LOUIS PASQUALINI

Sur les conditions de convexité d'une variété

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 2 (1938), p. 1-45
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1938_4_2__1_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

SUR LES CONDITIONS DE CONVEXITÉ D'UNE VARIÉTÉ

Par M. Louis PASQUALINI

Professeur agrégé au Lycée Gouraud (Rabat).

INTRODUCTION

Le présent Mémoire a pour point de départ la remarque suivante que j'ai présentée à M. G. Bouligand en 1935 :

Sur la courbe plane $y^3 = x^2$ chaque point, sauf l'origine, a ses environs convexes. Or la courbe n'est pas convexe dans son ensemble; elle n'est même pas convexe autour de l'origine.

Cette singularité peut-elle se produire sur une surface $z = f(x, y)$? Dans un article publié au *Bulletin de l'Académie Royale des Sciences de Belgique* (p. 1050, t. 22, 1936), j'ai montré que c'était impossible; c'est-à-dire que si un point M d'une surface S est entièrement entouré de points ayant leurs environs sur S convexes, ce point M a lui-même des environs convexes.

Cette différence entre les espaces à deux et trois dimensions ayant été observée, il était intéressant de connaître comment se comportent les espaces supérieurs vis-à-vis de la question suivante :

Si un point M, *d'une variété* $x_p = f(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ *ou* V_{p-1} *de l'espace euclidien* R_p *à* p *dimensions, est exclusivement entouré de points de* V_{p-1} *ayant leurs environs sur* V_{p-1} *convexes, les environs de* M *sur* V_{p-1} *sont-ils convexes?*

Sauf dans le cas $p = 2$, éclairé par l'exemple initial, j'ai montré que la réponse est affirmative (*C. R.*, t. 204, 1937, p. 222).

Pour abréger, appelons point c tout point d'une variété V_{p-1} de l'espace R_p qui a ses environs sur V_{p-1} convexes.

Nous distinguons deux catégories de points c, les points c_+ et c_-, en tenant compte du sens de la convexité (conformément aux conventions explicitées au n° 22). Enfin tout point qui n'est pas un point c a été appelé un point n.

Notre résultat rappelé tout au début se résume dès lors sous cette forme : *si un point d'une surface est exclusivement entouré de points c, c'est un point c.*

On connaît[1] la convexité d'une rondelle de surface $z = f(x, y)$ projetée sur le plan xoy suivant une figure convexe et dont tous les points sont des points c. On voit, en utilisant notre proposition, que sans altérer le précédent critère de convexité cette dernière hypothèse peut être omise sur un point de la rondelle.

Peut-elle être omise pour un ensemble de points plus important sans que la rondelle cesse d'être convexe?

Telle est la question qu'à la suite des résultats que je viens de rappeler m'a posée M. G. Bouligand[2], orientant ainsi mon travail parallèlement à des recherches qu'il avait dejà dirigées concernant la raréfaction des ensembles[3].

J'ai d'abord étudié le cas d'une rondelle de surface $z = f(x, y)$. Soit E un ensemble ponctuel prélevé sur une rondelle Σ. *On suppose que* $\Sigma - E$ *est entièrement constitué de points c. A quelle condition doit satisfaire* E *pour que* Σ *soit convexe?*

J'ai trouvé que E doit être *punctiforme.* Ensuite, j'ai considéré le cas général d'une variété V_{p-1} à $p-1$ dimensions plongée dans l'espace euclidien R_p à p dimensions. Je me proposais d'obtenir un critère de convexité d'une rondelle Σ, $(p-1)$-dimensionnelle, dont tous les points sont des points c, sauf pour un ensemble ponctuel E, en limitant supérieurement la dimension de E.

On trouve que E *est astreint à ne contenir aucun continu à plus de $p-3$ dimensions.*

Tous les résultats que je viens d'énoncer ont fait l'objet de communications publiées dans le *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* et dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*[4].

---

(1) G. Bouligand. *Introduction à la géométrie infinitésimale directe.* Vuibert, 1932, n° 122. Nous désignons dans la suite cet ouvrage par l'abréviation *G. I. D.*

(2) Dans sa « *Notice sur ses travaux scientifiques* » (Société Française d'imprimerie et librairie, Poitiers, 1937) M. G. Bouligand exprime ainsi son idée : Étant donnée une proposition dont la conclusion est le fruit d'une collection infinie d'hypothèses, est-il possible de maintenir la même proposition lorsqu'à la collection précédente on en substitue une autre moins riche?

(3) Ch. Brunold. *Contribution à l'étude de quelques catégories d'ensembles totalement discontinus définis par des conditions géométriques* (Thèse de doctorat, Poitiers, 1934).

Shao-Lien-Chow. *Questions de géométrie des ensembles* (Raréfaction et Localisation), Vuibert, 1936 et *Fundamenta Mathematicae*, t. XIX, 1937, p. 12-21.

(4) *Bull. Acad. Roy. Belgique*, t. 22, 1936; *C. R.*, t. 204, 1937, p. 222; *C. R.*, t. 204, 1937, p. 646; *C. R.*, t. 204, 1937, p. 1153.

Qu'il me soit permis d'ajouter que mes recherches ont déjà retenu l'attention de M. Otto Haupt, professeur à l'Université d'Erlangen (*Monatsheften für Mathematik und Physik*, 1937, t. 46, p. 88, note) et de M. Georg Nöbeling (*Munchen Ak. Sb.*, 1937, II, 6).

Voici maintenant un rapide résumé du présent Mémoire.

Le chapitre I est consacré à des généralités, qui sont utilisées dans la suite, sur les ensembles ponctuels convexes. J'établis, en particulier, une condition pour que la réunion d'une suite ordonnée d'ensembles convexes juxtaposés soit convexe(¹).

Il suffit pour cela qu'en tout point de la frontière de la réunion qui appartient à deux ou plusieurs ensembles constituants, il existe un hyperplan d'appui local pour la réunion.

Je termine ce chapitre par la proposition auxiliaire suivante : si un volume V est la limite d'une suite de volumes emboîtés convexes, il est convexe.

Dans le chapitre II, j'étudie la convexité d'une surface S_2 de l'espace R_3. Après avoir précisé la nature des surfaces(²) sur lesquelles vont porter les raisonnements et montré qu'elles englobent les Orthosurfaces de MM. G. Bouligand et J. Mirguet, je donne trois définitions équivalentes d'un point c, dont l'utilité est justifiée par l'usage que j'en fais dans les démonstrations des théorèmes qui s'y rattachent. Enfin j'introduis les points c_+ et c_-.

Ceci posé, je montre qu'une rondelle Σ entièrement constituée de points c_+ est convexe. Je considère ensuite une rondelle Σ dont tous les points sont des points c_+, sauf un point M : elle est convexe.

Enfin la convexité de Σ subsiste quand on excepte, au lieu d'un point, un ensemble E punctiforme. Jusqu'ici, le paratingent second (cf. nº 35) n'est pas invoqué.

En terminant j'établis un lien entre le concept de point c et celui de point où ce ptg_2 est vide; ce qui me permet de généraliser, comme je l'ai dit plus haut, la proposition donnée par M. G. Bouligand au nº 122 de sa *G. I. D.* concernant la convexité d'une rondelle dont le ptg_2 est partout vide.

Le chapitre III traite de la convexité d'une variété $(p-1)$ fois étendue de l'espace R_p. Dans l'ensemble c'est une généralisation du chapitre II.

On y verra que la nature d'un point courant M qui n'a dans son entourage Σ que des points c_+ est un point c_+, si $p > 2$, mais que si $p = 2$, on ne peut rien dire.

J'ai cherché à mettre en évidence la raison de cette différence entre le cas du plan

---

(¹) J'appelle ainsi une suite $\{E_i\}$ d'ensembles telle que deux ensembles consécutifs E et E_{i+1} aient en commun p points non situés sur une variété linéaire $p-2$ fois étendue.

(²) Sur les conseils de M. G. Bouligand j'appelle ces surfaces, dont les environs de chaque point peuvent se représenter par une équation de la forme $z = f(x, y)$: surfaces cartésiennes.

($p = 2$) et le cas général ($p > 2$). Elle réside dans le fait que, si $p > 2$ tout segment $\overline{ab}$ appartenant à la projection de Σ sur $x_p = 0$, ayant entre ses extrémités la projection m de M, est la limite d'une suite de segments $\{\overline{a_i b_i}\}$ de e constitués par des projections de points c_+; et que si $p = 2$ une pareille suite ne peut être formée. Je justifie cette remarque en étudiant le cas d'un point M en bordure entouré de points c_+. J'aboutis, en effet, à cette conclusion : si pour n'importe quel segment $\overline{ab}$ passant par m, on peut constituer une suite $\{\overline{a_i b_i}\}$ tendant vers $\overline{ab}$, M est un point c_+; sinon il y a doute.

Considérons par exemple la surface obtenue en réunissant deux demi-sphères tangentes reposant par leurs bases sur un même plan horizontal et situées au-dessus du plan; le point de contact est exclusivement entouré de points c_+ et cependant c'est un point n.

J'étudie en terminant la répartition des points n sur une V_{p-1}. J'obtiens le théorème suivant :

Dans les environs de tout point n sur une V_{p-1} on peut prélever un continu $p - 2$ fois étendu lequel est entièrement constitué de points n.

J'exprime ma profonde gratitude à M. le professeur Bouligand, qui, malgré mon éloignement de la France, a dirigé mon travail pas à pas, et a su par ses encouragements répétés et affectueux me soutenir dans mes efforts.

J'adresse mes sincères remerciements à M. le recteur Deltheil et à M. le professeur Buhl qui ont bien voulu favoriser l'impression de ce modeste travail aux *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*.

CHAPITRE PREMIER

Ensembles ponctuels convexes.

Définition. — Intersection. — Projection. — Condition nécessaire et suffisante pour que la réunion d'un nombre fini d'ensembles convexes juxtaposés soit convexe. — Ensemble limite J d'une collection infinie d'ensembles convexes.

1. Définition d'un ensemble ponctuel convexe appartenant a l'espace euclidien R_p a p dimensions. — On dit qu'un ensemble ponctuel E est convexe, quand tout segment de droite $\overline{AB}$, dont les extrémités A et B sont des points de E, est entièrement constitué par des points de l'ensemble E.

Il résulte immédiatement de cette définition que si l'on peut prélever sur un ensemble convexe E de l'espace R_p un groupe de $p+1$ points, non situés sur une même variété linéaire $(p-1)$ fois étendue, cet ensemble E est p-dimensionnel.

Remarque. — Si les deux extrémités d'un segment $\overline{AB}$ sont intérieures à un ensemble convexe E, tous les points du segment $\overline{AB}$ sont des points intérieurs de E. Si une seule extrémité est intérieure, A par exemple, B étant sur la frontière, tous les points de $\overline{AB}$, sauf B, sont intérieurs à E.

2. Théorème I. — *L'intersection d'un nombre fini ou d'une infinité, dénombrable ou non, d'ensembles convexes est un ensemble convexe.*

En effet, si deux points A et B sont communs à une famille finie ou infinie d'ensembles convexes, le segment $\overline{AB}$ tout entier est commun à tous ces ensembles.

Corollaire. — *Deux ensembles convexes p-dimensionnels, de l'espace* R_p, *n'empiétant pas l'un sur l'autre* (1) *et possédant p points communs, non situés sur une même variété linéaire à* $p-2$ *dimensions, ont pour intersection un ensemble convexe appartenant à un hyperplan* $p-1$ *fois étendu.*

Démontrons cette proposition dans le cas de deux ensembles à trois dimensions, non empiétant, ayant en commun trois points A, B, C non en ligne droite.

---

(1) On dit que deux ensembles n'empiètent pas l'un sur l'autre, quand ils n'ont aucun point intérieur commun.

Tout point D, commun à ces deux ensembles, est situé dans le plan déterminé par les trois points A, B, C; car, sinon, les deux ensembles empiéteraient l'un sur l'autre, puisqu'ils auraient en commun le tétraèdre ABCD.

D'autre part, en vertu du théorème I, l'intersection est un ensemble convexe.

3. Théorème II. — *Si dans l'espace* R_p *l'intersection d'un ensemble p-dimensionnel* $(p > 2)$ *par tout hyperplan* $(p-1)$ *fois étendu parallèle à* $p-2$ *directions fixes est convexe, cet ensemble* E *est convexe.*

Soient A et B deux points quelconques de E. On peut toujours faire passer par la droite AB, au moins un hyperplan P parallèle aux $p-2$ directions fixes de l'énoncé. Puisque l'intersection de P et de E est convexe, elle contient $\overline{AB}$; donc $\overline{AB}$ appartient à E.

4. Théorème III. — *Si par les différents points d'un ensemble convexe* e, *on mène des demi-droites parallèles et de même sens, l'ensemble ponctuel* E *formé par les points de ces demi-droites est convexe.*

Soient A et B deux points quelconques de E. S'ils sont sur une même demi-droite, il est clair que tout point de $\overline{AB}$ est un point de E; sinon ils sont sur deux demi-droites différentes α et β issues de deux points a et b de e. Dans ce cas tout point de $\overline{AB}$ se trouve sur une demi-droite issue de $\overline{ab}$, c'est-à-dire d'un point de e; donc il appartient à E.

On démontrera d'une manière analogue le théorème suivant plus général.

5. Théorème IV. — *Si, par chaque point d'un ensemble convexe*[1] *d'un espace* R_{p+q} *à* $p+q$ *dimensions, on fait passer une variété linéaire q-dimensionnelle parallèle à une variété linéaire fixe* Δ_q, *l'ensemble ponctuel, obtenu en réunissant ces variétés, est convexe.*

6. Théorème V. — *La projection orthogonale ou oblique d'un ensemble convexe, de l'espace* R_{p+q} *sur une variété linéaire* V_n *à* p *dimensions, est un ensemble convexe.*

Ce théorème est une conséquence directe de ceux qui précèdent.

Notons, en particulier, que dans l'espace ordinaire, un ensemble convexe se projette sur un plan quelconque suivant un ensemble convexe.

Remarque. — On déduit de ce théorème qu'il suffit qu'un ensemble ait une projection, orthogonale ou oblique, sur une variété linéaire, qui ne soit pas convexe,

[1] On ne fait aucune hypothèse sur la dimension de cet ensemble.

pour que lui-même ne le soit pas. Toutefois un ensemble peut avoir toutes ses projections convexes sans être pour cela convexe; il en est ainsi, par exemple, pour la frontière d'un ensemble convexe.

Pour retrouver le théorème inverse du théorème V il faut avoir recours à l'opération inverse de la projection qui est *la composition spatiale* de deux ensembles (*G. I. D.*, n° 35).

Nous nous bornerons à énoncer le théorème :

7. Théorème VI. — *Si l'on compose un ensemble convexe* E_p *à* p *dimensions, et un ensemble convexe* F_q *à* q *dimensions suivant un ensemble* G_{p+q} *à* $p+q$ *dimensions,* G_{p+q} *est convexe.*

8. Hyperplan[1] d'appui. — Un ensemble convexe E d'un espace R_p possède la propriété très importante suivante :

En tout point M *de sa frontière on peut mener au moins un hyperplan* Π_M *tel que tout point intérieur de* E *soit d'un côté déterminé de* Π_M. *L'ensemble* E *est supposé admettre au moins un point intérieur.*

On trouvera la démonstration de cette proposition, dans le cas $p = 3$, au n° 89 *bis* de la *Géométrie infinitésimale directe* de M. G. Bouligand; le raisonnement s'applique, sans grand changement, à un espace quelconque.

Remarque. — Il peut y avoir sur Π_M des points de E autres que M, ce sont alors des points frontière, mais il n'y a aucun point de la frontière de E situé par rapport à Π_M du côté opposé à un point intérieur.

9. Hyperplan d'appui local. — Nous dirons qu'un hyperplan Π_M est un hyperplan d'appui local en un point M d'un ensemble E, si tout point intérieur à E, voisin de M, est d'un côté déterminé de Π_M.

Théorème VII. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un hyperplan* Π_M *soit un hyperplan d'appui en* M *pour un ensemble convexe* E, *est qu'il soit un hyperplan d'appui local en* M.

Nous supposons que l'ensemble E, est p-dimensionnel et qu'il est plongé dans l'espace R_p.

1° *La condition est évidemment nécessaire* car si Π_M est un hyperplan d'appui pour E il l'est aussi pour les environs du point M sur E.

2° *La condition est suffisante.* En effet, soit Π_M un hyperplan d'appui en M à

[1] Nous réserverons le nom d'hyperplan à la variété linéaire à $p-1$ dimensions de l'espace R_p.

l'ensemble e sous-ensemble de E, constituant l'entourage de M. Supposons, contrairement à ce que nous voulons démontrer, que Π_M ne soit pas un hyperplan d'appui pour l'ensemble E; on pourrait, dans ce cas, trouver un point A intérieur à l'ensemble E, situé par rapport à Π_M du côté opposé à l'ensemble e.

Puisque E est convexe tous les points du segment AM sont des points intérieurs à E, sauf M, (n° 1. Remarque) et ils sont situés par rapport à Π_M du côté opposé à e; or ceux qui sont voisins de M doivent faire partie de e par hypothèse. Il est donc absurde de supposer que Π_M n'est pas un hyperplan d'appui pour E; ce qui justifie la proposition énonçée.

10. — Considérons la réunion

$$E = E_1 \dot{+} E_2 \dot{+} \dots \dot{+} E_n$$

de n ensembles convexes bornés à p dimensions de l'espace R_p n'empiétant pas l'un sur l'autre.

Supposons, de plus, que deux ensembles consécutifs E_i et E_{i+1} aient en commun p points non situés sur une variété linéaire à $p - 2$ dimensions(1) et que tout point commun à deux ensembles non consécutifs appartienne à tous les ensembles intermédiaires (E_1 et E_n étant ou non consécutifs). Nous dirons que ces ensembles E_i sont juxtaposés.

Théorème VIII. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* E *soit convexe est qu'en tout point de la frontière de* E *appartenant à deux ensembles au moins de la suite* $\{E_i\}$ *il existe un hyperplan d'appui local pour* E.

I. *La condition énoncée est évidemment nécessaire*, car si E est convexe, il admet en chacun de ses points frontière un hyperplan d'appui local.

II. *La condition est suffisante.* Pour l'établir nous nous bornerons au cas $p = 2$; pour l'étendre aux cas $p > 2$ il n'y a qu'à utiliser le théorème II(2).

Rappelons que l'ensemble E est un domaine dont la frontière F est contenue dans la réunion des frontières des E_i; par suite F est un cycle formé par la réunion d'un nombre fini d'arcs dont chacun se laisse représenter sous la forme $y = f(x)$ par rapport à un système d'axes convenablement choisi(3). Enfin F a une longueur finie.

Ceci posé soit O un point de F appartenant à m ensembles E_i; $E_1, E_2, \dots, E_m$, par exemple.

(1) D'après le corollaire du n° 2 deux ensembles consécutifs ont en commun un ensemble convexe $(p - 1)$-dimensionnel.

(2) La section de E par un hyperplan est un domaine (*G. I. D.*, n° 124).

(3) Voir *G. I. D.*, n° 89 *bis*.

Je dis qu'on peut tracer un cercle Γ de centre O, assez petit, pour que l'ensemble e des points de E non extérieurs à Γ soit convexe.

En effet, on peut choisir Γ de manière que

$$e = e_1 + e_2 + \ldots + e_m,$$

où e_h(1) désigne l'intersection de E_h et de Γ.

Deux ensembles consécutifs e_h, e_{h+1} ont pour frontière commune un rayon du cercle, OM_h (n° 2, Corollaire).

L'ensemble e est situé tout entier d'un même côté d'un diamètre de Γ (en restreignant le rayon de Γ si cela est nécessaire) car, par hypothèse, E admet une droite d'appui locale en O.

Soient P et Q deux points de e; s'ils appartiennent à e_h, le segment $\overline{PQ}$ est dans e_h donc dans e.

Si P est dans e_h et Q dans e_{h+k} le segment $\overline{PQ}$ coupe les rayons OM_h, OM_{h+1}, ..., OM_{h+k-1} aux points R_h, R_{h+1}, ..., R_{h+k-1}; le segment $\overline{R_h R_{h+1}}$ appartient à e_{h+1} et on voit que $\overline{PQ}$ est formé de segments contenus dans e, donc il appartient à e.

Remarquons que si e ne se réduit pas à un demi-cercle l'ensemble $\Gamma - e$ n'admet aucune droite d'appui au point O.

Ceci est d'ailleurs vrai en tout point O de F, pourvu que ses environs sur F ne soient pas rectilignes.

Nous allons maintenant démontrer que l'ensemble E est convexe.

Supposons qu'il ne le soit pas. On pourrait alors trouver un point A sur F tel qu'une droite d'appui locale Δ en A ne soit pas droite d'appui pour E. Il existerait un point B de F situé par rapport à Δ du côté opposé aux environs de A sur E. La frontière F étant un cycle, un observateur partant de A, se déplaçant sur F toujours dans le même sens, peut atteindre B de deux façons différentes : soit en ayant sans cesse son voisinage sur E à sa gauche, nous dirons alors qu'il se déplace dans le sens direct, soit en l'ayant à sa droite (sens rétrograde)(2). Dans l'un et l'autre de ces déplacements il rencontre Δ au moins une fois (3).

Soient C et D les premiers points de Δ que l'on rencontre respectivement dans le sens direct et dans le sens rétrograde.

Considérons les domaines G_1 et G_2 limités par les cycles $\widehat{AC}$, $\overline{CA}$ et $\widehat{AD}$, $\overline{DA}$ (4) obtenus par la réunion de l'arc de F parcouru et de sa corde.

---

(1) Les e_h sont convexes (théorème I).

(2) Cette définition exige que le sens de la concavité soit conservé sur F; ceci résulte de la première partie de la démonstration.

(3) Si Δ touche F suivant un segment $\overline{AA'}$, l'observateur après avoir quitté $\overline{AA'}$ rencontre Δ au moins une fois dans l'un ou l'autre de ces déplacements.

(4) Le domaine G_2 est limité par $\widehat{A'D}$, $\overline{DA'}$ dans le cas où Δ touche F suivant $\overline{AA'}$.

Ou bien les deux points C et D sont de part et d'autre de A, ou bien ils sont d'un même côté de A. (Supposons pour fixer les idées que C soit, dans ce dernier cas, entre A et D.) L'observateur parcourant $\widehat{AC}$ se déplace dans le sens direct par rapport à E et dans le sens rétrograde par rapport à G_1.

Le domaine G_1 admet une droite d'appui Δ' parallèle à Δ (*G. I. D.*, 102 *bis*) qui peut avoir avec $\widehat{AC}$ plusieurs points communs. Parmi ces points il existe toujours un point O n'ayant pas sur F ses environs entièrement rectilignes. Or on peut construire un cercle Γ, assez petit, pour que l'intersection de Γ et de G_1 ne contienne aucun point de E et tel que $\Gamma \times E = e$ soit convexe. Le domaine G_1 admettant Δ' pour droite d'appui en O, il en sera de même de son sous-ensemble $\Gamma - e$, contrairement à la remarque faite plus haut. Donc E est convexe.

11. Théorème IX. — *L'ensemble limite* J(¹) *d'une collection infinie d'ensembles convexes est un ensemble convexe.*

Soit L l'ensemble limite J d'une collection infinie d'ensembles convexes; A et B deux points de L. Nous allons montrer qu'un point quelconque C du segment $\overline{AB}$ est un point de L; ceci revient à prouver qu'il n'y a qu'un nombre fini d'ensembles de la collection dont la distance à C dépasse ε, si petite que soit la longueur ε. Considérons les hypersphères S_A, S_B, S_C ayant respectivement pour centres A, B, C et pour rayon ε.

Il n'y a qu'un nombre fini d'ensembles de la collection qui n'ont aucun point dans S_A; il en est de même pour S_B. Donc on peut trouver un ensemble E_1 ayant un point A_1 dans S_A et un point B_1 dans S_B; $\overline{A_1B_1}$ appartient à E_1, puisque E_1 est convexe mais $\overline{A_1B_1}$ rencontre S_C; l'ensemble E_1 a des points dans S_C; par suite le point C appartient à l'ensemble d'accumulation de la collection.

D'autre part, je dis qu'il ne peut y avoir une infinité d'ensembles extérieurs à S_C. En effet, un ensemble qui rencontre S_A et S_B, rencontre, on vient de le voir, S_C; donc un ensemble extérieur à S_C est extérieur, au moins, à l'une des hypersphères S_A, S_B; mais alors il y aurait une infinité d'ensembles extérieurs soit à S_A, soit à S_B, et l'un des deux points A ou B ne serait pas un point de L. Ce qui démontre le théorème.

Corollaire. — *Si un volume* V *est la limite d'une suite de volumes emboîtés convexes, il est convexe.*

(¹) Ensemble limite au sens de Janiszewski (*G. I. D.*, n° 131).

CHAPITRE II

Convexité d'une surface S_2 de l'espace R_3.

I

Définition générale des surfaces cartésiennes. — Orthosurfaces de MM. G. Bouligand et J. Mirguet. — Orientation des directions Z.

12. Définition d'une surface cartésienne (¹). — Nous dirons qu'un ensemble E de l'espace euclidien à trois dimensions possède le caractère de surface cartésienne en un de ses points M, s'il existe un prisme droit I à section carrée, de centre M, tel que :

1° L'ensemble σ des points de E non extérieurs à I soit un continu ayant pour projection orthogonale sur le plan d'une section droite de I une région ou un nombre fini de régions, le point m projection de M étant seul point commun à ces régions; de la sorte, m est limite de points intérieurs à chacune de ces régions (²).

2° La correspondance entre un point de σ et sa projection soit biunivoque.

Point courant. — Le point M sera dit un point courant si sa projection m est un point intérieur du continu e projection de σ.

Remarquons qu'on peut alors choisir I assez petit de manière que e se réduise à sa section droite.

Point en bordure. — Un point autre qu'un point courant sera dit en bordure. Un point en bordure se projette sur la frontière de e. Il peut appartenir à la frontière d'une seule région (point simple) ou de plusieurs régions (point multiple).

Définition. — Nous appellerons *surface cartésienne* un continu ponctuel borné possédant le caractère de surface cartésienne en chacun de ses points.

(¹) Le vocable de surface cartésienne m'a été fourni par M. G. Bouligand.

(²) La réunion de ces régions est un continu e puisqu'elle constitue la projection d'un continu σ. Le point m coupe e en autant d'ensembles disjoints qu'il y a de régions. Rappelons qu'une *région* est la fermeture d'un domaine (*G. I. D.*, n° 41).

13. Orthosurfaces. — Parmi les surfaces cartésiennes se trouve une catégorie de continus bornés qui retiendra plus particulièrement notre attention : ce sont les surfaces définies par M. G. Bouligand aux n^{os} 82-83 de sa *G. I. D.* et que M. J. Mirguet a reprises au n° 21 de sa thèse (*Nouvelles recherches sur les notions infinitésimales directes*, Gauthier-Villars) sous le nom d'orthosurfaces[1].

Reproduisons ces définitions et rappelons brièvement les propriétés principales de ces continus bornés.

1° *Orthosurfaces closes.* — Ce sont des continus bornés satisfaisant aux conditions suivantes :

a) en chaque point O, d'un tel continu K, existe au moins une direction OZ exclue du paratingent en ce point;

b) toute parallèle à cette direction qui se rapproche indéfiniment du point O de K finit par contenir un point de K qui tend vers O.

M. G. Bouligand montre que ces continus sont des surfaces closes sans point multiple, qu'il est possible de recouvrir avec un nombre fini de rondelles, représentables, moyennant des axes appropriés (axe oz exclu du ptg) à chacune d'elles, sous la forme

$$z = f(x, y)$$

avec f à rapports incrémentaux bornés. (Voir *G. I. D.*, n° 82.)

2° *Orthosurfaces avec bords.* — Ce sont des continus bornés satisfaisant aux conditions suivantes :

α) en chaque point d'un tel continu K la condition « *a* » est remplie;

β) il en est de même de la condition « *b* » exception faite d'un nombre fini de continus dont le paratingent en chaque point laisse échapper toutes les directions d'un plan.

On suppose de plus remplies les conditions suivantes :

h') la direction exclue du paratingent de K en un point d'un de ces continus C appartient au plan contenant les directions exclues du paratingent de C en ce point;

h'') il existe certaines parallèles à cette direction, infiniment voisines de C, et sans point commun avec K, en même temps que d'autres parallèles, arbitrairement voisines de C et contenant un point de K non situé sur C.

---

(1) M. J. Mirguet fait remarquer que la définition qu'il donne de l'orthosurface est plus large, dans le cas des points en bordure, que celle proposée par M. G. Bouligand; toutefois, nous nous en tiendrons aux définitions de la *G. I. D.* Quant au terme « orthosurface » il a été employé pour la première fois par M. J. Mirguet dans sa thèse, après entente avec M. G. Bouligand.

Ces continus possèdent la propriété que nous avons énoncée pour les orthosurfaces closes. Les courbes telles que C sont des cycles qui constituent les bords de l'orthosurface (*G. I. D.*, n° 83).

On voit sans peine que les orthosurfaces sont des surfaces cartésiennes.

Remarque. — Il y a des surfaces relativement simples, qui ne sont pas, malgré cela, des orthosurfaces; par exemple la surface de révolution

$$z^2 = x^2 + y^2$$

n'admet, à l'origine, aucune droite exclue du paratingent en ce point.

M. J. Mirguet cite cet autre exemple (n° 21, page 25 de sa thèse) : « On ajoure un plan en lui enlevant deux cercles tangents extérieurement; le point de contact représente l'étranglement d'un filet de surface »; or en ce point O la condition β n'est pas remplie; car, tout plan passant par O contient au moins une paratingente en O du continu C, réunion des deux cercles.

Mais, sur les surfaces algébriques, par exemple, des points, comme ceux dont nous venons de parler, sont exceptionnels; en général, sur ces surfaces, les environs d'un point sont constitués par une rondelle d'orthosurface : de là, l'importance de cette catégorie de continus [1].

14. Étude sommaire des surfaces cartésiennes. — Une surface cartésienne peut, comme une orthosurface, être recouverte avec un nombre fini de continus représentables, chacun, sous la forme

$$z = f(x, y)$$

par rapport à un système d'axes appropriés; la fonction f étant continue, sans plus, sur un ensemble e.

En effet un point M quelconque d'une surface cartésienne S a pour voisinage sur S un continu σ (n° 12); si l'on prend comme axes de coordonnées Mx, My, Mz respectivement parallèles aux arêtes du prisme I, on a pour σ une équation de la forme

$$z = f(x, y),$$

f étant définie sur l'ensemble e projection de σ sur le plan des xy.

---

[1] M. G. Bouligand m'a fait observer que les surfaces cartésiennes sont invariantes seulement dans le champ linéaire (avec possibilité d'une généralisation dans le champ projectif); tandis que les orthosurfaces sont invariantes dans un champ plus vaste, celui de la topologie restreinte du premier ordre.

S étant un continu borné dont chaque point est intérieur à un prisme I, on peut, en vertu du lemme de Borel-Lebesgue, extraire de l'ensemble des prismes I, un nombre fini de ces prismes, de telle sorte que chaque point de S soit intérieur à au moins l'un d'eux. Par conséquent nous pouvons recouvrir la surface S avec un nombre fini de continus de la forme

$$z = f(x, y).$$

Cas particulier. — Supposons que S n'admette que des points courants (c'est-à-dire pas de bords). Soit M un point de S; on peut restreindre suffisamment le côté de la base du prisme I pour que chaque point de la section de I par le plan des xy soit la projection d'un point de σ. La fonction f est alors définie sur l'aire entière de ce carré.

Les environs de M sur S sont donc constitués par une rondelle de surface([1]). Comme tous les points du continu borné S sont intérieurs à une rondelle, il s'ensuit qu'un nombre fini de ces rondelles suffit à recouvrir S.

Notons que la surface S est sans point multiple; qu'elle est close, qu'elle partage l'espace en deux régions : celle qui est bornée est appelée région intérieure, l'autre région extérieure.

15. Directions Z. — Définition. — Nous dirons qu'une droite Δ est *une direction Z en un point* M d'une surface, s'il existe un prisme I dont l'axe MZ est parallèle à Δ et pour lequel les conditions du n° 12 sont satisfaites.

Il résulte du lemme d'univocité (*G. I. D.*, n° 79) qu'en tout point M d'une orthosurface une direction exclue du paratingent en ce point est une direction Z; toutefois une direction Z peut être paratingente, comme le montre la surface de révolution $z^3 = x^2 + y^2$ qui admet à l'origine l'axe OZ, à la fois pour ptg et pour direction Z([2]).

Dans ce cas il n'y a qu'une seule direction Z.

Remarquons que si en un point d'une surface il n'existe qu'une seule direction Z, cette droite est paratingente; car, si elle ne l'était pas, il y aurait une infinité de droites exclues du ptg en ce point, donc une infinité de directions Z.

([1]) Nous donnerons plus loin (n° 28) la définition d'une rondelle de surface.

([2]) Dans cet exemple OZ est l'unique direction Z au point O. M. G. Bouligand m'a indiqué un exemple où une ptg est direction Z sans monopole de cette propriété. La surface de révolution $z^3 + 1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ admet au point $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ la parallèle à l'axe des z comme ptg[te] et comme direction Z. D'autre part toute direction exclue du plan tangent à la surface en ce point est une direction Z. Autre exemple : toute droite issue de l'origine est une direction Z en ce point pour le cylindre $z = x^3$, excepté l'axe des y.

16. Orientation des directions Z issues d'un point courant M d'une surface cartésienne. — Remarquons d'abord que si MZ désigne une direction Z en un point M d'une surface on peut construire un prisme I, d'axe MZ, à base carrée, dont la hauteur h est inférieure à toute longueur donnée à l'avance h_0. En effet on peut prendre pour $\frac{h}{2}$ la borne supérieure des distances d'un point de σ au plan xMy que nous choisirons pour section médiane du prisme. Quand le côté du carré de la base tend vers zéro, la borne supérieure considérée tend également vers zéro en vertu de la continuité de la fonction $z = f(x, y)$ représentant σ.

Ceci posé, choisissons dans l'ensemble $\{Z\}$ des directions Z issues d'un point M d'une surface cartésienne une droite Z_1 que nous orientons arbitrairement. Il existe un prisme I_1 d'axe MZ_1 pour lequel les deux conditions du n° 12 sont remplies. Soit Z_2 une autre direction Z en M que nous nous proposons d'orienter. Construisons un prisme I_2 d'axe MZ_2 de dimensions assez petites pour être intérieur au prisme I_1 et pour lequel les conditions du n° 12 sont aussi remplies. I_2 coupe la surface suivant un continu σ.

Le point M étant un point courant le continu σ partage le prisme I_2 (on restreindrait encore ses dimensions si cela était nécessaire) en deux volumes V et V'. Or MZ_1 et MZ_2 ne coupent σ qu'en un seul point M. Il en résulte qu'un petit vecteur positif porté par MZ_1 est situé tout entier dans l'un des deux volumes V ou V'; soit V'. Prenons sur MZ_2 un petit vecteur $\overrightarrow{MN}$ intérieur à V'; ce vecteur déterminera le sens positif sur Z_2.

Ainsi se trouve résolue la question d'établir sur deux directions Z issues d'un même point M des sens d'orientation qui donnent deux demi-droites positives dont les portions avoisinant M se trouvent d'un même côté de la surface.

II

Points c et n d'une surface.

17. Définitions des points c et n. — Soit M un point quelconque d'une surface cartésienne S et σ le sous-continu de S formant les environs de M. Si σ se trouve tout entier sur la frontière du plus petit ensemble convexe [1] K le contenant, nous dirons que M est un point c.

---

[1] Sur la notion de plus petit ensemble convexe contenant un ensemble borné, voir le n° 89 *ter* de la *G. I. D.*

Si, aussi réduites que soient les dimensions du prisme I[1] qui découpe σ sur S, σ n'est pas sur la frontière de K, nous dirons que M est un point n.

Il importe de remarquer que nous avons là une propriété géométrique, c'est-à-dire indépendante du choix des axes de coordonnées.

En effet, supposons qu'un prisme I_1 d'axe Z_1, découpe une portion de surface σ_1, appartenant à la frontière de l'ensemble convexe K_1; soit Z_2 une autre direction Z; un prisme I_2 intérieur à I_1 découpera, sur S, un continu σ_2 et coupera K_1 suivant un ensemble convexe K_2, dont σ_2 représente une partie de la frontière. *A fortiori* σ_2 sera sur la frontière du plus petit ensemble convexe le contenant.

Remarque I. — Rappelons une propriété importante de la frontière d'un ensemble convexe démontrée par M. G. Bouligand (*G. I. D.*, n° 89 *bis*).

Le paratingent de la frontière d'un ensemble convexe laisse échapper, en chacun de ses points, chaque droite joignant ce point à un point intérieur.

Il en résulte que si M est un point c, ses environs σ sur la surface sont constitués par une portion d'orthosurface[2].

On tire de là, que, si en un point O d'une surface le paratingent est complet, ce point est un point n (par exemple, il en est ainsi à l'origine des coordonnéees pour la surface $z^2 = x^2 + y^2$).

Remarque II. — De l'étude des surfaces convexes exposée par M. G. Bouligand au chapitre XII de sa *G. I. D.* nous déduisons ce qui suit :

Le paratingent d'une surface S se réduit à un plan en tout point d'un ensemble E partout dense appartenant au voisinage d'un point c.

Si nous supprimons de E les points qui se trouvent en bordure sur la surface S, il nous reste un ensemble E_1, formé de points courants de S, qui est encore partout dense. En chaque point de l'ensemble E_1, le paratingent de S est confondu avec le contingent; sur cet ensemble, en vertu de la semi-continuité supérieure d'inclusion du paratingent, la répartition du plan tangent est continue.

18. Nature des ensembles $\{c\}$ et $\{n\}$. — Soit M un point c d'une surface S et σ les environs de M. Tout point M', de σ, intérieur au prisme I, a pour environs sur S une portion σ' de σ et par suite est un point c. Nous avons donc la proposition suivante :

L'ensemble $\{c\}$ des points c d'une surface S est un ensemble ouvert.

---

(1) Dorénavant nous entendrons par prisme I, un prisme pour lequel les conditions du n° 12 sont remplies.

(2) Nous élargissons ici légèrement le sens du mot orthosurface en lui donnant la signification de contenu superficiel dont le ptg en chaque point est incomplet.

Comme tout point, qui n'est pas un point c est un point n, l'ensemble $\{n\}$ des points n est complémentaire de $\{c\}$; il en résulte :

L'ensemble $\{n\}$ des points n est un ensemble fermé.

19. Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point courant* M *soit un point* c *est que l'un au moins des deux volumes* V *et* V', *suivant lesquels le prisme* I *est partagé par la rondelle* σ *entourant* M, *soit convexe.*

1° *La condition est nécessaire.* — Soit K le plus petit ensemble convexe contenant σ. Les quatre faces latérales du prisme I sont des plans d'appui pour σ et, d'autre part, aucun point de σ n'est extérieur à I; donc K est contenu tout entier dans le prisme I.

Par hypothèse σ est sur la frontière de K; donc K est situé tout entier, par rapport à σ, soit du côté des z positifs, soit du côté des z négatifs (nous laissons le cas particulier où σ est plane, c'est-à-dire se réduit à l'aire d'un parallélogramme).

Si par les différents points de K on mène les demi-droites parallèles à la partie de l'axe des z vers laquelle se trouve K par rapport à σ, on obtient un ensemble E convexe (n° 4). L'intersection de E et du prisme I est un volume convexe (théorème I); or cette intersection se confond avec l'un des volumes V ou V'.

2° *La condition est suffisante.* — Supposons que le volume V soit convexe. La rondelle σ, qui appartient à la frontière de V, se trouve *a fortiori* sur la frontière du plus petit ensemble convexe la contenant. Le point M qui a pour environs σ est donc un point c.

20. Conséquence du théorème précédent conduisant a une définition analytique des points c et n. — Supposons que le volume V soit convexe; l'intersection de V par un plan parallèle à l'axe des z est un quadrilatère conxexe (théorème I) dont trois côtés sont rectilignes et dont le quatrième côté est un arc de courbe (*G. I. D.*, n° 59).

Soient A et B deux points de cet arc, et a, b leurs projections sur le plan des xy. Considérons un point quelconque d du segment $\overline{ab}$ et soient D et D' les points appartenant respectivement à σ et à $\overline{AB}$ qui se projettent en d. La mesure algébrique du vecteur $\overline{DD'}$, rapportée à l'axe des z, conserve un signe constant (au sens large) quand d décrit le segment $\overline{ab}$ et que les points a et b prennent toutes les positions possibles dans ou sur le carré i de centre M et de côté 2ε, section droite du prisme I.

Inversement si $\overline{DD'}$ ne peut changer de signe c'est que tout plan parallèle à l'axe des z, rencontrant le prisme I, coupe l'un des volumes V ou V', V par exemple, suivant un quadrilatère mixtiligne convexe; donc, d'après le théorème II (n° 3) V est convexe; le point M est un point c.

D'où la définition suivante équivalente à celle donnée au n° 17.

Un point courant M d'une surface S est un point c, si l'on peut trouver un nombre ε assez petit pour que l'expression

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\ \lambda y_1+(1-\lambda)y_2]-\lambda f(x_1, y_1)-(1-\lambda)f(x_2, y_2)$$

ne change pas de signe quand x_1, y_1, x_2, y_2 et λ sont soumis aux conditions

$$-\varepsilon \leqslant x_1 \leqslant \varepsilon, \qquad -\varepsilon \leqslant y_1 \leqslant \varepsilon, \qquad -\varepsilon \leqslant x_2 \leqslant \varepsilon, \qquad -\varepsilon \leqslant y_2 \leqslant \varepsilon,$$
$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

La fonction f étant celle qui figure dans l'équation de la rondelle σ entourant M sur S

$$z = f(x, y).$$

Cette seconde définition est susceptible d'une grande généralisation, comme on va le voir.

21. Extension de la définition précédente au cas d'un point en bordure. — Soit M un point pris sur le bord d'une surface S. Nous avons vu au n° 14 que le prisme I découpe sur S un continu σ représentable par l'équation

$$z = f(x, y);$$

la fonction f étant définie sur un ensemble bidimensionnel e.

Nous regarderons f comme une fonction de point et nous écrirons $f(a)$ au lieu de $f(x_1, y_1)$, si x_1, y_1 sont les coordonnées du point a.

Ceci posé donnons la définition générale analytique d'un point c (en bordure ou non).

Un point M d'une surface S est un point c, s'il existe un prisme I, dont l'axe Z est exclu du paratingent, de la surface en M, tel que la fonction

$$\varphi(a, b, d) = f(d) - \frac{\overline{bd}}{\overline{ba}} f(a) - \frac{\overline{ad}}{\overline{ab}} f(b)$$

ne change pas de signe quand les points a, b et d décrivent d'une manière quelconque le continu e sur lequel la fonction f est définie: le point d étant, en outre, assujetti à se trouver sur le segment $\overline{ab}$.

Nous avons vu au n° 20 que cette définition est équivalente à la définition géométrique du n° 17 dans le cas où M est un point courant. Il nous reste à le démontrer dans le cas où M est en bordure.

Si σ est un continu plan, la vérification est immédiate; $\varphi(a, b, d)$ est alors constamment nulle.

Si σ n'est pas un continu plan, le plus petit ensemble convexe contenant σ est un volume K (n° 1), dont la projection sur le plan des xy est un ensemble convexe k (n° 6). Le cylindre dont les génératrices sont parallèles à MZ et qui a pour directrice la frontière de k est circonscrit à K suivant un continu χ [1]. La frontière de K est partagée par χ en deux régions Σ et Σ'. Aucun point courant de σ ne peut appartenir à χ, car, le ptg en M à σ ne contient pas la direction Z; on suppose de plus σ suffisamment petit pour qu'il en soit de même en chacun de ses points. Il en résulte que σ est tout entier dans l'une de ces deux régions, quand le point M est un point c. Le point M étant un point courant de Σ la fonction φ ne change donc pas de signe, quand les conditions indiquées sont remplies.

Inversement si la fonction φ ne change pas de signe nous allons voir que le point M est un point c.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait $\varphi \geqslant 0$. Sur la frontière du plus petit ensemble convexe K contenant σ, nous avons distingué deux régions; soit Σ la région supérieure, c'est-à-dire celle qui est située du côté des z positifs par rapport à l'intérieur de K. Nous pouvons définir de la façon suivante l'équation de Σ.

Tout point de l'ensemble k projection de l'ensemble K sur le plan des xy se trouve sur une corde, au moins, de l'ensemble e projection de σ sur le même plan. Soit d un point quelconque de k, appartenant à la corde $\overline{ab}$ de e. Posons

$$\Psi(a, b) = \frac{\overline{bd}}{\overline{ba}} f(a) + \frac{\overline{ad}}{\overline{ab}} f(b)$$

et $f_1(d) =$ borne supérieure $\Psi(a, b)$ quand a et b prennent toutes les positions possibles sur e.

$$z = f_1(d)$$

est l'équation de Σ, d étant un point de k.

Je dis qu'en tout point d de e, on a

$$f_1(d) = f(d);$$

il suffit de le montrer pour un point d intérieur, à cause de la continuité des fonctions f_1 et f.

Par hypothèse

$$f(d) \geqslant \frac{\overline{bd}}{\overline{ba}} f(a) + \frac{\overline{ad}}{\overline{ab}} f(b).$$

---

[1] Au n° 102 *bis* de sa *G. I. D.*, M. G. Bouligand fait une étude détaillée de la frontière du plus petit ensemble convexe K contenant un ensemble E fermé et borné.

Le point d étant intérieur à e on peut faire tendre simultanément a et b vers d; l'expression

$$\frac{\overline{bd}}{\overline{ba}} f(a) + \frac{\overline{ad}}{\overline{ab}} f(b)$$

tend vers $f(d)$, en vertu de la continuité de la fonction f au point d. Donc $f(d)$ est la borne supérieure de Ψ pour le point d.

Le continu σ est par conséquent situé tout entier sur Σ ce qui prouve, d'après la définition du n° 17, que le point M est un point c.

III

Points c_+, c_- et c_0 d'une surface cartésienne S.

22. Définitions des points c_+ et c_-. — Reprenons les notations du n° 19; et supposons que V désigne le volume situé du côté des z négatifs par rapport à la rondelle σ entourant le point courant M.

Si le volume V est convexe, nous dirons que le point M est un point c_+; si c'est le volume V' qui est convexe, nous dirons que M est un point c_-.

Cette définition fait intervenir l'axe des z; il est, par suite, indispensable de montrer que le choix de la direction Z est sans influence sur la détermination de la nature d'un point M.

Supposons qu'un point courant M soit un point c_+ relativement à une direction Z_1. Je dis que c'est encore un point c_+ par rapport à une autre direction Z, soit Z_2.

En effet, construisons un prisme I_2 d'axe MZ_2, intérieur au prisme I_1 d'axe MZ_1. Le prisme I_1 est décomposé par la surface en deux volumes V_1 et V'_1 et le prisme I_2 en deux volumes V_2 et V'_2. Par hypothèse V_1 est convexe; il est situé par rapport à σ du côté des z_1 négatifs. Le volume V_2 intersection de V_1 et de I_2 est, par suite, convexe, et d'autre part il est situé par rapport à σ du côté des z_2 négatifs (n° 16). Donc M est un point c_+ relativement à Z_2.

Remarque. — Cette définition n'est pas utilisable pour les points en bordure. Si l'on fait intervenir la fonction φ qui nous a servi à donner une définition générale d'un point c, on peut dire qu'un point courant est un point c_+ quand $\varphi \geqslant 0$.

Ceci nous suggère les définitions analytiques suivantes valables pour un point quelconque d'une surface cartésienne S.

23. Définitions analytiques des points c_+ et c_-. — Un point M d'une surface S est un point c_+, s'il existe un prisme I, dont l'axe Z est exclu du paratingent de la surface en M, et tel que la fonction

$$\varphi(a, b, d) = f(d) - \frac{\overline{bd}}{\overline{ba}} f(a) - \frac{\overline{ad}}{\overline{ab}} f(b)$$

soit positive ou nulle, quand les points a, b, d décrivent d'une manière quelconque le continu e, projection sur le plan des xy du sous-continu σ intersection de I et de S; le point d étant un point du segment $\overline{ab}$ et la fonction f étant celle qui figure dans l'équation de σ :

$$z = f(x, y).$$

Si, dans les mêmes conditions, la fonction φ reste constamment négative ou nulle, le point M est un point c_-.

Cette définition, dans le cas d'un point courant, est équivalente à celle qui a été donnée au numéro précédent : on en déduit que le choix de l'axe des z n'influe pas sur le résultat.

24. Nature des ensembles $\{c_+\}$ et $\{c_-\}$. — Soient M un point quelconque d'une surface cartésienne S, et I le prisme qui découpe sur S les environs σ de M (n° 12). Considérons un point M' de σ intérieur à I, dont les environs σ' sur S sont obtenus à l'aide d'un prisme I' d'axe M'Z' parallèle à MZ et compris dans I. Désignons par

$$z = f(x, y) \qquad \text{et} \qquad z = f'(x, y)$$

les équations respectives de σ et σ' rapportées aux mêmes axes.

La fonction

$$\varphi'(a, b, d) = f'(d) - \frac{\overline{bd}}{\overline{ba}} f'(a) - \frac{\overline{ad}}{\overline{ab}} f'(b)$$

prend un ensemble de valeurs compris dans l'ensemble des valeurs prises par la fonction

$$\varphi(a, b, d) = f(d) - \frac{\overline{bd}}{\overline{ba}} f(a) - \frac{\overline{ad}}{\overline{ab}} f(b).$$

On en déduit que M' est de même nature que M. Donc :

L'ensemble $\{c_+\}$ des points c_+ est ouvert ainsi que l'ensemble $\{c_-\}$ des points c_-; et l'on a $\{c_+\} + \{c_-\} = \{c\}$ qui est par suite un ensemble ouvert.

25. Définition d'un point c_0. — Nous dirons qu'un point M, point courant ou en bordure, d'une surface cartésienne S est un point c_0, si le continu σ qui constitue ses environs sur S est situé dans un plan.

Il résulte des définitions d'un point c_+ et d'un point c_-, qu'un point c_0 est à la fois un point c_+ et un point c_-; nous dirons quelquefois que c'est un point c_+ (ou c_-) au sens large. Ceci nous conduira à désigner un point courant M pour lequel le volume V est convexe et V' non convexe, si petite que soit la base du prisme I, par l'expression : point c_+ au sens strict. (Nous dirons aussi : un point c, au sens strict.)

26. Intersection des ensembles $\{c_+\}$ et $\{c_-\}$. — Nous allons établir l'égalité suivante :

$$\{c_+\} \times \{c_-\} = \{c_0\},$$

$\{c_0\}$ désignant l'ensemble des points c_0. Nous venons de voir (n° 25) que tout point de $\{c_0\}$ est un point du produit $\{c_+\} \times \{c_-\}$.

Inversement soit M un point commun aux deux ensembles $\{c_+\}$ et $\{c_-\}$. Comme l'on doit avoir partout $\varphi \geqslant 0$ et $\varphi \leqslant 0$ on a $\varphi = 0$ ce qui montre que σ est un continu plan(¹).

Donc :

L'ensemble $\{c_0\}$ des points c_0 est un ensemble ouvert(²).

27. Théorème. — *Sur une surface cartésienne S, n'admettant aucune coupure, s'il existe un point c_+ et un point c_-, l'ensemble $\{c_0\}$ étant vide, l'ensemble $\{n\}$ des points n a la puissance du continu.*

En effet, les ensembles ouverts $\{c_+\}$ et $\{c_-\}$ n'ont aucun point commun. Soient A un point c_+ et B un point c_-. Sur tout continu, pris sur la surface, joignant A et B il y a, au moins, un point frontière de l'ensemble $\{c_+\}$ (*G. I. D.*, n° 46). Or ce point ne peut être qu'un point n; comme il n'existe pas de coupure(³) entre A et B on peut joindre, sur S, ces deux points, d'une infinité de façons, ayant la puissance du continu; ce qui démontre le théorème.

Remarque I. — Il est essentiel de supposer que S n'admet aucune coupure. L'exemple suivant montre en effet que le théorème est en défaut si l'on omet cette hypothèse.

(¹) Si M est un point courant, la planéité de σ est une conséquence du corollaire du n° 2. — Remarquons que ce raisonnement n'est pas applicable à un point du bord.

(²) Cette proposition résulte, d'ailleurs, de la définition même d'un point c_0.

(³) On dit qu'un point P coupe un continu K si (K — P) est la somme de deux ensembles sans point commun.

Considérons deux demi-sphères S_1 et S_2 ayant leurs bases situées dans un même plan horizontal et tangentes en un point M; supposons, enfin, que S_1 et S_2 soient de part et d'autre de ce plan. Le point M de la surface $S = S_1 + S_2$ est le seul point n; or il est entouré de points c_+ et de points c_-.

Corollaire. — *Si un point courant* M, *d'une surface cartésienne* S, *a dans son voisinage un point* c_+, *un point* c_-, *et n'a aucun point* c_0, *il a une infinité de points* n. (On se trouve, en effet, dans les conditions du théorème précédent.)

Remarque II. — Il est nécessaire de supposer que l'ensemble $\{c_0\}$ est vide aux environs de M; car un point M d'une surface cartésienne peut être un point n isolé.

Supposons que M soit le sommet d'une pyramide ayant pour base un polygone non convexe, le pied de la hauteur étant intérieur à la base. Le point M est environné, sur la surface latérale de cette pyramide, de points c_+, c_- (au sens strict) et de points c_0, à l'exclusion de tout point n.

IV

Convexité d'une rondelle de surface

28. Définition d'une rondelle de surface. — Nous dirons qu'un sous-continu Σ d'un continu K de l'espace euclidien à trois dimensions est une rondelle de surface, s'il existe un cylindre droit Γ, ayant pour base un ensemble convexe γ du plan des xy, tel que $\Sigma = K \times \Gamma$ et dont chaque corde parallèle à l'axe des z, limitée aux deux bases, rencontre Σ en un point et un seulement.

Conséquence. — Le continu K a le caractère de surface cartésienne en tout point courant de Σ.

Si une direction Δ peut être prise pour axe des z, pour définir une rondelle Σ nous dirons que c'est une direction Z pour Σ.

On voit que si Δ est une direction Z pour Σ, c'est aussi une direction Z pour tous les points courants de Σ.

Inversement une direction Z commune à tous les points de Σ intérieurs à Γ est une direction Z pour Σ.

En raisonnant comme au n° 16, on voit qu'on peut distinguer sur Σ deux côtés différents. La rondelle Σ décompose en effet en deux volumes V et V' le cylindre Γ.

Chaque direction Z en un point courant M de Σ peut être le support d'un petit vecteur $\overrightarrow{MN}$ intérieur à V'. Nous prendrons pour sens positif sur cette direction le sens donné par ce vecteur.

29. Définition d'une rondelle convexe. — Le cylindre Γ, qui sert à définir la rondelle Σ, est partagé en deux volumes V et V' par Σ.

Si l'un de ces deux volumes est convexe, nous dirons que Σ est une rondelle convexe.

D'autre part, d'après la convention faite au numéro précédent, V est situé par rapport à Σ du côté des z négatifs.

Si V est convexe, nous dirons que Σ est à convexité positive.

Si V' est convexe, Σ sera dite à convexité négative.

Si V et V' sont tous les deux convexes, Σ est une rondelle plane (n° 2. Corollaire). On peut dire que Σ est à convexité positive, ou négative, ou nulle.

Remarque. — On peut donner de la convexité d'une rondelle Σ, une définition analytique analogue à celle du n° 20 relative à la convexité d'une surface cartésienne en un point.

30. Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une rondelle Σ soit convexe et à convexité positive est que tout point courant de Σ soit un point c_+*(¹).

1° *La condition est nécessaire.* — En effet, soit Σ une rondelle convexe et à convexité positive. En un point courant M de Σ construisons un prisme I, intérieur à Γ. L'intersection du volume convexe V(²) et de I est un volume convexe V_M et par suite, d'après le n° 22, M est un point c_+.

2° *La condition est suffisante.* — Remarquons d'abord que si la rondelle Σ est convexe, sa convexité ne peut être que positive; car si elle était négative d'après 1°, tous les points courants de Σ seraient des points c_-.

Il nous suffira donc de prouver que le volume V attaché à la rondelle Σ est convexe.

Nous avons vu (n° 11) que, si un volume V est la limite d'une suite de volumes emboîtés convexes, il est convexe.

Désignons par W le volume attaché à une rondelle Σ' intérieure à Σ et située dans V. Si nous démontrons que W est convexe, il nous sera facile de former une suite W', W'', ..., tendant vers V; ce qui prouvera que V est convexe.

Supposons, contrairement à ce que nous désirons démontrer, que W ne soit pas convexe. Par un point courant M de Σ' menons deux plans respectivement parallèles aux plans zox et zoy. Le volume W se trouve ainsi décomposé en quatre volumes W^{I}, W^{II}, W^{III}, W^{IV}. Sur ces quatre volumes l'un au moins n'est pas convexe;

(¹) Il s'agit ici et dans les nos 31 et 32 de points c_+ au sens large.

(²) Nous conservons les notations du numéro précédent.

car, si tous les quatre étaient convexes, d'après le théorème du n° 10, le volume W serait lui-même convexe.

Désignons par W_1 un volume non convexe choisi parmi le groupe $W^{I}, W^{II}, W^{III}, W^{IV}$.

Ce volume W_1 possède les mêmes propriétés que le volume W. Nous pouvons donc, comme nous l'avons fait pour W, déterminer un volume W_2 non convexe, qui soit une fraction de W_1.

Le volume W_2 est analogue aux volumes W_1 et W, il donnera naissance à un volume W_3 non convexe et ainsi de suite. Donc en procédant de la sorte, indéfiniment, nous formons une suite de volumes emboîtés non convexes

$$W \supset W_1 \supset W_2 \supset \ldots\ldots$$

qui ont pour limite une corde de W parallèle à l'axe des z. L'extrémité de cette corde qui se trouve sur Σ' ne peut être un point c_+, d'après la façon même de l'obtenir; or ce point est intérieur à Σ, donc d'après l'énoncé du théorème c'est un point c_+. W est, par suite, convexe; il en est de même de V et de Σ. C. Q. F. D.

Remarque. — Ce théorème a été démontré sans faire aucune hypothèse sur les points situés sur le bord de la rondelle Σ.

Corollaire. — *La propriété d'une rondelle Σ d'être une rondelle convexe, à convexité positive (ou négative), est indépendante de la direction Z prise pour axe des z.*

En effet, si pour un axe Z_1 la rondelle Σ est convexe et à convexité positive, en vertu du théorème précédent, tous les points de Σ sont des points c_+; mais, comme ce sont des points c_+ quelle que soit la direction Z choisie, on en déduit, toujours d'après le théorème précédent, que Σ est convexe et à convexité positive pour n'importe quelle direction Z.

31. Théorème. — *Si tous les points courants d'une rondelle Σ sont des points c_+, sauf un point M, alors Σ est convexe et à convexité positive; le point M est un point c_+.*

Nous devons montrer que le volume V attaché à Σ est convexe; c'est-à-dire que si l'on considère deux points quelconques A et B de V, le segment $\overline{AB}$ appartient à V. La bande obtenue en menant par A et B les parallèles à l'axe des Z, découpe dans le cylindre Γ un rectangle R. Nous examinerons successivement le cas où M n'est pas intérieur à R et celui où il l'est.

a) M *n'est pas intérieur à* R. — On peut découper sur Σ une rondelle σ n'admettant pas M comme point courant. Tous les points courants de σ sont des points c_+; d'après le théorème précédent σ est convexe, c'est-à-dire que le volume v attaché à σ contient le segment $\overline{AB}$ tout entier. Comme v est un sous-continu de V, on en déduit que $\overline{AB}$ appartient à V.

b) M *est intérieur à* R. — Considérons une suite de points B_1, B_2, ... appartenant à V tendant vers B et tels que les rectangles R_1, R_2, ..., analogues à R, correspondants aux segments $\overline{AB_1}$, $\overline{AB_2}$, ... ne contiennent pas M. D'après le cas précédent, les segments $\overline{AB_1}$, $\overline{AB_2}$, ... appartiennent tous au volume V.

D'autre part, tout point P du segment $\overline{AB}$ peut être considéré comme la limite d'une suite infinie de points P_1, P_2, ... pris respectivement sur les segments $\overline{AB_1}$, $\overline{AB_2}$, ... et convenablement choisis [1].

Le volume V étant fermé, il s'ensuit que le point P, limite d'une suite infinie de points de V, est un point de V. Donc le segment $\overline{AB}$ appartient tout entier à V.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Un point courant* M *d'une surface* S *exclusivement entouré de points* c_+, *est un point* c_+.

En effet la rondelle Σ entourant M est entièrement formée de points c_+, sauf M; donc elle est convexe et à convexité positive. Le point M est par suite un point c_+.

32. Théorème. — *Si tous les points courants d'une rondelle* Σ *sont des points* c_+, *sauf un ensemble* E *punctiforme,* Σ *est convexe et à convexité positive; tous les points de* E *sont des points* c_- [2].

Pour abréger nous dirons qu'un point de γ, projection de Σ sur le plan des xy, est un point c_+ ou un point n, s'il est la projection d'un point c_+ ou d'un point n de Σ. Nous désignerons tout point de V par une lettre majuscule et sa projection sur xy par la petite lettre correspondante, et par e la projection de l'ensemble E.

Cas particulier. — Supposons que e soit localisé sur un segment de droite s. Démontrons, comme plus haut, que si un segment $\overline{AB}$ a pour extrémités deux points de V, il appartient à V.

1° $\overline{ab}$ *ne porte entre ses extrémités aucun point de* e. — On peut découper sur la surface une rondelle σ, n'admettant comme points courants que des points c_+ et dont la projection sur le plan des xy englobe $\overline{ab}$. En effet, l'existence de σ est évidente quand $\overline{ab}$ ne coupe pas le segment s portant e.

Supposons que $\overline{ab}$ coupe le segment s au point m. Le point m étant un point c_+, on peut décrire un cercle assez petit de centre m pour que tout point situé dans ou sur ce cercle soit un point c_+. Appelons p et q les points où s coupe

[1] On pourra par exemple prendre ces points P_i de manière que l'on ait

$$\frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_1B_1}} = \frac{\overline{P_2A}}{\overline{P_2B_2}} = \ldots = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}.$$

[2] L'ensemble $\{n\}$ peut admettre des points intérieurs ou des arcs de courbe; donc si E n'était pas au plus punctiforme, on ne pourrait rien dire sur la convexité de Σ.

ce cercle. Le quadrilatère convexe *apbq* peut être pris pour la projection de σ. Le volume v limité par σ, par la surface prismatique projetant son bord et par l'aire convexe *apbq* est convexe. Donc $\overline{AB}$ appartient à v et par suite à V.

2° $\overline{ab}$ *porte entre ses extrémités un point* g *de* e. — L'ensemble e étant punctiforme on peut trouver une suite de points $b_1, b_2 \ldots$ tendant vers b et tels que les segments $\overline{ab_1}, \overline{ab_2}, \ldots$ n'admettent aucun point de e pour point intermédiaire. On pourra donc former une suite de points $B_1, B_2, \ldots$ de V tendant vers B tels que, d'après le 1°, les segments $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}, \ldots$ appartiennent tous à V; il en sera de même de leur limite $\overline{AB}$.

3° $\overline{ab}$ est pris sur le segment s.

On forme alors une suite de segments de V, soient $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \ldots$ tendant vers $\overline{AB}$ en prenant, par exemple, $\overline{a_1b_1}, \overline{a_2b_2}, \ldots$ parallèles à $\overline{ab}$.

Cas général. — E *est un ensemble punctiforme quelconque.*

1° a et b sont intérieurs à γ; et aucun point de $\overline{ab}$ n'est un point de e.

Tout point de $\overline{ab}$ est, alors, le centre d'un cercle entièrement formé de points c_+. $\overline{ab}$ étant fermé on peut appliquer le lemme de Borel-Lebesgue, c'est-à-dire recouvrir $\overline{ab}$ à l'aide d'un nombre fini de ces cercles. Il est donc possible de tracer dans γ un contour convexe k, entourant $\overline{ab}$, et dont tout point intérieur est un point c_+. Il en résulte que la rondelle σ, ayant pour projection k est convexe et que $\overline{AB}$ appartient à V.

2° $\overline{ab}$ ne porte aucun point de e entre ses extrémités.

On forme alors une suite de segments de V, soient $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \ldots$ tendant vers $\overline{AB}$ en prenant $\overline{a_1b_1}, \overline{a_2b_2}, \ldots$ intérieurs à $\overline{ab}$.

3° Le point a est exclu de e; mais $\overline{ab}$ contient des points de e.

Je dis qu'on peut trouver une suite de segments $\overline{ab_1}, \overline{ab_2}, \ldots$ tendant vers $\overline{ab}$ et n'admettant aucun point n comme point intermédiaire. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un secteur circulaire de sommet a, de rayon $\overline{ab}$, avec un angle φ non nul, dont chaque rayon porterait des points n; le segment $\overline{ab}$ serait intérieur au secteur.

Considérons la collection des points n portée par un rayon variable ax. Quand ax tend vers $\overline{ab}$ de toutes manières possibles, les limites des points n constituent, d'après M. G. Bouligand, l'accumulatif de la collection sur $\overline{ab}$. L'ensemble $\{n\}$ étant fermé, cet accumulatif fait partie de la collection des points n portée par $\overline{ab}$; la collection jouit de la semi-continuité supérieure d'inclusion (il y a $\overline{\text{S. C. I.}}$).

Inversement soit m quelque point n de $\overline{ab}$: il fait partie de l'accumulatif porté par $\overline{ab}$, sinon il y aurait un cercle de centre m assez petit pour ne contenir aucun point n hors de $\overline{ab}$; c'est impossible en vertu du cas particulier envisagé plus haut.

On déduit de cette étude que lorsque le rayon ax, tournant autour de a, balaye le secteur, le premier point n, qu'on trouve sur ax en partant de a, décrit un arc simple. Comme l'ensemble $\{n\}$, compris dans e, est punctiforme, cela est impossible et par conséquent l'existence de la suite $\overline{ab_1}$, $\overline{ab_2}$, ... se trouve démontrée.

Soit B_1, B_2, ... une suite de points de V tendant vers B, ayant pour projections b_1, b_2, ... D'après le 2° $\overline{AB_1}$, $\overline{AB_2}$, ... appartiennent à V; il en est par suite de même de leur limite $\overline{AB}$.

4° *a et b sont des points de e.*

On peut former une suite de segments a_1b, a_2b, ... tendant vers $\overline{ab}$; les points a_1, a_2, ... étant tous exclus de e. Les segments $\overline{A_1B}$, $\overline{A_2B}$, ..., dont les extrémités A_1, A_2, ... sont des points de V tendant vers A et se projetant en a_1, a_2, ..., appartiennent tous à V d'après le 3° : donc, $\overline{AB}$ appartient à V.

Le volume V étant convexe la rondelle étudiée est convexe. C. Q. F. D.

33. Corollaire. — *Si tous les points courants d'une rondelle Σ sont des points c, au sens strict, sauf un ensemble E punctiforme*[1], *Σ est convexe.*

Je dis que tous les points courants de Σ étrangers à E, sont tous ou des points c_+ ou des points c_-; en effet, s'il y avait un point c_+, soit A, et un point c_-, soit B, exclus de E, on pourrait les réunir par un continu K ne contenant aucun point de E; il y aurait sur K, au moins, un point n; ce qui est impossible, puisque tous les points n appartiennent à E.

On en déduit que tous les points courants de Σ, exclus de E, sont des points c_+ (ou c_-) et l'on se trouve ainsi ramené au théorème précédent.

Conséquence. — *Un point courant d'une surface S, exclusivement entouré de points c, au sens strict, est un point c, au sens strict.*

En effet la rondelle Σ constituant les environs de ce point est convexe, d'après le corollaire précédent, sans pouvoir être plane.

Remarque. — Nous avons déjà observé (n° 27, Remarque I) que cette proposition est en défaut dans le cas d'un point en bordure; nous avons donné l'exemple du point de contact M de deux hémisphères tangentes, situées de part et d'autre du plan de leurs bases. Le point M est exclusivement entouré de points c, au sens strict, sans être pour cela un point c.

Dans cet exemple, il est vrai, le point M a dans son entourage des points c_+ et des points c_-, et l'on pourrait croire que c'est pour cette raison que M est point n; or, il n'en est rien.

---

[1] Il n'est pas possible de faire une hypothèse plus large sur l'ensemble E, sans détruire la certitude de la convexité de Σ.

Supposons, en effet, que les deux demi-sphères, tangentes en un point M de leurs bases, soient situées d'un même côté du plan sur lequel elles reposent. Le point M est encore un point n, et, cette fois, il n'est entouré que de points c_+ (ou c_-).

Pour expliquer cette différence essentielle qui existe entre un point courant et un point en bordure, il nous faut revenir sur le théorème fondamental du n° 31 pour en analyser la démonstration.

34. Rappelons qu'à tout point M (en bordure ou non) d'une surface S nous avons attaché une fonction

$$\varphi(a, b, d)$$

a, b et d étant trois points de l'ensemble e, projection du continu σ, constituant les environs de M, sur le plan des xy; le point d est, en outre, assujetti à se trouver sur $\overline{ab}$.

Supposons que M soit un point courant et que tous les points de son entourage σ soient des points c_+.

Pour prouver que M est un point c_+, il suffit de montrer que $\varphi \geqslant 0$ partout sur e.

Or si le segment $\overline{ab}$ ne contient pas m, projection de M, entre ses extrémités, on aura bien $\varphi \geqslant 0$ sur $\overline{ab}$, car, en vertu du théorème du n° 30 il en est ainsi sur tout ensemble convexe e_1, sous-ensemble de e, qui n'admet pas m pour point intérieur.

Dans le cas où m est un point intérieur de $\overline{ab}$, nous avons alors (n° 30) constitué une suite de points de e

$$b_1, \quad b_2, \; \ldots\ldots$$

tendant vers b et tels qu'aucun segment de la suite

$$\overline{ab_1}, \quad \overline{ab_2}, \; \ldots\ldots$$

ne passe par m. Comme la fonction φ est continue et que

$$\varphi(a, b_1, d) \geqslant 0, \quad \varphi(a, b_2, d) \geqslant 0, \; \ldots\ldots$$

en passant à la limite l'on a

$$\varphi(a, b, d) \geqslant 0.$$

Toute la démonstration repose sur le fait de pouvoir constituer une suite de segments tels que

$$\overline{ab_1}, \quad \overline{ab_2}, \; \ldots\ldots$$

n'admettant pas m pour point intérieur.

Envisageons maintenant le cas d'un point pris sur le bord.

Soit $\overline{ab}$ un segment quelconque de e, passant par m. On voit, comme précédemment, que s'il nous est possible de constituer une suite de segments de e, $\overline{ab_1}$, $\overline{ab_2}$, ... tendant vers $\overline{ab}$, ne contenant pas m, on aura constamment $\varphi \geqslant 0$: M sera un point c_+.

Si pour un segment $\overline{ab}$, passant par m, une pareille suite est impossible à former, on ne sait rien sur la nature du point M.

Reprenons l'exemple des deux demi-sphères tangentes reposant sur un même plan horizontal, que nous prendrons pour plan des xy. L'ensemble e est constitué par deux cercles tangents. Dans chacun de ces cercles la fonction φ est positive.

Considérons un segment $\overline{ab}$ passant par m (point de contact). Tout segment $\overline{ab_1}$ appartenant à e ne peut tendre vers $\overline{ab}$ que s'il passe par m.

Il y a bien, ici, impossibilité de former une suite $\overline{ab_1}$, $\overline{ab_2}$, ... tendant vers $\overline{ab}$, sans que $\overline{ab_1}$, $\overline{ab_2}$, ... ne passe par m.

Le point M est un point n quoique entouré exclusivement de points c_+.

35. Paratingent second ($=$ ptg$_2$). — On doit à M. G. Bouligand la notion de paratingent second[1] en un point d'un ensemble ponctuel E.

Cette notion est intimement liée à celle des surfaces qui sont les frontières d'ensembles ponctuels absolument convexes[2].

Nous dirons, avec M. G. Bouligand, qu'une droite D, passant par un point d'accumulation M d'un ensemble ponctuel E est une ptg$_2$ de E en M, si étant donnés une longueur ε et un angle θ arbitrairement petits, il est possible de trouver une droite Δ faisant avec D un angle inférieur à θ et portant au moins trois points de l'ensemble E, distants de M de moins de ε.

Le ptg$_2$ est l'ensemble des ptg$_2$ de E en M.

M. G. Bouligand démontre que le ptg$_2$, en un point M, est fermé et qu'il possède (comme le ptg) la semi-continuité supérieure d'inclusion. $(\overline{\text{S. C. I.}})$[3].

Si un ensemble E est absolument convexe, sa frontière S est coupée en deux points au plus par une droite quelconque. On en déduit que le ptg$_2$ de S est vide partout.

---

(1) Voir *G. I. D.*, chapitre IV. Les paratingents de divers rangs. — Pour une surface non convexe à courbures continues, le paratingent second se réduit au couple des deux directions asymptotiques. Bouligand, *Bull. Soc. Roy. Sc.* Liège, 1936.

(2) Un ensemble est dit absolument convexe quand sa frontière ne contient aucun segment rectiligne.

(3) M. J. Mirguet a prouvé l'existence et la continuité du plan tangent pour une surface dont le ptg$_2$ est partout formé de deux droites distinctes (*Acta Mathematica*, t. 68, fasc. 4). M. G. Bouligand avait déjà établi ce théorème pour une surface de révolution (*G. I. D.*, n° 128).

Cette propriété est caractéristique; en effet, si le ptg_2 d'une surface S est vide partout, S est la frontière d'un ensemble convexe (n° 124, *G. I. D.*).

Pour aboutir à cette conclusion, M. G. Bouligand démontre d'abord (*G. I. D.*, n° 122) la convexité d'une rondelle de surface dont le ptg_2 est partout vide.

Ceci étant rappelé, nous allons rattacher cette notion de ptg_2 à la notion de point c, au sens strict.

36. Théorème. — *Si en un point courant* M *d'une surface* S *le* ptg_2 *est vide, ce point est un point* c, *au sens strict.*

En effet, si le ptg_2 est vide en M, en vertu de la $\overline{\text{S. C. I.}}$ il est vide en tout point voisin de M; il en résulte que la rondelle de surface σ entourant M est convexe, c'est-à-dire, avec nos notations, que M est un point c. D'autre part σ ne pouvant contenir aucun segment de droite, cette rondelle ne peut être plane; donc M est un point c au sens strict.

Remarque. — Un point c, au sens strict n'est pas nécessairement un point où le ptg_2 est vide; par exemple, le sommet d'un cône convexe est un point c, au sens strict et cependant le cône admet en ce point une infinité de ptg_2.

37. Théorème. — *Si en tout point voisin d'un point courant* M *d'une surface le* ptg_2 *est vide, il est aussi vide en* M.

En effet, d'après le théorème précédent, tous les points voisins de M sont des points c au sens strict, il en est de même de M (n° 33, Conséquence).

Théorème. — *Une rondelle de surface dont le* ptg_2, *sauf sur un ensemble punctiforme* E, *est partout vide, est convexe.* (C'est une conséquence directe du n° 33.)

CHAPITRE III

Convexité d'une variété $p-1$ dimensionnelle V_{p-1} de l'espace euclidien R_p à p dimensions.

I

Les points c et n; deux catégories de points c, les points c_+ et c_-.

38. Définition d'une variété $(p-1)$ fois étendue plongée dans l'espace R_p. — Soient $a_1 < b_1$; $a_2 < b_2$, ...; $a_p < b_p$, p couples de nombres donnés.

Les inégalités

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

définissent un ensemble ponctuel I; que nous appellerons avec M. S. Saks, un intervalle de l'espace R_p(1).

Dans le cas où $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \ldots = b_p - a_p$ l'intervalle porte le nom de cube p-dimensionnel; son centre a pour coordonnées $\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \ldots, \frac{a_p+b_p}{2}$.

Nous dirons qu'un ensemble ponctuel E de l'espace R_p possède le caractère d'une variété à $p-1$ dimensions en un de ses points M s'il existe dans un système d'axes de coordonnées rectangulaires

$$MX_1, \quad MX_2, \quad \ldots, \quad MX_p$$

un intervalle I dont la section par $x_p = 0$ est un cube $(p-1)$-dimensionnel de centre M, tel que les deux conditions suivantes soient remplies :

1° L'ensemble σ des points de E non extérieurs à I est un continu se projetant orthogonalement sur le sous-espace $x_p = 0$ en une région ou en un nombre fini de régions ayant un point commun et un seul; m projection de M (cf. n° 12).

2° La correspondance entre un point de σ et sa projection est biunivoque.

Le point M est un point courant ou un point du bord selon que sa projection m est un point intérieur ou un point frontière de l'ensemble e de la projection de σ.

---

(1) S. Saks. *Théorie de l'Intégrale*. Varsovie, 1932.

Les environs de M sur E sont représentables par une équation de la forme

$$x_p = f(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

La fonction f est continue sans plus. Si M est un point courant, f est définie sur tout le cube i de centre M de l'espace $x_p = 0$; si M est en bordure, f n'est définie que sur un sous-continu e de i.

Si en chacun de ses points un continu ponctuel borné K de l'espace R_p a le caractère d'une variété $(p-1)$-dimensionnelle nous dirons que c'est une variété à $(p-1)$ dimensions, que nous noterons V_{p-1}.

39. Définition des points c et n. — Soit M un point quelconque d'une variété V_{p-1}. Si les environs de M sur la variété font partie de la frontière du plus petit ensemble convexe les contenant, le point M est un point c; dans le cas contraire M est un point n(¹).

Désignons par 2ε l'arête du cube $(p-1)$-dimensionnel i qui a pour centre un point courant M et par h et $-h'$(²) les bornes supérieure et inférieure de x_p sur l'intervalle I (n° 38). Le continu σ décompose I en deux ensembles ponctuels E_1 et E_2, que l'on peut définir par les relations suivantes :

$$E_1 \begin{cases} -\varepsilon \leqslant x_j \leqslant \varepsilon & (j = 1, 2, \dots, p-1), \\ -h' \leqslant x_p \leqslant f; \end{cases}$$

$$E_2 \begin{cases} -\varepsilon \leqslant x_j \leqslant \varepsilon & (j = 1, 2, \dots, p-1), \\ f \leqslant x_p \leqslant h. \end{cases}$$

Si M est un point c, l'un, au moins, des deux ensembles E_1 et E_2 est convexe et inversement.

Supposons pour fixer les idées que E_1 soit convexe; désignons par a et b deux points quelconques du cube i et soit d un point quelconque du segment $\overline{ab}$. Les normales au cube aux points a, b, d coupent V_{p-1} respectivement en A, B, D.

(¹) Comme dans le cas d'une surface cartésienne on voit que le paratingent de V_{p-} en un point c laisse échapper la direction MX_p. On peut, par analogie avec le cas de R_3, appeler orthovariété toute variété dont le paratingent en chacun de ses points est incomplet. On peut dire, par suite, qu'en tout point c une V_{p-1} a le caractère local d'une orthovariété.

(²) h et h' sont positifs en général; mais l'un d'eux peut être nul sans que l'autre le soit.

Le segment $\overline{AB}$ est tout entier dans E_1 et par suite, en tout point de $\overline{AB}$ on a : $x_p \leqslant f$ ce qui revient à dire que la fonction

$$\varphi(a, b, d) = f(d) - \frac{\overline{bd}}{\overline{ba}} f(a) - \frac{\overline{ad}}{\overline{ab}} f(b)$$

est positive ou nulle, quelles que soient les positions des points a, b et d.

Ceci nous conduit à énoncer, comme il suit, la définition d'un point c pris sur une variété V_{p-1}, sans faire de distinction entre un point courant et un point en bordure.

Soit

$$x_p = f(a),$$

l'équation représentant les environs σ d'un point M sur une variété V_{p-1}; a désignant un point quelconque du continu e obtenu en projetant σ sur le cube i.

Considérons la fonction

$$\varphi(a, b, d) = f(d) - \frac{\overline{bd}}{\overline{ba}} f(a) - \frac{\overline{ad}}{\overline{ab}} f(b),$$

a et b étant des points de e et d un point du segment $\overline{ab}$ pris également sur e; si la fonction φ ne peut pas prendre des valeurs de signes contraires, le point M est un point c; sinon, le point M est un point n.

40. — Nature des ensembles $\{c\}$ et $\{n\}$. — L'ensemble $\{c\}$ des points c est un ensemble ouvert; car, un point c a son voisinage sur V_{p-1} formé exclusivement de points c.

Comme tout point d'accumulation de points n est un point n, l'ensemble $\{n\}$ est fermé ; ce qui résulte d'ailleurs de ce que $\{n\}$ est le complémentaire de l'ensemble ouvert $\{c\}$.

41. Définitions des points c_+ et c_-. — Au n° 39 nous avons attaché à un point quelconque M d'une variété V_{p-1} une fonction φ.

Si φ ne peut prendre que des valeurs positives ou nulles le point M sera appelé un point c_+; si φ ne peut prendre que des valeurs négatives ou nulles, le point M sera appelé un point c_-.

On voit immédiatement que les ensembles $\{c_+\}$ et $\{c_-\}$ sont des ensembles ouverts et l'on a

$$\{c\} = \{c_+\} \dot{+} \{c_-\}.$$

42. Définition d'un point c_0; intersection des ensembles $\{c_+\}$ et $\{c_-\}$. — Si un point M (en bordure ou non) d'une variété V_{p-1} a ses environs constitués par une portion d'hyperplan $(p-1)$ fois étendu, la fonction φ attachée au point M ne peut prendre que la valeur zéro.

Le point M est à la fois un point c_+ et un point c_- : nous dirons que c'est un point c_0.

Inversement si M est en même temps point c_+ et point c_-, la fonction φ est constamment nulle; en reprenant les notations du n° 39 on a

$$f(d) = \frac{\overline{bd}}{\overline{ba}} f(a) + \frac{\overline{ad}}{\overline{ab}} f(b),$$

ce qui prouve que le point D appartient au segment $\overline{AB}$.

D étant un point quelconque de $\overline{AB}$ il en résulte que le segment $\overline{AB}$ est sur V_{p-1} et comme, d'autre part, A et B sont des points quelconques de V_{p-1} il s'ensuit que les environs de M sur V_{p-1} se réduisent à une portion d'hyperplan $p-1$ fois étendu : donc, M est un point c_0.

L'intersection des ensembles $\{c_+\}$ et $\{c_-\}$ est l'ensemble $\{c_0\}$ des points c_0; on peut écrire

$$\{c_+\} \times \{c_-\} = \{c_0\}.$$

II

Convexité d'une rondelle découpée sur une variété V_{p-1}.

43. Définition d'une rondelle. — Nous dirons qu'un continu ponctuel Σ de l'espace R_p est une rondelle découpée sur une variété V_{p-1}, si, étant donné un point courant M de Σ, il existe un système d'axes de coordonnées rectangulaires

$$MX_1, \quad MX_2, \quad \ldots, \quad MX_p$$

tel que toute parallèle à MX_p coupe Σ en un point et un seulement dont la coordonnée x_p soit comprise entre deux nombres fixes h et h' [1]; l'ensemble de ces parallèles étant coupé par l'hyperplan $x_p = 0$ suivant un ensemble convexe K à $p-1$ dimensions.

---

[1] h' et h sont positifs ou nuls sans pouvoir être nuls tous les deux en même temps.

Il découle de cette définition que l'on peut représenter Σ par rapport à ce système d'axes par une équation de la forme

$$x_p = f(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}).$$

f étant une fonction continue, sans plus, définie sur l'ensemble convexe K; et l'on a partout

$$-h' < f < h.$$

44. Définition d'une rondelle convexe positivement (ou négativement). — On peut attacher à une rondelle Σ deux ensembles ponctuels E_1 et E_2 se projetant sur le sous-espace

$$x_p = 0$$

suivant l'ensemble convexe K et tels que l'on ait successivement pour

$$E_1 \qquad -h' \leqslant x_p \leqslant f$$

et pour

$$E_2 \qquad f \leqslant x_p \leqslant h.$$

Si l'ensemble E_1 est convexe nous dirons que Σ est convexe et que sa convexité est positive.

Si l'ensemble E_2 est convexe Σ sera dite convexe négativement.

Dans le cas où les deux ensembles E_1 et E_2 sont convexes simultanément, Σ est une rondelle plane, c'est-à-dire une portion d'hyperplan $(p-1)$ fois étendu.

On peut considérer également la fonction

$$\varphi(a, b, d) = f(d) - \frac{\overline{bd}}{\overline{ba}} f(a) - \frac{\overline{ad}}{\overline{ab}} f(b),$$

dans laquelle a et b sont deux points quelconques de K et d un point quelconque du segment $\overline{ab}$.

Dire que Σ est convexe et que sa convexité est positive revient à dire que la fonction φ ne peut pas prendre de valeurs négatives.

Si la fonction φ ne peut pas prendre de valeurs positives, Σ est convexe et à convexité négative.

Si la fonction φ ne peut prendre que la valeur zéro, la rondelle est située dans un hyperplan.

45. Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une rondelle* Σ, $(p-1)$*-dimensionnelle, soit convexe et à convexité positive, est que tout point courant de* Σ *soit un point* c_+.

1° *La condition est nécessaire.* — En effet soit M un point courant quelconque de Σ; on peut supposer que M est l'origine des coordonnées.

Servons-nous des notations employées précédemment. On peut prendre ε assez petit pour que le cube i soit intérieur à K. La fonction φ étant positive ou nulle quand a et b sont deux points quelconques de K, est donc positive ou nulle quand a et b sont pris dans ou sur le cube i; ce qui prouve que M est un point c_+.

2° *La condition est suffisante.* — Si la rondelle Σ est convexe, il est évident que sa convexité est positive; il nous suffira donc de montrer que l'ensemble E_1 défini au n° 44 est convexe.

Nous aurons prouvé la convexité de E_1 si nous arrivons à constituer une suite d'ensembles convexes ayant E_1 pour ensemble limite.

Pour cela démontrons d'abord que tout sous-continu k de K, convexe, $(p-1)$-dimensionnel, est la projection orthogonale sur le sous-espace $x_p = 0$ d'une rondelle σ convexe découpée sur Σ.

Soit e_1 le sous-ensemble de E_1 qui est attaché à σ.

Nous supposerons que l'origine des coordonnées M est un point courant de σ. Le continu k est décomposé par les hyperplans

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_{p-1} = 0,$$

en 2^{p-1} ensembles convexes[1]

$$k^{\text{I}}, \quad k^{\text{II}}, \quad k^{\text{III}}, \quad \ldots, \quad k^{2^{p-1}}.$$

A chaque $k^{(\alpha)}$ correspond une rondelle $\sigma^{(\alpha)}$ et un ensemble $e_1^{(\alpha)}$ sous-ensemble de e_1.

Deux cas peuvent se présenter : ou bien tous les $e_1^{(\alpha)}$ sont convexes, ou bien l'un au moins des $e_1^{(\alpha)}$ n'est pas convexe.

Envisageons d'abord le cas où tous les ensembles $e_1^{(\alpha)}$ sont convexes.

Les conditions du théorème VIII (n° 10) se trouvent remplies; car,

1° l'intersection des $e_1^{(\alpha)}$ est le segment $(-h', 0)$ de l'axe MX_p,

2° ces ensembles n'empiètent pas l'un sur l'autre,

---

(1) L'ensemble ponctuel k^{I} est formé, par exemple, des points de k satisfaisant à

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad \ldots, \quad x_{p-1} \geqslant 0;$$

l'ensemble k^{II},

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad \ldots, \quad x_{p-2} \geqslant 0, \quad x_{p-1} \leqslant 0;$$

d'une manière générale, un ensemble $k^{(\alpha)}$ est obtenu en prenant les points de k dont une partie des $(p-1)$ premières coordonnées sont positives ou nulles et l'autre partie négatives ou nulles.

3° en tout point de la frontière de e_1, appartenant à deux ou plusieurs $e_1^{(\alpha)}$ il existe un hyperplan d'appui local pour leur réunion e_1 (en effet, si ce point se trouve sur σ, cela résulte de ce que tous les points de σ sont des points c_+, si ce point se trouve dans l'hyperplan $x_p = -h'$, c'est cet hyperplan qui est un hyperplan d'appui, enfin si ce point se trouve sur un segment issu d'un point de la frontière de k et parallèle à MX_p, cela résulte du théorème III).

Nous pouvons donc appliquer le théorème VIII et en déduire la convexité de e_1.

Envisageons maintenant le cas où l'un, au moins, des $e_1^{(\alpha)}$ n'est pas convexe; désignons-le par e_1^1. A cet ensemble e_1^1 correspond une rondelle σ^1 qui possède les mêmes propriétés que la rondelle σ. Nous pouvons raisonner à partir de σ^1 comme nous l'avons fait en partant de σ. L'ensemble e_1^1 n'étant pas convexe il donnera naissance à un autre ensemble non convexe e_1^2. En procédant de la sorte indéfiniment, nous formons une suite d'ensembles non convexes emboîtés

$$e_1 \supset e_1^1 \supset e_1^2 \supset \ldots\ldots$$

qui ont pour ensemble limite une corde de e_1 parallèle à l'axe MX_p. L'extrémité de cette corde qui se trouve sur σ ne peut être un point c_+ d'après la façon même de l'obtenir; or ceci est contraire à l'hypothèse suivant laquelle tout point de σ est un point c_+. Donc l'ensemble e_1 est convexe.

Il est aisé de former une suite d'ensembles convexes tels que e_1 tendant vers E_1; en vertu du théorème IX (n° 11), E_1 est convexe et par suite de la définition même Σ est convexe et à convexité positive.

46. Problème. — *Quelle est la nature d'un point courant* M *d'une rondelle* Σ, $(p-1)$ *fois étendue, de l'espace* R_p, *dont tous les points*(1), *sauf* M, *sont des points* c_+?

Remarquons d'abord que si Σ est convexe, M est un point c_+, et que réciproquement si M est un point c_+, en vertu du théorème précédent, Σ est convexe; ceci nous montre qu'il nous suffira de chercher à savoir si Σ est convexe ou non(2); c'est-à-dire que nous devons étudier, du point de vue de la convexité, l'ensemble E_1 attaché à Σ.

Soient A et B deux points quelconques de E_1, et a, b leurs projections orthogonales sur K.

Si le segment $\overline{ab}$ n'admet pas M(3) pour point intérieur on peut construire un

(1) On peut supposer que seuls les points courants de Σ sont des points c_+; il suffira alors de raisonner comme au n° 45 en substituant à Σ une rondelle σ tendant vers Σ.

(2) Il est évident qu'il n'y a que deux alternatives possibles : ou bien M est un point c_+, ou bien c'est un point n, car l'ensemble $\{c_-\}$ est ouvert.

(3) Le point M est l'origine des axes comme au n° 45.

sous-continu k convexe, de K, à $(p-1)$ dimensions, contenant les points a et b, et extérieur à M. Ce sous-continu k est la projection sur l'hyperplan $x_p = 0$ d'une rondelle σ, qui, d'après le théorème précédent, est convexe et à convexité positive. L'ensemble e_1 correspondant à σ est convexe, donc $\overline{AB}$ appartient à cet ensemble et par suite à E_1.

Supposons que M soit un point intérieur du segment $\overline{ab}$; s'il est possible de trouver une suite de points de K

$$b_1, \quad b_2, \ldots\ldots$$

tendant vers b et tels que les segments

$$\overline{ab_1}, \quad \overline{ab_2}, \ldots\ldots$$

ne passent pas par M, il existe une suite de segments de E_1

$$\overline{AB_1}, \quad \overline{AB_2}, \ldots\ldots$$

tendant vers $\overline{AB}$; donc $\overline{AB}$ appartient à E.

Or pour que cette suite

$$b_1, \quad b_2, \ldots\ldots$$

existe il faut et il suffit que l'on ait $p > 2$.

Quand $p = 2$ le continu K se réduit à un segment de droite; si M est intérieur au segment $\overline{ab}$, il est intérieur, à partir d'un certain rang, à tout segment d'une suite

$$\overline{ab_1}, \quad \overline{ab_2}, \ldots\ldots$$

tendant vers $\overline{ab}$.

Ainsi, l'origine des coordonnées est un point n de la courbe

$$y^3 = x^2,$$

alors que c'est un point courant exclusivement entouré de points c_+.

Notons que le cas $p = 1$ n'est pas à envisager (Σ se réduit à un point).

La réponse à la question posée est donc la suivante :

Si $p > 2$ le point M *exclusivement entouré de points c_+ est un point c_+.*

Si $p = 2$ la nature du point M *est inconnue* (1).

COROLLAIRE. — *Un point courant* M *d'une rondelle Σ, $(p-1)$ fois étendue de l'espace R_p, dont tous les points, sauf* M, *sont des points c_0, est un point c_0 si $p > 2$; si $p = 2$,* M *est un point c_0 ou un point c au sens strict.*

(1) Ainsi que nous l'avons dit dans l'introduction, c'est cette différence profonde, qui existe entre une courbe plane sur laquelle, sauf pour un point, les environs de chaque point sont convexes et entre une surface soumise à la même condition, qui est l'origine de ce travail.

Si $p > 2$, d'après le théorème précédent M est à la fois un point c_+ et un point c_-; c'est donc un point c_0 (Σ est plane).

Dans le cas où $p = 2$, on voit par exemple que l'origine des coordonnées est

un point	c_0	pour	$y = x$;
un point	c_+	pour	$y = -\sqrt{x^2}$;
et un point	c_-	pour	$y = \sqrt{x^2}$.

Il est intéressant de noter que le point M ne peut pas être un point n.

47. Problème. — *Quelle est la nature d'un point* M, *point courant d'une rondelle* Σ, $(p-1)$ *fois étendue, de l'espace* R_p $(p > 2)$, *dont tous les points, sauf* M, *sont des points* c *au sens strict?*

Les deux ensembles ouverts $\{c_+\}$ et $\{c_-\}$ n'ont alors aucune partie commune. Si aucun des deux ensembles n'était vide, il y aurait sur la rondelle une infinité de points n, car tout continu qui relie sur la rondelle un point c_+ à un point c_- contient au moins un point n. Il en résulte que tous les points de Σ, sauf M, sont des points c_+ ou c_-. On est ramené au problème précédent.

48. Problème. — *Quelle est la nature d'un point quelconque* M (point courant ou en bordure), *d'une variété* V_{p-1} *à* $(p-1)$ *dimensions de l'espace* R_p *exclusivement entouré de points* c_+?

Si le point M est un point courant, on peut découper sur la variété V_{p-1} une rondelle Σ admettant M pour point courant et dont tous les points, sauf M, sont des points c_+. Nous avons vu (problème n° 46) que si $p > 2$ le point M est un point c_+, et que si $p = 2$ on ne connaît rien sur la nature du point M.

Dans le cas d'un point en bordure on voit sans peine que le raisonnement du n° 34 s'applique sans changement. Nous sommes ainsi conduits à énoncer la proposition générale suivante (valable pour n'importe quel espace euclidien et pour n'importe quelle position de M sur V_{p-1}).

Soit e la projection sur $x_p = 0$ du voisinage Σ d'un point M d'une variété V_{p-1} exclusivement entouré de points c_+, si, quel que soit le segment $\overline{ab}$ de e passant par m (projection de M), il est possible de déterminer sur e une suite de segments $\{\overline{a_i b_i}\}$ tendant vers $\overline{ab}$, le point M est un point c_+; sinon on ne peut rien dire concernant la nature de M.

En sorte que si m coupe e on ne peut rien dire, sinon on peut affirmer que M est un point c_+.

49. Problème. — *Quelle est la nature d'un point quelconque* M *d'une variété* V_{p-1} $(p-1)$ *fois étendue de l'espace* R_p, *exclusivement entouré de points* c, *au sens strict.*

Soient P et Q deux points quelconques voisins de M sur V_{p-1}; si M n'est pas inévitable[1] entre P et Q, ces deux points sont de même nature. Donc si M ne coupe pas Σ, tous les points entourant M sont de même nature et, d'après le problème précédent, il en est de même de M.

Si M coupe Σ on ne peut rien dire.

III

Ensemble $\{n\}$ des points n d'une variété V_{p-1}, $(p-1)$-dimensionnelle de l'espace R_p, sur laquelle l'ensemble $\{c_0\}$ des points c_0 est vide.

50. α) EXEMPLES D'ENSEMBLES $\{n\}$ A $p-1$ DIMENSIONS[2]. — I. Considérons dans le plan la courbe ayant pour équation $y=f(x)$, f étant la fonction donnant l'abscisse d'un point de la courbe de Peano connaissant le paramètre t[3]. Cette courbe est entièrement constituée de points n; l'ensemble $\{n\}$ a une dimension.

II. Dans l'espace ordinaire un hyperboloïde de révolution à une nappe fournit un exemple d'ensemble n bidimensionnel.

III. Soit

$$x_p = x_1^2 - x_2^2 + \Psi(x_3, \ldots, x_{p-1})$$

l'équation d'une variété V_{p-1} de l'espace R_p, dans laquelle Ψ est continue et nulle à l'origine. Limitons la variété à une rondelle découpée autour de l'origine. On peut supposer la rondelle suffisamment petite pour que chacun de ses points soit un point n. L'ensemble $\{n\}$ a $p-1$ dimensions.

β) EXEMPLES D'ENSEMBLES $\{n\}$ A $p-2$ DIMENSIONS. — I. Pour la courbe plane $y^3=x^2$ l'ensemble $\{n\}$ se réduit à l'origine des coordonnées. $\{n\}$ a zéro dimension.

II. Dans l'espace ordinaire réunissons les volumes de deux sphères sécantes.

Sur la frontière de l'ensemble ponctuel ainsi obtenu, l'ensemble $\{n\}$ est constitué par le cercle commun aux deux sphères. L'ensemble $\{n\}$ a une dimension.

---

(1) Nous empruntons cette expression à M. J. Mirguet (voir sa thèse, p. 11, n° 9).

(2) Nous disons qu'un ensemble ponctuel E de l'espace R_p a $(p-1)$ dimensions si l'on peut établir entre le voisinage de chaque point de E et un cube $(p-1)$-dimensionnel une correspondance ponctuelle biunivoque et bicontinue.

(3) *G. I. D.*, p. 47-48, n° 54.

III. La variété ayant pour équations

$$\sum_{i=1}^{p} x_i^2 = 2x_1 + 1 \quad \text{pour} \quad x_1 \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} x_i^2 = -2x_1 + 1 \quad \text{pour} \quad x_1 \leqslant 0$$

admet pour ensemble $\{n\}$ l'hypersphère $p-2$ dimensionnelle

$$\sum_{i=2}^{p} x_i^2 = 1 \quad \text{de l'espace} \quad x_1 = 0.$$

Remarque. — Dans cinq de ces exemples tout point n fait partie d'un continu de points n. L'ensemble $\{n\}$ n'est d'ailleurs constitué que d'un seul continu à $p-1$ ou à $p-2$ dimensions.

Voici deux exemples dans lesquels un point n ne fait partie d'aucun continu appartenant à $\{n\}$, sans être isolé sur $\{n\}$ comme dans le cas de la courbe plane $y^3 = x^2$.

γ) I. Exemple d'une courbe plane sur laquelle l'ensemble $\{n\}$ est punctiforme et parfait.

Du segment fermé $(0,1)$ de l'axe des x enlevons le tiers médian et remplaçons-le par un demi-cercle ayant pour diamètre le segment supprimé. Reprenons cette construction sur les deux segments restants et continuons ainsi indéfiniment. Nous obtenons de la sorte une courbe sur laquelle l'ensemble $\{n\}$ n'est autre que l'ensemble triadique de Cantor, c'est-à-dire un ensemble punctiforme et parfait.

II. Exemple de point n d'une surface de l'espace ordinaire ne faisant partie d'aucun continu tracé sur $\{n\}$.

Considérons la surface de révolution ayant pour méridienne $z = f(r)$ la réunion des courbes C_m suivantes :

$$(C_m) \qquad z = \sqrt{\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right)^2 - \left(r - \frac{3}{2^{m+1}}\right)^2},$$

où m prend toutes les valeurs entières de 1 à $+\infty$.

L'ensemble $\{n\}$ s'obtient en donnant à r toutes les valeurs appartenant aux intervalles fermés $\left[\frac{1}{2^m}, \frac{3}{2^{m+1}}\right]$ et en y joignant l'origine des coordonnées.

On voit que ce point n ne fait partie d'aucun continu de points n.

Les exemples précédents ont été donnés dans le but d'éclairer le théorème suivant :

51. Théorème. — *Dans les environs de tout point* n, *point courant d'une variété* V_{p-1} $(p > 2)$ *sur laquelle* $\{c_0\}$ *est vide, on peut prélever un continu à* $p-2$ *dimensions entièrement constitué de points* n.

1er cas. $p = 3$. Soit M un point n, exclu du bord, d'une surface S. Si les environs Σ de M sur S sont entièremsnt formés de points n (α, II, n° 50) on peut, conformément au théorème énoncé, tracer sur Σ une ligne de points n; sinon, nous savons, d'après le corollaire n° 33, que l'ensemble $\{n\}$ des points n de Σ ne peut être punctiforme(1).

2e cas. $p > 3$.

Lemme. *Soit* E *un ensemble ponctuel pris sur une rondelle* Σ, $(p-1)$*-dimensionnelle dont tous les points étrangers à* E *sont des points* c_+ (au sens large); *si l'on ne peut prélever sur* E *aucun continu à* $p-2$ *dimensions,* Σ *est convexe.*

Cette proposition a été démontrée dans le cas $p = 3$ (n° 32), par suite on pourra raisonner par récurrence pour établir qu'elle est vraie pour p quelconque. Toutefois, pour abréger, nous ne donnerons la démonstration que pour $p = 4$. Nous désignerons par e la projection de E sur $x_4 = 0$ et nous dirons qu'un point de K, projection de Σ sur $x_4 = 0$, est un c_+ ou un n, s'il est la projection d'un point c_+ ou d'un point n de Σ.

Cas particulier : *e est situé dans un plan* P.

Pour prouver la convexité de Σ nous montrerons que la fonction φ attachée à Σ est non-négative partout. Soient a et b deux points quelconques de K.

Si $\overline{ab}$ ne coupe pas P on a, sur $\overline{ab}$, $\varphi \geqslant 0$.

Si $\overline{ab}$ coupe P en un point m exclu de e, on peut décrire une sphère S, assez petite, pour que tout point situé dans ou sur S, soit un point c_+. Dans le volume obtenu en réunissant les cônes de sommets a et b ayant pour base commune la section de S par P on a $\varphi \geqslant 0$.

Si $\overline{ab}$ porte entre ses extrémités un point g de e, il existe un plan Q passant par $\overline{ab}$ qui coupe les environs e_1 de g sur e suivant un ensemble punctiforme; sinon, tout plan passant par $\overline{ab}$ couperait e_1 suivant un segment de droite ce qui exigerait que e_1 soit un continu bidimensionnel. On pourrait donc prélever sur E un continu bidimensionnel, contrairement à l'hypothèse. Dans ce plan Q

(1) Nous avons vu (n° 27, Remarque II) que si l'on ne suppose pas $\{c_0\} = 0$ le point M peut être un point n isolé sur l'ensemble $\{n\}$.

où peut décrire un contour convexe englobant $\overline{ab}$, limitant une région convexe k dont l'intersection avec e est punctiforme. Nous sommes ainsi ramenés au cas $p = 3$; en effet, k est la projection d'une rondelle de surface σ, intersection de Σ et de l'hyperplan passant par Q et parallèle à l'axe ox_4. La rondelle σ étant convexe, on a $\varphi \geqslant 0$ sur $\overline{ab}$.

Si $\overline{ab}$ est dans P, on peut former dans K, hors de P, une suite de segments $\{\overline{a_i b_i}\}$ tendant vers $\overline{ab}$; comme sur chaque $\overline{a_i b_i}$ on a $\varphi \geqslant 0$, il en est de même sur $\overline{ab}$.

Quelle que soit la position de $\overline{ab}$ dans K, la fonction φ est non négative, donc Σ est convexe.

Cas général. — 1° *$\overline{ab}$ ne porte aucun point de e entre ses extrémités.* — Le segment $\overline{ab}$ est la projection d'un arc plan $\overset{\frown}{AB}$ tracé sur Σ et entièrement formé de points c_+; cet arc $\overset{\frown}{AB}$ est convexe (n° 45), donc $\varphi \geqslant 0$ sur $\overline{ab}$.

2° *$\overline{ab}$ porte des points de e, le point a est exclu de e.* — Je dis qu'il existe un cône de révolution Γ de sommet a, d'axe $\overline{ab}$, ayant pour base un cercle de centre b, tel que si l'on désigne par $\{\nu\}$ l'intersection de $\{n\}$ et de Γ, il existe un demi-plan issu de $\overline{ab}$ coupant $\{\nu\}$ suivant un ensemble punctiforme. En effet, s'il n'en était pas ainsi, dans tout demi-plan Π issu de $\overline{ab}$ il y aurait, au moins, un arc(1) ayant une extrémité sur $\overline{ab}$ et formé de points ν. D'autre part, la collection des points ν, portée par un demi-plan variable Π_i tendant vers un demi-plan fixe Π, a pour limite la collection portée par Π; car 1° l'ensemble $\{\nu\}$ est fermé et 2°, en vertu du cas particulier déjà étudié, un point ν de Π ne peut avoir sur $\{\nu\}$ un voisinage plan. On en déduit que lorsque Π_i tourne autour de $\overline{ab}$, le premier arc, à partir de a, formé de points ν, engendre une rondelle de surface, ce qui contredirait l'hypothèse et établit l'existence d'un demi-plan Π coupant ν suivant un ensemble punctiforme.

Donc, l'on a encore, $\varphi \geqslant 0$ sur $\overline{ab}$.

3° *a et b sont des points de e.* — On peut former une suite de segments $\{\overline{a_i b_i}\}$ tendant vers $\overline{ab}$, les a_i étant tous exclus de e; sur chaque $\overline{a_i b_i}$, $\varphi \geqslant 0$, il en est de même, par suite, sur $\overline{ab}$. La fonction φ étant non négative partout, la rondelle Σ est convexe.

Ce lemme établi, la démonstration du théorème énoncé est immédiate.

Soit M un point courant n d'une variété V_{p-1} sur laquelle $\{c_0\}$ est vide. Désignons par Σ la rondelle constituant les environs de M sur V_{p-1}. Si tous les points de Σ sont des points n on peut prélever sur Σ un continu à $p-2$ dimensions

(1) En vertu de l'hypothèse, il n'y a dans Π aucun continu bidimensionnel constitué de points ν.

formé de points n; sinon l'ensemble $E = \{n\}$ ne recouvre pas Σ. Supposons que E ne contienne aucun continu à $p-2$ dimensions. Je dis que tous les points de $\Sigma - E$ sont tous des points c_+ (ou c_-); car, en effet, s'il y avait sur $\Sigma - E$ un point c_+, A, et un point c_-, B, on pourrait les réunir par un continu K, tracé sur Σ, ne contenant aucun point de E; il y aurait sur K, au moins un point n, ce qui est impossible, puisque tous les points n appartiennent à E. D'autre part, en vertu du lemme ci-dessus, Σ est convexe (tous ses points étrangers à E étant des points c_+, E ne contenant aucun continu $(p-2)$-dimensionnel) et M contrairement à l'hypothèse ne serait pas un point n. Il y a donc sur Σ un continu à $p-2$ dimensions formé de points n. C. Q. F. D.