ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

J. XANTHAKIS

Sur les singularités des équations différentielles du premier ordre

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 24 (1932), p. 191-202
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1932_3_24__191_0>

SUR LES SINGULARITÉS

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

Par M. J. XANTHAKIS

Dans deux Mémoires précédents[1], j'ai étudié des équations différentielles du type :

$$x^{\mu} \frac{dy}{dx} = \alpha y + xf(x) + x\varphi(x)\, y, \qquad \mu = 2;$$

$$x^{\mu} \frac{dy}{dx} = \alpha y + xf(x)\, kx^{\nu} y, \qquad \begin{cases} \mu = 2, 3 \\ \nu = 1, 2 \end{cases};$$

$$x^{\mu} \frac{dy}{dx} = ay + xf(x) + ky^2, \qquad \mu = 2, 3;$$

en cherchant les conditions suffisantes pour que les intégrales des équations précédentes soient holomorphes au voisinage de zéro, et s'annulent pour $x = 0$.

Ainsi, j'ai trouvé pour les équations ci-dessus, qu'il suffit que le coefficient α soit 1) racine commune de deux ou plusieurs fonctions complètement définies, et 2) que le même coefficient soit un point régulier de deux ou plusieurs fonctions aussi complètement définies. Le nombre de ces fonctions croît avec μ.

Nous allons chercher à présent les conditions suffisantes pour que les intégrales des équations[2] :

$$\text{(1)} \qquad P(x) \frac{dy}{dx} = \alpha y + xf(x), \qquad \alpha \neq 0$$

---

(1) *Contribution à la théorie des singularités des équations différentielles du premier ordre.* Thèse, Athènes.

Sur la théorie des anomalies des équations différentielles du premier ordre. Praktika de l'Académie d'Athènes, 5, 1930, p. 53.

(2) Dans le cas où $a = 1$, $k = 2$, $b = 0$, on a l'équation :

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \alpha y + xf(x)$$

qui a été étudiée par Briot et Bouquet (Journal de l'École Polytechnique, cahier XXXVI, 1856).

où

$$P(x) = x(ax^k + b), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

soient holomorphes au voisinage de zéro et s'annulent pour $x = 0$.

Supposons d'abord que $k = 1$, et soit

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

le développement en série de Taylor de la fonction $f(x)$ laquelle est supposée holomorphe au voisinage du point $x = 0$. Si

$$(2) \qquad y = g_1 x + g_2 x^2 + \ldots + g_n x^n + \ldots$$

est la série qui satisfait formellement à l'équation (1), on trouve facilement en appliquant la méthode des coefficients indéterminés, que

$$g_n = (-1)^{n-1} \frac{a^{n-1}}{n m_n} \sum_{n=1}^{n} (-1)^{n-1} m_{n-1} c_{n-1} \frac{1}{a^{n-1}}$$

où

$$m_n = \prod_{n=1}^{n} \left[b - \frac{\alpha}{n} \right] = \left[b - \frac{\alpha}{1} \right] . \left[b - \frac{\alpha}{2} \right] \ldots \left[b - \frac{\alpha'}{n} \right].$$

D'où, on a, en posant $|m_n| = M_n$,

$$(3) \qquad |g_n| \leqq \frac{|a|^{n-1}}{n M_n} \sum M_{n-1} |c_{n-1}| \frac{1}{|a|^{n-1}}.$$

Considérons maintenant la série :

$$(4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} M_{n-1} |c_{n-1}| x^n$$

qui a, comme rapport d'un terme au précédent,

$$\frac{M_n}{M_{n-1}} \cdot \frac{|c_n|}{|c_{n-1}|} x = \left| b - \frac{\alpha}{n} \right| \frac{|c_n|}{|c_{n-1}|} x$$

et, étant donné qu'à partir d'une certaine valeur de n on a

$$\frac{|c_n|}{|c_{n-1}|} < L, \qquad L = \text{constante}$$

il résulte que,

$$\left|b - \frac{\alpha}{n}\right| \cdot \frac{|c_n|}{|c_{n-1}|} < \mathrm{L}', \qquad \mathrm{L}' = \text{constante}$$

à partir d'une certaine valeur de n. Donc, la série (4) converge absolument et représente une fonction $\mathrm{F}(x)$ holomorphe dans un cercle de rayon $\mathrm{R} \neq 0$.

Mais on sait que le rayon du cercle de convergence de la fonction :

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{M}_{n-1} |c_{n-1}| \, x^n$$

est la limite supérieure de la suite :

$$\frac{1}{\mathrm{M}_1 |c_1|}, \quad \frac{1}{|\sqrt{\mathrm{M}_2 c_2}|}, \quad \ldots \quad \frac{1}{|\sqrt[n]{\mathrm{M}_n c_n}|}, \quad \ldots .$$

D'autre part[1]

$$\mathrm{M}_n = \prod_{n=1}^{n} \left[b - \frac{\alpha}{n}\right] < [\,|b| + |\alpha|\,]^n .$$

Donc :

$$\frac{1}{|\sqrt[n]{\mathrm{M}_n c_n}|} > \frac{1}{|b| + |\alpha|} \cdot \frac{1}{|\sqrt[n]{c_n}|}$$

pour toutes les valeurs entières et positives de n. Ainsi on conclut que :

$$\mathrm{R} \geqq \frac{1}{|b| + |\alpha|} \cdot \frac{1}{h}$$

où h est le plus petit nombre entier et positif qui satisfait à l'inégalité

$$h > |\sqrt[n]{c_n}|$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Si nous supposons maintenant que :

$$\frac{1}{|a|} < \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{|b| + |\alpha|}$$

---

[1] On suppose que $|b| > |\alpha|$.

c'est-à-dire que $\frac{1}{|a|}$ représente un point régulier de la fonction $F(x)$, et si nous appelons $F_n\left[\frac{1}{|a|}\right]$ la somme de n premiers termes de la série (4) pour $x = \frac{1}{|a|}$, nous aurons, en vertu de (3),

$$|g_n| \leqq \frac{|a|^{n-1}}{n M_n} F_n\left(\frac{1}{|a|}\right) < \frac{|a|^{n-1}}{[|b| - |\alpha|]^n} F\left(\frac{1}{|a|}\right)$$

pour toutes les valeurs entières et positives de n.

D'où, on a

$$(5) \qquad |\sqrt[n]{g_n}| < \frac{|a|}{|b| - |\alpha|} \cdot \left|\sqrt[n]{\frac{1}{a} F\left(\frac{1}{|a|}\right)}\right|$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Donc, on conclut que la série (2) qui satisfait formellement à l'équation (1) ($k = 1$), converge absolument dans un cercle de rayon $r_1 \neq 0$.

De la relation (5) on conclut aussi que :

$$r_1 \geqq \frac{|b| - |\alpha|}{|a|}$$

parce que la limite supérieure de la suite :

$$\frac{1}{\left|\frac{1}{a} F\left(\frac{1}{|a|}\right)\right|}, \quad \frac{1}{\left|\sqrt{\frac{1}{a} F\left(\frac{1}{|a|}\right)}\right|}, \quad \ldots \quad \frac{1}{\left|\sqrt[n]{\frac{1}{a} F\left(\frac{1}{|a|}\right)}\right|}, \quad \ldots$$

est égale à l'unité, d'après l'hypothèse que la fonction $F(x)$ est holomorphe pour $x = \frac{1}{|a|}$.

De ce qui précède, il résulte que :

I. « *Si les coefficients* a, b, α, *satisfont aux inégalités*

$$|b| > |\alpha|$$

$$|a| > [|b| + |\alpha|] \cdot h$$

l'équation différentielle (1) *admet une intégrale holomorphe dans un cercle ayant un rayon*

$$r_1 \geqq \frac{|b| - |\alpha|}{|a|}$$

qui s'annule pour $x = 0$. »

1α. Soit $k = 2$, c'est-à-dire

$$P(x) = x(ax^2 + b)$$

les coefficients $g_i (i = 1, 2, 3 \ldots)$ sont donnés par les formules suivantes :

$$g_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{a^{n-1}}{2n \cdot m_{2n}} \cdot \sum_{n=1}^{n} (-1)^{n-1} m_{2n-2} c_{2n-1} \cdot \frac{1}{a^{n-1}},$$

$$g_{2n+1} = (-1)^n \frac{a^n}{(2n+1) m_{2n+1}} \sum_{n=0}^{n} (-1)^n m_{2n-1} c_{2n} \cdot \frac{1}{a^n}.$$

Si nous posons $|m_{2n}| = M_{2n}$, on a

(6)
$$|g_{2n}| \leqq \frac{|a|^{n-1}}{2n M_{2n}} \sum_{n=1}^{n} M_{2n-2} \cdot |c_{2n-1}| \cdot \frac{1}{|a|^{n-1}},$$
$$|g_{2n-1}| \leqq \frac{|a|^n}{(2n+1) M_{2n}} \sum_{n=0}^{n} M_{2n-1} |c_{2n}| \frac{1}{|a|^n}.$$

Considérons maintenant les séries

(7)
$$\sum_{n=1}^{\infty} M_{2n-1} |c_{2n}| x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n} |c_{2n+1}| x^n$$

dont les rapports sont respectivement :

$$\frac{M_{2n-1}}{M_{2n-3}} \cdot \frac{|c_{2n+1}|}{|c_{2n-2}|} x = \left| b - \frac{\alpha}{2n-1} \right| \cdot \frac{|c_{2n}|}{|c_{2n-2}|} x,$$
$$\frac{M_{2n}}{M_{2n-2}} \cdot \frac{|c_{2n+1}|}{|c_{2n-1}|} x = \left| b - \frac{\alpha}{2n} \right| \cdot \frac{|c_{2n+1}|}{|c_{2n-1}|} x$$

et, étant donné que

$$\frac{|c_{2n}|}{|c_{2n-1}|} < L \qquad L = \text{constante}$$

et, par conséquent :

$$\frac{|c_{2n}|}{|c_{2n-2}|} < L^2, \qquad \frac{|c_{2n+1}|}{|c_{2n-1}|} < L^2,$$

on a

$$\left|b - \frac{\alpha}{2n - 1}\right| \cdot \frac{|c_{2n}|}{|c_{2n-2}|} < L_1, \qquad \left|b - \frac{\alpha}{2n}\right| \cdot \frac{|c_{2n+1}|}{|c_{2n-1}|} < L_2$$

à partir d'une certaine valeur de n. On en conclut que les séries (7) sont absolument convergentes dans deux cercles γ_1, γ_2 ayant des rayons différents de zéro, et représentent respectivement deux fonctions $F(x)$ et $F'(x)$ holomorphes dans ces cercles. Appelons R_1 et R_2 les rayons des cercles γ_1 et γ_2. R_1 et R_2 sont respectivement les limites supérieures des suites :

$$\frac{1}{M_1 |c_2|}, \quad \frac{1}{|\sqrt{M_3 c_4}|}, \quad \dots \quad \frac{1}{|\sqrt[n]{M_{2n-1} c_{2n}}|}, \quad \dots,$$

$$\frac{1}{M_2 |c_3|}, \quad \frac{1}{|\sqrt{M_4 c_5}|}, \quad \dots \quad \frac{1}{|\sqrt[n]{M_{2n} c_{2n+1}}|}, \quad \dots.$$

Mais

$$M_{2n-1} = \prod_{n=1}^{n} \left[b - \frac{\alpha}{2n - 1}\right] < [|b| + |\alpha|]^n,$$

$$M_{2n} = \prod_{n=1}^{n} \left[b - \frac{\alpha}{2n}\right] < [|b| + |\alpha|]^n.$$

Donc :

$$\frac{1}{|\sqrt[n]{M_{2n-1} c_{2n}}|} > \frac{1}{|b| + |\alpha|} \cdot \frac{1}{|\sqrt[n]{c_{2n}}|},$$
$$(8) \qquad \frac{1}{|\sqrt[n]{M_{2n} c_{2n+1}}|} > \frac{1}{|b| + |\alpha|} \cdot \frac{1}{|\sqrt[n]{c_{2n+1}}|}.$$

Ceci pour toutes les valeurs entières et positives de n.

Si h est le plus petit nombre entier et positif qui satisfait à la relation :

$$h > |\sqrt[n]{c_n}|, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

on a :

$$|\sqrt[n]{c_{2n}}| < h^2, \qquad |\sqrt[n]{c_{2n+1}}| < h^{2+\frac{1}{n}} \leqq h^3$$

pour toutes les valeurs entières et positives de n. En combinant ces inégalités avec celles de (8) on a

$$R_1 \geqq \frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{|b| + |\alpha|}, \qquad R_2 \geqq \frac{1}{h^3} \cdot \frac{1}{|b| + |\alpha|}.$$

Supposons maintenant que le nombre $\frac{1}{|a|}$ satisfasse à l'inégalité :

$$\frac{1}{|a|} < \frac{1}{h^3} \cdot \frac{1}{|b| + |\alpha|}$$

c'est-à-dire, que $\frac{1}{|a|}$ représente un point régulier des fonctions $F(x)$ et $F'(x)$. Appelons $F_n\left(\frac{1}{|a|}\right)$, $F'_n\left(\frac{1}{|a|}\right)$ la somme des n premiers termes des séries (7) pour $x = \frac{1}{|a|}$. Après les inégalités (6) nous aurons :

$$|g_{2n}| \leqq \frac{|a|^{n-1}}{2n\,M_{2n}} F_n\left(\frac{1}{|a|}\right) < \frac{|a|^{n-1}}{[|b| - |\alpha|]^n} \cdot F\left(\frac{1}{|a|}\right),$$

$$|g_{2n+1}| \leqq \frac{|a|^n}{(2n+1)\,M_{2n+1}} F'_n\left(\frac{1}{|a|}\right) < \frac{|a|^n}{[|b| - |\alpha|]^{n+1}} \cdot F'\left(\frac{1}{|a|}\right).$$

D'où

$$(9) \qquad \begin{aligned} \left|\sqrt[2n]{g_{2n}}\right| &< \left|\sqrt{\frac{a}{|b| - |\alpha|}}\right| \cdot \left|\sqrt[2n]{\frac{1}{a} F\left(\frac{1}{|a|}\right)}\right|, \\ \left|\sqrt[2n+1]{g_{2n+1}}\right| &< \left|\sqrt{\frac{a}{|b| - |\alpha|}}\right| \cdot \left|\sqrt[2\;+]{\frac{1}{[a\,|b| - a\,|\alpha|]^{1/2}} \cdot F'\left(\frac{1}{|a|}\right)}\right|. \end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que la série

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n$$

qui satisfait formellement à l'équation (1) $[k = 2]$ converge absolument dans un cercle de rayon $r_2 \neq 0$.

Des relations (9) il résulte que :

$$r_2 \geqq \left|\sqrt{\frac{|b| - |\alpha|}{a}}\right|$$

d'après l'hypothèse que les fonctions $F(x)$ et $F'(x)$ sont holomorphes pour $x = \frac{1}{|a|}$.

Donc, on a :

II. « *Si les coefficients* a, b, α *satisfont aux inégalités*

$$|b| > |\alpha|$$

$$|a| > [|b| + |\alpha|]\,h^3$$

l'équation différentielle (1) $[k=2]$ *admet une intégrale holomorphe dans un cercle ayant un rayon*

$$r_2 \geqq \left| \sqrt{\frac{|b|-|\alpha|}{a}} \right|$$

qui s'annule pour $x = 0$ ».

1 b. Soit maintenant, $k=3$. Dans ce cas les coefficients $g_i (i = 1, 2, \ldots)$ sont donnés par les formules suivantes :

$$g_{3n-2} = (-1)^{n-1} \frac{a^{n-1}}{(3n-2)\mathrm{M}_{3n-2}} \cdot \sum_{n=1}^{n} (-1)^{n-1} m_{3n-5} c_{3n-3} \frac{1}{a^{n-1}},$$

$$g_{3n-1} = (-1)^{n-1} \frac{a^{n-1}}{(3n-1)m_{3n-1}} \cdot \sum_{n=1}^{n} (-1)^{n-1} m_{3n-4} c_{3n-2} \frac{1}{a^{n-1}},$$

$$g_{3n} = (-1)^{n-1} \frac{a^{n-1}}{3n\, m_{3n}} \cdot \sum_{n=1}^{n} (-1)^{n-1} m_{3n-3} c_{3n-1} \frac{1}{a^{n-1}}.$$

En appliquant la méthode précédente, on arrive au résultat suivant :

III. « *Si les coefficients* a, b, α *satisfont aux inégalités :*

$$|b| > |\alpha|$$
$$|a| > [|b| + |\alpha|]\, h^5$$

l'équation différentielle (1) $[k=3]$ *admet une intégrale holomorphe dans un cercle ayant un rayon*

$$r_3 \geqq \left| \sqrt[3]{\frac{|b|-|\alpha|}{a}} \right|$$

qui s'annule pour $x = 0$ ».

1 c. Dans le cas général où

$$\mathrm{P}(x) = x(ax^k + b)$$

on est conduit à conclure en se basant sur ce qui précède que :

« *Si les coefficients* a, b, α *satisfont aux inégalités :*

$$|b| > |\alpha|$$
$$|a| > [|b| + |\alpha|]\, h^{2k-1}$$

l'équation (1) *admet une intégrale holomorphe dans un cercle ayant un rayon*

$$r_k \geqq \left| \sqrt[k]{\frac{|b| - |\alpha|}{a}} \right|$$

qui s'annule pour $x = 0$ ». Il est entendu que h est toujours le plus petit nombre entier et positif qui satisfait à l'inégalité

$$h > |\sqrt{C_n}|, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

* * *

2. Nous allons examiner maintenant l'équation :

$$(1') \qquad P(x) \frac{dy}{dx} = \alpha y + x f(x) + kxy$$

où

$$P(x) = x(ax + b),$$

et où α, k sont des constantes. Si

$$(2') \qquad y = g_1 x + g_2 x^2 + \ldots + g_n x^n + \ldots$$

est la série qui satisfait formellement à l'équation (1'), on trouve que :

$$g_n = \frac{a^{n-1}}{n} \cdot \frac{q_{n-1}}{m_n} \sum_{n=1}^{n} \frac{m_{n-1}}{q_{n-1}} C_{n-1} \frac{1}{a^{n-1}}$$

où les $c_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$ sont les coefficients du développement en série de Taylor de la fonction $f(x)$, qui est supposée holomorphe au voisinage du point $x = 0$, et

$$q_n = \prod_{n=1}^{n} \left[\frac{k}{na} - 1 \right],$$

$$m_n = \prod_{n=1}^{n} \left[b - \frac{\alpha}{n} \right].$$

En posant :

$$|q_n| = Q_n, \qquad |m_n| = M_n$$

on a

$$(3') \qquad |g_n| \leqq \frac{|a|^{n-1}}{n} \cdot \frac{Q_{n-1}}{M_n} \sum \frac{M_{n-1}}{Q_{n-1}} |c_n| \cdot \frac{1}{|a|^{n-1}}.$$

Nous allons montrer que la série (2′) converge absolument dans un cercle ayant un rayon différent de zéro, quand les coefficients a, b, α et k satisfont certaines conditions. Pour cela, considérons la série :

$$(4') \qquad |c_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{Q_n} |c_n| x^n$$

qui converge absolument dans un cercle γ ayant un rayon $R \neq 0$. En effet, le rapport de la série (4′) est :

$$\frac{M_n}{M_{n-1}} \cdot \frac{Q_{n-1}}{Q_n} \cdot \frac{|c_n|}{|c_{n-1}|} x = \frac{\left|b - \frac{\alpha}{n}\right|}{\left|\frac{k}{na} - 1\right|} \cdot \frac{|c_n|}{|c_{n-1}|} x$$

et d'après l'hypothèse que la fonction $f(x)$ est holomorphe dans le voisinage de zéro, on voit que :

$$\frac{\left|b - \frac{\alpha}{n}\right|}{\left|\frac{k}{na} - 1\right|} \cdot \frac{|c_n|}{|c_{n-1}|} < L, \qquad L = c^{te}$$

à partir d'une certaine valeur de n.

Soit donc $F(x)$ la fonction que représente la série (4′), et qui, par conséquent, est holomorphe dans le cercle γ.

Considérons la suite :

$$\frac{1}{\frac{M_1}{Q_1}|c_1|}, \quad \frac{1}{\left|\sqrt{\frac{M_2}{Q_2} c_2}\right|}, \quad \ldots \quad \frac{1}{\left|\sqrt[n]{\frac{M_n}{Q_n} c_n}\right|}, \quad \ldots$$

dont la limite supérieure est le rayon R du cercle γ.

Si nous supposons que $|b| > |\alpha|$ et $|a| > |k|$ nous voyons que :

$$M_n < [|b| + |\alpha|]^n,$$

$$Q_n = \prod_{n=1}^{n} \left[\left|1 - \frac{k}{na}\right|\right] \geqq \prod_{n=1}^{n} \left[1 - \frac{1}{n}\left|\frac{k}{a}\right|\right] > \left[1 - \left|\frac{k}{a}\right|\right]^n.$$

Donc :

$$\frac{1}{\left|\sqrt[n]{\frac{M_{n-1}}{Q_{n-1}}c_n}\right|} > \frac{1-\left|\frac{k}{a}\right|}{|b|+|\alpha|}\cdot\frac{1}{|\sqrt[n]{C_n}|}$$

pour toutes les valeurs entières et positives de n. Ainsi, on conclut que :

$$R \geqq \frac{1-\left|\frac{k}{a}\right|}{|b|+|\alpha|}\cdot\frac{1}{h}$$

où h est le plus petit nombre entier et positif qui satisfait à l'inégalité :

$$h > |\sqrt[n]{c_n}|, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Soit maintenant que :

$$\frac{1}{|a|} < \frac{1}{h}\cdot\frac{1-\left|\frac{k}{a}\right|}{|b|+|\alpha|}$$

ou

$$|a| > [|b|+|\alpha|]\,h + |k|$$

c'est-à-dire que le nombre $\frac{1}{|a|}$ représente un point régulier de la fonction $F(x)$. Si nous appelons $F_n\left(\frac{1}{|a|}\right)$ la somme de n premiers termes de la série (4′) pour $x = \frac{1}{|a|}$, nous aurons en vertu de l'inégalité (3′)

$$|g_n| \leqq \frac{|a|^{n-1}}{n}\cdot\frac{Q_{n-1}}{M_n}F_n\left[\frac{1}{|a|}\right] < |a|^{n-1}\frac{1+\left|\frac{k}{a}\right|^{n-1}}{[|b|-|\alpha|]^n}F\left(\frac{1}{|a|}\right).$$

D'où :

(5′) $$|\sqrt[n]{g_n}| < \frac{|a|+|k|}{|b|-|\alpha|}\cdot\left|\sqrt[n]{[|a|+|k|]\,F\left(\frac{1}{|a|}\right)}\right|.$$

Donc, la série (2′) qui satisfait formellement à l'équation (1′) converge absolument dans un cercle ayant un rayon $r \neq 0$. De l'inégalité (5′) il résulte que le rayon r est :

$$r \geqq \frac{|b|-|\alpha|}{|a|+|k|}.$$

Ainsi on a le résultat suivant :

« *Si les coefficients* a, b, α, k *satisfont aux inégalités :*

$$\left|\frac{k}{a}\right| < 1 < \left|\frac{b}{\alpha}\right|$$

$$|a| - |k| > [|\alpha| + |b|]\, h$$

l'équation différentielle (1') *admet une intégrale holomorphe dans un cercle ayant un rayon*

$$r \geqq \frac{|b| - |\alpha|}{|a| + |k|}$$

qui s'annule pour $x = 0$ ».