Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Bertrand Gambier

Enveloppe d'une famille de quadriques à un paramètre

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 27 (1935), p. 201-240
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1935_3_27__201_0>

ENVELOPPE D'UNE FAMILLE DE QUADRIQUES

A UN PARAMÈTRE

Par M. Bertrand GAMBIER

1. Introduction. — Une note récente de M. Finikoff (C. R., 189, 1934, p. 764) *Sur les enveloppes de quadriques à deux paramètres, dans le cas spécial où les huit points caractéristiques se réduisent à deux comptant chacun pour quatre*, m'a conduit à étudier le cas où *la quadrique ne dépend que d'un paramètre*. La courbe caractéristique est alors une biquadratique; le lieu de cette courbe, supposée d'abord indécomposée, est une *surface* E *constituant à elle seule les deux nappes focales de la congruence rectiligne formée par les génératrices du premier système de nos* ∞^1 *quadriques et aussi de la congruence nouvelle relative au second système*. C'est un exemple curieux; on sait que définir une congruence rectiligne, non pas par ses rayons, mais par les surfaces focales, donne en général *plusieurs* congruences, séparables analytiquement ou non; ici on a *deux* congruences, non séparables si la famille comprend un cône véritable ou une conique véritable; si, au contraire, en cherchant les quadriques de la famille qui dégénèrent en cônes (point de vue ponctuel) ou en coniques (point de vue tangentiel) on n'obtient que des systèmes de deux plans ou deux points, les congruences se séparent analytiquement; mais de toutes façons, nous avons, ici, deux congruences formées par les tangentes doubles d'une certaine surface.

Nous nous bornons ici à deux cas de décomposition de la biquadratique caractéristique : d'abord deux coniques, puis quatre droites.

Si l'on a deux coniques C_1, C_2, chacune engendre une surface B_1 ou B_2 qui forment deux surfaces focales *séparées*, mais restant les mêmes qu'il s'agisse des génératrices de l'un ou l'autre système. *Chaque surface* (B_1) *ou* (B_2) *est lieu de* ∞^1 *coniques* (C) *telles que le long de chacune il y ait un cône circonscrit* (S) *du second degré;* on retrouve ainsi la définition, *qui se conserve par dualité*, dont M. Blutel est parti pour étudier ces surfaces dans sa thèse (Annales de l'École Normale Supérieure, t. 7, 1890, 62 pages). L'auteur a obtenu un grand nombre de propriétés géométriques élégantes, en particulier ce beau théorème que, *sur une telle surface les coniques sont divisées homographiquement par les courbes conjuguées*. La définition, qu'un hasard heureux nous a donnée, a l'avantage de nous suggérer de considérer en même temps que la quadrique $Q(\lambda)$, qui touche (B_1) suivant une conique dans le plan $P(\lambda)$, l'ensemble des quadriques $Q(\lambda) + F(\lambda)\, P^2(\lambda) = 0$, où F est une fonction *arbitraire* de λ; pour chaque choix de F, nous obtenons, pour enveloppe complète, d'abord (B_1), puis une seconde surface (B_2), *transformée* de (B_1); *nous obtiendrons ainsi, à partir d'une quadrique numérique, la surface* B *la plus générale, avec cinq fonctions arbitraires d'une variable*. Nous reprendrons ensuite la méthode de M. Blutel pour obtenir non seulement la surface, mais aussi sa représentation paramétrique explicite avec, comme lignes de coordonnées, les coniques et leurs conjuguées. Un échange de vues a été réalisé entre M. Blutel et moi et a conduit à la rédaction présente de ce travail.

Le cas de *quatre droites* conduit aux *congruences* W *à nappes focales réglées* déjà étudiées par Bianchi. Enfin la transformation de Sophus Lie conduit à une famille de cyclides de Dupin touchant leur enveloppe suivant deux biquadratiques; les congruences W conduisent de même à des *surfaces enveloppes de sphères transformées de Ribaucour l'une de l'autre*.

2. Décomposition de la caractéristique en deux coniques. — $Q(\lambda)$ étant une quadrique telle que l'intersection $Q = 0$, $\dfrac{dQ}{d\lambda} = 0$ dégénère en deux coniques, la somme $h(\lambda)Q + k(\lambda)\dfrac{dQ}{d\lambda}$, où h, k sont deux fonctions convenables de λ, est un produit de deux plans : le rapport $h : k$ est racine double du Hessien de $\mu Q + \dfrac{dQ}{d\lambda}$, *de sorte que* $h : k$ *est obtenu rationnellement à partir des coefficients de* Q *et de leurs dérivées; en déterminant la fonction* $\varphi(\lambda)$ *par la quadrature* $\varphi' : \varphi = h : k$, on voit que $\dfrac{d}{d\lambda}(\varphi Q)$ est un produit de deux facteurs linéaires; comme la quadrique Q est aussi bien déterminée par l'équation $\varphi Q = 0$ que par $Q = 0$, nous pouvons, sans restreindre, supposer que Q est déterminée par l'identité

$$(1) \qquad Q(\lambda) \equiv \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z + \alpha''' t)(\beta x + \beta' y + \beta'' z + \beta''' t)\, d\lambda + Q_0,$$

où Q_0 est une *quadrique numérique*, tandis que α, α', α'', α''', β, β' β'', β''' sont des fonctions arbitraires de λ, les α_i n'étant pas nulles toutes, non plus que les β_j; si $\alpha_i\beta_j \not\equiv 0$, on peut poser $d\mu \equiv \alpha_i\beta_j\, d\lambda$ et il reste *trois* quotients $\alpha_k : \alpha_i$, *trois* quotients $\beta_l : \beta_j$ qui représentent *six fonctions arbitraires de la variable* μ : tel est le nombre de fonctions arbitraires dont dépend la quadrique générale $Q(\mu)$ touchant son enveloppe suivant deux coniques; or, si la surface générale (B) de M. Blutel dépend de x fonctions d'un argument, la quadrique générale inscrite dans (B) le long de la conique λ dépend encore d'une fonction arbitraire de λ, de sorte que $x + 1 = 6$, $x = 5$; *la surface générale* (B) *dépend de cinq fonctions arbitraires d'un argument.* Dans les applications, il est souvent avantageux de garder les fonctions surabondantes α_i, β_j de la formule (1); avec des polynômes α_i, β_j en λ on a, par exemple, des types simples.

Je démontre tout de suite un théorème simple, que M. Blutel a donné dans son Mémoire, p. 35-36 (mais seulement dans le cas où les deux coniques sont confondues) : *Si les plans des deux coniques de contact de la quadrique* Q *avec son enveloppe passent tous par le même point fixe, quand* Q *varie, les sommets des cônes* S *circonscrits le long des coniques décrivent deux courbes planes dans le même plan; si les plans des deux coniques tournent autour d'une même droite, les sommets des cônes décrivent tous deux une même droite. Les réciproques, grâce à la dualité, sont vraies.*

Soit en effet $\alpha''' \equiv \beta''' \equiv 0$; le sommet du cône circonscrit à Q le long de *l'une ou l'autre* conique de contact est dans le plan polaire du point fixe $(0, 0, 0, 1)$ par rapport à Q, puisque le plan de la conique passe par ce point; or ce plan polaire est le même pour Q et Q_0 dans l'hypothèse faite. C. Q. F. D.

On remarquera d'ailleurs que, ω *étant ce point fixe,* Ω *le plan fixe correspondant, en chacun des deux points où la conique* λ *perce* Ω, *le plan tangent à* (B) *passe en* ω; cette remarque servira plus tard.

La seconde partie du théorème est évidente en prenant successivement deux points sur la droite commune aux plans : *dans ce cas les coniques et leurs conjuguées forment sur* (B), *et sur la surface* (B_1), *un système doublement de Kœnigs.*

On peut maintenant remarquer qu'une quadrique Q_0 *numérique*, coupée par les plans P tangents d'une développable Δ *arbitraire*, forme une surface (B) particulière. Nous allons passer aux surfaces (B_1) *transformées* de Q_0 au sens précisé dans l'Introduction, puis aux surfaces (B_2) *transformées* de B_1 et ainsi de suite, par le processus (φ, φ_1, φ_2, φ_3 fonctions arbitraires de λ),

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{llll}
B_1) & Q_1 \equiv Q_0 + \varphi P^2, & \dfrac{dQ_1}{d\lambda} \equiv P P_1, & P_1 \equiv \varphi' P + 2\varphi P', \\
B_2) & Q_2 \equiv Q_1 + \varphi_1 P_1^2, & \dfrac{dQ_2}{d\lambda} \equiv P_1 P_2, & P_2 \equiv \varphi_1' P_1 + 2\varphi_1 P_1' + P, \\
B_3) & Q_3 \equiv Q_2 + \varphi_2 P_2^2, & \dfrac{dQ_3}{d\lambda} \equiv P_2 P_3, & P_3 \equiv \varphi_2' P_2 + 2\varphi_2 P_2' + P_1, \\
B_4) & Q_4 \equiv Q_3 + \varphi_3 P_3^2, & \dfrac{dQ_4}{d\lambda} \equiv P_3 P_4, & P_4 \equiv \varphi_3' P_3 + 2\varphi_3 P_3' + P_2.
\end{array}\right.$$

La surface B_i est une fraction de l'enveloppe de Q_i et, plus précisément, le lieu de la conique $Q_i = 0$, $P_i = 0$.

Nous allons montrer que B_3 est la *surface générale de Blutel, que* B_3, B_4 *est le couple général de deux surfaces de Blutel transformées l'une de l'autre, ou, ce qui revient au même, que* Q_4 *est la quadrique générale touchant son enveloppe suivant deux coniques.* On a d'abord une forte présomption, si on écrit $P \equiv x + \lambda y + zf_1(\lambda) + tf_2(\lambda)$, où $f_1(\lambda)$ et $f_2(\lambda)$ sont deux fonctions arbitraires de λ, de sorte que B_3 dépend de cinq fonctions de λ, tandis que Q_4 et (B_3, B_4) dépendent de six fonctions de λ (¹).

Pour démontrer en toute rigueur ce point important remarquons que l'on a, d'après (2),

$$(3)\qquad \begin{cases} Q_4 - Q_0 \equiv \varphi P^2 + \varphi_1 P_1^2 + \varphi_2 P_2^2 + \varphi_3 P^2, \\ Q_3 - Q_0 \equiv \varphi P^2 + \varphi_1 P_1^2 + \varphi_2 P_2^2, \end{cases}$$

et nous reconstituerons ces formules pour une surface B donnée *a priori*. Nous supposons, *connue par un procédé quelconque*, une surface B; nous savons *marquer sur elle les coniques génératrices et nous donnons à chacune un numéro*, λ, *variant d'une façon continue avec la conique;* le long de la conique $C(\lambda)$ nous choisissons *une quadrique* $Q(\lambda)$ *parmi celles qui sont inscrites à* B *le long de* $C(\lambda)$.

Nous pouvons, par le procédé déjà signalé, grâce à une quadrature, *normaliser* le premier membre de Q de sorte que $\dfrac{dQ}{d\lambda} \equiv P_3 P_4$, où $P_3(\lambda)$ désigne le plan de la conique $C(\lambda)$, et $P_4(\lambda)$ le plan de la seconde conique caractéristique de Q; P_3 et P_4 ne sont pas complètement déterminés, car on peut multiplier P_3 par un facteur arbitraire fonction de λ, et diviser P_4 par ce même facteur; la suite nous apprendra s'il y a lieu de choisir ce facteur. *Choisissons maintenant un polynôme numérique, du second degré et homogène,* $Q_0(x, y, z, t)$ *d'ailleurs arbitraire et considérons la quadrique auxiliaire* $Q - Q_0 \equiv \overline{Q}$; elle enveloppe aussi une surface $\overline{B}$, (se réduisant à B pour Q_0 identiquement nul), lieu d'une conique $\overline{C}(\lambda)$ située dans le plan P_3, plus une surface $\overline{B}'$, qui ne nous sert pas, au moins pour l'instant. Considérons maintenant le cône $\overline{S}(\lambda)$ circonscrit à $\overline{Q}(\lambda)$ le long de $\overline{C}(\lambda)$; ce cône $\overline{S}$ a *une caractéristique, de degré 4, contenant* $C(\lambda)$ *et aussi le sommet* $\overline{s}$ *du cône;* cette caractéristique se décompose en $\overline{C}(\lambda)$ et une conique située sur $\overline{S}(\lambda)$, passant en $\overline{s}$; donc cette conique est constituée par l'ensemble des deux génératrices de contact de $\overline{S}(\lambda)$ avec les plans tangents qui lui sont menés par la tangente en $\overline{s}$ à la courbe $\overline{\Gamma}$ lieu de $\overline{s}$, *que nous supposons d'abord être une courbe gauche;* le plan $P_2(\lambda)$ de ces deux génératrices est donc connu, ainsi que le plan $P(\lambda)$ osculateur à $\overline{\Gamma}$ en $\overline{s}$; nous appelons $P_1(\lambda)$ le plan conjugué de $P(\lambda)$ par rapport aux deux plans

(¹) Dans les applications de la théorie, il peut être commode de laisser P sous la forme $xA_1(\lambda) + yA_2(\lambda) + zA_3(\lambda) + tA_4(\lambda) = 0$, avec les fonctions surabondantes A_1, A_2, A_3, A_4.

tangents menés à $\overline{S}(\lambda)$ par la tangente en $\bar{s}$ à $\bar{\Gamma}$; les trois plans P, P_1, P_2 forment donc un trièdre conjugué par rapport à $\overline{S}$ et nous pouvons écrire

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \overline{S}(\lambda) &\equiv \varphi P^2 + \varphi_1 P_1^2 + \varphi_2 P_2^2, \\ \overline{Q}(\lambda) &\equiv \varphi P^2 + \varphi_1 P_1^2 + \varphi_2 P_2^2 + \varphi_3 P_3^2, \end{aligned} \right.$$

où φ, φ_1, φ_2, φ_3 sont certaines fonctions de λ, telles que, sans changer le premier membre de l'équation de $\overline{S}$, φ_i soit multipliée par $1 : f_i^2(\lambda)$ si P_i, premier membre de l'équation du plan connu P_i est remplacé par $P_i f_i$; d'autre part, on peut, en multipliant le premier membre de l'équation de $\overline{S}$ ou de $\overline{Q}$ par un facteur arbitraire fonction de λ, donner à la première fonction φ *une détermination totalement arbitraire*. Mais alors, puisque P_1 contient la tangente à $\bar{\Gamma}$ en $\bar{s}$, il existe une identité $lP_1 \equiv hP + kP'$, où h, k, l sont trois fonctions de λ dont les rapports seuls sont connus; nous calculons la fonction φ précisément par la quadrature $\varphi' : 2\varphi = h : k$ de sorte que nous pouvons, sans restreindre, écrire

$$(5) \qquad P_1 \equiv \varphi' P + 2\varphi P',$$

ce qui fixe le premier membre de l'équation du plan P_1, premier membre jusqu'ici connu à un facteur près dépendant de λ. Cela posé, la caractéristique du cône $\overline{S}(\lambda)$ dégénère en la section de ce cône par le plan P_2, section composée de deux génératrices, et en la conique $\overline{C}$ située dans le plan P_3. Il en résulte que le système

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\varphi P^2 + \varphi_1 P_1^2 = 0, \qquad P_2 = 0, \\ &P_1 [P + \varphi_1' P_1 + 2\varphi_1 P_1'] = 0 \end{aligned} \right.$$

est vérifié par les deux génératrices citées à l'instant sur $\overline{S}$; comme elles ne sont pas dans le plan P_1, chacune annule le facteur $P + \varphi_1' P_1 + 2\varphi_1 P_1'$, qui représente donc, à un facteur près fonction de λ, le plan P_2; nous pouvons, sans restreindre, prendre

$$(7) \qquad P_2 \equiv P + \varphi_1' P_1 + 2\varphi_1 P_1', \qquad \frac{d}{d\lambda}(\varphi P^2 + \varphi_1 P_1^2) \equiv P_1 P_2.$$

Mais alors on a

$$\frac{d}{d\lambda}[(\varphi P^2 + \varphi_1 P_1^2) + \varphi_2 P_2^2] \equiv P_2 [P_1 + \varphi_2' P_2 + 2\varphi_2 P_2'],$$

et, dans le même esprit que précédemment, nous écrivons

$$(8) \qquad P_3 \equiv P_1 + \varphi_2' P_2 + 2\varphi_2 P_2'.$$

Nous avons reconstitué toutes les formules (2) *par voie géométrique et montré que la quadrique générale* $Q(\lambda)$ *est représentée par l'identité*

$$Q \equiv Q_0 + \varphi P^2 + \varphi_1 P_1^2 + \varphi_2 P_2^2 + \varphi_3 P_3^2 = 0. \tag{9}$$

B est engendrée par la conique section de Q par le plan P_3, ou si on préfère par la conique, section par le plan P_3, de la quadrique

$$Q_0 + \varphi P^2 + \varphi_1 P_1^2 + \varphi_2 P_2^2 = 0, \tag{10}$$

dont l'enveloppe comprend deux nappes dont l'une est $B \equiv B_3$ et l'autre la surface B_2 indiquée aux formules (2) : *chaque choix du polynôme* Q_0 *donne donc une représentation différente de la surface* B; le choix particulier $Q_0 \equiv 0$ donne la représentation, que nous appellerons *canonique*, de la surface B; l'équation (10) dans ce cas se réduit à $\varphi P^2 + \varphi_1 P_1^2 + \varphi_2 P_2^2 = 0$ et donne le cône circonscrit à B le long de la conique $C(\lambda)$; en même temps $P = 0$ est le plan osculateur en s à la courbe Γ lieu du sommet du cône circonscrit à B le long de $C(\lambda)$; quand Q_0 varie, la réduction (9) ou (10) varie nécessairement, car cette réduction est la réduction *canonique pour la surface* $\overline{B}$ *introduite*, morceau de l'enveloppe de la quadrique $\overline{Q} \equiv Q - Q_0 = 0$; la courbe $\overline{\Gamma}(\lambda)$ est le lieu du pôle, relativement à $\overline{Q}$, du plan $P_3(\lambda)$; or, pour $\lambda = \lambda_0$, la quadrique $Q(\lambda_0) - Q_0 = 0$ peut coïncider avec une quadrique *quelconque* donnée à l'avance, à condition de choisir Q_0 convenablement, de sorte que le point $\bar{s}(\lambda_0)$ peut alors coïncider avec un point *quelconque* donné à l'avance et cette remarque simple suffit pour montrer que la courbe $\overline{\Gamma}(\lambda)$ varie avec Q_0; la réduction (9) ou (10) donne donc des fonctions P, P_1, P_2, P_3 différentes quand Q_0 varie; *la variation de* Q_0 *donne* ∞^9 *représentations différentes* (en négligeant un facteur numérique de proportionnalité).

Nous avons réservé le cas où la courbe $\overline{\Gamma}$ serait plane; nous pouvons nous borner d'après ce qui précède à une représentation canonique (puisque toute représentation non canonique d'une surface B est canonique pour une autre $\overline{B}$ convenablement choisie). Donc nous supposons que les sommets s des cônes circonscrits à B engendrent une courbe plane Γ; nous définissons alors encore géométriquement les divers plans : P (celui de Γ), P_1, puis P_2 de la même façon relativement au cône S dont l'équation est de la forme

$$P^2 + \varphi_1 P_1^2 + \varphi_2 P_2^2 = 0, \tag{11}$$

P étant cette fois *numérique* en λ; le système

$$\left\{\begin{aligned} &P^2 + \varphi_1 P_1^2 + \varphi_2 P_2^2 = 0, \qquad P_2 = 0, \\ &\varphi_1' P_1^2 + 2\varphi_1 P_1 P_1' + \varphi_2' P_2^2 + 2\varphi_2 P_2 P_2' = 0, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

ou plus simplement

$$(12') \qquad P^2 + \varphi_1 P_1^2 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad P_1(\varphi_1' P_1 + 2\varphi_1 P_1') = 0.$$

doit être vérifié par les deux génératrices découpées sur S par le plan P_2, de sorte que l'on peut supposer

$$(13) \qquad P_2 \equiv \varphi_1' P_1 + 2\varphi_1 P_1'.$$

On a donc la représentation de cette surface B actuelle comme lieu de la conique

$$(14) \qquad P^2 + \varphi_1 P_1^2 + \varphi_2 P_2^2 = 0, \qquad P_3 = 0,$$

avec le système

$$(15) \qquad P_2 \equiv \varphi_1' P_1 + 2\varphi_1 P_1', \qquad P_3 \equiv P_1 + \varphi_2' P_2 + 2\varphi_2 P_2',$$

étant bien entendu que P est une forme linéaire *indépendante* de λ; mais alors si nous reprenons nos formules (2) en y *remplaçant* Q_0 *par le carré d'une forme linéaire numérique,* la surface B_2 devient celle que nous venons de déterminer, avec un changement de notations qui est un simple décalage d'indices, les quantités Q_0, P, P_1, P_2 des formules (2) se trouvant remplacées par P^2, P_1, P_2, P_3 respectivement.

Nous pouvons donner *synthétiquement* le résultat pour le cas où la courbe Γ est *rectiligne* : on trouve une surface qui est la surface B_1 des formules (2), où l'on suppose Q_0 décomposé en un produit de deux facteurs linéaires indépendants de λ.

Ce qui précède montre aussi que les *dix quadratures* imposées par l'équation (1) se font automatiquement en choisissant pour $\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z + \alpha''' t$ et $\beta x + \beta' y + \beta'' z + \beta''' t$ les polynômes P_3 et P_4 obtenus par les formules (2); c'est le moyen le plus général de faire disparaître ces quadratures. Une solution plus particulière correspond à P_2 et P_3, ou encore P_1 et P_2, ou encore P, P_1.

Il est clair aussi qu'une surface *quelconque n'est pas surface* B; la surface B générale s'obtient par élimination de λ entre les équations

$$(16) \qquad \varphi P^2 + \varphi_1 P_1^2 + \varphi_2 P_2^2 = 0, \qquad P_3 = 0$$

déjà obtenues; par dérivations poussées assez loin, on peut éliminer les fonctions arbitraires de λ et λ lui-même, de façon à obtenir une ou plusieurs équations aux dérivées partielles entre z (fonction) et x, y (variables indépendantes). Il se peut que les surfaces qui admettent une représentation (*non canonique*) de l'un des types

$$
(17) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} Q_0 + \varphi P^2 + \varphi_1 P_1^2 = 0, & P_2 = 0, \\ Q_0 + \varphi P^2 = 0, & P_1 = 0, \end{array} \right.
$$

conduisent à un système aux dérivées partielles (contenant ou non les coefficients de Q_0) plus simple.

Il existe certaines surfaces qui sont *surfaces* B *de plusieurs façons différentes* : par exemple, *en faisant tourner une conique autour d'un axe arbitraire de son plan*, on obtient une surface doublement B, les méridiens et les parallèles donnant le double mode et formant d'ailleurs un système conjugué; *les cyclides de Dupin et leurs transformées homographiques* (qui comprennent l'exemple précédent) donnent aussi des surfaces doublement B; la surface réglée du troisième degré est un autre exemple. Nous verrons que la *surface* $xyz = 1$ *est triplement surface* B (avec quadriques osculatrices dans chaque série).

Voici maintenant une remarque curieuse relative à un couple de deux surfaces B, B′ formant les deux nappes de l'enveloppe d'une quadrique Q. La première surface B naît d'une quadrique Q_0 *numérique*, mais *quelconque*, par trois transformations; la seconde retourne à une quadrique Q'_0 analogue, par trois transformations; de la sorte, on passe de Q_0 à Q'_0 (ou de Q'_0 à Q_0) par sept transformations suivant le schéma ci-dessous, en prenant les deux plans P_3, P_4 (indépendants de Q_0 et Q'_0) suivant lesquels la quadrique Q, $Q - Q_0$, $Q - Q'_0$ se raccorde à son enveloppe

$$
(18) \left\{ \begin{array}{llll}
0 = Q_0 + \varphi P^2 + \varphi_1 P_1^2 + \varphi_2 P_2^2 + \varphi_3 P_3^2 - \varphi_4 P_4^2 - \varphi_5 P_5^2 - \varphi_6 P_6^2 - \varphi_7 P_7^2 - Q'_0, & & & \\
P_1 = & \varphi' P + 2\varphi P' + 0, & P_6 = & \varphi'_7 P_7 + 2\varphi_7 P'_7 + 0, \\
P_2 = & \varphi'_1 P_1 + 2\varphi_1 P'_1 + P, & P_5 = & \varphi'_6 P_6 + 2\varphi_6 P'_6 + P_7, \\
P_3 = & \varphi'_2 P_2 + 2\varphi_2 P'_2 + P_1, & P_4 = & \varphi'_5 P_5 + 2\varphi_5 P'_5 + P_6, \\
P_4 = & \varphi'_3 P_3 + 2\varphi_3 P'_3 + P_2, & P_3 = & \varphi'_4 P_4 + 2\varphi_4 P'_4 + P_5, \\
P_5 = & -\varphi'_4 P_4 - 2\varphi_4 P'_4 + P_3, & P_2 = & -\varphi'_3 P_3 - 2\varphi_3 P'_3 + P_4, \\
P_6 = & -\varphi'_5 P_5 - 2\varphi_5 P'_5 + P_4, & P_1 = & -\varphi'_2 P_2 - 2\varphi_2 P'_2 + P_3, \\
P_7 = & -\varphi'_6 P_6 - 2\varphi_6 P'_6 + P_5, & P = & -\varphi'_1 P_1 - 2\varphi_1 P'_1 + P_2, \\
0 = & -\varphi'_7 P_7 - 2\varphi_7 P'_7 + P_6, & 0 = & -\varphi' P - 2\varphi P' + P_1,
\end{array} \right.
$$

et il y a bien cohérence entre les équations des deux colonnes en regard.

Jusqu'ici nous avons supposé que les deux plans $\Pi \equiv \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z + \alpha''' t$, $\Pi_1 \equiv \beta x + \beta' y + \beta'' z + \beta''' t$ qui figurent dans la formule (1) sont *quelconques*, donc distincts; *ils peuvent se confondre; la quadrique* Q *est alors osculatrice à la surface* B *le long de* C; la quadrique Q et la surface B dépendent alors de *trois* fonctions arbitraires d'une variable [si α''' par exemple est différent de zéro, on prend

$\mu = \int \alpha''' d\lambda$ pour variable au lieu de λ et l'on a les trois fonctions $\alpha : \alpha'''$, $\alpha' : \alpha'''$, $\alpha'' : \alpha'''$ de l'argument μ]. *Il n'est pas possible, dans ce cas, d'exprimer* α, α', α'', α''' *au moyen de fonctions auxiliaires de* λ *de sorte que les quadratures données par* (1) *se fassent en termes finis.*

Il y a lieu d'étudier maintenant les points communs à trois quadriques consécutives (ou les plans tangents communs). Nous avons, pour les points, à résoudre le système

$$(19) \qquad Q = 0, \qquad \Pi\Pi' = 0, \qquad \Pi \frac{d\Pi'}{d\lambda} + \Pi' \frac{d\Pi}{d\lambda} = 0.$$

Or les deux dernières équations (en supposant Π' et Π distincts) fournissent *quatre* droites, dont *deux* sont confondues avec la droite $\Pi = 0$ $\Pi' = 0$, *tandis que les deux autres sont les caractéristiques des plans* Π *et* Π'. *La surface* B, *lieu de la conique* $C(Q = 0, \Pi = 0)$ *et la surface transformée* B_1, *lieu de la conique* $C_1(Q = 0, \Pi' = 0)$ *sont osculatrices entre elles tout le long des deux courbes engendrées par les deux points communs* J, J' *à* C *et* C_1 (1)*; la courbe engendrée par les deux points* K *et* K' *où* C *est coupée par la caractéristique de son plan est enveloppe de* C *et (en général) arête de rebroussement de* B*; dualistiquement, les deux points déjà cités* $(Q = 0, P = 0, R = 0)$ *fournissent deux plans tangents communs aux trois quadriques infiniment voisines* Q, Q', Q'', mais les deux points où C touche son enveloppe donnent des plans tangents différents pour Q et Q' [tout au moins si le plan Π' ne contient pas la droite $\Pi = 0$, $\frac{d\Pi}{d\lambda} = 0$; cette dernière circonstance caractérise les surfaees B admettant le long de chaque conique une quadrique osculatrice]; *pour avoir les autres plans tangents communs à* Q, Q', Q'', *nous prenons la tangente st en s à la courbe* Γ *lieu du sommet du cône* S *circonscrit le long de* C, *puis nous menons de st les plans tangents au cône* S*; la développable* Δ *engendrée par l'un de ces plans est, pour la surface* B, *l'élément dualistique de l'arête de rebroussement indiquée précédemment* (si d'un point quelconque d'un plan tangent à Δ on mène le cône circonscrit à B, ce cône touche ce plan suivant une génératrice *inflexionnelle*); chacun des plans tangents à Δ est tangent à Q, Q', Q'' en des points différents; les points de contact avec Q sont deux points H, H' de la conique C; la conique C_1, naturellement, fournirait les constructions analogues. Sur la surface B, les deux courbes décrites par les points J, J' communs à C et C_1 ne sont pas intéressantes, car on passe de B à B_1 par une transformation dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable et l'on peut se donner *arbitrairement* la courbe décrite

(1) Cette propriété tient à ce fait, à peu près évident, mais qui sera précisé plus bas, que la quadrique Q est osculatrice à B et B_1 aux points J, J' où se coupent les deux coniques caractéristiques de Q.

sur B par l'un, J, de ces points, courbe qui est une ligne d'osculation pour B et B_1; la donnée de cette courbe détermine la fonction arbitraire en jeu.

Au contraire *les courbes décrites sur* B *par* (H, H') *et* (K, K') *sont fondamentales pour* B*;* K *et* K' *donnent l'arête de rebroussement, et* H, H', *comme nous l'avons vu, des plans de contact de* B *avec la développable singulière* (*correspondant dualistiquement à une arête de rebroussement*). Nous avons respecté les notations de M. Blutel (p. 5, 6, 33).

3. Surfaces B osculatrices aux quadriques enveloppées. — Une question importante est à traiter maintenant : quand est-il possible de trouver, dans les quadriques du faisceau $Q_1 \equiv Q + F(\lambda)\Pi^2 = 0$, une quadrique *toujours* osculatrice à B le long de la conique $C(\lambda)$? On a

$$\frac{dQ_1}{d\lambda} \equiv \Pi\left(\Pi' + F'\Pi + 2F\frac{d\Pi}{d\lambda}\right). \tag{20}$$

Le plan de la seconde conique fournie par Q_1 *ne peut coïncider avec* Π *que si l'on a*

$$\Pi' \equiv (G - F')\Pi - 2F\frac{d\Pi}{d\lambda}, \tag{21}$$

où $G(\lambda)$ *est une fonction de* λ, *autrement dit que si le plan* Π' *relatif à* Q *contient la caractéristique du plan* Π. Mais alors *les points appelés précédemment* (J, J') *définis par* $\Pi = 0$, $\Pi' = 0$, $Q = 0$ *coïncident avec les points* K, K' *où la conique* C *touche son enveloppe;* nous avons déjà remarqué que la définition des surfaces B est dualistique; au *plan d'une conique de raccord* correspond le *sommet d'un cône circonscrit*; or le phénomène de l'osculation de la quadrique Q_1 avec B est aussi dualistique; donc la condition *nécessaire et suffisante*, obtenue par voie ponctuelle, qui précède, est accompagnée automatiquement de la *condition corrélative, elle aussi nécessaire et suffisante*, obtenue par voie tangentielle : *la droite* ss_1 *joignant les sommets des cônes circonscrits à* B *suivant* C *et* C_1 *doit être tangente en* s *à la courbe* Γ *lieu de* s [1]. Mais alors, fait corrélatif de celui déjà indiqué, *les plans*

---

[1] Je signale une difficulté pour les géomètres qui abusent des infiniment petits : par rapport à la quadrique Q, les points s, s_1 sont les pôles des plans C, C_1; le plan infiniment voisin de Π a son pôle, *par rapport à* Q, infiniment voisin dans le cas actuel de s *sur la droite* ss_1; mais le sommet du cône relatif à la conique infiniment voisine de C est le pôle du plan précédent, *non pas par rapport à* Q, *mais par rapport à la quadrique infiniment voisine de* Q; de la sorte, on est obligé de creuser davantage pour constater que, dans le cas présent, *la droite* ss_1 *coïncide avec la tangente à* Γ *en* s.

tangents en J, J′ *doivent coïncider avec les plans tangents au cône* S *et au cône infiniment voisin,* de sorte que les génératrices sJ, sJ' coïncident avec les droites SH, SH′ : autrement dit H, H′ coïncident, comme K et K′, avec J et J′; *donc* H *et* H′ *coïncident avec le couple* K, K′; *réciproquement si* (H, H′) *coïncide avec le couple* (K, K′) *il y a une quadrique* Q_1 *systématiquement osculatrice à* B *le long de la conique correspondante.*

Rendons-nous compte d'ailleurs de la situation respective, dans ce cas, de Q et des quadriques voisines. On étudie le système

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} & Q=0, \qquad \Pi\left(\frac{d\Pi}{d\lambda}+h\Pi\right)=0,\\ & \frac{d\Pi}{d\lambda}\left(\frac{d\Pi}{d\lambda}+h\Pi\right)+\Pi\left(\frac{d^2\Pi}{d\lambda^2}+h\frac{d\Pi}{d\lambda}+\frac{dh}{d\lambda}\Pi\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Le système des deux dernières équations se décompose en

$$(23)\qquad \Pi=0, \qquad \left(\frac{d\Pi}{d\lambda}\right)^2=0,$$

puis

$$(24)\qquad \frac{d\Pi}{d\lambda}+h\Pi=0, \qquad \Pi\left(\frac{d^2\Pi}{d\lambda^2}+h\frac{d\Pi}{d\lambda}+\frac{dh}{d\lambda}\Pi\right)=0,$$

de la sorte on trouve un ensemble de huit solutions communes aux équations (22) comprenant *trois fois* chacun des points K, K′ $\left(Q=0,\ \Pi=0,\ \frac{d\Pi}{d\lambda}=0\right)$, les deux autres solutions correspondant aux points limites de la conique C_1; c'est bien d'accord avec les explications qui précèdent, puisque, dans le cas général, on a deux points J, J′ comptant chacun pour *deux*, deux points K, K′ comptant pour *un* chacun et que, cette fois, K est venu se confondre avec J et K′ avec J′. En dérivant une fois de plus, on ne trouve plus K, K′ sur la nouvelle quadrique voisine (à moins que le plan Π ne pivote autour d'une droite fixe Δ, auquel cas les quadriques Q passent toutes par deux points fixes de Δ); le contact de Q avec son enveloppe est encore d'ordre 2 en ces points J, J′ (confondus avec K et K′).

Si maintenant nous raisonnons dans le cas précis de la quadrique *osculatrice* à B $\left(\text{nous l'appelons } Q \text{ pour ne pas compliquer les notations, et l'on a } \frac{dQ}{d\lambda}\equiv\Pi^2\right)$, nous considérons le système

$$Q=0, \qquad \Pi^2=0, \qquad \Pi\frac{d\Pi}{d\lambda}=0, \qquad \Pi\frac{d^2\Pi}{d\lambda^2}+\left(\frac{d\Pi}{d\lambda}\right)^2=0.$$
$$\Pi\frac{d^3\Pi}{d\lambda^3}+3\frac{d\Pi}{d\lambda}\frac{d^2\Pi}{d\lambda^2}=0.$$

On voit alors que la quadrique $Q = 0$ se raccorde avec la quadrique infiniment voisine $Q + \varepsilon \frac{dQ}{d\lambda} = 0$ suivant la conique $C(Q = 0,\ \Pi = 0)$, que cette conique appartient encore à la quadrique suivante $Q + \varepsilon \frac{dQ}{d\lambda} + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\frac{d^2Q}{d\lambda^2} = 0$, cette dernière quadrique étant tangente aux deux précédentes aux points K, K′ où C touche son enveloppe $\left(Q = 0,\ \Pi = 0\ \frac{d\Pi}{d\lambda} = 0\right)$ et que K, K′ appartiennent encore à la quadrique suivante $Q + \varepsilon \frac{dQ}{d\lambda} + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\frac{d^2Q}{d\lambda^2} + \frac{\varepsilon^3}{6}\frac{d^3Q}{d\lambda^3} = 0$ où nous avons supposé ε infiniment petit; mais la quadrique suivante (sauf exception déjà indiquée, et pour la même raison) ne contient plus K ni K′. Cette fois le contact de Q avec B est *d'ordre* 2 en tous les points de la conique C, mais *d'ordre* 4 aux points J, J′ (confondus avec K, K′ et H, H′).

La remarque la plus importante à faire sur le cas des quadriques $Q(\lambda)$ osculatrices à leur enveloppe B est que *les génératrices de ces* ∞^1 *quadriques* Q, *dans l'un ou l'autre système, forment les deux congruences des tangentes asymptotiques de la surface* B : c'est évident d'après ce qui a été dit plus haut : le couple B, B_1 de deux surfaces transformées, enveloppes d'une même quadrique $Q(\lambda)$, forme en effet l'ensemble des surfaces focales des deux congruences des génératrices des quadriques $Q(\lambda)$; ici les deux nappes B, B_1 sont confondues en une seule. Une autre raison est que, si deux surfaces sont osculatrices en un point, elles y ont mêmes tangentes asymptotiques. Les surfaces B, osculées par ∞^1 quadriques, que nous venons d'étudier, sont celles que M. Blutel appelle dans sa thèse, *surfaces du premier genre* (p. 33); [les surfaces indiquées page 34 d'après les travaux de Demartres constituent un cas *particulier* des surfaces B osculatrices à ∞^1 quadriques; le cas de Demartres (cas où le plan Π pivote autour d'une droite fixe) est le seul où, avec la représentation paramétrique canonique, la recherche des lignes asymptotiques (ramenée à deux équations de Riccati) n'introduit que des polynômes du second degré à coefficients constants]; page 37, les deux quadriques citées par M. Blutel comme lieux des tangentes asymptotiques aux divers points d'une conique sont confondues en une seule, du type hyperboloïde à une nappe ou paraboloïde hyperbolique, si les tangentes asymptotiques sont réelles, du type ellipsoïde, hyperboloïde à deux nappes ou paraboloïde elliptique si les deux tangentes asymptotiques sont imaginaires conjuguées; le fait remarquable qui découle de là est que les tangentes asymptotiques sont toujours réelles ou toujours imaginaires le long d'une même conique. Une *surface de révolution arbitraire* rentre évidemment dans la catégorie des surfaces spéciales qui viennent d'être étudiées; en chaque point d'un même parallèle, il y a une quadrique de révolution osculatrice; la remarque qui vient d'être faite prouve qu'en faisant tourner une conique autour d'une droite de son plan, on obtient une surface B de deux façons différentes, mais que *relativement aux méridiens, il n'y a* *jamais de quadrique osculatrice le long d'un méridien (excepté le cas banal où l'axe de révolution est axe de la conique).*

J'ai dans les paragraphes 2 et 3 emprunté la notion des points (H, H'), (K, K') au travail de M. Blutel, me contentant de développer davantage leur étude et de préciser certains points.

4. Théorème de M. Blutel sur les conjuguées des coniques et généralisation. Représentation canonique. — M. Blutel a démontré les beaux résultats suivants :

a) *Sur les surfaces* (B), *les coniques sont divisées homographiquement par leurs conjuguées.*

b) *Si une surface possède* ∞^1 *coniques partagées homographiquement par leurs conjuguées, la surface est ou surface* B, *ou surface engendrée par une conique ayant pour enveloppe (qu'elle ne touche qu'en un point) l'arête de rebroussement de la développable engendrée par le plan de la conique.*

Pour cette partie (b), je renvoie le lecteur à l'ingénieuse démonstration de M. Blutel qui établit d'abord (p. 9-13) que la développable circonscrite à la surface le long de chaque conique C n'est plus que de classe 3 au plus (au lieu de classe 4 comme dans le cas général) et cela exige que la conique C ait une enveloppe E qu'elle touche en un point a; on choisit le paramètre μ, au moyen duquel les coordonnées d'un point de C s'expriment rationnellement, de façon à ce que $\mu = 0$, $\mu = i$ et $\mu = -i$ donnent respectivement le point a, et les points à l'infini de C; de la sorte les coordonnées homogènes du point courant de C peuvent être prises égales à

$$(1) \quad x_0 + 2ux'_0\mu + u_1\mu^2, \qquad y_0 + 2uy'_0\mu + u_2\mu^2, \qquad z_0 + 2uz'_0\mu + u_3\mu^2, \qquad 1 + \mu^2,$$

où x_0, y_0, z_0, u, u_1, u_2, u_3 sont des fonctions du paramètre λ qui fait varier la conique; x'_0, y'_0, z'_0 sont les dérivées de x_0, y_0, z_0; $(x_0, y_0, z_0, 1)$ sont les coordonnées du point a et les dérivées partielles, par rapport à μ, des expressions (1) se réduisent pour $\mu = 0$ à $(2ux'_0, 2uy'_0, 2uz'_0, 0)$ de sorte que, *si u n'est pas nulle identiquement,* on vérifie bien que le lieu du point $(x_0, y_0, z_0, 1)$ est l'enveloppe de la conique variable. Cela posé, l'équation des conjuguées des coniques C est

$$(2) \qquad B\,d\mu - A\,d\lambda = 0,$$

avec [1]

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &B \equiv fu\mu - 2cu^2, && A \equiv -au^2\mu^3 + b\mu^2 + (au^2 - f)\mu + cu,\\ &a = -\begin{vmatrix} x'_0 & x''_0 & u'_1 \\ y'_0 & y''_0 & u'_2 \\ z'_0 & z''_0 & u'_3 \end{vmatrix}, && b = \begin{vmatrix} x_0 - u_1 & u'x'_0 + ux''_0 & u'_1 \\ y_0 - u_2 & u'y'_0 + uy''_0 & u'_2 \\ z_0 - u_3 & u'z'_0 + uz''_0 & u'_3 \end{vmatrix},\\ &c = \begin{vmatrix} x_0 - u_1 & x'_0 & x''_0 \\ y_0 - u_2 & y'_0 & y''_0 \\ z_0 - u_3 & z'_0 & z''_0 \end{vmatrix}, && f = -\begin{vmatrix} x_0 - u_1 & x'_0 & u'_1 \\ y_0 - u_2 & y'_0 & u'_2 \\ z_0 - u_3 & z'_0 & u'_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Cela posé l'équation (2) ne se réduit à une équation de Riccati $\dfrac{d\mu}{d\lambda} = \alpha\mu^2 + \beta\mu + \gamma$ que dans les deux cas suivants : 1° $c \equiv 0$, le plan de la conique est précisément le plan osculateur de l'enveloppe; 2° $c \not\equiv 0$; A, considéré comme polynôme en μ, est divisible par B; dans ce cas il existe un cône du second degré circonscrit le long de chaque conique (voir la démonstration de M. Blutel).

Ici je vais donner une démonstration originale, *purement géométrique*, de la proposition suivante, *qui comprend la proposition* (a) *comme cas particulier*.

Imaginons une famille de quadriques $Q(\lambda)$ circonscrites chacune à B le long de la conique $C(\lambda)$. Nous portons notre attention sur les *génératrices* de l'un des systèmes de ces quadriques $Q(\lambda)$ et sur les *développables de la congruence ainsi formée :* sur (B) on obtient une famille ∞^1 de courbes $(\mathcal{A})$ *arêtes de rebroussement de développables* et une famille ∞^1 de courbes $(\mathcal{A}')$ *courbes de contact avec* B *de développables de cette congruence. Les coniques* C *sont partagées homographiquement par les courbes* $(\mathcal{A})$, *et encore homographiquement par les courbes* $(\mathcal{A}')$: la proposition n'a besoin d'être démontrée que pour les courbes $(\mathcal{A})$, car en passant de B à la surface associée B_1, seconde nappe de l'enveloppe de Q et seconde surface focale de la congruence, les courbes $\mathcal{A}$ de (B) deviennent les courbes $(\mathcal{A}')$ de (B_1) et d'autre part sur les coniques homologues C, C_1, le rapport anharmonique de quatre points se conserve, la correspondance ayant lieu par des génératrices de Q. D'autre part, *si la quadrique* Q *se réduit au cône* $\mathcal{S}$ *circonscrit à* B *le long de* C, *les arêtes de rebroussement portées par* B *deviennent les conjuguées des coniques* C.

Si on se place dans le cas où la surface B est *osculatrice* à chaque quadrique Q, les courbes $\mathcal{A}$ deviennent les *asymptotiques* de B et par suite nous obtenons ce

---

[1] Le Mémoire de M. Blutel n'indique pas les valeurs de a, b, c, f; je les donne ici pour rectifier une faute d'impression [dans le terme A, le coeffieient exact de μ n'est pas au^2 mais $au^2 - f$]. Comme vérification des calculs, on remarque que pour $u \equiv 0$, on a une surface réglée qui n'est développable que si f devient nul ; l'équation des conjuguées, pour $u \equiv 0$, devient $fd\lambda = 0$ et ne se réduit à une identité que si f disparait identiquement; cette remarque justifie la nécessité de corriger la faute d'impression.

résultat fondamental : *sur les surfaces* B *osculatrices aux quadriques enveloppées, les asymptotiques s'obtiennent dans chaque système par une équation de Riccati.*

Pour arriver à notre fin, remarquons que sur une conique donnée dans l'espace, le birapport de quatre points (x_i, y_i, z_i), $(i = 1, 2, 3, 4)$ peut s'obtenir en prenant un cinquième point (x_5, y_5, z_5) de la conique et calculant le birapport des quatre nombres $(y_5 - y_i) : (x_5 - x_i)$; si donc les coordonnées des cinq points sont développées en série entière suivant les puissances croissantes d'un certain paramètre, le birapport est lui-même développable en série entière. Traçons donc, sur une surface B, cinq courbes $\mathcal{A}$; quand λ varie, le birapport ρ des quatre points $M_i = (C, \mathcal{A}_i)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, est une certaine fonction de λ dont nous allons prouver que la dérivée, pour $\lambda = \lambda_0$, est nulle, *quel que soit* λ_0; *cela entraîne bien la constance de* ρ. Nous développons, suivant les puissances de $(\lambda - \lambda_0)$, les coordonnées (x_i, y_i, z_i) des cinq points M_i, ce qui est manifestement possible pour le cas où les fonctions arbitraires, choisies pour déterminer la surface B, satisfont à de larges conditions de continuité; si les M_i^0 sont les points $(C^0, \mathcal{A}_i)$, C et C^0 désignant les coniques λ et λ_0, les tangentes aux $\mathcal{A}_i$ aux points M_i^0 sont les génératrices de $Q(\lambda_0)$ et le plan de la conique λ coupe ces génératrices en des points $\mu_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$; nous savons que, les coordonnées ξ_i et x_i, η_i et y_i, ζ_i et z_i étant développées suivant les puissances de $\lambda - \lambda_0$, *les séries correspondantes ont même terme constant, même terme en* $\lambda - \lambda_0$; donc il en est de même pour les birapports $(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)$ et (M_1, M_2, M_3, M_4); le premier est d'ailleurs une constante ρ_0, valeur initiale de ρ, donc([1])

$$\rho = \rho_0 + (\lambda - \lambda_0)^2[\ldots], \qquad \left(\frac{d\rho}{d\lambda}\right)_0 = 0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il suit de là que, si l'on écrit les équations paramétriques de la surface B sous la forme

$$(4) \quad x = \frac{P_1\mu^2 + 2Q_1\mu + R_1}{P\mu^2 + 2Q\mu + R}, \qquad y = \frac{P_2\mu^2 + 2Q_2\mu + R_2}{P\mu^2 + 2Q\mu + R}, \qquad z = \frac{P_3\mu^2 + 2Q_3\mu + R_3}{P\mu^2 + 2Q\mu + R},$$

([1]) Sur une surface réglée R, les asymptotiques non rectilignes donnent pour tangentes, aux points où elles rencontrent la génératrice G_0, les génératrices de système opposé à G_0 sur la quadrique osculatrice à R le long de C_0; on démontre, exactement par le même procédé que les asymptotiques en jeu divisent homographiquement les génératrices (on prend les intersections des asymptotiques avec la génératrice G voisine de C_0 sur R et des tangentes aux asymptotiques avec la génératrice γ voisine de G_0 sur la quadrique osculatrice). Le genre de démonstration adopté réagit contre les habitudes de beaucoup d'auteurs qui jonglent avec les infiniment petits.

où les (P_i, Q_i, R_i), $(i = 0, 1, 2, 3)$, dépendent d'un paramètre λ, les conjuguées des coniques λ se déterminent par une équation de Riccati

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = H\mu^2 + 2K\mu + L, \tag{5}$$

où H, K, L dépendent du seul argument λ; l'intégrale générale de (5) est une fonction

$$\mu = (Cl_1 + l_2) : (Cl_3 + l_4), \tag{6}$$

où C est une constante arbitraire, et l_1, l_2, l_3, l_4 des fonctions déterminées de λ; en faisant le changement de variables

$$\mu = (l_1\bar{\mu} + l_2) : (l_3\bar{\mu} + l_4), \qquad \lambda = \bar{\lambda}, \tag{7}$$

les courbes conjuguées ont pour équation $\bar{\mu} =$ const.; la forme des équations paramétriques (4), en supprimant le surlignage, est conservée et H, K, L sont réduits à zéro. *Montrons maintenant que l'on peut exprimer explicitement* P_i, Q_i, R_i *au moyen de cinq fonctions arbitraires et de leurs dérivées.* (Bien entendu, quand il s'agit d'une surface B *donnée*, l'obtention de cette représentation *canonique* exige l'intégration de *l'équation de Riccati* (5), *en général irréductible;* dans la méthode du paragraphe 2, qui m'est strictement personnelle, il n'y a qu'*une quadrature* à effectuer pour obtenir la représentation canonique du n° 2, qui, au contraire de celle de ce paragraphe, ne met pas en évidence les courbes conjuguées des coniques.)

En considérant les coordonnées homogènes

$$P_1\mu^2 + 2Q_1\mu + R_1, \quad P_2\mu^2 + 2Q_2\mu + R_2, \quad P_3\mu^2 + 2Q_3\mu + R_3, \quad P\mu^2 + 2Q\mu + R, \tag{8}$$

les dérivées partielles en λ

$$P'_1\mu^2 + 2Q'_1\mu + R'_1, \quad P'_2\mu^2 + 2Q'_2\mu + R'_2, \quad P'_3\mu^2 + 2Q'_3\mu + R'_3, \quad P'\mu_2 + 2Q'\mu + R', \tag{9}$$

donnent un point sur la tangente à la courbe $\mu =$ const.; donc si $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sont les coordonnées homogènes du sommet du cône circonscrit le long de la conique λ, il existe trois fonctions h, k, l *des deux variables* λ, μ telles que l'on ait $(i = 0, 1, 2, 3)$

$$h(P_i\mu^2 + 2Q_i\mu + R_i) + k(P'_i\mu^2 + 2Q'_i\mu + R'_i) = l\xi_i. \tag{10}$$

En posant

$$X_1 = \xi_1 : \xi, \qquad X_2 = \xi_2 : \xi, \qquad X_3 = \xi_3 : \xi, \tag{11}$$

on déduit de (10) les trois relations

$$(12)\quad h[P_i\mu^2+2Q_i\mu+R_i-X_i(P\mu^2+2Q\mu+R)]+k[P'_i\mu^2+2Q'_i\mu+R'_i-X_i(P'\mu^2+2Q'\mu+R')]=0.$$

Or, pour λ fixé, l'équation en μ

$$(13)\qquad P_i\mu^2+2Q_i\mu+R_i-X_i(P\mu^2+2Q\mu+R)=0,$$

donne les deux points où la conique λ coupe la face parallèle à yOz pour $i=1$, à zOx pour $i=2$, à xOy pour $i=3$, du trièdre parallèle à $Oxyz$ ayant son sommet au point (X_1, X_2, X_3); on a ainsi trois couples de points, tels que deux de ces couples n'aient jamais de point commun (du moins en laissant arbitraire l'orientation de $Oxyz$); donc les égalités

$$(14)\quad \frac{-h}{k}=\frac{P'_1\mu^2+2Q'_1\mu+R'_1-X_1(P'\mu^2+2Q'\mu+R')}{P_1\mu^2+2Q_1\mu+R_1-X(P\mu^2+2Q\mu+R)}=\frac{P'_2\mu^2+\dots}{P_2\mu^2+\dots}=\frac{P'_3\mu^2+\dots}{P_3\mu^2+\dots},$$

entraînent, les dénominateurs des trois derniers rapports étant premiers entre eux deux à deux, que les numérateurs soient égaux aux dénominateurs respectifs multipliés *par un facteur indépendant de* μ; donc $(-h : k)$ est *une fonction du seul* λ; on remplace les égalités (14) par (14')

$$(14')\quad \frac{P'_i-X_iP'}{P_i-X_iP}=\frac{Q'_i-X_iQ'}{Q_i-X_iQ}=\frac{R'_i-X_iR'}{R_i-X_iR}=\frac{-h}{k}=\frac{-\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)},$$

où φ est obtenue par une quadrature. On peut donc écrire ces relations (14') sous la nouvelle forme

$$(15)\quad \frac{\frac{d}{d\lambda}(\varphi P_i)}{\frac{d}{d\lambda}(\varphi P)}=\frac{\frac{d}{d\lambda}(\varphi Q_i)}{\frac{d}{d\lambda}(\varphi Q)}=\frac{\frac{d}{d\lambda}(\varphi R_i)}{\frac{d}{d\lambda}(\varphi R)}=X_i.$$

Comme nos fonctions P_i, Q_i, R_i peuvent toutes ($i=0, 1, 2, 3$) être remplacées par des fonctions proportionnelles, nous pouvons, *sans restreindre*, supposer $\varphi=1$, ce qui revient à conserver les expressions paramétriques (4) en leur adjoignant les équations de condition

$$(16)\quad \frac{P'_i}{P'}=\frac{Q'_i}{Q'}=\frac{R'_i}{R'}=X_i \qquad (i=1, 2, 3).$$

Quand les relations (16) sont vérifiées, nous dirons que la représentation est *canonique*. La réciproque est évidente, car les dérivées partielles $\frac{\partial x}{\partial\lambda}, \frac{\partial y}{\partial\lambda}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial t}{\partial\lambda}$

(formules 9) sont proportionnelles à $(X_1, X_2, X_3, 1)$, nombres qui donnent le point s sommet d'un cône S circonscrit à B le long de la conique λ. Désormais, suivant l'opportunité, je me servirai des coordonnées cartésiennes ou homogènes, soit pour un point de la surface, soit pour le sommet s, sans qu'il soit besoin de prévenir le lecteur, mais nous supposerons vérifiées les relations (16).

J'emprunte encore quelques résultats à M. Blutel. D'abord un résultat élégant relatif à la *représentation canonique tangentielle*. Adoptons pour le sommet s un système de coordonnées homogènes $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi)$ et écrivons

$$(17) \qquad P'_i\mu^2 + 2Q'_i\mu + R'_i \equiv \xi_i(p\mu^2 + 2q\mu + r) \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

L'équation $p\mu^2 + 2q\mu + r = 0$ *définit, pour* λ *fixé, deux valeurs de* μ *qui donnent les points de contact de la conique* λ *avec son enveloppe;* en effet, pour une telle valeur de μ, le point (λ, μ) de la conique λ et le point $(\lambda + d\lambda, \mu)$ de la conique $\lambda + d\lambda$ ont leurs coordonnées homogènes identiques aux infiniment petits près du second ordre, λ étant pris pour infiniment petit principal.

L'équation du plan tangent est

$$(18) \qquad |x \quad P_1\mu + Q \quad Q_1\mu + R_1 \quad \xi_1| = 0,$$

de sorte que, si u, v, w, h sont les coordonnées tangentielles de B, on peut prendre

$$(19) \qquad \begin{cases} u = \pi_1\mu^2 + 2\chi_1\mu + \rho_1, & w = \pi_3\mu^2 + 2\chi_3\mu + \rho_3, \\ v = \pi_2\mu^2 + 2\chi_2\mu + \rho_2, & h = \pi\,\mu^2 + 2\chi\,\mu + \rho\,, \end{cases}$$

avec

$$(20) \qquad \pi_1 = \begin{vmatrix} P_2 & Q_2 & \xi_2 \\ P_3 & Q_3 & \xi_3 \\ P & Q & \xi \end{vmatrix}, \quad 2\chi_1 = \begin{vmatrix} P_2 & R_2 & \xi_2 \\ P_3 & R_3 & \xi_3 \\ P & R & \xi \end{vmatrix}, \quad \rho_1 = \begin{vmatrix} Q_2 & R_2 & \xi_2 \\ Q_3 & R_3 & \xi_3 \\ Q & R & \xi \end{vmatrix}, \quad \pi'_i = \ldots\ldots$$

L'équation du plan de la conique λ est manifestement

$$(21) \qquad |x \quad P_1 \quad Q_1 \quad R_1| = 0.$$

Il s'agit d'indiquer maintenant un choix *précis* du total $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi)$ indéterminé à un facteur près de proportionnalité, tel que la représentation (19) soit *canonique*, c'est-à-dire tel que $(\pi'_i, \chi'_i, \rho'_i)$ soient proportionnels à $(\pi'_j, \chi'_j, \rho'_j)$ quels que soient i et j; or en vertu de (16), on a

$$(22) \qquad \pi'_1 = \begin{vmatrix} P_2 & Q_2 & \xi'_2 \\ P_3 & Q_3 & \xi'_3 \\ P & Q & \xi' \end{vmatrix}, \quad 2\chi'_1 = \begin{vmatrix} P_2 & R_2 & \xi'_2 \\ P_3 & R_3 & \xi'_3 \\ P & R & \xi' \end{vmatrix}, \quad \rho'_1 = \begin{vmatrix} Q_2 & R_2 & \xi'_2 \\ Q_3 & R_3 & \xi'_3 \\ Q & R & \xi' \end{vmatrix},$$

de sorte que les quantités π_i, $2\chi'_i$, ρ'_i sont des mineurs convenablement choisis du déterminant

$$(24) \qquad |\xi'_1 \quad P_1 \quad Q_1 \quad R_1|,$$

qui se déduit du déterminant (21), figurant au premier membre de l'équation du plan tangent de la conique, en changeant x, y, z, t en $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'$; comme le point $(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4)$ décrit *toute* la tangente en s à la courbe Γ lieu du sommet du cône circonscrit, quand on fait varier le facteur de proportionnalité figurant dans $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi)$, il est naturel de choisir les quantités ξ_i de sorte que le point (ξ'_i) soit dans le plan de la conique; mais alors si $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ sont un système de coordonnées du plan de cette conique, on a

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\eta_1 P_1 + \eta_2 P_2 + \eta_3 P_3 + \eta P = 0, \\ &\eta_1 Q_1 + \eta_2 Q_2 + \eta_3 Q_3 + \eta Q = 0, \\ &\eta_1 \xi'_1 + \eta_2 \xi'_2 + \eta_3 \xi'_3 + \eta \xi' = 0, \end{aligned} \right.$$

d'où résultent les égalités

$$(24) \qquad \frac{\eta_1}{\pi'_1} = \frac{\eta_2}{\pi'_2} = \frac{\eta_3}{\pi'_3} = \frac{\eta}{\pi'},$$

ce qui prouve que la représentation est canonique; nous avons ainsi établi un parallélisme étroit entre les propriétés ponctuelles et tangentielles.

Nous avons obtenu au moyen de l'équation (17) les points K, K'; nous devons déterminer corrélativement les plans tangents au cône S menés par la tangente en s à la courbe Γ, lieu de s, donc finalement *les points* H *et* H'. Il suffit de trouver sur la conique λ un point tel que la tangente à cette conique rencontre la tangente à Γ en s. Cela donne l'équation

$$(25) \qquad |P_1\mu + Q_1 \quad Q_1\mu + R_1 \quad \xi_1 \quad \xi'_1| = 0.$$

Les calculs faits jusqu'ici conduisent aussitôt à l'équation des *asymptotiques*

$$\left| x \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} \quad \frac{\partial x}{\partial \mu} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} \right| d\lambda^2 + \left| x \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} \quad \frac{\partial x}{\partial \mu} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2} \right| d\mu^2 = 0.$$

En remplaçant les termes x par $x - \frac{\mu}{2}\frac{\partial x}{\partial \mu}$ et $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ par $\xi_1(p\mu^2 + 2q\mu + r)$, on trouve aussitôt l'équation

$$(26) \qquad (p\mu^2 + 2q\mu + r)\,|P_1\mu + Q_1 \quad Q_1\mu + R_1 \quad \xi_1 \quad \xi'_1|\,d\lambda^2 - 2\,|P_1 \quad Q_1 \quad R_1 \quad \xi_1|\,d\mu^2 = 0.$$

5. Asymptotiques : singularités. — On déduit de cette forme d'équation une remarque intéressante : *les valeurs de* λ, *racines du déterminant* $|P_1 \quad Q_1 \quad R_1 \quad \xi_1|$ *donnent des coniques particulières, telles que le point* s *correspondant soit dans le plan de la conique; autrement dit* B *se raccorde, tout le long de la conique, au plan de la conique*. Cette conique peut donc être regardée comme une asymptotique (en général singulière); le plan de la conique est plan tangent double de B. On sait que, pour reconnaître la forme précise d'une intégrale de (26) au voisinage d'un point d'une telle conique, il y a une discussion analytique assez minutieuse; sur le tore, où les parallèles joueront le rôle des coniques étudiées ici, on a une asymptotique singulière, constituée par le parallèle supérieur ou inférieur (l'axe étant vertical), enveloppe des asymptotiques régulières.

Nous devons maintenant étudier les points K, K′ de contact d'une conique C_0 avec son enveloppe, c'est-à-dire les racines de $\mu^2 p(\lambda_0) + 2\mu q(\lambda_0) + r_0$, ou les points H, H′ pieds des génératrices de contact du cône S avec son enveloppe, c'est-à-dire les racines de $|P_1^0\mu + Q_1^0 \quad Q_1^0\mu + R_1^0 \quad \xi_1^0 \quad \xi_1'^0|$. *On sait que pour un tel point, il n'y a plus qu'une intégrale de l'équation* (26), *qui prenne la valeur* μ_0, *pour* $\lambda = \lambda_0$, μ_0 *étant la racine en jeu*. Si nous prenons un point H ou H′, la courbe décrite par un tel point (*que les deux points* H *et* H′ *soient confondus ou distincts, mais en supposant que* H *ne coïncide pas avec un point* K) n'est pas singulière *ponctuellement* sur B (c'est la développable circonscrite le long de la ligne lieu de H ou H′ qui est singulière) : *donc la disposition des tangentes est la même sur* B *ou dans le plan image* (λ, μ); or pour un point H, l'image de l'asymptotique (unique) passant en H est tangente à l'image de la conjuguée, puisque $d\mu$ est nul; *donc sur la surface l'asymptotique est tangente en* H *à la génératrice* sH *du cône* S.

Songeons maintenant au fait qu'une dualité transforme une surface B en une surface $\overline{\mathrm{B}}$, un point H (ou plus précisément un point-plan H) en un plan-point $\overline{\mathrm{K}}$, une conique C en un cône $\overline{\mathrm{S}}$, une tangente de C en une génératrice de $\overline{\mathrm{S}}$, une tangente asymptotique en une tangente asymptotique; du résultat acquis précédemment pour un point $\overline{\mathrm{H}}$, il résulte que, *en un point* K, *pourvu que ce point ne soit pas non plus un point* H, *mais même si ce point* K *est confondu avec le point* K′, *l'asymptotique est tangente en* K *à la conique* C; *mais dans le plan image* (λ, μ) *l'image de l'asymptotique* (*en vertu de* $d\mu = 0$) *est tangente non à l'image de la conique, mais à l'image de la courbe conjuguée.*

Cette circonstance, un peu paradoxale, se trouve ainsi *démontrée* par une voie presque exclusivement géométrique (d'ailleurs ce travail est une étude de géométrie et il est naturel d'éviter autant que possible un appareil analytique); nous allons maintenant donner une *vérification* par voie analytique; *cette vérification exige que l'on sépare davantage les divers cas possibles*. Nous allons nous borner au cas le plus général : nous supposerons que sur la conique particulière λ_0 étudiée, les quatre points H, H′, K, K′ soient distincts; μ_0 étant la valeur de μ qui correspond à l'un d'eux, $\mu = f(\lambda)$ étant l'équation de la branche de courbe engendrée par ce point quand λ varie au voisinage de λ_0, supposons que $\frac{df}{d\lambda}$ ne soit pas nulle pour $\lambda = \lambda_0$; c'est bien le cas *général*, car, pour une surface B *générale* qui dépend de cinq fonctions arbitraires d'une variable, on peut prendre pour quatre d'entre elles les rapports mutuels des fonctions p, q, r dans $p(\lambda)\mu^2 + 2q(\mu)\lambda + r(\lambda)$ et ceux des coefficients du trinome $|P_1\mu + Q_1 \quad Q_1\mu + R_1 \quad \xi_1 \quad \xi'_1|$. Dans ces conditions l'intégrale, unique, de (26) qui se réduit à λ_0, pour λ égal à λ_0, peut être représentée par un développement en série de la forme

$$(27) \qquad \mu = \mu_0 + a_3\theta^3 + a_4\theta^4 + \ldots\ldots, \qquad \lambda = \lambda_0 + b_2\theta^2 + b_3\theta^3 + \ldots\ldots,$$

de sorte que x, y, z, t donnent des dérivées

$$(28) \qquad \frac{dx}{d\theta} = \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{d\theta} + \frac{\partial x}{\partial\mu}\frac{d\mu}{d\theta},$$

qui contiennent simplement θ en facteur, s'il s'agit d'un point H ou H'; mais s'il s'agit d'un point K ou K', la quantité $\frac{\partial x}{\partial\lambda} = \xi_1(p\mu^2 + 2q\mu + r)$ contient θ^2 en facteur, puisque, d'après (26) elle-même, $p\mu^2 + 2q\mu + r$ est nul pour $\mu = \mu_0$, $\lambda = \lambda_0$ du même ordre que $\left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)^2$, c'est-à-dire que θ^2; alors *pour le point* H *on a un rebroussement ordinaire soit dans le plan image* (λ, μ), *soit dans l'espace;* en rapportant l'espace à un tétraèdre convenable, on peut écrire sur une asymptotique, au voisinage du point H

$$(\mathrm{H}) \qquad \frac{X}{T} = \theta^2 + \ldots\ldots, \qquad \frac{Y}{T} = \theta^3 + \ldots\ldots, \qquad \frac{Z}{T} = \theta^{4+m} + \ldots\ldots,$$

où m est un entier inconnu et la tangente en H est sH. Pour un point K, $\frac{dx}{d\theta}$ contient θ^2 en facteur à cause de la partie $\frac{\partial x}{\partial\mu}\frac{d\mu}{d\theta}$, tandis que la partie $\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{d\theta}$ contient θ^3 en facteur : c'est donc la partie $\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\frac{d\mu}{d\theta}, \frac{\partial y}{\partial\mu}\frac{d\mu}{d\theta}, \ldots\ldots\right)$ ou, si l'on préfère $\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}, \frac{\partial y}{\partial\mu}, \ldots\ldots\right)$ qui donne la direction de la *tangente, coïncidant sur la surface avec la tangente à la conique* C, *tandis que sur le plan* (λ, μ) *la tangente est la tangente à la courbe conjuguée* $\mu =$ const.; on a au voisinage de K avec un tétraèdre convenable les développements

$$(\mathrm{K}) \qquad \frac{X}{T} = \theta^3 + \ldots\ldots, \qquad \frac{Y}{T} = \theta^{3+p} + \ldots\ldots, \qquad \frac{Z}{T} = \theta^{3+p+q} + \ldots\ldots,$$

où p, q sont des entiers inconnus, à déterminer. Mais alors les coefficients du plan osculateur de cette courbe (K) sont, à l'ordre près, ainsi qu'à un facteur numérique près,

$$1 + \ldots\ldots, \qquad \theta^q + \ldots\ldots, \qquad \theta^{p+q} + \ldots\ldots, \qquad \theta^{p+q+3} + \ldots\ldots,$$

et d'après la dualité, ces expressions doivent coïncider avec celles d'un développement ponctuel $(\overline{\mathrm{H}})$: donc, par comparaison avec le développement H qui précède, on a $q = 2$, $p = 1$: *l'asymptotique, issue de* K *sur l'arête de rebroussement de* B, *a un point triple à tangente unique; les plans tangents ont quatre points communs avec la courbe et le plan osculateur a six points communs avec elle; en même temps, nous voyons que* m *dans le développement* H *a la valeur* 2 (¹).

Il est intéressant d'étudier la *surface auxiliaire* Σ *obtenue en menant de chaque point* M *de la conique* C *les deux tangentes asymptotiques de* B : le lecteur pourra aussi se reporter à l'article de M. Blutel paraissant dans ce même Journal. Remarquons que, si, *sur une surface quelconque* S, *nous traçons au hasard une courbe* Γ *et que de chaque point* M *de* Γ *nous menons les tangentes asymptotiques* A, A′ *de* S *en ce point, chaque droite* A, A′ *engendre une surface réglée* R *ou* R′, *telles que* R *et* R′ *soient osculatrices entre elles tout le long de* Γ *et en même temps osculatrices à* S. En effet en M, l'indicatrice de S et celle de R ont A pour asymptote commune, M pour centre commun, et la tangente en M à Γ comme sécante commune *double* (les indicatrices étant tangentes aux deux points où cette tangente les coupe) : donc les indicatrices coïncident : R et S sont osculatrices; R′ et S aussi, la proposition est établie.

Il est clair aussi que la quadrique $Q(\lambda)$ est osculatrice à B, en même temps qu'à la surface associée B_1, aux deux points J, J′ où se coupent les deux coniques caractéristiques. En effet sur Q ou B, nous pouvons regarder z comme fonction de x, y et calculer les dérivées $p, q, r, s, t \ldots$ de z par des différentiations; pour $Q(x, y, z, \lambda) = 0$ par exemple, on regarde λ comme *constant*, on écrit $dQ \equiv \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz = 0$, on remplace dz par $p\,dx + q\,dy$ et l'on égale à zéro le coefficient de dx, puis celui de dy; de même pour d^2Q on remplace dz par $p\,dx + q\,dy$, d^2z par $r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2$ et l'on égale encore à

(¹) Si l'équation $p\mu^2 + 2q\mu + r = 0$ a une racine μ constante ($\mu = 0$ par exemple), toutes les coniques de la surface passent en un point *fixe*, comme on le verra. Par exemple, une développable transformée à partir du point O par inversion donne une surface B où les coniques sont toutes des cercles passant en O, point conique de la surface; dans le plan (λ, μ) le point O a pour image toute la droite $\mu = 0$; l'image de chaque asymptotique est tangente, en un point variable, à la droite $\mu = 0$ sans y avoir de singularité; au contraire à chaque cercle de B lui correspond une asymptotique ayant en O un *rebroussement* et tangente au cercle. Je n'insiste pas davantage sur l'étude des cas particuliers.

zéro les coefficients de $dx^2, dxdy, dy^2$. Pour $B(x, y, z) = 0$, on peut prendre $B(x, y, z) \equiv Q[x, y, z, \lambda(x, y, z)]$ où λ est supposée calculée par l'équation $\frac{\partial Q}{\partial \lambda} \equiv \Pi\Pi' = 0$, Π et Π' étant les plans des coniques de C et C_1 (en réalité λ est calculée par $\Pi = 0$); on peut donc écrire $dQ = d_1Q + d_2Q$ où d_1 est la différentielle prise en regardant λ comme une constante, d_2 la différentielle prise en regardant λ comme la seule variable et remplaçant $d\lambda$ par $\frac{\partial \lambda}{\partial x}dx + \frac{\partial \lambda}{\partial y}dy + \frac{\partial \lambda}{\partial z}(p\,dx + q\,dy)$; de même pour calculer d^2Q.

Or on a

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{ll} d^2Q = d_1^2Q + 2d_1(d_2Q) + d_2^2Q, & \\ d_2Q = \Pi\Pi' d\lambda, & d_1(d_2Q) = \Pi d_1(\Pi' d\lambda) + (d_1\Pi) \times (\Pi' d\lambda), \\ d_2^2Q = \Pi d_2(\Pi' d\lambda) + (d_2\Pi) \times (\Pi' d\lambda) & \end{array} \right.$$

(il est nécessaire de ne pas se tromper en calculant $d_1(d\lambda)$ ou $d_2(d\lambda)$, mais peu importe pour notre résultat); on voit qu'aux points J et J' on a $d^2Q = d_1^2Q$, de sorte que la surface B est bien osculatrice à la quadrique Q; de même B_1 est osculatrice à Q en J et J', de sorte que B et B_1 sont bien osculatrices tout le long de la courbe lieu de J et J'. Nous voyons même que, si, *accidentellement*, au cours de la variation de λ, il existe une quadrique $Q(\lambda_0)$ pour laquelle le plan $\Pi'(\lambda_0)$ coïncide avec le plan $\Pi(\lambda_0)$, J et J' sont indéterminés sur $C(\lambda_0)$ et la quadrique $Q(\lambda_0)$ est osculatrice à B le long de cette conique particulière.

Si on remplace $Q(\lambda)$ par $\overline{Q} \equiv Q + F(\lambda)\Pi^2$, les nouveaux points $\overline{J}$, $\overline{J}'$ sont sur la droite d'équations $\Pi = 0$, $\Pi' + 2F\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = 0$ qui tourne, quand F varie, autour du point fixe ω défini dans le plan de C par l'intersection de $JJ'(\Pi = 0)$ et $KK'\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = 0\right)$; si $\overline{Q}$ coïncide avec le cône S, le plan de la seconde conique C_1 se réduit à SHH', de sorte que *les trois droites* HH', KK', JJ' *sont toujours concourantes.*

Pour étudier la surface Σ particulière, relative à $\lambda = \lambda_0$, nous prenons un tétraèdre de référence local dont un premier sommet est s, sommet de S tandis que les trois autres forment un triangle conjugué par rapport à C; une homographie permet de supposer s à l'infini sur Oz,

$$(S) \qquad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Le seul moyen d'obtenir dans chaque plan tangent à S deux droites se croisant au point $M(\cos\varphi, \sin\varphi, o)$ de C, conjuguées par rapport à Ms et la tangente en M à C, et correspondant algébriquement à M, est d'écrire

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{z^2}{(x\sin\varphi - y\cos\varphi)^2} = \frac{-a\cos\varphi + b\sin\varphi + c}{a'\cos\varphi + b'\sin\varphi + c'},\\ &x\cos\varphi + y\sin\varphi - 1 = 0. \end{aligned}\right.$$

L'élimination de φ est immédiate, car l'identité

$$(x\sin\varphi - y\cos\varphi)^2 + (x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 = x^2 + y^2,$$

permet de remplacer le dénominateur de la première fraction par $x^2 + y^2 - 1$ et il reste deux équations linéaires en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ que l'on résoud et l'égalité $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ donne l'équation de Σ : on trouve une surface du sixième degré; l'équation $-ax + by + c = 0$ dans le plan de C est celle de KK', $a'x + b'y + c' = 0$ celle de HH'. Accidentellement si *un seul* des points H ou H', H par exemple, coïncide avec un des points K, K', la surface Σ se réduit au degré 5. Si nous écartons ce cas précis, *nous prenons comme triangle conjugué à* C *le triangle conjugué commun aux coniques passant par* H, H', K, K' [de sorte que le cas spécial $(H = K,\ H' = K')$ ou encore $(H = H',\ K = K')$ n'est pas éliminé]. Cela revient à prendre $b = b' = 0$, $a = a'$, $c = c'$ (toujours en tenant compte de l'homographie). On a alors

$$(31)\qquad \cos\varphi = \frac{c}{a}\,\frac{x^2 + y^2 - z^2 - 1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1},$$

et portant dans $y^2(1 - \cos^2\varphi) = (x\cos\varphi - 1)^2$ nous avons

$$(\Sigma)\qquad \begin{aligned} c^2(x^2+y^2)(x^2+y^2-z^2-1)^2 - 2acx(x^2+y^2+z^2-1)(x^2+y^2-z^2-1)&\\ + a^2(1-y^2)(x^2+y^2+z^2-1)^2 = 0&. \end{aligned}$$

L'équation (31), où $\cos\varphi$ est supposé constant, représente une quadrique se raccordant à B tout le long de C et pour laquelle les points J, J' sont $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $(\cos\varphi, -\sin\varphi)$; elle coupe Σ suivant C comptée quatre fois et suivant quatre génératrices; nous retrouvons ce fait que la quadrique est osculatrice à B en J, J puis aussi à chacune des deux nappes de Σ se touchant suivant C, donc, *en réalité osculatrices le long de* C. On peut remarquer que $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ est la quadrique qui correspond à une droite JJ' confondue avec un côté du triangle conjugué adopté, $x^2 + y^2 = 0$ étant les plans tangents au cône issu du sommet, autre que ω, porté par ce côté; $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $1 - y^2 = 0$ sont les éléments analogues relatifs au troisième sommet du triangle; $xt = 0$ sont les deux côtés, issus de ω, de ce triangle : ces remarques permettraient d'écrire l'équation de Σ en axes quelconques. Je n'insiste pas davantage sur les propriétés de Σ, exposées d'autre part par M. Blutel.

Si on suppose $H = K$, $H' = K'$, on prend $c = 0$ et l'on trouve que Σ se réduit à $(1 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2 - 1)^2 = 0$; la quadrique $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ est celle qui est osculatrice à B le long de C (que cette circonstance arrive soit pour la valeur λ_0 *isolée*, soit pour *toute* valeur de λ) et aucune autre quadrique du faisceau $Q + F(\lambda)\Pi^2 = 0$ n'est osculatrice à B en aucun point de C.

Si on suppose $H = H'$, $K = K'$ on prend $a = c$ et l'équation Σ se décompose en deux facteurs

$$(x + 1)z^2 + (x - 1)(x^2 + y^2 - 1) \pm 2z(x^2 + y^2 - 1) = 0,$$

dont chacun représente une surface cubique réglée : on vérifie sans peine que l'intersection complète de ces deux surfaces se réduit à :

$z = 0$,	$x - 1 = 0$,	droite comptée une fois;
$z^3 = 0$,	$x^2 + y^2 - 1 = 0$,	conique comptée trois fois;
$y^2 = 0$,	$x + 1 = 0$,	droite comptée deux fois;

et l'on vérifie ainsi que la conique C est ligne d'osculation (¹).

En prenant le signe $+$, on a une surface réglée dont la droite double est $y = 0$, $z + x - 1 = 0$ et dont la droite simple, non génératrice, est $z = 1$, $x = -1$.

6. Courbe conjuguée plane ou conique. — Voici maintenant une proposition qui dépasse le cadre des surfaces B. Nous circonscrivons à une surface Σ les cônes S ayant leurs sommets s répartis sur une courbe Γ; les courbes de contact C ont pour conjuguées les courbes de Σ dont les tangentes s'appuient sur Γ; *de la sorte, si* Γ *est plane, la section de* Σ *par le plan de* Γ *est une conjuguée particulière des courbes* C; si même les courbes C sont algébriques, chaque point de rencontre de C avec le plan de Γ doit être considéré comme engendrant une trajectoire; ici, où nous avons des coniques, si la courbe Γ est plane, la section plane de Σ par le plan

(¹) Quand Σ est de degré 6, la caractéristique de Σ comprend : C *dix* fois, la cubique plane double de Σ *deux* fois, chacune des génératrices (unique) de Σ issue de H, H', une fois; il reste une courbe de degré 8 pour compléter la caractéristique. Le chiffre *dix* se vérifie aussitôt en prenant le cas où Σ se décompose en deux surfaces cubiques $\sigma\sigma_1 = 0$ et où l'on a à résoudre le système $\sigma\sigma_1 = 0$, $\sigma \dfrac{d\sigma_1}{d\lambda} + \sigma_1 \dfrac{d\sigma}{d\lambda} = 0$. Quand Σ est décomposée en deux surfaces réglées, le caractéristique du morceau σ est : C *deux* fois, la droite double de σ *deux* fois, la droite issue de H une fois; le complément de la caractéristique est une conique.

de Γ doit donc, au point de vue de l'intégration de l'équation de Riccati, être décomptée pour *deux* trajectoires conjuguées et elle est obtenue pour deux valeurs constantes de μ. Tenant compte aussi de la conservation du birapport, nous voyons que si *deux* sections planes de la surface B par les plans P_1 et P_2 donnent des lignes conjuguées des coniques C (ce qui fait un total de *quatre* trajectoires conjuguées), tous les plans pivotant autour de la droite Δ commune à P_1 et P_2 donnent les lignes conjuguées des coniques C, de sorte que le lieu des sommets des cônes circonscrits est la droite (P_1, P_2).

Corrélativement, considérons une surface quelconque Σ et une famille de sections planes, puis leurs conjuguées; *si les plans des sections passent par un point fixe* ω, *la courbe de contact de la surface* Σ *avec le cône circonscrit à partir de* ω *est une courbe conjuguée.* En appliquant ceci aux surfaces B et aux coniques C, si les plans de ces coniques passent par un point fixe ω, on mène de ω les tangentes à chaque conique et l'on a ainsi *deux* trajectoires conjuguées; plus particulièrement, si ω est sur B, c'est-à-dire si les coniques ont un point commun, les *deux trajectoires en jeu se confondent en une seule réduite au point* ω : n'oublions pas que, avec la représentation canonique, les trajectoires conjuguées correspondent à μ constant; *si donc les coniques de la surface* B *passent par un point fixe* ω, *ce point est obtenu sur toutes les coniques, pour une même valeur de* μ, *racine* (*simple*) *de l'équation déjà citée* $p\mu^2 + 2q\mu + r = 0$ (théorème donné par M. Blutel, p. 17 de sa thèse).

Dualistiquement, si les cônes S *ont un plan tangent fixe commun à eux tous, ce plan correspond à une racine constante de l'équation en* μ

$$|P_1\mu + Q_1 \quad Q_1\mu + R_1 \quad \xi_1 \quad \xi'_1| = 0,$$

et cette racine, en général, est *simple.*

Il peut arriver que, *simultanément, les plans des coniques passent par un point fixe* ω *et que la courbe* Γ *lieu des sommets des cônes soit plane* : nous connaissons alors deux trajectoires définies comme courbe de contact de B avec le cône circonscrit de sommet ω et deux autres définies comme section de B par le plan de Γ. Il peut arriver, nous en verrons des exemples plus loin, que l'une des trajectoires du premier groupe (ou toutes deux) appartienne au second groupe; en tous cas si l'on a trois ou quatre trajectoires distinctes, l'équation de Riccati des conjuguées est intégrée en termes finis. Nous pouvons remarquer que, dès le début, nous avons signalé un cas très spécial où les deux groupes en jeu coïncident : c'est le cas où *la quadrique variable* Q *touche son enveloppe suivant deux coniques dont les plans passent, tous deux, par le même point fixe* ω; *le plan polaire* Ω *de* ω *relativement à la quadrique enveloppée est fixe et contient la courbe* Γ; la section de B par Ω est en même temps courbe de contact de B avec le cône circonscrit de sommet ω; en particulier, cette circonstance se produit *automatiquement si la quadrique* Q *est osculatrice à son enveloppe et si le plan de la conique* C *passe par un point fixe* ω.

Quand la quadrique variable Q *touche son enveloppe suivant deux coniques dont les plans passent par une droite fixe* Δ, *le lieu des sommets est une droite* Δ_1 *et nous avons sur chacune des deux surfaces* B, B_1 *un système conjugué doublement de Kœnigs. D'ailleurs dans ce cas toutes les coniques coupent* Δ *en deux points fixes* A, A′ et sont, en ce point, tangentes aux plans tangents à B aux points A, A′ : cela se voit en prenant $Q \equiv \int_{\lambda_0}^{\lambda} (x + \alpha y)(x + \beta y)\, d\lambda + Q_0$, où α et β sont deux fonctions de λ et Q_0 une quadrique numérique. On remarque d'ailleurs que la quadrique $Q_1 \equiv Q + \mu(x + \alpha y)^2$ est osculatrice à la surface B, lieu de la conique $(Q = 0,\ x + \alpha y = 0)$ si l'on prend $\beta + 2\mu \frac{d\alpha}{d\lambda} = \alpha$, de sorte que les asymptotiques de B divisent homographiquement les coniques C (cf. Blutel, p. 34, théorème de Demartres).

7. Représentation canonique explicite. — Nous avons quatre groupes de fonctions de λ, (P_1, Q_1, R_1), (P_2, Q_2, R_2), (P_3, Q_3, R_3), (P, Q, R) telles que l'on ait les relations différentielles

$$(1) \qquad \frac{P'_i}{P'} = \frac{Q'_i}{Q'} = \frac{R'_i}{R'} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

L'interprétation géométrique est simple : les courbes auxiliaires, *planes ou gauches*, (P_i, Q_i, R_i), (P, Q, R) se correspondent ponctuellement de sorte qu'aux points homologues les tangentes soient parallèles; de la sorte elles sont, en même temps, ou gauches ou planes, ou rectilignes.

Premier cas : courbes (P_i, Q_i, R_i) *gauches.* — Nous écrivons une équation de plan à un paramètre

$$(2) \qquad xA(\lambda) + yB(\lambda) + zC(\lambda) + F_i(\lambda) = 0,$$

et nous prenons comme courbe (P_i, Q_i, R_i) l'arête de rebroussement de la développable enveloppe; on peut, si l'on tient à n'avoir que les fonctions strictement indispensables, prendre $A \equiv 1$, $B \equiv \lambda$ et il reste cinq fonctions arbitraires C, F_1, F_2, F_3, F. Mais il est souvent commode de conserver les fonctions surabondantes A, B, C.

En représentant les dérivations par des accents, on a

$$(3) \qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}, \qquad \Delta_i \equiv \begin{vmatrix} A & B & C & F_i \\ A' & B' & C' & F'_i \\ A'' & B'' & C'' & F''_i \\ A''' & B''' & C''' & F'''_i \end{vmatrix} \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

$$(4)\qquad \Delta P_i = -\begin{vmatrix} F_i & B & C \\ F'_i & B' & C' \\ F''_i & B'' & C'' \end{vmatrix}, \qquad \Delta Q_i = -\begin{vmatrix} A & F_i & C \\ A' & F'_i & C' \\ A'' & F''_i & C'' \end{vmatrix}, \qquad \Delta R_i = -\begin{vmatrix} A & B & F_i \\ A' & B' & F'_i \\ A'' & B'' & F''_i \end{vmatrix}.$$

Le déterminant Δ *n'est pas nul* (on ne confondra pas Δ avec Δ_0); on a ensuite

$$(5)\qquad \begin{cases} A\ P'_i + B\ Q'_i + C\ R'_i = 0, \\ A' P' + B' Q'_i + C' R'_i = 0, \\ A'' P'_i + B'' Q'_i + C'' R'_i + A''' P_i + B''' Q_i + C''' R_i + F'''_i = 0. \end{cases}$$

On peut donc écrire

$$(6)\qquad P'_i = \rho_i(BC' - CB'), \qquad Q'_i = \rho_i(CA' - AC'), \qquad R'_i = \rho(AB' - BA'),$$

de sorte que $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho)$ sont des coordonnées homogènes du sommet s; le système $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho)$ d'après (5) est proportionnel à $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_0)$, ce qui donne le point s; *une relation linéaire entre les quatre* F_i *de la forme* $\Sigma\alpha_i F_i = -(Aa + Bb + Cc)$ *entraîne manifestement entre les* Δ_i *la relation* $\Sigma\alpha_i\Delta_i = 0$, *de sorte que, si une telle relation a lieu, la courbe* Γ *lieu du sommet* s *est plane* (on a supposé les quantités α_i, a, b, c constantes); dans ce cas, il y a souvent avantage à loger, par homographie, cette courbe dans le plan $t = 0$, ce qui entraîne $\Delta_0 = 0$, et par suite $F = -(Aa + Bb + Cc)$, où a, b, c sont constants, $P = a$, $Q = b$, $R = c$; la coordonnée t sur la surface est représentée par $t = a\mu^2 + 2b\mu + c$ et les racines constantes de ce trinôme donnent, conformément à ce qui a été prévu, deux trajectoires planes conjuguées des coniques.

Dans ce premier cas, où les courbes (P_i, Q_i, R_i) *sont gauches, le plan de la conique ne peut passer par un point fixe* (en écartant le cas banal où les coniques engendreraient un plan). On peut, en effet, remarquer que le plan de la conique a pour équation

$$(7)\qquad \Pi \equiv \begin{vmatrix} x & P_1 & Q_1 & R_1 \\ y & P_2 & Q_2 & R_2 \\ z & P_3 & Q_3 & R_3 \\ t & P & Q & R \end{vmatrix} = 0,$$

puis, que la multiplication donne

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} P_i & Q_i & R_i \\ P_j & Q_j & R_j \\ P_k & Q_k & R_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} F_i & F'_i & F''_i \\ F_j & F'_j & F''_j \\ F_k & F'_k & F_k \end{vmatrix}.$$

$$(9)\qquad -\Delta\Pi \equiv |x \quad F_1 \quad F'_1 \quad F''_1|.$$

Si le plan Π passait par un point fixe ω, qu'une homographie permet de supposer être $(0, 0, 0, 1)$ l'équation (9) donnerait

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} F_1 & F'_1 & F''_1 \\ F_2 & F'_2 & F''_2 \\ F_3 & F'_3 & F''_3 \end{vmatrix} = 0,$$

il y aurait une relation identique $aF_1 + bF_2 + cF_3 \equiv 0$, d'où $aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0$, $aQ_1 + bQ_2 + cQ_3 = 0$, $aR_1 + bR_2 + cR_3 = 0$, et tous les points de la surface satisferaient à l'équation $ax + by + cz = 0$; on aurait le cas banal d'une famille de coniques planes et des trajectoires qui les divisent homographiquement.

Dans le *second cas*, où les courbes auxiliaires (P_i, Q_i, R_i) sont *planes*, on a des relations de la forme $\alpha P_i + \beta Q_i + \gamma R_i + h_i = 0$, où α, β, γ sont trois constantes, indépendantes de l'indice i, et les h_i quatre constantes.

On remarque qu'une substitution $\mu = \dfrac{a\bar{\mu} + b}{c\bar{\mu} + d}$, où a, b, c, d sont des constantes, change une représentation canonique en une autre également canonique, en remplaçant P_i, Q_i, R_i par

$$(11) \qquad \overline{P}_i = a^2 P_i + 2acQ_i + c^2 R_i, \qquad \overline{Q}_i = abP_i + (ad+bc)Q_i + cdR_i, \qquad \overline{R}_i = b^2 P_i + 2bdQ_i + d^2 R_i,$$

de sorte que les égalités

$$(12) \qquad \frac{ab}{\alpha} = \frac{ad+bc}{\beta} = \frac{cd}{\gamma} = \frac{\sqrt{ad-bc}}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}},$$

permettent, *sauf si* $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ *est nul*, de réduire les équations entre P_i, Q_i, R_i, à la forme plus simple $Q_i = h_i$; *si* $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ *est nul*, on écrira au contraire

$$(13) \qquad \frac{b^2}{\alpha} = \frac{2bd}{\beta} = \frac{d^2}{\gamma},$$

et l'on réduit les relations à la forme plus simple $R_i = h_i$; dans l'un ou l'autre cas, le point (P_i, R_i) ou (P_i, Q_i) se détermine comme point où la droite $x + \lambda z = F_i$ ou $x + \lambda y = F_i$ touche son enveloppe, de sorte que l'on a les formules de l'un ou l'autre type suivant :

Premier type :

$$(14) \quad x = \frac{(F_1 - \lambda F'_1)\mu^2 + 2h_1\mu + F'_1}{(F - \lambda F')\mu^2 + 2h\,\mu + F'}, \quad y = \frac{(F_2 - \lambda F'_2)\mu^2 + 2h_2\mu + F'_2}{(F - \lambda F')\mu^2 + 2h\,\mu + F'}, \quad z = \frac{(F_3 - \lambda F'_3)\mu^2 + 2h_3\mu + F'_3}{(F - \lambda F')\mu^2 + 2h\,\mu + F'},$$

Le sommet du cône circonscrit suivant la conique λ est le point $(F''_1, F''_2, F''_3, F'')$; le plan de la conique λ est

$$(15) \qquad \Pi \equiv |x \quad F_1 \quad F'_1 \quad h_1| = 0,$$

il *passe par le point fixe* $\omega(h_1, h_2, h_3, h)$ *qui n'appartient à aucune des coniques* (*si on préfère, n'est pas sur la surface*); en écrivant que le plan tangent passe en ω, on obtient l'équation

$$(16) \qquad \mu |h_1 \quad F_1 \quad F'_1 \quad F''_1| = 0,$$

qui est du second degré en μ (racines $\mu = 0$, $\mu = \infty$); on a ainsi les deux trajectoires conjuguées prévues *a priori*.

Les points K, K' sont définis par l'équation $\lambda\mu^2 - 1 = 0$, qui a ses racines toujours distinctes, et divisent harmoniquement les deux points $\mu = 0$, $\mu = \infty$ précédemment trouvés. Le multiplicateur de μ dans (16) donne les coniques de raccord de la surface avec certains plans.

Second type. — On a les équations

$$(17) \quad x = \frac{(F_1 - \lambda F'_1)\mu^2 + 2\mu F'_1 + h_1}{(F - \lambda F')\mu^2 + 2\mu F' + h}, \quad y = \frac{(F_2 - \lambda F'_2)\mu^2 + 2\mu F'_2 + h_2}{(F - \lambda F')\mu^2 + 2\mu F' + h}, \quad z = \frac{(F_3 - \lambda F_3)\mu^2 + 2\mu F'_3 + h_3}{(F - \lambda F')\mu^2 + 2\mu F' + h},$$

Le plan de la conique passe par le point fixe $\omega(h_1, h_2, h_3, h)$ *qui est obtenu pour* $\mu = 0$ *et commun à toutes les coniques;* en écrivant que le plan tangent passe en ω, on obtient l'équation

$$(18) \qquad \mu^2 |h_1 \quad F_1 \quad F'_1 \quad F''_1| = 0,$$

qui donne les deux trajectoires conjuguées particulières prévues *a priori*, confondues entre elles et réduites au point ω; les points K, K' sont fournis par l'équation $-\lambda\mu^2 + 2\mu = 0$ qui admet pour racine simple $\mu = 0$ qui est le point fixe ω et $\mu = 2 : \lambda$, qui fournit une enveloppe de la conique.

Ces deux types, qui correspondent au cas où le plan des coniques passe par un point fixe, donnent ainsi des surfaces (B) *dépendant de quatre fonctions arbitraires d'une variable.*

Troisième cas : les courbes (P_i, Q_i, R_i) *peuvent être des droites parallèles* (dont une ou plusieurs peuvent se réduire à un point). — Les deux relations

$$\alpha P_i + \beta Q_i + \gamma R_i = h_i, \qquad \alpha' P_i + \beta' Q_i + \gamma' R_i = k_i,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ sont des constantes indépendantes de i, tandis que h_i, k_i sont d'autres constantes en nombre égal à huit, peuvent, par le procédé déjà expliqué, être remplacées par les relations plus simples du type

$$P_i = h_i, \qquad R_i = k_i,$$

si dans le faisceau $(\alpha + l\alpha')x + (\beta + l\beta')y + (\gamma + l\gamma')z = 0$ se trouvent deux plans *distincts* déterminés par les racines de $(\beta + l\beta')^2 - 4(\alpha + l\alpha')(\gamma + l\gamma') = 0$, ou par les relations du type

$$Q_i = h_i, \qquad R_i = k_i,$$

si l'équation précédente en l a une racine double. Le premier cas conduit à la surface

$$(19) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x = a_1\mu^2 + 2Q_1\mu + c_1, & z = a_3\mu^2 + 2Q_3\mu + c_3, \\ y = a_2\mu^2 + 2Q_2\mu + c_2, & t = a\,\mu^2 + 2Q\,\mu + c\,, \end{array} \right.$$

où les a_i, c_i sont constants et les Q_i fonctions de λ; une ou deux des fonctions Q_i peuvent se réduire à une constante, mais l'une de celles qui ne sont pas constantes peut être prise égale à λ, de sorte que l'on a *trois fonctions d'une variable*; le plan de la conique λ passe par la droite fixe Δ qui joint les points (a_1, a_2, a_3, a), (c_1, c_2, c_3, c) obtenus sur chaque conique pour $\mu = 0$, $\mu = \infty$; le cône circonscrit le long de la conique λ a pour sommet le point $s(Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q')$ et décrit une courbe gauche; en écrivant que s est dans le plan de la conique, on a l'équation $|a_1 \quad c_1 \quad Q_1 \quad Q'_1| = 0$ qui définit les coniques particulières de raccord de B avec un plan passant par Δ.

Le second cas conduit à une surface

$$(20) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x = P_1\mu^2 + 2b_1\mu + c_1, & z = P_3\mu^2 + 2b_3\mu + c_3, \\ y = P_2\mu^2 + 2b_2\mu + c_2, & t = P\,\mu^2 + 2b\,\mu + c\,, \end{array} \right.$$

prêtant à des remarques semblables; *le plan de chaque conique passe par la droite fixe* $\Delta(b_1, b_2, b_3, b)$, (c_1, c_2, c_3, c) *et cette fois chaque conique est tangente à* Δ *en un point fixe obtenu pour* $\mu = 0$.

Les cas dualistiquement correspondants sont ceux où la courbe γ *lieu des sommets des cônes circonscrits est plane ou rectiligne* [d'ailleurs ces cas ont été signalés avec des courbes (P, Q, R) gauches].

Il ne reste plus qu'à signaler le cas qui utilise les deux particularités qui viennent d'être signalées : *les plans des coniques passent par un point fixe* ω *(ou même une droite) pendant que les sommets des cônes circonscrits décrivent une courbe plane* (*ou même une droite*). Les courbes auxiliaires (P_i, Q_i, R_i) sont planes; si donc nous appliquons les formules (14) ou (17), où l'on n'a pas encore disposé de l'homographie de l'espace, on pourra supposer que le plan de la courbe Γ, lieu des sommets, est le plan $t = 0$, par suite prendre $F'' = 0$, $F = b\lambda + a$; on aura donc, au lieu des formules (14)

$$(21)\quad x = \frac{(F_1 - \lambda F'_1)\mu^2 + 2h_1\mu + F'_1}{a\mu^2 + 2h\mu + b}, \quad y = \frac{(F_2 - \lambda F'_2)\mu_2 + 2h_2\mu + F'_2}{a\mu^2 + 2h\mu + b}, \quad z = \frac{(F_3 - \lambda F'_3)\mu^2 + 2h_3\mu + F'_3}{a\mu^2 + 2h\mu + b}.$$

Nous connaissons *quatre* trajectoires conjuguées : deux $\mu = 0$, $\mu = \infty$ sont obtenues comme courbes de contact de la surface avec le cône circonscrit de sommet $\omega(h_1, h_2, h_3, h)$ commun aux plans de toutes les coniques et non situé sur la surface; deux autres trajectoires sont obtenues par l'équation $a\mu^2 + 2h\mu + b = 0$ et correspondent à la section de la surface par le plan de Γ; bien entendu *une ou deux* de ces dernières peuvent appartenir à la catégorie précédente, suivant que *a ou b* ou bien *a et b* sont nuls. Si de plus F''_3 est nul, on a un lieu de sommets rectiligne.

Remarques analogues pour les types (17), (19), (20).

8. Exemples particuliers. — Prenons d'abord la quadrique

$$Q \equiv \int_0^\lambda (x - \lambda)(y - \lambda)\, d\lambda + \frac{Q_0}{6} \equiv xy\lambda - \frac{\lambda^2}{2}(x + y) + \frac{\lambda^3}{3} + \frac{Q_0}{6} = 0.$$

La fraction de l'enveloppe relative à la conique du plan $x - \lambda = 0$ est la surface cubique $x^3 - 3x^2y - Q_0 = 0$ dont la définition projective est : *surface cubique telle qu'un plan particulier* ($t = 0$) *la coupe suivant un ensemble de trois droites dont deux se confondent* (droite $t = 0$, $x = 0$, double dans l'intersection, droite $t = 0$, $x - 3y = 0$, simple). M. Blutel étudie en détail (p. 21-22) cette surface cubique (non réglée) : nous nous contentons de dire quelques mots sur le cas de la *surface réglée* Σ *générale de degré* 3 qui rentre dans cette définition de plusieurs façons, car on peut réduire son équation à la forme $X^2Z = Y^2T$ qui met en évidence la droite $\Delta(X = 0, Y = 0)$ lieu de points doubles et la droite $\Delta'(Z = 0, T = 0)$ enveloppe de plans tangents doubles, puis les deux génératrices stationnaires $(Y = 0, Z = 0)$, $(X = 0, T = 0)$; chacune des faces du trièdre de référence coupe la surface Σ suivant trois droites dont deux sont confondues, mais cela ne fait que *trois modes de génération* à titre de surface B, car nous devons faire pivoter un plan autour de la droite qui est *double dans l'intersection* : de la sorte l'ensemble des deux plans $X = 0$ ou $Y = 0$ ne donne que la série des plans pivotant autour de la droite double. Étudions ces trois modes : *un plan* $Y : Z = 2y_0 : z_0$ *passant par la génératrice stationnaire* $G(Y = 0, Z = 0)$ *coupe* Σ *suivant une conique* C *le long de laquelle existe un cône circonscrit dont le sommet* $(0, y_0, z_0, 0)$ *est sur la génératrice*

$G'(X=0,\ T=0)$; *les coniques* C *sont toutes tangentes à* G *au même point* (o, o, o); *les conjuguées de ces coniques sont les coniques analogues sections de la surface par les plans issus de* G; *on a ainsi un système conjugué doublement de Kœnigs, avec une quadrique tangente tout le long de chacune de ces coniques.* Le troisième mode consiste à couper la surface Σ par un plan issu de la droite double Δ, qui donne une génératrice unique g; nous sommes amenés à chercher les quadriques qui contiennent Δ et se raccordent avec Σ le long de g : pour g choisie, la quadrique Q dépend de deux paramètres; nous ferons donc varier aussi g et établirons deux relations entre les trois paramètres (en laissant à g la liberté de varier); pour chacune des ∞^1 quadriques obtenues, la caractéristique comprend Δ, g puis une conique C; la conique C engendre une certaine surface B proprement dite, mais le système (Δ, g) engendre Σ sans que l'on puisse dire que Q se raccorde à Σ le long de Δ : *la quadrique passe constamment par* Δ *et c'est pour cela que la surface enveloppe de* Q *contient* Δ; *ce troisième mode est dégénéré.*

Un cas analogue à celui qui vient d'être signalé est obtenu par l'enveloppe d'une sphère à un paramètre; c'est une surface B particulière et la surface associée à B se réduit au cercle de l'infini. Si pour la surface B, on remplace la sphère par une quadrique de révolution se raccordant à B le long du cercle caractéristique, on retrouve comme surface associée à B une surface véritable; on constate sans peine que *deux surfaces de révolution de même axe, mais à part cela quelconques, peuvent être considérées comme surfaces* B *associées.*

Écrivons maintenant

$$(1)\qquad Q \equiv \int (x-\lambda)^2 d\lambda + Q_0 \equiv \lambda x^2 - \lambda^2 x + \frac{\lambda^3}{3} + Q_0,$$

où Q_0 est une quadrique numérique; on obtient comme enveloppe la surface cubique $x^3 + 3Q_0 = 0$ dont la définition projective est la suivante : *surface cubique admettant une droite avec plan tangent inflexionnel tout le long de cette génératrice* (droite $x=t=0$, plan tangent $t=0$); *les plans pivotant autour de la génératrice en jeu donnent une conique le long de laquelle il existe une quadrique osculatrice* (¹) (*les coniques en jeu passent par deux points fixes* $Q_0=0,\ x=0,\ t=0$ *et y sont*

(¹) La forme de l'équation $x^3 + 3Q_0 = 0$ met, à elle seule, ce résultat en évidence; les projections, parallèlement à Ox, de ces coniques sur yOz sont homothétiques et concentriques, de sorte que, dans l'espace, les centres des coniques sont répartis sur une droite; trois de ces coniques sont sur une même quadrique; en faisant tendre deux de ces coniques l'une vers l'autre, on voit qu'il existe ∞^1 quadriques se raccordant avec la surface cubique le long d'une conique *donnée,* le complément de l'intersection étant une conique; si cette nouvelle conique tend vers la conique de raccord, on a la quadrique osculatrice.

tangentes à deux plans fixes, tangents à Q_0). On a un échantillon particulier intéressant, parce qu'il est *trois fois surface* B *avec quadriques osculatrices* en prenant la surface

$$x^3 - yzt = 0 \tag{2}$$

(représentation paramétrique canonique $x = \mu\lambda$, $y = \mu\lambda^3$, $z = \mu^2$). Cette surface admet trois séries de quadriques osculatrices que nous indiquons avec les équations de la conique de raccord :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{lll} x^2\lambda - xt\lambda^2 + t^2\dfrac{\lambda^3}{3} - \dfrac{yz}{3} = 0, & (t^2\lambda^3 - yz = 0, & x - \lambda t = 0), \\ x^2\lambda - xy\lambda^2 + y^2\dfrac{\lambda^3}{3} - \dfrac{zt}{3} = 0, & (y^2\lambda^3 - zt = 0, & x - \lambda y = 0), \\ x^2\lambda - xz\lambda^2 + z^2\dfrac{\lambda^3}{3} - \dfrac{ty}{3} = 0, & (z^2\lambda^3 - ty = 0, & x - \lambda z = 0). \end{array}\right.$$

Cette surface joue, comme on sait, un rôle important en géométrie projective, analogue à celui de la sphère en géométrie métrique.

Nous avons signalé que les *cyclides de Dupin et leurs transformées homographiques sont surfaces* B *de deux façons différentes, les deux systèmes de coniques étant d'ailleurs conjugués*. Les surfaces de révolution engendrées par la rotation d'une eonique autour d'une droite de son plan sont de telles tranformées homographiques.

Je cite un autre exemple de surface deux fois B, sans être transformée homographique d'une cyclide de Dupin (la surface réglée générale de degré 3 est aussi un tel exemple); il s'agit ici de la surface obtenue en *projetant* une conique sur les plans qui pivotent autour d'une droite de son plan; les deux systèmes de coniques sont encore conjugués; d'autre part l'une des coniques projection se réduit à une droite et ceci prouve que l'on n'a pas une transformée homographique d'une cyclide de Dupin; la surface est de degré 4.

Voici d'autres exemples intéressants : Si nous écrivons (α, β, γ constantes)

$$(4)\quad \begin{aligned} Q &\equiv \frac{1}{\lambda}\int (x + \lambda y + \lambda^2 z + \lambda^3)(x + \alpha\lambda y + \beta\lambda^2 z + \gamma\lambda^3)\,d\lambda \\ &\equiv x^2 + \lambda xy\frac{1+\alpha}{2} + \frac{\lambda^2}{3}[xz(1+\beta) + \alpha y^2] + \frac{\lambda^3}{4}[(\alpha+\beta)yz + (1+\gamma)x] \\ &\quad + \frac{\lambda^4}{5}[\beta z^2 + (\alpha+\gamma)y] + \frac{\lambda^5}{6}(\gamma+\beta)z + \gamma\frac{\lambda^6}{7}. \end{aligned}$$

La conique variable se déduit de la conique fixe ($\lambda = 1$), [sur l'une des nappes de l'enveloppe],

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &X + Y + Z + 1 = 0,\\ &X^2 + XY\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) + \frac{1}{3}[XZ(1+\beta) + \alpha Y^2] + \frac{1}{4}[(\alpha+\beta)YZ + (1+\gamma)X]\\ &\quad + \frac{1}{5}[\beta Z^2 + (\alpha+\gamma)Y] + \frac{1}{6}(\gamma+\beta)Z + \frac{\gamma}{7}, \end{aligned}\right.$$

par la transformation *affine* particulière

$$(6)\qquad x = \lambda^3 X, \qquad y = \lambda^2 Y, \qquad z = \lambda Z.$$

Quand on donne à λ successivement toutes les valeurs, la conique engendre la surface, la trajectoire de chaque point étant une cubique; la quadrique représentée par la seconde équation (5) enveloppe la surface, au cours de sa transformation. Si on a exprimé au moyen d'un paramètre μ quelconque les coordonnées d'un point de la conique (5), on a une représentation *non canonique* de la surface enveloppe par les formules

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \lambda^3(a_1\mu^2 + 2b_1\mu + c_1), & z &= \lambda(a_3\mu^3 + 2b_3\mu + c_3),\\ y &= \lambda^2(a_2\mu^2 + 2b_2\mu + c_2), & t &= \quad a\,\mu^2 + 2b\,\mu + c\ . \end{aligned}\right.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques et celle des conjuguées des coniques sont

$$(8)\qquad M\,d\lambda^2 + 2M'\lambda\,d\lambda\,d\mu + \lambda^2 d\mu^2 = 0,$$

$$(9)\qquad M'd\lambda + \lambda\,d\mu = 0,$$

où M, M' sont des *polynômes, à coefficients constants, en* μ *de degré* 4 *et* 2 *respectivement* [grâce à ce fait que les coniques ont une enveloppe qu'elles touchent en deux points les déterminants D, D', D″ se trouvent avoir un diviseur commun de degré 2 en μ; l'équation (8) est obtenue par suppression de ce facteur]. Si on supposait même α, β, γ égaux à l'unité, $M'^2 - M$ serait carré parfait. Chacune des équations (8), (9) s'intègre par quadratures; les racines de M' ou de $M'^2 - M$ correspondent à des trajectoires particulières qui sont des cubiques conjuguées ou asymptotiques. Pour avoir la représentation canonique, il y a lieu de réduire les racines de M' à 0 et ∞, par substitution homographique préalable sur μ, c'est-à-dire de choisir une représentation paramétrique convenable de la conique (5); cela fait, l'intégrale de (9) est $\mu = \bar{\mu}\lambda^m$, où $\bar{\mu}$ est une constante arbitraire, m un certain exposant fixe (*incommensurable souvent, réel ou imaginaire*); cela fait, il reste encore à multiplier les coordonnées homogènes (7) par une fonction $\varphi(\lambda)$ telle que $\frac{\partial}{\partial\lambda}(x\varphi)$, $\frac{\partial}{\partial\lambda}(y\varphi)$, $\frac{\partial}{\partial\lambda}(z\varphi)$, $\frac{\partial}{\partial\lambda}(t\varphi)$ aient des rapports mutuels ne dépendant que de λ : cela entraîne que $\frac{\lambda\varphi'}{\varphi}$ soit une constante; donc φ est une certaine expression λ^h et alors nous nous apercevons qu'on arrive à un type, évidemment canonique, comprenant comme cas particulier les surfaces du type (4),

$$(10)\quad \begin{cases} x = \mathrm{A}\lambda^\alpha\left[\dfrac{a\lambda^{2m}\mu^2}{\alpha+2m}+\dfrac{2b\lambda^m\mu}{\alpha+m}+\dfrac{c}{\alpha}\right], \\ y = \mathrm{B}\lambda^\beta\left[\dfrac{a\lambda^{2m}\mu^2}{\beta+2m}+\dfrac{2b\lambda^m\mu}{\beta+m}+\dfrac{c}{\beta}\right], \\ z = \mathrm{C}\lambda^\gamma\left[\dfrac{a\lambda^{2m}\mu^2}{\gamma+2m}+\dfrac{2b\lambda^m\mu}{\gamma+m}+\dfrac{c}{\gamma}\right], \\ t = \mathrm{D}\lambda^\delta\left[\dfrac{a\lambda^{2m}\mu^2}{\delta+2m}+\dfrac{2b\lambda^m\mu}{\delta+m}+\dfrac{c}{\delta}\right], \end{cases}$$

A, B, C, D, α, β, γ, δ, m sont des constantes; $\mathrm{A}\lambda^\alpha$, $\mathrm{B}\lambda^\beta$, $\mathrm{C}\lambda^\gamma$, $\mathrm{D}\lambda^\delta$ sont les coordonnées homogènes du sommet s du cône circonscrit. Les points de contact de chaque conique avec son enveloppe sont déterminés par l'équation

$$(11)\qquad a\lambda^{2m}\mu^2 + 2b\lambda^m\mu + c = 0.$$

Les plans tangents au cône et au cône infiniment voisin sont déterminés par l'équation

$$(12)\quad \begin{vmatrix} \dfrac{a\lambda^m\mu}{\alpha+2m}+\dfrac{b}{\alpha+m} & \dfrac{a\lambda^m\mu}{\beta+2m}+\dfrac{b}{\beta+m} & \dfrac{a\lambda^m\mu}{\gamma+2m}+\dfrac{b}{\gamma+m} & \dfrac{a\lambda^m\mu}{\delta+2m}+\dfrac{b}{\delta+m} \\ \dfrac{b\lambda^m\mu}{\alpha+m}+\dfrac{c}{\alpha} & \dfrac{b\lambda^m\mu}{\beta+m}+\dfrac{c}{\beta} & \dfrac{b\lambda^m\mu}{\gamma+m}+\dfrac{c}{\gamma} & \dfrac{b\lambda^m\mu}{\delta+m}+\dfrac{c}{\delta} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0,$$

que l'on réduit aussitôt par décomposition en déterminants partiels à la forme simple

$$(13)\quad \begin{cases} ab\mathrm{H}\lambda^{2m}\mu^2 + ac\mathrm{K}\lambda^m\mu + cb\mathrm{L} = 0, \\ \mathrm{H} \equiv \left|\dfrac{1}{\alpha+2m}\quad \dfrac{1}{\alpha+m}\quad 1\quad \alpha\right|, \qquad \mathrm{K} \equiv \left|\dfrac{1}{\alpha+2m}\quad \dfrac{1}{\alpha}\quad 1\quad \alpha\right| \qquad \mathrm{L} \equiv \left|\dfrac{1}{\alpha+m}\quad \dfrac{1}{\alpha}\quad 1\quad \alpha\right|. \end{cases}$$

On a aussitôt

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
H &\equiv \left|\frac{-m}{(\alpha+2m)(\alpha+m)} \quad \frac{1}{\alpha+m} \quad 1 \quad \alpha\right| \equiv \frac{-m\,|\,1 \quad \alpha+2m \quad (\alpha+m)(\alpha+2m) \quad \alpha(\alpha+m)(\alpha+2m)\,|}{\Pi(\alpha+m)(\alpha+2m)} \\
&\equiv \frac{-m\,|\,1 \quad \alpha \quad \alpha^2 \quad \alpha^3\,|}{\Pi(\alpha+m)(\alpha+2m)}, \\
L &\equiv \left|\frac{-m}{\alpha(\alpha+m)} \quad \frac{1}{\alpha} \quad 1 \quad \alpha\right| \equiv \frac{-m\,|\,1 \quad \alpha+m \quad \alpha(\alpha+m) \quad \alpha^2(\alpha+m)\,|}{\Pi\alpha(\alpha+m)} \equiv \frac{-m\,|\,1 \quad \alpha \quad \alpha^2 \quad \alpha^3\,|}{\Pi\alpha(\alpha+m)},
\end{aligned}
\right.
$$

K se déduit de L en remplaçant m par $2m$.

Si nous voulons avoir une série de *quadriques osculatrices*, avec cet exemple, il faut que les racines de (11) coïncident avec celles de (13); donc, puisque ni a ni c ne peuvent être nuls, on doit avoir $H = L$ $2b^2H = acK$, ce qui donne, m ne pouvant non plus être nul

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Pi(\alpha+2m) = \Pi\alpha \quad \text{ou} \quad \Sigma\alpha\beta\gamma + 2m\Sigma\alpha\beta + 4m^2\Sigma\alpha + 8m^3 = 0, \\
&\alpha\beta\gamma\delta b^2 = ac(\alpha+m)(\beta+m)(\gamma+m)(\delta+m).
\end{aligned}
\right.
$$

Il est facile d'avoir un exemple numérique relativement simple [les expressions (4) en donnent un, en prenant les constantes α, β, γ des formules (4), égales à un; ne pas confondre avec les notations de l'exemple (10) pour α, β, γ; dans l'exemple (4), m peut avoir une valeur compliquée, même imaginaire]. On peut remarquer que la première équation (15) est linéaire par rapport à α : en prenant $m = 1$, $\delta = 1$, $\gamma = 2$, $\beta = 3$ on trouve $\alpha = -4$ et la seconde équation (15) permet de prendre b, a arbitraires, c en résulte $(2b^2 = 3ac)$ (¹).

Pour avoir au contraire les surfaces où *chaque conique est osculatrice à son enveloppe, chaque cône osculateur à la développable enveloppe*, on devra avoir

$$
(16)\qquad b^2 = ac, \qquad \Pi\alpha(\alpha+2m) = \Pi(\alpha+m)^2.
$$

(¹) Pour que la surface soit algébrique, il est nécessaire et suffisant que α, β, γ, δ soient commensurables avec l'unité; m peut être incommensurable, puisque l'on peut remplacer le paramètre μ par un autre μ_1 défini par $\mu_1 = \lambda^m\mu$; mais la surface n'est réelle que si m est réel (du moins en général). Les conjuguées des coniques sont elles-mêmes algébriques si m est commensurable; or il est facile d'indiquer dans ce cas la solution générale pour α, β, γ, δ, m. La première équation (15) se résoud évidemment en écrivant $\alpha + 2m = \alpha t_1$, $\beta + 2m = \beta t_2$, $\gamma + 2m = \gamma t_3$, $\delta + 2m = \delta t_4$ avec $t_1 t_2 t_3 t_4 = 1$; en prenant m, t_1, t_2, t_3 quelconques et commensurables, on arrive au résultat demandé.

La solution générale de cette seconde équation (16) s'obtient en introduisant quatre nombres t_1, t_2, t_3, t_4 dont le produit est l'unité et écrivant

$$
(17)\quad \begin{cases}
\alpha(\alpha+2m)=-(\alpha+m)t_1^2, & \alpha=m\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{1+t_1^2}}-1\right),\\
\beta(\beta+2m)=-(\beta+m)t_2^2, & \beta=m\left(\dfrac{\varepsilon_2}{\sqrt{1+t_2^2}}-1\right),\\
\gamma(\gamma+2m)=-(\gamma+m)t_3^2, & \gamma=m\left(\dfrac{\varepsilon_3}{\sqrt{1+t_3^2}}-1\right),\\
\delta(\delta+2m)=-(\delta+m)t_4^2, & \delta=m\left(\dfrac{\varepsilon_4}{\sqrt{1+t_4^2}}-1\right),\\
\varepsilon_i=\pm 1, & t_1t_2t_3t_4=1.
\end{cases}
$$

Si m est commensurable et si chaque radical $\sqrt{1+t_i^2}$ est commensurable, la surface est algébrique, ainsi que les lignes conjuguées. Une solution *particulière* consiste à prendre $t_1t_2=1$, $t_3t_4=1$ et alors il suffit que t_1, t_3, $\sqrt{1+t_1^2}$, $\sqrt{1+t_3^2}$ soient commensurables. Écrivant $t_1=\dfrac{p_1}{q_1}$, il suffit que p_1, q_1, r_1 soient trois entiers tels que $p_1^2+q_1^2=r_1^2$. On sait résoudre ce problème d'arithmétique et l'on a un exemple simple en prenant

$$
t_1=t_3=\frac{3}{4},\qquad \varepsilon_1=\varepsilon_2=1,\qquad \varepsilon_3=\varepsilon_4=-1,
$$

$$
\alpha=\frac{-1}{5},\qquad \beta=\frac{-2}{5},\qquad \gamma=\frac{-9}{5},\qquad \delta=\frac{-8}{5}.
$$

On sait aussi déterminer explicitement les surfaces pour lesquelles K *et* K′ *sont toujours confondus* (corrélativement celles pour lesquelles H, H′ sont toujours confondus). Une telle surface dépend de quatre fonctions arbitraires d'un argument; on a à résoudre $P_i'R_i'-Q_i'^2=0$ et l'on peut poser

$$
P_i=F_i'',\qquad Q_i=-\lambda F_i''+F_i',\qquad R_i=\lambda^2F_i''-2\lambda F_i'+2F_i,
$$

de sorte que les quatre fonctions F_i sont arbitraires : sur chaque conique le point $\mu=\lambda$ est celui où la conique est osculatrice à son enveloppe.

9. Congruences W à nappes focales réglées. — On appelle congruence W toute congruence rectiligne telle que *les asymptotiques se correspondent sur les nappes focales*. Il est à remarquer que si, sur les nappes d'une congruence rectiligne, *une* famille d'asymptotiques se conserve, il en est de même *pour l'autre*; il suffit en effet de songer au réseau conjugué commun aux deux nappes (il en existe au moins *un* formé de deux familles distinctes); les asymptotiques le divisent harmoniquement et d'autre part le birapport de quatre tangentes se conserve en passant d'une focale à l'autre.

Donc si les nappes focales d'une congruence sont réglées, et si les génératrices se correspondent, l'autre famille d'asymptotiques se conserve et la congruence est W. Considérons donc sur ces deux nappes réglées R, R_1 deux asymptotiques correspondantes : la droite MM_1 qui réunit leurs points homologues est droite de la congruence et d'autre part dans le plan osculateur de chaque courbe, de sorte que l'on a la correspondance dite *asymptotique*, d'après Bianchi, entre ces deux courbes. Ceci explique comment le génial géomètre italien a obtenu les congruences W à nappes focales réglées, par application de sa transformation asymptotique des courbes.

Nous ne referons pas la théorie, mais il est néanmoins intéressant de voir comment elle se rattache à l'étude présente. *Quand* M *décrit une génératrice* G *de* R, *la droite* MM_1 *engendre une quadrique* Q *dont l'enveloppe se compose du couple* R, R_1 *qui est* W, *puis d'un autre couple réglé* R', R'_1 *qui est* W *lui aussi.* Cela tient à ce que M étant donné sur G, le plan tangent à R en M pivote autour de G en correspondant homographiquement à M; le plan MG_1 où G_1 est la génératrice, homologue sur R_1 de G, tourne autour de G_1 en correspondant homographiquement à M, de sorte que la droite MM_1 d'intersection de ces deux plans, droite générale de la congruence, engendre bien une quadrique Q se raccordant à R le long de G, à R_1 le long de G_1 : la caractéristique de Q comprend G, G_1, donc encore deux génératrices dans le système opposé, G' et G'_1 : les lieux R', R'_1 de G' et G'_1 sont deux nouvelles surfaces réglées, focales de la congruence des génératrices du système défini par G et G_1, et comme les génératrices G', G'_1 se correspondent sur R'. R'_1 on a un couple W nouveau; *de la sorte on ne peut obtenir un couple* W *à nappes focales réglées, sans en obtenir aussitôt un autre, sans intégration.* En regardant le système G, G_1, G', G'_1 comme constitué de deux coniques (G, G') et (G_1, G'_1), ou encore de deux coniques (G, G'_1), (G_1, G') on voit que R et R' sont *osculatrices* entre elles, tout le long de la courbe lieu du point (G, G') : en chaque point de cette courbe, la quadrique Q correspondante est osculatrice à R et R'.

Les travaux de Bianchi montrent comment, la surface R étant donnée, on trouve chaque surface réglée R_1 qui est à la seconde nappe d'une congruence W à focales réglées. Mais il est intéressant de montrer que R est précisément l'une des surfaces R_1 possibles : il suffit de considérer les quadriques Q *osculatrices* à R le long des diverses génératrices; pour une telle quadrique Q la caractéristique comprend G *deux fois*, donc se complète par deux génératrices G', G'_1 de système opposé dans Q : G' et G'_1 sont évidemment les *tangentes flecnodales* de Q; car une telle tangente rencontre *quatre* génératrices infiniment voisines de R : à savoir G, $G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$ de sorte qu'elle appartient à la quadrique G, $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ et aussi à la quadrique infiniment voisine $G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$. On a donc ce théorème : *Étant donné une surface réglée quelconque* R, *les tangentes flecnodales déterminent deux surfaces réglées* R', R'_1 *constituant les deux nappes d'une congruence* W *engendrée par les génératrices de même système que* G *sur les quadriques osculatrices à* R.

Si les deux tangentes flecnodales sont constamment confondues, de R *nous déduisons une seule surface associée* R', *de sorte que, pour* R', *les tangentes flecnodales sont aussi confondues.*

10. Transformation de Ribaucour. — Considérons la transformation de Sophus Lie d'un espace-droites (δ) en un espace-sphères (σ); une droite de (δ) devient une sphère de (σ); une surface réglée de (δ) devient une surface enveloppe de sphères de (σ). Une quadrique Q de (δ) devient donc une cyclide Σ de Dupin; étudions sur Σ les courbes transformées des coniques ou droites de Q : deux quadriques Q, Q_1 se raccordant le long d'une conique, les surfaces Σ, Σ_1 se raccordent le long d'une courbe unicursale de degré 4 qui correspond ainsi à la conique; aux génératrices rectilignes de Q correspondent les génératrices circulaires de Σ. Si donc nous considérons une quadrique à un paramètre touchant son enveloppe suivant deux coniques, il lui correspond une cyclide de Dupin à un paramètre, touchant son enveloppe suivant deux courbes unicursales de degré 4; dans le cas où le quadrique Q touche son enveloppe suivant quatre génératrices, c'est-à-dire définit deux couples W, à savoir R et R_1 d'une part, R' et R'_1 de l'autre, la cyclide touche son enveloppe suivant quatre cercles; autrement dit nous avons *deux couples* (ρ, ρ'_1), (ρ', ρ'_1) *de Ribaucour :* ρ *et* ρ' *sont nappes de l'enveloppe d'une sphère à deux paramètres, avec correspondance des lignes de courbure et ce couple se complète automatiquement par un autre* ρ_1, ρ'_1, *chaque surface de l'un des couples étant osculatrice le long d'une courbe à chaque surface de l'autre.*

De même pour une surface enveloppe de sphères à un paramètre, il y a lieu d'introduire la surface cyclide osculatrice le long de chaque cercle, pour en déduire l'équivalent des tangentes flecnodales.