{\frac{1}{2}-\sigma} \frac{2^{(H+1)(1-\sigma)}}{1-2^{-(1-\sigma)}} < \frac{c_{23}}{1-\sigma} \cdot t^{\frac{1}{2}-\sigma + \frac{4}{3}(1-\sigma)}, \quad [\text{à cause de (36)}] \end{aligned}$$

donc

$$(38) \quad \left| \sum_{n=\mathbb{E}(t)+1}^{\mathbb{E}(t^{\frac{4}{3}})} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < \frac{c_{23}}{1-\sigma - \frac{g+1}{2\gamma-2}} t^{\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\sigma}.$$

Nous distinguons à présent deux cas différents.

1° Supposons que

$$\frac{1}{2} \leq \sigma < \frac{5}{7}.$$

Dans ce cas le nombre entier g correspondant à σ , moyennant l'inégalité (1) est égal à 3, car pour $g = 3$, on a

$$1 - \frac{g}{\gamma-2} = 1 - \frac{3}{8-2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{g+1}{2\gamma-2} = 1 - \frac{4}{16-2} = \frac{5}{7}.$$

Selon (5) on a, dans cet intervalle,

$$\lambda(\sigma) = \frac{8(1-\sigma) - 1}{24 - 8 + 2} = \frac{7}{18} - \frac{4}{9}\sigma.$$

Remarquons que

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\sigma \leq \frac{7}{18} - \frac{4}{9}\sigma,$$

puisque pour $\sigma = \frac{1}{2}$, les deux nombres sont égaux à $\frac{1}{6}$ et le premier membre est décroissant plus rapidement que le second.

Par conséquent on a dans ce cas

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\sigma \leq \lambda(\sigma),$$

de sorte que les inégalités du lemme résultent immédiatement de (37) et (38), notamment avec

$$c_{10} = 3c_{22}, \quad c_{20} = c_{22}.$$

2° Supposons que

$$\frac{5}{7} \leq \sigma < 1.$$

Maintenant l'exposant

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\sigma$$

figurant dans les inégalités (37) et (38) est tout au plus égal à

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{6} - \frac{20}{21} < 0,$$

et par ceci il résulte de (37)

$$\left| \sum_{n=E(t)+1}^{E\left(t^{\frac{5}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{24}.$$

A cause de

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\sigma < 0 < \lambda(\sigma)$$

on a encore selon (38)

$$\left| \sum_{n=E(t)+1}^{E\left(t^{\frac{5}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < \frac{c_{22}}{1 - \sigma - \frac{g}{\gamma - 2}} t^{\lambda(\sigma)}.$$

Par ceci le lemme 7 est démontré complètement avec

$$c_{18} = c_{24}, \quad c_{19} = 3c_{22}, \quad c_{20} = c_{22}.$$

LEMME 8. — Supposons $g \geq 3$, $\gamma = 2^g$, g désignant le nombre entier qui correspond à chaque σ de l'intervalle $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$, moyennant l'inégalité (1).

Si $\lambda(\sigma)$ désigne la fonction définie dans la proposition, on a pour $t > e$

$$\left| \sum_{n=1}^{E\left(\frac{\gamma}{g^{\gamma-\gamma+2}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < 1 + \frac{c_{22}}{g} t^{\lambda(\sigma)} \cdot \log t$$

et, en outre, le membre gauche de cette inégalité est inférieur à

$$\frac{c_{2\sigma}}{1 - \sigma - \frac{g+1}{2\gamma-2}} \cdot t^{\lambda(\sigma)}.$$

DÉMONSTRATION : Écrivons

$$(39) \quad E \left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2}} \right) \sum_{n=1} \frac{1}{(n+w)^s} = \frac{1}{(1+w)^s} + \sum_{h=1}^H \sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s}$$

où le nombre entier H est défini moyennant l'inégalité

$$(40) \quad 2^H < E \left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2}} \right) \leq 2^{H+1},$$

et où nous avons posé

$$\begin{aligned} N_h &= 2^h, \\ N'_h &= 2^{h+1} - 1, & (1 \leq h \leq H-1) \\ N'_H &= E \left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2}} \right). \end{aligned}$$

Remarquons que, selon l'inégalité (26), $\frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2}$ est une fonction décroissante de g .

Alors on a

$$2 \leq N_h \leq N'_h \leq t^{\frac{8}{3 \cdot 8 - 8 + 2}} = t^{\frac{4}{9}} < t^{\frac{2}{3}},$$

de sorte qu'il est permis d'appliquer le lemme 6.

En mettant $k = g + 1$, $N = N_h$, $N' = N'_h$, nous tirons de (23)

$$(41) \quad \left\{ \left| \sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{17} N_h^{1-\sigma - \frac{g+1}{2\gamma-2}} t^{\frac{1}{2\gamma-2}} = c_{17} 2^h \left(1 - \sigma - \frac{g+1}{2\gamma-2} \right) \cdot t^{\frac{1}{2\gamma-2}} \right.$$

En vertu de

$$N_h \leq t^{\frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2}} \quad \text{et} \quad 1 - \sigma - \frac{g+1}{2\gamma-2} > 0, \quad [\text{voir (1)}]$$

il résulte encore de (41)

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} \left| \sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s} \right| &< c_{17} \cdot t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2} \left(1-\sigma-\frac{g+1}{2\gamma-2}\right) + \frac{1}{2\gamma-2}} \\ &= c_{17} t^{\frac{(1-\sigma)\gamma-1}{g\gamma-\gamma+2}} = c_{17} t^{\lambda(\sigma)}, \end{aligned} \right.$$

selon (5).

Il découle de (40)

$$(43) \quad 2^H < t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}},$$

donc

$$H \leq \frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2} \frac{\log t}{\log 2} < \frac{c_{27}}{g} \log t,$$

de sorte qu'on obtient de (39) et de (42)

$$\left| \mathbb{E} \left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}} \sum_{n=1} \frac{1}{(n+w)^s} \right) \right| < 1 + c_{27} \frac{\log t}{g} \cdot c_{17} t^{\lambda(\sigma)} = 1 + \frac{c_{25}}{g} t^{\lambda(\sigma)} \cdot \log t.$$

Par ceci nous avons démontré la première assertion du lemme (8).

De (39) et de (41), il résulte en outre

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}} \sum_{n=1} \frac{1}{(n+w)^s} \right) \right| &< 1 + c_{17} t^{\frac{1}{2\gamma-2}} \sum_{h=-\infty}^H 2^{h \left(1-\sigma-\frac{g+1}{2\gamma-2}\right)} \\ &= 1 + c_{17} t^{\frac{1}{2\gamma-2}} \frac{2^{H \left(1-\sigma-\frac{g+1}{2\gamma-2}\right)}}{1-2^{-\left(1-\sigma-\frac{g+1}{2\gamma-2}\right)}} \\ &\leq 1 + c_{26} \frac{t^{\frac{1}{2\gamma-2}}}{1-\sigma-\frac{g+1}{2\gamma-2}} t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2} \left(1-\sigma-\frac{g+1}{2\gamma-2}\right)} \quad [\text{à cause de (43)}] \\ &= 1 + \frac{c_{26}}{1-\sigma-\frac{g+1}{2\gamma-2}} t^{\frac{(1-\sigma)\gamma-1}{g\gamma-\gamma+2}} = 1 + \frac{c_{26}}{1-\sigma-\frac{g+1}{2\gamma-2}} t^{\lambda(\sigma)} \quad \text{selon (5)}. \end{aligned}$$

Par ceci nous avons démontré le lemme 8 complètement.

LEMME 9. — Supposons que k soit un nombre entier ≥ 2 et posons $K = 2^k$.
Alors nous avons

$$(44) \quad \frac{kK - 2K + 4}{K} \cdot 2 \cdot \log \frac{k}{k-1} \leq c_{90}.$$

DÉMONSTRATION : Si k croît indéfiniment, le premier nombre de (44) tend vers

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{kK}{K} \cdot 2 \log \frac{k}{k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2k \cdot \log \frac{k}{k-1} = 2.$$

LEMME 10. — Supposons que k et g_1 soient des nombres entiers tels que $2 \leq k \leq g_1$.
Posons $K = 2^k$, $\gamma_1 = 2g_1$.

Si c_{90} désigne la constante du lemme 9, et si l'inégalité

$$\log t \geq c_{90}(\gamma_1 - 2)$$

est remplie, on a

$$(45) \quad k^2 t^{\frac{1}{\gamma_1 - 2} - \frac{1}{K - 2} + \frac{K}{kK - K + 2} \left(\frac{k}{K - 2} - \frac{g_1}{\gamma_1 - 2} \right)} \geq (g_1 - 1)^2.$$

DÉMONSTRATION : L'exposant de t dans le premier membre de (45) étant ≥ 0 , la valeur de ce membre est $\geq k^2$; par conséquent (45) est évident dans les cas où $k = g_1$ ou $g_1 - 1$.

Supposons que l'assertion (45) est valable pour une valeur quelconque de k ($3 \leq k \leq g_1 - 1$) et, démontrons-la pour $k - 1$ au lieu de k , c'est-à-dire si G_k désigne le membre gauche de (45), il faut démontrer

$$G_{k-1} \geq (g_1 - 1)^2, \quad (3 \leq k \leq g_1 - 1)$$

en partant de la supposition $G_k \geq (g_1 - 1)^2$.

L'exposant de t figurant dans le membre gauche de (45) est égal à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma_1 - 2} - \frac{g_1 K}{(kK - K + 2)(\gamma_1 - 2)} + \frac{1}{K - 2} \left(-1 + \frac{kK}{kK - K + 2} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma_1 - 2} - \frac{g_1 K}{(kK - K + 2)(\gamma_1 - 2)} + \frac{1}{kK - K + 2} \\ &= \frac{1}{\gamma_1 - 2} + \frac{\gamma_1 - 2 - g_1 K}{(kK - K + 2)(\gamma_1 - 2)}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$(46) \quad \frac{G_{k-1}}{G_k} = t^{\frac{\gamma_1 - 2 - g_1 K}{(\gamma_1 - 2)(kK - K + 2)}} \cdot \left(\frac{k-1}{k} \right)^2,$$

où nous avons posé

$$\eta = \frac{\gamma_1 - 2 - \frac{1}{2}g_1 K}{\frac{1}{2}kK - K + 2} - \frac{\gamma_1 - 2 - g_1 K}{kK - K + 2}.$$

Le nombre k étant supposé fixe, η est une fonction croissante de g_1 , car si l'on remplace g_1 par $g_1 + 1$, on obtient une augmentation de η qui est égale à

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_1 - \frac{1}{2}K}{\frac{1}{2}kK - K + 2} - \frac{\gamma_1 - K}{kK - K + 2} = \gamma_1 \left(\frac{1}{\frac{1}{2}kK - K + 2} - \frac{1}{kK - K + 2} \right) \\ & - K \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}kK - K + 2} - \frac{1}{kK - K + 2} \right) > 0 \end{aligned}$$

parce que $k > 2$, $K \leq \gamma_1$.

Puisque l'on a $3 \leq k \leq g_1 - 1$, on trouve (k étant fixe) la valeur minima de η en posant $g_1 = k + 1$, donc

$$\begin{aligned} \eta & \geq \frac{2K - 2 - \frac{1}{2}(k+1)K}{\frac{1}{2}kK - K + 2} - \frac{2K - 2 - (k+1)K}{kK - K + 2} \\ & = \frac{\frac{3}{2}K - 2 - \frac{1}{2}kK}{\frac{1}{2}kK - K + 2} + 1 = \frac{K}{kK - 2K + 4}. \end{aligned}$$

A cause de (44) on a donc

$$\eta \geq \frac{1}{c_{28}} \cdot 2 \cdot \log \frac{k}{k-1}$$

et puisque nous avons supposé

$$\frac{\log t}{\gamma_1 - 2} \geq c_{28},$$

on a en outre

$$(47) \quad \frac{\eta}{\gamma_1 - 2} \log t \geq \log \left(\frac{k}{k-1} \right)^2 > 0.$$

La relation (46) nous apprend que

$$\begin{aligned} \log \frac{G_{k-1}}{G_k} &= \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 2} \log t + \log \left(\frac{k-1}{k} \right)^2 \\ &= \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 2} \log t - \log \left(\frac{k}{k-1} \right)^2 \geq 0 \quad [\text{à cause de (47)}], \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{G_{k-1}}{G_k} \geq 1 \quad \text{pour} \quad 3 \leq k \leq g_1 - 1,$$

donc

$$G_{k-1} \geq G_k \geq (g_1 - 1)^2 \quad \text{pour} \quad 3 \leq k \leq g_1 - 1.$$

et par ceci nous avons démontré l'assertion (45).

LEMME 11. — Supposons $g \geq 3$, $\gamma = 2^g$, g désignant le nombre entier qui correspond à chaque σ de l'intervalle $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$, moyennant l'inégalité (1).

Supposons en outre que g_1 soit le plus grand nombre entier $\leq g$ qui remplit la relation

$$(48) \quad \log t \geq c_{28}(\gamma_1 - 2),$$

c_{28} désignant la constante du lemme 10.

Posons

$$u(\sigma) = \lambda(\sigma) - \frac{1}{K-2} - \frac{K}{kK-K+2} \left(1 - \sigma - \frac{k}{K-2} \right),$$

où $\lambda(\sigma)$ désigne la fonction définie dans la proposition et où k figure un nombre entier, tel que $2 \leq k \leq g_1$, $K = 2^k$.

Alors on a

$$(49) \quad k^2 t^{u(\sigma)} \geq (g_1 - 1)^2.$$

DÉMONSTRATION : A cause de (5) on a

$$\lambda(\sigma) = \frac{(1-\sigma)\gamma - 1}{g\gamma - \gamma + 2} = \frac{1}{\gamma - 2} - \left(\sigma - 1 + \frac{g}{\gamma - 2} \right) \frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2},$$

donc

$$\begin{aligned} u(\sigma) &= \frac{1}{\gamma - 2} - \frac{1}{K - 2} + \frac{K}{kK - K + 2} \left(\frac{k}{K - 2} - \frac{g}{\gamma - 2} \right) \\ &\quad + \left(\sigma - 1 + \frac{g}{\gamma - 2} \right) \left(\frac{K}{kK - K + 2} - \frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2} \right). \end{aligned}$$

Il résulte de (1)

$$\sigma - 1 + \frac{g}{\gamma - 2} \geq 0,$$

et puisque à cause de (26) l'expression $\frac{K}{kK - K + 2}$ est une fonction croissante de k , on a en outre

$$\frac{K}{kK - K + 2} - \frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2} \geq \frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2} - \frac{\gamma}{g\gamma - \gamma + 2} = 0,$$

car $k \leq g$. Il s'ensuit

$$(50) \quad u(\sigma) \geq \frac{1}{\gamma - 2} - \frac{1}{K - 2} + \frac{K}{kK - K + 2} \left(\frac{k}{K - 2} - \frac{g}{\gamma - 2} \right).$$

Si $g_1 < g$, on obtient, en posant $\rho = 2^r$, la relation

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\gamma - 2} - \frac{K}{kK - K + 2} \cdot \frac{g}{\gamma - 2} \right) - \left(\frac{1}{\gamma_1 - 2} - \frac{K}{kK - K + 2} \cdot \frac{g_1}{\gamma_1 - 2} \right) \\ &= \sum_{r=g_1}^{g-1} \left\{ \left(\frac{1}{2^r - 2} - \frac{K}{kK - K + 2} \cdot \frac{r+1}{2^r - 2} \right) - \left(\frac{1}{\rho - 2} - \frac{K}{kK - K + 2} \cdot \frac{r}{\rho - 2} \right) \right\} \\ &= \sum_{r=g_1}^{g-1} \frac{1}{(2^r - 2)(\rho - 2)} \left\{ -\rho + K \frac{r(2^r - 2) - (r+1)(\rho - 2)}{kK - K + 2} \right\} \\ &= \sum_{r=g_1}^{g-1} \frac{1}{(2^r - 2)(\rho - 2)} \left\{ -\rho + K \frac{r\rho - \rho + 2}{kK - K + 2} \right\} \\ &= \sum_{r=g_1}^{g-1} \frac{r\rho - \rho + 2}{(2^r - 2)(\rho - 2)} \left\{ \frac{K}{kK - K + 2} - \frac{\rho}{r\rho - \rho + 2} \right\} \geq 0, \end{aligned}$$

puisque on a [à cause de (26) et de $k \leq g_1 \leq r$]:

$$\frac{K}{kK - K + 2} \geq \frac{\rho}{r\rho - \rho + 2}.$$

De ce qui précède, il résulte que le second membre de (50) n'augmente pas, quand nous substituons g_1 à g , si $g_1 \leq g$, donc

$$(51) \quad u(\sigma) \geq \frac{1}{\gamma_1 - 2} - \frac{1}{K - 2} + \frac{K}{kK - K + 2} \left(\frac{k}{K - 2} - \frac{g_1}{\gamma_1 - 2} \right).$$

A cause de (48) il est permis d'appliquer le lemme 10, pour $2 \leq k \leq g_1$. En vertu de (51) nous pouvons donc écrire

$$k^2 t^{u(\sigma)} \geq (g_1 - 1)^2,$$

et par ceci nous avons démontré le lemme.

LEMME 12. — Supposons $g \geq 3$, $\gamma = 2^g$, g désignant le nombre entier qui correspond à chaque σ de l'intervalle $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$, moyennant l'inégalité (1).

Supposons en outre que g_1 soit le plus grand nombre entier $\leq g$, qui satisfait à la relation

$$(52) \quad \log t \geq c_{28}(\gamma_1 - 2),$$

où $\gamma_1 = 2^{g_1}$ et où c_{28} désigne la constante du lemme 11.

Si $\lambda(\sigma)$ désigne la fonction définie dans la proposition, on a pour $t > e^{2c_{28}}$ la relation

$$(53) \quad \left| \sum_{n=\mathbb{E}\left(\frac{\gamma_1}{g_1 \gamma_1 - \gamma_1 + 2}\right) + 1}^{\mathbb{E}(t)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{29} \frac{t^{\lambda(\sigma)}}{g_1} \log t.$$

DÉMONSTRATION : A cause de $t > e^{2c_{28}}$ et de la définition de g_1 , on a sûrement $g_1 \geq 2$. Soit k un nombre entier tel que $2 \leq k \leq g_1$ et partageons le segment

$$\mathbb{E}\left(\frac{\gamma_1}{g_1 \gamma_1 - \gamma_1 + 2}\right) + 1 \leq n \leq \mathbb{E}(t)$$

en les segments

$$\mathbb{E}\left(\frac{K}{kK - K + 2}\right) + 1 \leq n \leq \mathbb{E}\left(\frac{K}{kK - 2K + 4}\right)$$

c'est toujours possible, car l'exposant $\frac{K}{kK - K + 2}$ est une fonction décroissante de k à cause de (26).

Écrivons ensuite

$$(54) \quad \sum_{n=\mathbb{E}\left(\frac{K}{kK - K + 2}\right) + 1}^{\mathbb{E}\left(\frac{K}{kK - 2K + 4}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} = \sum_{h=0}^{H_k} \sum_{n=N_{h,k}}^{N'_{h,k}} \frac{1}{(n+w)^s},$$

où le nombre entier H_k soit défini moyennant l'inégalité

$$(55) \quad E\left(2^{H_k} t^{\frac{K}{kK-K+2}}\right) < E\left(t^{\frac{K}{kK-2K+4}}\right) \leq E\left(2^{H_k+1} t^{\frac{K}{kK-K+2}}\right)$$

et où nous avons posé

$$\begin{aligned} N_{h,k} &= E\left(2^h \cdot t^{\frac{K}{kK-K+2}}\right) + 1, \\ N'_{h,k} &= E\left(2^{h+1} \cdot t^{\frac{K}{kK-K+2}}\right) \quad (0 \leq h \leq H_k - 1), \\ N'_{H_k,k} &= E\left(t^{\frac{K}{kK-2K+4}}\right). \end{aligned}$$

Il résulte de (55)

$$2^{H_k} < t^{\frac{K}{kK-2K+4} - \frac{K}{kK-K+2}},$$

donc

$$\begin{aligned} k^2 H_k &< k^2 \left(\frac{K}{kK-2K+4} - \frac{K}{kK-K+2} \right) \frac{\log t}{\log 2} \\ &= \frac{k^2 K(K-2)}{(kK-2K+4)(kK-K+2)} \frac{\log t}{\log 2} < c_{30} \log t, \end{aligned}$$

car le facteur figurant dans l'avant-dernier membre tend vers 1, si k croît indéfiniment.

Par conséquent on a

$$(56) \quad H_k < \frac{c_{30}}{k^2} \log t.$$

Il découle de (52)

$$\log t \geq c_{28} (2^{g_1} - 2) \geq c_{28} 2^{g_1-1} \geq c_{28} 2^{k-1} \geq c_{31} k^2,$$

c'est-à-dire il résulte de (56)

$$(57) \quad H_k + 1 < c_{32} \cdot \frac{\log t}{k^2} \quad (2 \leq k \leq g_1).$$

Nous allons distinguer deux cas différents :

1° Supposons que $k = 2$. Cela veut dire

$$t^{\frac{2}{3}} \leq N_{h,2} \leq t.$$

Appliquons le lemme 4 en mettant $k = 2$, $N = N_{h,2}$, $N' = N'_{h,2}$.

En remarquant que $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$, nous obtenons la relation

$$\left| \sum_{n=N_{h,2}}^{N'_{h,2}} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{15} N_{h,2}^{1-\sigma} \left(N_{h,2}^{-1} t^{\frac{1}{2}} + N_{h,2}^{-\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \right) < c_{15} \left(t^{-\frac{2}{3}\sigma + \frac{1}{2}} + t^{\frac{2}{3}(\frac{1}{2}-\sigma)} + t^{\frac{1}{2}-\sigma} \right) \\ < 3 \cdot c_{15} t^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sigma} = 3 \cdot c_{15} \cdot t^{\lambda(\sigma) - u(\sigma)}$$

où nous avons posé

$$u(\sigma) = \lambda(\sigma) - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sigma = \lambda(\sigma) - \frac{1}{K-2} - \frac{K}{kK-K+2} \left(1 - \sigma - \frac{k}{K-2} \right)$$

pour $k = 2$.

2° Occupons-nous maintenant du cas $3 \leq k \leq g_1$.

Nous allons appliquer le lemme 6 en mettant

$$N = N_{h,k}, \quad N' = N'_{h,k} \quad \text{pour } 3 \leq k \leq g_1.$$

Les conditions du lemme 6 sont remplies, car pour $3 \leq k \leq g_1$ on a

$$1 < N_{h,k} \leq t^{\frac{2}{3}}.$$

Nous obtenons la relation

$$\left| \sum_{n=N_{h,k}}^{N'_{h,k}} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{17} N_{h,k}^{1-\sigma - \frac{k}{K-2}} t^{\frac{1}{K-2}} \leq c_{17} t^{\frac{K}{kK-K+2} \left(1 - \sigma - \frac{k}{K-2} \right) + \frac{1}{K-2}},$$

parce que

$$N_{h,k} \geq t^{\frac{K}{kK-K+2}}$$

et

$$1 - \sigma - \frac{k}{K-2} \leq 0 \quad \text{pour } k \leq g_1 \leq g.$$

La dernière inégalité découle du fait que $\frac{k}{K-2}$ est une fonction décroissante de k , à cause de l'inégalité suivante :

$$\frac{k}{K-2} - \frac{k+1}{2K-2} = \frac{kK-K+2}{(K-2)(2K-2)} > 0.$$

Dans ce deuxième cas on a donc

$$\left| \sum_{n=N_{h,k}}^{N'_{h,k}} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{17} t^{\lambda(\sigma)-u(\sigma)},$$

où nous avons posé

$$u(\sigma) = \lambda(\sigma) - \frac{1}{K-2} - \frac{K}{kK-K+2} \left(1 - \sigma - \frac{k}{K-2} \right)$$

pour $3 \leq k \leq g_1$.

En combinant les résultats des deux cas nous pouvons écrire

$$\left| \sum_{n=N_{h,k}}^{N'_{h,k}} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{33} t^{\lambda(\sigma)-u(\sigma)},$$

où

$$u(\sigma) = \lambda(\sigma) - \frac{1}{K-2} - \frac{K}{kK-K+2} \left(1 - \sigma - \frac{k}{K-2} \right)$$

pour $2 \leq k \leq g_1$.

A cause de (52) il est permis d'appliquer le lemme 11 et nous trouvons

$$\left| \sum_{n=N_{h,k}}^{N'_{h,k}} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{33} t^{\lambda(\sigma)} \frac{k^2}{(g_1-1)^2},$$

de sorte qu'il résulte de (54) et de (57) pour $2 \leq k \leq g_1$

$$\left| \sum_{n=\mathbb{E}_t \left(\frac{K}{kK-K+2} \right) + 1}^{\mathbb{E}_t \left(\frac{K}{kK-2K+4} \right)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{32} \cdot c_{33} \frac{t^{\lambda(\sigma)}}{(g_1-1)^2} \log t.$$

En étendant la somme sur $k = 2, 3, \dots, g_1$, on obtient

$$\left| \sum_{n=\mathbb{E}_t \left(\frac{\gamma_1}{g_1 \gamma_1 - \gamma_1 + 2} \right) + 1}^{\mathbb{E}(t)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < (g_1-1) \cdot c_{32} \cdot c_{33} \frac{t^{\lambda(\sigma)} \cdot \log t}{(g_1-1)^2} < c_{29} \frac{t^{\lambda(\sigma)}}{g_1} \log t$$

et par ceci l'assertion (53) est démontrée.

LEMME 13. — Supposons $g \geq 3$, $\gamma = 2^g$, g désignant le nombre entier qui correspond à chaque σ de l'intervalle $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$, moyennant l'inégalité (1).

Si $\lambda(\sigma)$ désigne la fonction, définie dans la proposition, ou a pour $t > e$

$$(58) \quad \left| \sum_{n=\mathbb{E}\left(\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}\right)+1}^{\mathbb{E}(t)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{34} \left(\frac{t^{\lambda(\sigma)}}{g} + \frac{1}{\log \log t} \right) \log t.$$

DÉMONSTRATION : Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer $t > e^{2c_{28}}$, où c_{28} désigne la constante du lemme 12, parce que autrement on a

$$\left| \sum_{n=\mathbb{E}\left(\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}\right)+1}^{\mathbb{E}(t)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < \sum_{n=1}^{\mathbb{E}(e^{2c_{28}})} 1 \leq e^{2c_{28}},$$

de sorte que l'assertion (58) est alors évidente.

Nous allons distinguer deux cas différents :

1° Supposons que

$$\log t \geq c_{28}(\gamma - 2), \quad (\gamma = 2^g),$$

où c_{28} désigne la constante du lemme 12.

Il est permis d'appliquer le lemme 12, en mettant $g_1 = g$, à cause de la définition de g_1 .

Par ceci on obtient de (53) immédiatement la relation (58), en mettant $c_{34} = c_{29}$.

2° Supposons que

$$\log t < c_{28}(\gamma - 2), \quad (\gamma = 2^g).$$

Désignons par g_1 le plus grand nombre entier qui possède la propriété

$$\log t \geq c_{28}(\gamma_1 - 2) \quad (\gamma_1 = 2^{g_1})$$

et écrivons

$$(59) \quad \sum_{n=\mathbb{E}\left(\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}\right)+1}^{\mathbb{E}(t)} \frac{1}{(n+w)^s} = \sum_{n=\mathbb{E}\left(\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2}\right)+1}^{\mathbb{E}(t)} \frac{1}{(n+w)^s} + \sum_{n=\mathbb{E}\left(\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}\right)+1}^{\mathbb{E}\left(\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2}\right)} \frac{1}{(n+w)^s}.$$

Selon le lemme 12, la valeur absolue de la première somme du dernier membre devient

$$(60) \quad \left| \sum_{n=\mathbb{E}\left(t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2}}\right)+1}^{\mathbb{E}(t)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{29} \frac{t^{\lambda(\sigma)}}{g_1} \log t.$$

A cause de la définition de g_1 , on a

$$\log t < c_{38} (2^{g_1+1} - 2) < c_{38} 2^{g_1+1};$$

donc

$$g_1 > \frac{\log \log t}{\log 2} - \frac{\log 2^{c_{38}}}{\log 2} > \frac{1}{c_{38}} \log \log t,$$

puisque $t > e$ et $t > e^{2^{c_{38}}}$.

Par conséquent, on a

$$(61) \quad \frac{1}{g_1} < \frac{c_{38}}{\log \log t}.$$

Remarquons que

$$(\gamma_1 - 2) > \frac{1}{4} (2^{g_1+1} - 2) > \frac{1}{4c_{38}} \log t.$$

En vertu de (5) et de (1) on obtient

$$\lambda(\sigma) = \frac{(1-\sigma)\gamma - 1}{g\gamma - \gamma + 2} \leq \frac{\frac{g}{\gamma-2} \gamma - 1}{g\gamma - \gamma + 2} = \frac{1}{\gamma-2} < \frac{c_{38}}{\log t}$$

donc

$$t^{\lambda(\sigma)} \leq t^{\frac{1}{\gamma-2}} < e^{c_{38}} = c_{36}. \quad (62)$$

Il résulte de (60), (61) et (62)

$$(63) \quad \left| \sum_{n=\mathbb{E}\left(t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2}}\right)+1}^{\mathbb{E}(t)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{34} \cdot \frac{\log t}{\log \log t}.$$

Envisageons maintenant la deuxième somme du dernier membre de (59).

Écrivons

$$(64) \quad \sum_{n=\mathbb{E}\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)+1}^{\mathbb{E}\left(\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+1}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} = \sum_{h=0}^H \sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s},$$

où le nombre entier H soit défini moyennant l'inégalité

$$(65) \quad \mathbb{E}\left(2^H \cdot t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right) < \mathbb{E}\left(t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+1}}\right) \leq \mathbb{E}\left(2^{H+1} t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)$$

et où nous avons posé

$$\begin{aligned} N_h &= \mathbb{E}\left(2^h \cdot t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right) + 1, \\ N'_h &= \mathbb{E}\left(2^{h+1} \cdot t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right), \quad (0 \leq h \leq H-1) \\ N'_H &= \mathbb{E}\left(t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+1}}\right). \end{aligned}$$

Appliquons le lemme 6 en mettant $k = g_1$, $N = N_h$, $N' = N'_h$. Nous obtenons

$$(66) \quad \left| \sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{17} \cdot N_h^{1-\sigma-\frac{g_1}{\gamma_1-2}} t^{\frac{1}{\gamma_1-2}} \leq c_{37},$$

à cause de (62) et puisque on a

$$N_h \geq 1 \quad \text{et} \quad 1 - \sigma - \frac{g_1}{\gamma_1-2} \leq 1 - \sigma - \frac{g}{\gamma-2} \leq 0 \quad [\text{voir (1)}].$$

Nous tirons de (65)

$$H < t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+1} - \frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}} < t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2}},$$

donc

$$H \log 2 < \frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2} \log t$$

c'est-à-dire

$$H + 1 < c_{38} \frac{\log t}{g_1} + 1 < c_{39} \frac{\log t}{\log \log t},$$

à cause de (61), de sorte qu'il résulte de (64) et de (66)

$$(67) \quad \left| \sum_{n=\mathbb{E}\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)_{+1}}^{\mathbb{E}\left(t^{\frac{\gamma_1}{g_1\gamma_1-\gamma_1+2}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{34} \frac{\log t}{\log \log t}.$$

Des relations (67), (63) et (59), il découle que l'assertion du lemme est juste dans le 2^e cas que nous venons d'examiner; c'est-à-dire que nous avons établi complètement ce lemme 13.

LEMME 14. — Supposons $g \geq 3$, $\gamma = 2^g$ et $\sigma \neq 1 - \frac{g}{\gamma-2}$, g désignant le nombre entier qui correspond à chaque σ de l'intervalle $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$, moyennant l'inégalité (1).

Supposons en outre que $\lambda(\sigma)$ désigne la fonction définie dans la proposition. Alors on a pour $t > e$

$$\left| \sum_{n=\mathbb{E}\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)_{+1}}^{\mathbb{E}(t)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{40} \frac{t^{\lambda(\sigma)}}{\sigma-1 + \frac{g}{\gamma-2}}.$$

DÉMONSTRATION : ÉCRIVONS

$$(68) \quad \sum_{n=\mathbb{E}\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)_{+1}}^{\mathbb{E}(t)} \frac{1}{(n+w)^s} = \sum_{n=\mathbb{E}\left(t^{\frac{2}{3}}\right)_{+1}}^{\mathbb{E}(t)} \frac{1}{(n+w)^s} + \sum_{n=\mathbb{E}\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+1}}\right)_{+1}}^{\mathbb{E}\left(t^{\frac{2}{3}}\right)} \frac{1}{(n+w)^s}.$$

Commençons par envisager la première somme du dernier membre. Nous allons l'écrire sous la forme

$$(69) \quad \sum_{n=\mathbb{E}\left(t^{\frac{2}{3}}\right)_{+1}}^{\mathbb{E}(t)} \frac{1}{(n+w)^s} = \sum_{h=0}^H \sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s},$$

où le nombre entier H soit défini moyennant l'inégalité

$$(70) \quad \mathbb{E}\left(2^H \cdot t^{\frac{2}{3}}\right) < \mathbb{E}(t) \leq \mathbb{E}\left(2^{H+1} \cdot t\right),$$

et où nous avons posé

$$\begin{aligned} N_h &= E\left(2^h \cdot t^{\frac{2}{3}}\right) + 1, \\ N'_h &= E\left(2^{h+1} \cdot t^{\frac{2}{3}}\right) \quad (0 \leq h \leq H-1), \\ N'_H &= E(t). \end{aligned}$$

Appliquons le lemme 4 en mettant $k = 2$, $N = N_h$, $N' = N'_h$. Nous obtenons

$$(71) \quad \left| \sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{15} N_h^{-\sigma} \left(t^{\frac{1}{2}} + N_h^{\frac{1}{2}} + N_h t^{-\frac{1}{2}} \right) < 3 \cdot c_{15} N_h^{-\sigma} \cdot t^{\frac{1}{2}},$$

puisque

$$N_h^{\frac{1}{2}} \leq t^{\frac{1}{2}}$$

et puisque

$$N_h t^{-\frac{1}{2}} \leq t \cdot t^{-\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2}}.$$

A cause de l'inégalité $N_h > 2^h \cdot t^{\frac{2}{3}}$ nous pouvons donc écrire au lieu de (71), la relation

$$(72) \quad \left| \sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < 3 \cdot c_{15} 2^{-h\sigma} t^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sigma}.$$

Distinguons trois cas différents :

$$1^\circ \quad \frac{1}{2} \leq \sigma < \frac{5}{7}.$$

Le nombre g , correspondant aux σ de cet intervalle, est égal à 3; par conséquent on a, à cause de (5),

$$\lambda(\sigma) = \frac{7}{18} - \frac{4}{9}\sigma.$$

Il est évident que

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sigma \leq \frac{7}{18} - \frac{4}{9}\sigma = \lambda(\sigma),$$

car les deux membres sont égaux à $\frac{1}{6}$ pour $\sigma = \frac{1}{2}$ et le premier membre décroît plus rapidement que le dernier membre.

$$2^\circ \quad \frac{5}{7} \leq \sigma < \frac{5}{6}.$$

Le nombre g , correspondant aux σ de cet intervalle, est égal à 4; par conséquent on a, à cause de (5),

$$\lambda(\sigma) = \frac{(1-\sigma)16-1}{50} = \frac{3}{10} - \frac{8}{25}\sigma.$$

Il saute aux yeux que

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sigma < \frac{3}{10} - \frac{8}{25}\sigma = \lambda(\sigma),$$

puisque pour $\sigma = \frac{5}{7}$, les deux membres de la dernière inégalité prennent respectivement les valeurs $\frac{1}{42}$ et $\frac{1}{14}$ et puisque en outre le membre gauche décroît plus rapidement que le membre droit.

$$3^\circ \quad \frac{5}{6} \leq \sigma < 1.$$

Dans ce troisième cas on a

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sigma \leq \frac{1}{2} - \frac{5}{9} < 0 < \lambda(\sigma).$$

En combinant les résultats des trois cas on obtient que toujours

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sigma \leq \lambda(\sigma).$$

Nous pouvons donc écrire, pour $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$, au lieu de (72)

$$\left| \sum_{n=N_h}^{N_h} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < 3 \cdot c_{15} \cdot 2^{-h\sigma} \cdot t^{\lambda(\sigma)}.$$

En étendant la somme sur $h = 0, 1, \dots, H$ nous trouvons de (69) la relation

$$(73) \left\{ \begin{aligned} \left| \sum_{E\left(t^{\frac{2}{3}}\right)+1}^{E(t)} \frac{1}{(n+w)^s} \right| &< 3 \cdot c_{15} \sum_{h=0}^{\infty} 2^{-h\sigma} t^{\lambda(\sigma)} \\ &= 3 \cdot c_{15} \cdot \frac{1}{1-2^{-\sigma}} t^{\lambda(\sigma)} < \frac{c_{41}}{\sigma} \cdot t^{\lambda(\sigma)} < c_{41} \frac{t^{\lambda(\sigma)}}{\sigma-1+\frac{g}{\gamma-2}}. \end{aligned} \right.$$

Envisageons maintenant la dernière somme du dernier membre de (68). Nous écrivons cette somme sous la forme

$$(74) \quad \sum_{n=E\left(t^{\frac{2}{3}}\right)}^{E\left(\frac{2}{3}\right)} \frac{1}{(n+w)^s} = \sum_{h=0}^H \sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s},$$

$$n = E\left(t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)_{+1}$$

dans laquelle le nombre H soit défini moyennant l'inégalité

$$E\left(2^H \cdot t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right) < E\left(t^{\frac{2}{3}}\right) \leq E\left(2^{H+1} \cdot t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)$$

et dans laquelle nous avons posé en outre

$$N_h = E\left(2^h \cdot t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)_{+1},$$

$$N'_h = E\left(2^{h+1} \cdot t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right), \quad (0 \leq h \leq H-1)$$

$$N'_H = E\left(t^{\frac{2}{3}}\right).$$

En appliquant le lemme 6 pour $k = g$, $N = N_h$ et $N' = N'_h$ on trouve

$$\left| \sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{17} N_h^{1-\sigma-\frac{g}{\gamma-2}} t^{\frac{1}{\gamma-2}} \leq c_{17} \left(2^h \cdot t^{\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}}\right)^{1-\sigma-\frac{g}{\gamma-2}} t^{\frac{1}{\gamma-2}},$$

puisque $1 - \sigma - \frac{g}{\gamma-2} < 0$ à cause de (1).

On a donc la relation suivante

$$\left| \sum_{n=N_h}^{N'_h} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{17} 2^{h\left(1-\sigma-\frac{g}{\gamma-2}\right)} \frac{(1-\sigma)^{\gamma-1}}{t^{g\gamma-\gamma+2}} = c_{17} 2^{h\left(1-\sigma-\frac{g}{\gamma-2}\right)} t^{\lambda(\sigma)},$$

en vertu de (5).

En prenant la somme on tire de la relation (74) l'inégalité

$$(75) \left\{ \left| \sum_{n=E\left(t^{\frac{2}{3}}\right)}^{\left(\frac{\gamma}{g\gamma-\gamma+2}\right)_{+1}} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < c_{17} t^{\lambda(\sigma)} \sum_{h=0}^{\infty} 2^{h\left(1-\sigma-\frac{g}{\gamma-2}\right)} \right. \\ \left. = c_{17} t^{\lambda(\sigma)} \frac{1}{1-2^{1-\sigma-\frac{g}{\gamma-2}}} < c_{18} \frac{t^{\lambda(\sigma)}}{\sigma-1+\frac{g}{\gamma-2}} \right.$$

L'assertion du lemme 14 résulte immédiatement de (68), (73) et (75).

Démonstration de la proposition.

Des lemmes 2, 7, 8 et 13 nous tirons l'inégalité

$$\left| \zeta(s, w) - \frac{1}{w^s} \right| < c_1 \left(\frac{t^{\lambda(\sigma)}}{g} + \frac{1}{\log \log t} \right) \log t.$$

Remarquons que selon l'inégalité (1) on a

$$\gamma > \frac{2\gamma-2}{g+1} \geq \frac{1}{1-\sigma}.$$

Cela veut dire

$$g > g \log 2 \geq \log \frac{1}{1-\sigma},$$

d'où

$$\left| \zeta(s, w) - \frac{1}{w^s} \right| < c_1 \left(\frac{t^{\lambda(\sigma)}}{\log \frac{1}{1-\sigma}} + \frac{1}{\log \log t} \right) \log t.$$

Si $\sigma \neq 1 - \frac{g}{\gamma - 2}$ [g étant défini moyennant (1)], on obtient en outre des lemmes 2, 7, 8 et 14, l'inégalité suivante :

$$\left| \zeta(s, w) - \frac{1}{w^s} \right| < \frac{c_2}{2} t^{\lambda(\sigma)} \left(\frac{1}{1 - \sigma - \frac{g+1}{2\gamma-2}} + \frac{1}{\sigma - 1 + \frac{g}{\gamma-2}} \right) \leq c_2 \frac{t^{\lambda(\sigma)}}{\beta},$$

par suite de la définition de β , moyennant l'inégalité (3).

Et par ceci nous avons établi la proposition.