

R. POTIER

## Sur certaines questions de géométrie différentielle conforme

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4<sup>e</sup> série*, tome 4 (1940), p. 1-63

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1940\\_4\\_4\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1940_4_4__1_0)

© Université Paul Sabatier, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**ANNALES**  
DE LA  
**FACULTÉ DES SCIENCES**  
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,  
POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

---

**SUR CERTAINES QUESTIONS**  
DE  
**GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CONFORME**  
PAR R. POTIER

---

INTRODUCTION

Le présent mémoire est le résultat d'une étude que nous avons commencée avec l'intention de traiter le seul problème des courbes tracées sur une surface dans l'espace à connexion conforme tridimensionnel.

Au cours du travail, nous avons pensé qu'il y aurait avantage à exposer d'abord les résultats ayant trait à la seule géométrie conforme, afin de les généraliser ensuite, et de voir comment ils étaient modifiés dans la généralisation.

C'est pourquoi l'étude des propriétés des figures de l'espace à connexion conforme n'occupe que notre dernier chapitre. Mais elle est préparée par les chapitres précédents. Nous avons cru bon de nous laisser aller au chapitre III à une digression sur certaines propriétés des lignes de courbure des surfaces isothermiques ayant déjà fait l'objet d'une note aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences (IX).

C'est l'application de la méthode de M. Élie CARTAN qui nous a conduit à tous les résultats développés dans les pages qui suivent. L'élégance de cette méthode et son aptitude à résoudre les problèmes posés par la géométrie différentielle étant bien connues, il est presque superflu d'ajouter que son choix pour la résolution des problèmes que nous nous étions posés a grandement facilité notre travail.

Enfin, il nous faut signaler qu'au cours de cette recherche nous avons été conseillé et encouragé à tout instant par M. CARTAN lui-même.

Ceux qui ont travaillé sous la direction de notre Maître savent combien il est impossible de payer la dette de reconnaissance contractée à son égard à l'aide d'une quelconque formule de remerciements.

C'est pourquoi nous lui demandons simplement ici de croire à la sincérité du sentiment d'affection respectueuse que nous avons pour lui.

\*  
\* \*

C'est en 1892 que M. TRESSE publia, sous forme d'une note aux comptes rendus, le premier travail de géométrie différentielle conforme, lequel avait trait à la détermination des invariants conformes des surfaces.

De nombreux auteurs, notamment CALAPSO (III a)<sup>(1)</sup>, G. THOMPSEN (V a), M. VESSIOT et M. DELENS (IIa), ont fait faire, depuis, des progrès importants à cette branche de la géométrie différentielle.

Nous signalerons surtout l'important mémoire que M. VESSIOT a publié en 1926 et 1927 dans le *Bulletin de la Société Mathématique*, et la partie de l'ouvrage de M. DELENS « Méthodes et Problèmes des géométries euclidienne et conforme » consacrée à l'étude des problèmes conformes.

Le mémoire de M. VESSIOT contient, outre l'analyse des propriétés différentielles des courbes et des surfaces au point de vue conforme, une étude des courbes tracées sur les surfaces.

M. VESSIOT y détermine la position de la sphère osculatrice d'une telle courbe par rapport à la surface considérée.

Il montre ensuite que l'invariant d'ordre 4 attaché à une courbe en un point est en relation simple avec la variation infinitésimale de l'angle de la sphère osculatrice et de la surface sur laquelle la courbe est tracée.

Nous indiquons dans le texte, sous forme de notes, les numéros des formules obtenues par M. VESSIOT qui correspondent à trois de nos formules du chapitre II.

M. DELENS a introduit, dans l'ouvrage auquel nous faisons allusion plus haut, les repères intrinsèques des courbes et des surfaces en géométrie conforme ordinaire. Il a indiqué comment il est possible de relier les invariants d'une courbe tracée sur une surface et ceux de la surface en question. Mais, ayant d'autres objectifs que nous, il n'a pas poussé jusqu'au bout ses calculs. C'est pourquoi il n'obtient pas la formule que nous désignons sous le numéro II 25 et qui montre la relation existant entre la courbure conforme d'une courbe et la dérivée schwarziennne de l'arc conforme de cette courbe par rapport à l'arc que nous appelons  $\tau$ . La différentielle  $d\tau$  n'est autre que la partie principale de l'angle fait par la sphère tan-

---

(1) Les chiffres romains et les lettres qui les suivent indiquent les références bibliographiques.

gente principale<sup>(1)</sup> à la surface en un point de la courbe avec la sphère tangente principale à la surface en un point de la courbe infiniment voisin du point précédent.

Dans le chapitre I du présent travail, nous rappelons comment on peut déterminer les repères intrinsèques des courbes et des surfaces en géométrie conforme. L'exposé est présenté de manière à nous permettre de nous appuyer sur le développement formel des calculs de ce chapitre, afin d'alléger la rédaction de la partie du chapitre V traitant des mêmes questions dans l'espace à connexion conforme à trois dimensions.

Le chapitre II est consacré à l'étude des courbes tracées sur les surfaces en géométrie conforme ordinaire. Nous montrons rapidement comment le repère de la courbe peut être situé par rapport à celui de la surface, puis comment les différents invariants se relient les uns aux autres.

Nous mettons nos formules sous des formes permettant des interprétations géométriques ; nous donnons un théorème relatif à une propriété de l'élément linéaire conforme de la surface.

Puis, nous examinons le problème du contact de deux courbes de deux familles importantes : asymptotiques conformes et géodésiques conformes.

Le chapitre III contient deux théorèmes sur la déformation isométrique conforme des surfaces isothermiques, qu'il est facile de déduire de l'étude réalisée au chapitre II.

Dans le chapitre IV, nous familiarisons le lecteur avec la notion d'espace à connexion conforme en étudiant la connexion induite sur une surface de l'espace conforme ordinaire, connexion introduite par M. DELENS dans l'ouvrage déjà cité. Nous poussons les calculs jusqu'au bout et obtenons une formule IV 10, analogue à II 25.

Le chapitre V traite des problèmes de géométrie différentielle posés dans l'espace à connexion conforme à trois dimensions. Nous y observons que l'existence de la torsion de l'espace crée des différences notables avec ce qui existe en géométrie conforme ordinaire. Les deux lignes de courbure d'une surface passant par un point ne sont plus, en général, rectangulaires ; il se peut même qu'elles n'existent pas dans le domaine réel. Les formules reliant les repères et les invariants entre eux sont modifiées (sauf, toutefois, la formule II 25, qui subsiste).

---

(1) La sphère tangente principale à une surface  $\Sigma$  en un point  $M$  est la sphère qui coupe  $\Sigma$  selon une courbe ayant en  $M$  un point double à tangentes rectangulaires.

## CHAPITRE I

### Les repères intrinsèques en géométrie conforme.

En géométrie différentielle classique euclidienne, on a été conduit à attacher aux courbes et aux surfaces en chacun de leurs points des trièdres de référence particuliers : le repère de Frenet, le repère de Darboux. Les variations infinitésimales des vecteurs de l'un de ces repères quand le point auquel il est attaché se déplace infiniment peu sont en relation simple avec les invariants attachés soit à la courbe, soit à la surface. Les formules de Frenet mettent en évidence, dans le cas de la courbe, cette relation.

M. Élie Cartan a montré le parti qu'on pouvait tirer de cette méthode dans toute géométrie généralisée. (Voir p. ex : I c).

Notre but, dans le présent travail, est d'appliquer cette méthode à plusieurs questions de la géométrie différentielle conforme (et à connexion conforme).

Les repères que nous attacherons aux courbes et aux surfaces seront, ici, des repères pentasphériques. (Cf. VIII a).

Dans ce premier chapitre, nous montrerons comment nous pouvons attacher aux courbes et aux surfaces de l'espace conforme ordinaire, en chacun de leurs points, un repère intrinsèque. Nous légitimerons la marche suivie à propos de l'étude des courbes. Les formules de déplacement infinitésimal du repère nous donneront les invariants différentiels soit de la courbe, soit de la surface.

#### 1. — Propriétés différentielles des courbes en géométrie conforme ; repère intrinsèque.

Soit une courbe  $\Gamma$  de l'espace conforme à trois dimensions, différentiable autant de fois qu'il le faudra par la suite (cinq différentiabilités au plus suffiront). Soit  $M$  le point courant de  $\Gamma$ .

Attachons à  $M$  le repère pentasphérique suivant :

$$A) \left\{ \begin{array}{l} A_0 : \text{sphère-point analytique représentant le point } M; \\ A_1 : \text{sphère unitaire, orthogonale à } \Gamma \text{ en } M; \\ A_2, A_3 : \text{sphères unitaires, passant par } M, \text{ orthogonales entre elles et à } A_1; \\ A_4 : \text{sphère-point analytique représentant le point d'intersection de } A_1, A_2, \\ \quad A_3 \text{ autre que } M, \text{ et telle que } (A_0 A_4) = -1/2 \text{ (la parenthèse indi-} \\ \quad \text{quant le produit scalaire).} \end{array} \right.$$

Si  $M$  se déplace infiniment peu sur la courbe, le repère  $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$  varie, et sa variation infinitésimale s'exprime par des formules telles que :

$$I_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} dA_0 = p_0^0 A_0 + p_0^1 A_1, \\ dA_1 = p_1^0 A_0 + p_1^2 A_2 + p_1^3 A_3 + 2p_1^4 A_4, \\ dA_2 = p_2^0 A_0 - p_2^1 A_1 + p_2^3 A_3, \\ dA_3 = p_3^0 A_0 - p_3^1 A_1 + p_3^2 A_2, \\ dA_4 = 1/2 (p_1^0 A_1 + p_2^0 A_2 + p_3^0 A_3) - p_0^0 A_4. \end{array} \right.$$

$(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$  n'est pas le seul repère à satisfaire aux conditions A). Il est clair que tout repère  $(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4)$  satisfaisant aux conditions A) est lié à  $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$  par le système de relations :

$$I_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_0 = \zeta A_0, \\ \bar{A}_1 = \alpha A_0 + A_1, \\ \bar{A}_2 = \cos \theta A_2 + \sin \theta A_3 + \mu A_0, \\ \bar{A}_3 = -\sin \theta A_2 + \cos \theta A_3 + \nu A_0, \\ \bar{A}_4 = \frac{1}{4\zeta} \{ \alpha^2 + \mu^2 + \nu^2 \} A_0 + \frac{1}{2\zeta} \{ \mu \cos \theta - \nu \sin \theta \} A_2 \\ \quad + \frac{1}{2\zeta} \{ \mu \sin \theta + \nu \cos \theta \} A_3 + \frac{\alpha}{2\zeta} A_1 + \frac{1}{\zeta} A_4. \end{array} \right.$$

Réciproquement, tout repère pentasphérique  $(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4)$  défini à partir de  $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$  par des formules telles que I 2 satisfait aux conditions A).

Conformément à la méthode de M. Élie Cartan, nous allons restreindre la famille de repères ainsi attachée à chaque point de la courbe tout en simplifiant le tableau des  $p_\alpha^\beta$ . Ce seront les conditions de simplification du tableau  $p_\alpha^\beta$  qui s'exprimeront soit par des relations entre les paramètres  $\theta, \mu, \nu, \zeta, \alpha$ , soit par des conditions fixant certains des paramètres.

Mais, pour que ces opérations aient un caractère géométrique il faut — et il suffit — qu'elles satisfassent à la condition suivante : appliquées à une courbe  $\Gamma'$  déduite de  $\Gamma$  par transformation conforme T, elles doivent donner la famille restreinte de repères déduite par la transformation T de celle attachée à  $\Gamma$ . C'est ce qu'on entend exprimer quand on dit que les opérations en question ont un caractère intrinsèque.

Posons :

$$I_3 \quad d\bar{A}_\alpha = \bar{p}_\alpha^\beta \bar{A}_\beta$$

avec la convention habituelle concernant l'indice répété, on peut exprimer les  $\bar{p}_\alpha^\beta$  en

fonction des  $p_\alpha^3$ , des paramètres  $\theta, \mu, \nu, \zeta, \alpha$ , et des différentielles de ces paramètres.

Les  $\bar{p}_\alpha^3$  sont conservés dans toute transformation conforme — par conséquent, exprimer une condition en  $\bar{p}_\alpha^3$ , c'est exprimer une condition invariante par une transformation conforme.

Si une telle condition en  $\bar{p}_\alpha^3$  s'écrit en fonction de  $p_\alpha^3, \theta, \mu, \nu, \zeta, \alpha$ , seulement (à l'exclusion des différentielles de  $\theta, \mu, \nu, \zeta, \alpha$ ), cette condition sera une relation entre les  $\theta, \mu, \nu, \zeta, \alpha$ , imposant à la famille de repères attachée à  $\Gamma$  une diminution de généralité. Le choix de la famille réduite des nouveaux repères aura, de par le procédé utilisé pour l'effectuer, un caractère intrinsèque.

En répétant cette opération, nous réduirons la famille de pentasphères attachée à  $\Gamma$  à un pentasphère par point de  $\Gamma$ , qui sera le repère pentasphérique intrinsèque de  $\Gamma$ . En différentiant I 2, et en tenant compte de I 3, I 1, I 2, on obtient :

$$\begin{aligned}\bar{p}_1^2 &= \cos \theta p_1^2 + \sin \theta p_1^3 - \mu p_0^1 \\ \bar{p}_1^3 &= -\sin \theta p_1^2 + \cos \theta p_1^3 - \nu p_0^1\end{aligned}$$

Nous lierons  $\mu$  et  $\nu$  à  $\theta$  en imposant les conditions :

$$\bar{p}_1^3 = 0 \quad \bar{p}_1^2 = 0$$

donc :

$$\text{I 4} \quad \begin{cases} \mu = \cos \theta \frac{p_1^2}{p_0^1} + \sin \theta \frac{p_1^3}{p_0^1} \\ \nu = -\sin \theta \frac{p_1^2}{p_0^1} + \cos \theta \frac{p_1^3}{p_0^1} \end{cases}$$

Nous voyons également que :

$$\begin{aligned}\bar{p}_2^0 &= \cos \theta d(p_1^2/p_0^1) + \sin \theta d(p_1^3/p_0^1) + p_0^0(\cos \theta p_1^2/p_0^1 + \sin \theta p_1^3/p_0^1) \\ &\quad + \cos \theta p_2^0 + \sin \theta p_3^0 - p_2^0(\cos \theta p_1^3/p_0^1 - \sin \theta p_1^2/p_0^1).\end{aligned}$$

On peut toujours fixer  $\theta$  pour que  $\bar{p}_2^0 = 0$ , car  $\text{tg } \theta$  peut prendre toutes valeurs, y compris  $\infty$ .

Il se peut qu'il y ait indétermination ; ce sera le cas quand aura :

$$\text{I 5} \quad \begin{cases} d(p_1^2/p_0^1) + p_0^0 p_1^2/p_0^1 + p_2^0 - p_2^3 p_1^3/p_0^1 = 0, \\ d(p_1^3/p_0^1) + p_0^0 p_1^3/p_0^1 + p_3^0 - p_2^3 p_1^2/p_0^1 = 0; \end{cases}$$

$\theta$  une fois fixé,  $\mu$  et  $\nu$  seront fixés par I 4.

Les sphères  $\bar{A}_2$  et  $\bar{A}_3$  seront fixées. La famille de repères attachée à  $M$  sera définie par des formules telles que :

$$I\ 6 \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_0 = \zeta A_0; \\ \bar{A}_1 = \alpha A_0 + A_1; \\ \bar{A}_2 = A_2; \quad \bar{A}_3 = A_3; \\ \bar{A}_4 = \frac{\alpha^2}{4\zeta} A_0 + \frac{\alpha}{2\zeta} A_1 + \frac{1}{\zeta} A_4. \end{array} \right.$$

(ceci à partir d'un nouveau repère  $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ , tel que :

$$p_2^0 = p_1^2 = p_1^3 = 0).$$

Les formules I 6 différenciées donnent, en tenant compte de I 1, où on aura fait  $p_2^0 = p_1^2 = p_1^3 = 0$ ,

de  $d\bar{A}_x = \bar{p}_x^y A_y$ , et de I 6 :

$$\bar{p}_3^0 = \frac{p_3^0}{\zeta}; \quad \bar{p}_0^1 = \zeta p_0^1.$$

Nous pouvons déterminer  $\zeta$  pour que  $\bar{p}_3^0 = \pm \bar{p}_0^1$  car, cette équation équivaut à :  $\zeta^2 = \pm \frac{p_3^0}{p_0^1}$ .

Il y a exception si  $p_3^0$  est nul, car  $\zeta = 0$  n'a pas de sens (il n'existe pas de point de coordonnées pentasphériques toutes nulles).

Il ne reste plus que  $\alpha$  à fixer; les formules I 6 deviennent :

$$I\ 7 \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_0 = A_0, \\ \bar{A}_1 = A_1 + \alpha A_0, \\ \bar{A}_2 = A_2, \\ \bar{A}_3 = A_3, \\ \bar{A}_4 = \frac{\alpha^2}{4} A_0 + \frac{\alpha}{2} A_1 + A_4; \end{array} \right.$$

en différenciant I 7, et en comparant à I 1 où on fait  $p_2^0 = p_1^2 = p_1^3 = 0$  et  $p_3^0 = \pm p_0^1$ , à  $d\bar{A}_x = \bar{p}_x^y A_y$ , et à I 7, on obtient :

$$\bar{p}_0^0 = p_0^0 - \alpha p_0^1;$$



on peut disposer de  $\alpha$  pour que  $\bar{p}_0^0 = 0$ ; les formules I 1 deviennent :

$$\begin{aligned} dA_0 &= p_0^1 A_1; \\ dA_1 &= p_1^0 A_0 + 2p_1^1 A_1; \\ dA_2 &= + p_2^3 A_3; \\ dA_3 &= \pm p_0^1 A_0 - p_2^3 A_3; \\ dA_4 &= \frac{1}{2}(p_1^0 A_1 \pm p_0^1 A_3). \end{aligned}$$

Nous poserons :  $p_1^0 = kp_0^1$ ;  $p_2^3 = -hp_0^1$ ;  $p_0^1 = d\sigma$  et nous permuterons les indices 1 et 3, ce qui n'offre aucune difficulté. Finalement, nous pourrons écrire :

$$\text{I 8} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dA_0}{d\sigma} &= A_1, \\ \frac{dA_1}{d\sigma} &= kA_0 + 2A_1, \\ \frac{dA_2}{d\sigma} &= \pm A_0 + hA_3, \\ \frac{dA_3}{d\sigma} &= -hA_2, \\ \frac{dA_4}{d\sigma} &= \frac{1}{2} \{ kA_1 \pm A_2 \}; \end{aligned} \right.$$

$k$  sera la courbure conforme et  $h$  la torsion conforme<sup>(1)</sup>. La torsion conforme est nulle pour une courbe tracée sur une sphère, et la réciproque est vraie. Dans le cas d'une telle courbe, on a :

$$\text{I 9} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dA_0}{d\sigma} &= A_1, \\ \frac{dA_1}{d\sigma} &= kA_0 + 2A_1, \\ \frac{dA_2}{d\sigma} &\pm A_0, \\ \frac{dA_4}{d\sigma} &= \frac{1}{2} \{ kA_1 \pm A_2 \}. \end{aligned} \right.$$

---

(1) C'est M. Delens (II a) qui a introduit des notions de courbure et de torsion conforme, en même temps qu'il a établi les formules de Frenet pour les courbes et les surfaces de l'espace conforme.

Examinons le cas d'exception où le choix du repère est impossible sur tout un arc de  $\Gamma$  : on a alors :

$$p_3^0 = 0; \quad p_1^2 = p_1^3 = p_2^0 = 0;$$

donc :

$$\begin{aligned} dA_3 &= -p_2^3 A_2; \\ dA_2 &= p_2^3 A_3. \end{aligned}$$

Si l'angle  $\varphi$  est donné par

$$\varphi = \int -p_2^3 + c^1$$

on a :

$$d(\cos \varphi A_2 + \sin \varphi A_3) = (-\sin \varphi d\varphi - p_2^3 \sin \varphi) A_2 + (\cos \varphi p_2^3 + \cos \varphi d\varphi) A_3 = 0$$

donc  $\cos \varphi A_2 + \sin \varphi A_3$  est une sphère fixe et  $\cos(\varphi + c) A_2 + \sin(\varphi + c) A_3$  est fixe : donc, le cercle intersection de  $A_2$  et  $A_3$  est fixe, et, comme  $M$  se trouve sur ce cercle, il s'ensuit que tout l'arc de  $\Gamma$  considéré est un arc de cercle.

Exprimons  $A_0$  en formule de Taylor à partir de  $\sigma = \sigma_0$  nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{dA_0}{d\sigma} &= A_1; & \frac{d^2 A_0}{d\sigma^2} &= k A_0 + 2 A_1, \\ \frac{d^3 A_0}{d\sigma^3} &= \frac{dk}{d\sigma} A_0 + k A_1 + \{ k A_1 \pm A_2 \} \\ &= \frac{dk}{d\sigma} A_0 + 2 k A_1 \pm A_2; \\ \frac{d^4 A_0}{d\sigma^4} &= \frac{d^2 k}{d\sigma^2} A_0 + 3 \frac{dk}{d\sigma} A_1 + 2 k \{ k A_0 + 2 A_1 \} \pm \{ \pm A_0 + h A_3 \} \\ &= \left\{ \frac{d^2 k}{d\sigma^2} + 2 k^2 + 1 \right\} A_0 + 3 \frac{dk}{d\sigma} A_1 \pm h A_3 + 4 k A_1; \\ \frac{d^5 A_0}{d\sigma^5} &= \frac{d}{d\sigma} \left\{ \frac{d^2 k}{d\sigma^2} + 2 k^2 + 1 \right\} A_0 + \left\{ \frac{d^2 k}{d\sigma^2} + 2 k^2 + 1 \right\} A_1 + 3 \frac{d^2 k}{d\sigma^2} A_1 \\ &\quad + 3 \frac{dk}{d\sigma} (k A_0 + 2 A_1) \pm \frac{dh}{d\sigma} A_3 \pm h^2 A_2 + 2 \frac{dk}{d\sigma} A_1 + k \{ k A_1 \pm A_2 \} \end{aligned}$$

Si  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$  sont les coordonnées de  $A_0$  par rapport au repère pour  $\sigma = \sigma_0$ , on a :

$$\left\{ \begin{aligned} x_2 &= \pm \frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{6} + \frac{(\pm h^2 \mp k)}{120} (\sigma - \sigma_0)^3 + \dots; \\ x_3 &= \pm \frac{h}{24} (\sigma - \sigma_0)^4 \pm \frac{dh}{d\sigma} \frac{(\sigma - \sigma_0)^5}{120} + \dots; \\ x_1 &= (\sigma - \sigma_0) + \frac{k}{3} (\sigma - \sigma_0)^3 + \dots; \\ x_0 &= 1 + \frac{k}{2} (\sigma - \sigma_0)^2 + \dots \end{aligned} \right.$$

Des formules précédentes, on déduit, après avoir posé le développement de  $y = f(x)$  et  $z = g(x)$

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{x_0}, & y &= \frac{x_2}{x_0}, & z &= \frac{x_3}{x_0}; \\ y &= \pm \frac{x_3}{6} + \frac{(\pm h^2 \mp k)}{120} x^5 + \dots; \\ z &= \pm \frac{h}{2} x_4 \pm \frac{dh}{d\sigma} \frac{x^5}{120} + \dots \end{aligned}$$

On voit que  $A_3$  est la sphère osculatrice à  $\Gamma$  en  $M(\sigma_0)$ .

On voit aussi que pour deux courbes ayant le point  $M(\sigma_0)$  et le repère en  $M(\sigma_0)$  en commun aient en  $M(\sigma_0)$  un contact d'ordre 4, il faut et il suffit que les valeurs de la torsion en  $M(\sigma_0)$  pour les deux courbes soient égales; pour que le contact soit d'ordre 5, il faut et il suffit que les valeurs de la torsion, de la courbure et de la dérivée de la torsion par rapport à l'arc soient les mêmes en  $M$  pour les deux courbes.

## 2. — Étude différentielle des surfaces : leur repère intrinsèque :

En un point  $M$  d'une certaine surface  $\Sigma$  4 fois différentiable, nous attachons un repère pentasphérique  $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$  satisfaisant aux conditions (B) :

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} A_0 : \text{sphère-point analytique représentant } M; \\ A_3 : \text{sphère analytique unitaire tangente à } \Sigma \text{ en } M; \\ A_1 : \text{sphère analytique unitaire, passant par } M, \text{ orthogonale à } A_3; \\ A_2 : \text{sphère analytique unitaire orthogonale à } A_1 \text{ et } A_3, \text{ passant par } M; \\ A_4 : \text{sphère-point analytique représentant l'intersection de } A_1, A_2, A_3, \\ \quad \text{autre que } M, \text{ et telle que } (A_0, A_4) = -\frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

On obtient, à partir de  $(A_0, A_1, A_2, A_3; A_4)$ , tout repère  $(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4)$  satisfaisant aux conditions (B) par les formules :

$$I \ 10 \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_0 = \zeta A_0; \\ \bar{A}_1 = \cos \theta A_1 + \sin \theta A_2 + \mu A_0; \\ \bar{A}_2 = -\sin \theta A_1 + \cos \theta A_2 + \nu A_0; \\ \bar{A}_3 = \alpha A_0 + A_3; \\ \bar{A}_4 = \frac{1}{\zeta} \{ \alpha^2 + \mu^2 + \nu^2 \} A_0 + \frac{1}{2\zeta} (\mu \cos \theta - \nu \sin \theta) A_1 + \frac{1}{2\zeta} (\mu \sin \theta + \nu \cos \theta) A_2 \\ \quad + \frac{\alpha}{2\zeta} A_3 + \frac{1}{\zeta} A_4. \end{array} \right.$$

Les formules I 10 entraînent les formules :

$$\text{I 11} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 A_0 = \frac{1}{\zeta} \bar{A}_0; \\
 A_1 = \frac{1}{\zeta} \{ v \sin \theta - \mu \cos \theta \} \bar{A}_0 + \cos \theta \cdot \bar{A}_1 - \sin \theta \cdot \bar{A}_2; \\
 A_2 = -\frac{1}{\zeta} \{ \mu \sin \theta + v \cos \theta \} \bar{A}_0 + \sin \theta \cdot \bar{A}_1 + \cos \theta \cdot \bar{A}_2; \\
 A_3 = -\frac{\alpha}{\zeta} \bar{A}_0 + \bar{A}_3; \\
 A_4 = \frac{1}{\zeta} \{ z^2 + \mu^2 + v^2 \} \bar{A}_0 - \frac{\mu}{2} \bar{A}_1 - \frac{v}{2} \bar{A}_2 - \frac{\alpha}{2} \bar{A}_3 + \zeta \bar{A}_4.
 \end{array} \right.$$

Quand M se déplace sur  $\Sigma$  infiniment peu, la variation infinitésimale du repère mobile correspondante est donnée par le système :

$$\text{I 12} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega_0^1 A_1 + \omega_0^2 A_2; \\
 dA_1 = \omega_1^0 A_0 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3 + 2 \omega_0^1 A_4; \\
 dA_2 = \omega_2^0 A_0 - \omega_1^2 A_1 + \omega_2^3 A_3 + 2 \omega_0^2 A_4; \\
 dA_3 = \omega_3^0 A_0 - \omega_1^3 A_1 - \omega_2^3 A_2; \\
 dA_4 = \frac{1}{2} (\omega_1^0 A_1 + \omega_2^0 A_2 + \omega_3^0 A_3) - \omega_0^0 A_4.
 \end{array} \right.$$

Les  $\omega_\alpha^\beta$  ( $\alpha$  et  $\beta = 0, 1, 2, 3$ ) figurant dans I 12 sont des formes de Pfaff des paramètres  $u$  et  $v$  définissant le point M courant de la surface, et des différentielles  $du$  et  $dv$  de ces paramètres.

La forme particulière du tableau des  $\omega_\alpha^\beta$  vient de ce que  $(A_\alpha, A_\beta) = C^{10}$  et du choix de  $A_3$ .

Nous allons restreindre successivement la famille de repères attachée à M, pour aboutir finalement au repère intrinsèque attaché à la surface en M.

Le déplacement infinitésimal de M défini par  $du$  et  $dv$  entraîne un déplacement infinitésimal du repère  $\bar{A}_\alpha$  défini par I 10, donné par des formules I 13 :

$$d\bar{A}_\alpha = \bar{\omega}_\alpha^\beta \bar{A}_\beta.$$

En différentiant I 10 et en utilisant I 10, I 11, I 12, I 13, on est conduit, en particulier, aux relations :

$$\text{I 14} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \bar{\omega}_1^3 = \cos \theta (\omega_1^3 - \alpha \omega_0^1) + \sin \theta (\omega_2^3 - \alpha \omega_0^2), \\
 \bar{\omega}_2^3 = -\sin \theta (\omega_1^3 - \alpha \omega_0^1) + \cos \theta (\omega_2^3 - \alpha \omega_0^2), \\
 \bar{\omega}_0^1 = \zeta (\omega_0^1 \cos \theta + \omega_2^0 \sin \theta), \\
 \bar{\omega}_0^2 = \zeta (-\omega_0^1 \sin \theta + \omega_2^0 \cos \theta).
 \end{array} \right.$$

$\omega_0^1$  et  $\omega_0^2$  sont linéairement indépendantes (le contraire signifierait que la surface  $\Sigma$ , en  $M$  n'admet pas de plan tangent, mais une droite tangente, hypothèse que nous excluons).

On peut donc poser :

$$\begin{cases} \omega_1^3 = p_1 \omega_0^1 + p_2 \omega_0^2, \\ \omega_2^3 = q_1 \omega_0^1 + q_2 \omega_0^2; \end{cases}$$

de I 14 et I 15, on tire :

$$\begin{aligned} \zeta \bar{\omega}_1^3 &= [(p_1 - \alpha) \cos^2 \theta + (p_2 + q_1) \sin \theta \cos \theta + \sin^2 (q_2 - \alpha)] \bar{\omega}_0^1 \\ &\quad + [-q_1 \sin^2 \theta - (p_1 - q_2) \sin \theta \cos \theta + p_2 \cos^2 \theta] \bar{\omega}_0^2; \\ \zeta \bar{\omega}_2^3 &= [q_1 \cos^2 \theta + (q_2 - p_1) \sin \theta \cos \theta - p_2 \sin^2 \theta] \bar{\omega}_0^1 \\ &\quad + [-\sin^2 \theta (z - p_1) - (q_1 + p_2) \sin \theta \cos \theta + (q_2 - \alpha) \cos^2 \theta] \bar{\omega}_0^2. \end{aligned}$$

On peut fixer  $\alpha$  pour que la somme des coefficients de  $\omega_0^1$  dans  $\omega_1^3$  et de  $\omega_2^3$  dans  $\omega_2^3$  soit nulle :

$$\begin{aligned} (p_1 - \alpha) \cos^2 \theta + (p_2 + q_1) \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta (q_2 - \alpha) \\ - \sin^2 \theta (z - p_1) - (q_1 + p_2) \sin \theta \cos \theta + (q_2 - \alpha) \cos^2 \theta = 0. \end{aligned}$$

Cette question se réduit à :

$$\alpha = \frac{p_1 + q_2}{2}.$$

Fixons  $\theta$  pour que le coefficient de  $\bar{\omega}_0^2$  dans l'expression de  $\bar{\omega}_1^3$  soit opposé à celui de  $\bar{\omega}_0^1$  dans  $\bar{\omega}_2^3$  :

$$\begin{aligned} q_1 \sin^2 \theta + (p_1 - q_2) \sin \theta \cos \theta - p_2 \cos^2 \theta \\ = q_1 \cos^2 \theta + (q_2 - p_1) \sin \theta \cos \theta - p_2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

$$\text{d'où :} \quad (p_2 + q_1) \operatorname{tg}^2 \theta + 2(p_1 - q_2) \operatorname{tg} \theta - (p_2 + q_1) = 0;$$

équation qui a toujours des racines, dont le produit est égal à  $-1$ , ce qui correspond pour  $\theta$  à deux valeurs différant de  $\frac{\pi}{2}$  ( $+ 2K\pi$  éventuellement). Prenons une de ces valeurs. Fixons  $\zeta$  pour que la valeur absolue du coefficient de  $\bar{\omega}_0^1$  dans l'expression de  $\bar{\omega}_1^3$  soit  $+1$

$$\zeta = \frac{p_1 - q_2}{2} \cos^2 \theta + (p_2 + q_1) \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \frac{q_2 - p_1}{2}.$$

Le coefficient de  $\bar{\omega}_0^2$  dans  $\bar{\omega}_2^3$  est alors  $-1$ ; nous avons :

$$I\ 16 \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\omega}_1^3 = \bar{\omega}_0^4 - \bar{a}\bar{\omega}_0^2; \\ \bar{\omega}_2^3 = \bar{a}\bar{\omega}_0^4 - \bar{\omega}_0^2. \end{array} \right.$$

En réalité, ainsi que nous le verrons plus loin, dans le cas de l'espace conforme  $\bar{a} = 0$ . Il n'en sera pas de même en général dans le cas où  $\Sigma$  sera plongée dans un espace à connexion conforme doué de torsion (voir le chapitre V).

Appelons  $(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4)$  le repère obtenu en portant dans I 10 les valeurs  $\alpha, \theta, \zeta$ , précédemment trouvées, en remplaçant  $\mu$  et  $\nu$  par 0 (par exemple), et en enlevant les barres sur  $\bar{A}_\alpha$ .

Nous pouvons maintenant changer le repère selon :

$$I\ 17 \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_0 = A_0; \\ \bar{A}_1 = A_1 + \mu A_0; \\ \bar{A}_2 = A_2 + \nu A_0; \\ \bar{A}_3 = A_3; \\ \bar{A}_4 = \frac{\mu^2 + \nu^2}{4} A_0 + \frac{\mu}{2} A_1 + \frac{\nu}{2} A_2 + A_4. \end{array} \right.$$

$$\text{En posant : } I\ 18 \quad dA_\alpha = \omega_\alpha^3 A_3;$$

$$I\ 18\ bis \quad d\bar{A}_\alpha = \bar{\omega}_\alpha^3 \bar{A}_3;$$

t différentiant 16, et en comparant à I 16, I 18 et I 18 bis, nous obtenons :

$$\bar{\omega}_1^2 = \omega_1^2 + \mu\omega_0^2 - \nu\omega_0^4.$$

Comme  $\omega_0^1$  et  $\omega_0^2$  sont linéairement indépendantes, on peut choisir  $\mu$  et  $\nu$  pour que  $\omega_1^2 = 0$ .

Le repère attaché à  $\Sigma$  en  $M$  sera obtenu en portant les valeurs trouvées pour  $\mu$  et  $\nu$  dans I 17.

Enlevons les barres sur  $\bar{A}$ . Nous sommes conduits aux formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega_1^0 A_1 + \omega_2^0 A_2; \\ dA_1 = \omega_1^0 A_0 + (\omega_0^1 - \bar{a}\omega_0^2) A_3 + 2\omega_0^1 A_4; \\ dA_2 = \omega_2^0 A_0 + (\bar{a}\omega_0^1 - \omega_0^2) A_3 + 2\omega_0^2 A_4; \\ dA_3 = \omega_3^0 A_0 - (\omega_0^1 - \bar{a}\omega_0^2) A_1 - (\bar{a}\omega_0^1 - \omega_0^2) A_2; \\ dA_4 = \frac{1}{2}(\omega_1^0 A_1 + \omega_2^0 A_2 + \omega_3^0 A_3) - \omega_0^0 A_4. \end{array} \right.$$

Prenons pour paramètres  $u$  et  $v$  ceux des lignes  $\omega_0^2 = 0$  et  $\omega_0^1 = 0$ , posons :

$$\text{I } 20 \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_0^1 = a du, \\ \omega_0^2 = b dv; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1^0 = \alpha_1 \omega_0^1 + \beta_1 \omega_0^2, \\ \omega_2^0 = \alpha_2 \omega_0^1 + \beta_2 \omega_0^2; \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0^0 = x \omega_0^1 + \beta \omega_0^2; \\ \omega_3^0 = m \omega_0^1 + n \omega_0^2. \end{array} \right.$$

3) Les équations I 19 vont conduire à des conditions de compatibilité<sup>(1)</sup> exprimant que  $\frac{\partial^2 A x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 A x}{\partial v \partial u}$ , lesquelles se traduiront par des relations entre  $a, b, \alpha, \beta, m, n, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \bar{a}$ , et, éventuellement, leurs dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre.

De I 19 on tire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_0}{\partial u} &= \alpha a A_0 + a A_1, & \frac{\partial A_0}{\partial v} &= \beta b A_0 + b A_2, \\ \frac{\partial A_1}{\partial v} &= \beta_1 b A_0 - \bar{a} b A_3, & \frac{\partial A_2}{\partial u} &= \alpha_2 a A_0 + \bar{a} a A_3; \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_0}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial(\alpha a)}{\partial v} A_0 + \alpha a \{ \beta b A_0 + b A_2 \} + \frac{\partial a}{\partial v} A_1 + a \{ \beta_1 b A_0 - \bar{a} b A_3 \}, \\ \frac{\partial^2 A_0}{\partial v \partial u} &= \frac{\partial(\beta b)}{\partial u} A_0 + \beta b \{ \alpha a A_0 + a A_1 \} + \frac{\partial b}{\partial u} A_2 + b \{ \alpha_2 a A_0 + \bar{a} a A_3 \}; \end{aligned}$$

on en déduit que :

$$2 ab \bar{a} = 0, \text{ donc puisque } \left\{ \begin{array}{l} a \neq 0 : \bar{a} = 0, \\ b \neq 0; \end{array} \right.$$

puis :

$$\text{I } 21 \quad \frac{\partial(\alpha a)}{\partial v} - \frac{\partial(\beta b)}{\partial u} + ab(\beta_1 - \alpha_2) = 0;$$

$$\text{I } 22 \quad \frac{\partial a}{\partial v} - ab\beta = 0; \quad \text{I } 23 \quad \frac{\partial b}{\partial u} - ab\alpha = 0.$$

I 21 donne, en tenant compte de I 22 et I 23 :

$$a \frac{\partial \alpha}{\partial v} - b \frac{\partial \beta}{\partial u} + ab(\beta_1 - \alpha_2) = 0.$$

---

(1) Ces conditions ont été établies et discutées par divers auteurs; cf. V a, VII e, VII f.

Écrivons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_2}{\partial u} = ma A_0 - a A_1; \\ \frac{\partial A_2}{\partial v} = nb A_0 + b A_2. \end{array} \right.$$

D'où nous tirons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_2}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} (ma) A_0 + ma \{ \beta b A_0 + b A_2 \} - \frac{\partial a}{\partial v} A_1 - a \beta_1 b A_0, \\ \frac{\partial^2 A_2}{\partial v \partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} (nb) A_0 + nb \{ \alpha a A_0 + a A_1 \} + \frac{\partial b}{\partial u} A_2 + b \alpha_2 a A_0; \end{aligned}$$

d'où :

$$\text{I 25} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial b}{\partial u} = m ab, \\ \frac{\partial a}{\partial v} = -n ab; \end{array} \right.$$

de I 25, de I 22 et de I 23, on déduit que :

$$m = \alpha; \quad n = \beta.$$

on voit d'autre part que :

$$\frac{\partial(a\alpha)}{\partial v} + \frac{\partial(b\beta)}{\partial u} + 2\alpha\beta ab - ab(\alpha_2 + \beta_1) = 0.$$

Cette équation peut s'écrire, en tenant compte de I 22 et de I 23 :

$$\text{I 26} \quad a \frac{\partial \alpha}{\partial v} + b \frac{\partial \beta}{\partial u} + 4\alpha\beta ab - ab(\alpha_2 + \beta_1) = 0.$$

I 26 est à rapprocher de I 24.

On a également :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial u} &= \alpha_1 a A_0 + a A_3 + 2a A_4; & \frac{\partial A_2}{\partial v} &= \beta_2 b A_0 - b A_3 + 2b A_4; \\ \frac{\partial A_3}{\partial u} &= \alpha a A_0 - a A_1; & \frac{\partial A_3}{\partial v} &= -\beta b A_0 + b A_2; \\ \frac{\partial A_4}{\partial u} &= \frac{1}{2}(\alpha_1 a A_1 + \alpha_2 a A_2 + \alpha a A_3) - \alpha a A_0; \\ \frac{\partial A_4}{\partial v} &= \frac{1}{2}(\beta_1 b A_1 + \beta_2 b A_2 - \beta b A_3) - \beta b A_0; \end{aligned}$$



d'où :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A_1}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}(\alpha_1 a) A_0 + \alpha_1 a(\beta b A_0 + b A_2) + \frac{\partial a}{\partial v} A_3 + a \{ -\beta b A_0 + b A_2 \} \\ &\quad + 2 \frac{\partial a}{\partial v} A_4 + a(\beta_1 b A_1 + \beta_2 b A_2 - \beta b A_3) - 2ab\beta A_4; \\ \frac{\partial^2 A_1}{\partial v \partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}(\beta_1 b) A_0 + \beta_1 b \{ \alpha a A_0 + a A_4 \};\end{aligned}$$

d'où :

$$ab \{ \alpha_1 + \beta_2 + 1 \} = 0; \quad \text{ou : I 27} \quad \alpha_1 + \beta_2 + 1 = 0;$$

et

$$\frac{\partial}{\partial v}(\alpha_1 a) - \frac{\partial}{\partial u}(\beta_1 b) + ab(\alpha_1 \beta - \beta_1 \alpha) - ab\beta = 0.$$

En tenant compte de I 22 et I 23, on obtient :

$$\text{I 28} \quad a \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} - b \frac{\partial \beta_1}{\partial u} + 2ab(\alpha_1 \beta - \beta_1 \alpha) - ab\beta = 0.$$

Et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A_2}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}(\alpha_2 a) A_0 + \alpha_2 a \{ \beta b A_0 + b A_2 \}; \\ \frac{\partial^2 A_2}{\partial v \partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}(\beta_2 b) A_0 + \beta_2 b \{ \alpha a A_0 + a A_4 \} - \frac{\partial b}{\partial u} A_3 - b \{ \alpha a A_0 - a A_4 \} \\ &\quad + 2 \frac{\partial b}{\partial u} A_4 + b \{ \alpha_1 a A_1 + \alpha_2 a A_2 + \alpha a A_3 \} - 2xab A_4.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial}{\partial v}(\alpha_2 a) - \frac{\partial}{\partial u}(\beta_2 b) + ab(\alpha_2 \beta - \beta_2 \alpha) + ab\alpha = 0.$$

En tenant compte de I 22 et I 23, on obtient :

$$\text{I 29} \quad a \frac{\partial \alpha_2}{\partial v} - b \frac{\partial \beta_2}{\partial u} + 2ab(\alpha_2 \beta - \beta_2 \alpha) + ab\alpha = 0.$$

Rappelons ici que les lignes  $\omega_0^1 = 0$  et  $\omega_0^2 = 0$  sont les lignes de courbure de la surface  $\Sigma$ . Nous reviendrons sur la notion de ligne de courbure en géométrie conforme, à propos des espaces à connexion conforme, dans un chapitre ultérieur.

## CHAPITRE II

### Propriétés différentielles des courbes tracées sur une surface en géométrie conforme.

1. — Soit une surface  $\Sigma$  et une courbe  $\Gamma$  tracée sur  $\Sigma$ .

En un point  $M$  de  $\Gamma$  est attaché à  $\Gamma$  le repère intrinsèque  $(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4)$  et à  $\Sigma$  le repère intrinsèque  $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ , ainsi que nous l'avons vu dans le chapitre précédent. Si  $\varphi$  est l'angle de  $\Gamma$  avec la ligne de courbure de  $\Sigma$  normale à  $A_1$  en  $M$ , si  $\theta$  est l'angle de la sphère osculatrice  $\bar{A}_3$  (à  $\Gamma$  en  $M$ ) et de la sphère  $A_3$ , on peut passer d'un repère à l'autre par les formules :

$$\text{II 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_0 = \zeta A_0; \\ \bar{A}_1 = \cos \varphi A_1 + \sin \varphi A_2 + \lambda A_0; \\ \bar{A}_2 = -\cos \theta (\sin \varphi A_1 - \cos \varphi A_2) - \sin \theta A_3 + \mu A_0; \\ \bar{A}_3 = -\sin \theta (\sin \varphi A_1 - \cos \varphi A_2) + \cos \theta A_3 + \nu A_0. \end{array} \right.$$

Notons que le coefficient de  $A_0$  dans l'expression de  $\bar{A}_1$  est :

$$\frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{4\zeta}.$$

Les coefficients  $\zeta, \lambda, \mu, \nu$  seront, dans ce qui suit, déterminés.

Nous nous proposons, en outre, de montrer que la torsion de la courbe  $\Gamma$  s'obtient grâce à la connaissance de  $\theta, \frac{d\theta}{d\tau}, \frac{d\varphi}{d\tau}$  ( $\tau$  étant  $\int \sqrt{(\omega_0^1)^2 + (\omega_0^2)^2}$ , le long de la courbe), et qu'on connaît la courbure dès que  $\theta, \frac{d\theta}{d\tau}, \frac{d^2\theta}{d\tau^2}, \frac{d\varphi}{d\tau}$  et les invariants de  $\Sigma$  sont déterminés.

La variation infinitésimale du repère  $\bar{A}_\alpha$  s'obtient par :

$$\text{II 2} : \quad d\bar{A}_\alpha = p_\alpha^{\beta} \bar{A}_\beta; \text{ on sait que :}$$

$$\text{II 3} : \quad p_1^2 = 0; p_1^3 = 0; p_2^0 = 0; p_2^1 = \pm p_0^1; p_0^0 = 0,$$

et

$$p_0^1 = d\sigma; \quad p_2^3 = -hd\sigma; \quad p_1^0 = kd\sigma.$$

Rappelons que la variation infinitésimale de  $A_x$  s'obtient par l'ensemble de formules :

$$\text{II 3} \quad dA_x = \omega_x^3 A_3.$$

où le tableau des  $\omega_x^z$  a la forme déterminée au chapitre précédent.

Nous allons exprimer, l'une après l'autre, les conditions II 3, dans l'ordre où elles sont écrites, qui est également celui dans lequel elles apparaissent, au cours du choix du repère intrinsèque de  $\Gamma$ .

2. — *Exprimons ces conditions.*

$$a) \quad \begin{cases} p_1^2 = 0, \\ p_1^3 = 0, \end{cases} \quad \text{doivent être exprimées simultanément.}$$

Nous avons :

$$p_1^2 = (d\bar{A}_1, \bar{A}_2);$$

en vertu de II 1 et II 3, on obtient :

$$d\bar{A}_1 = -\sin \varphi d\varphi A_1 + \cos \varphi d\varphi A_2 + d\lambda A_0 + \cos \varphi (\omega_1^0 A_0 + \omega_0^1 A_3 + 2\omega_0^1 A_4) \\ + \sin \varphi (\omega_2^0 A_0 - \omega_0^2 A_3 + 2\omega_0^2 A_4).$$

Donc :

$$d\bar{A}_1, \bar{A}_2 = +\cos \theta \cos^2 \varphi d\varphi + \cos \theta \sin^2 \varphi d\varphi - \sin \theta (\omega_0^1 \cos \varphi - \omega_0^2 \sin \varphi) \\ - \mu (\omega_0^1 \cos \varphi + \omega_0^2 \sin \varphi).$$

On peut poser :

$$\omega_0^1 = \cos \varphi d\tau; \quad \omega_0^2 = \sin \varphi d\tau;$$

donc :

$$\text{II 4} \quad \mu = -\sin \theta \cos 2\varphi + \cos \theta \frac{d\varphi}{d\tau}.$$

De même :

$$p_1^3 = (d\bar{A}_1, \bar{A}_3) = \sin \theta \sin^2 \varphi d\varphi + \sin \theta \cos^2 \varphi d\varphi - \cos \theta (\omega_0^2 \sin \varphi - \omega_0^1 \cos \varphi) \\ - \nu (\omega_0^1 \cos \varphi + \omega_0^2 \sin \varphi);$$

par conséquent :

$$\text{II 5} \quad \nu = +\cos \theta \cos 2\varphi + \sin \theta \frac{d\varphi}{d\tau}.$$

b)  $p_3^0 = 0$ , ou :

$d\bar{A}_3 = -p_2^3 \bar{A}_2$ ; en particulier le terme en  $A_0$  de  $d\bar{A}_3$  aura le même coefficient que le terme en  $A_0$  de  $-p_2^3 \bar{A}_2$ .

Ce coefficient est, d'une part :

$$d\nu + \nu\omega_0^0 + \cos\theta\omega_3^0 + \sin\theta(\cos\varphi\omega_2^0 - \sin\varphi\omega_1^0);$$

d'autre part, il est :  $-\mu p_2^3$ ; d'où :

$$\text{II 6} \quad d\nu + \nu\omega_0^0 + \cos\theta\omega_3^0 + \sin\theta(\cos\varphi\omega_2^0 - \sin\varphi\omega_1^0) = -\mu p_2^3.$$

II 5 différenciée donne :

$$\text{II 7} \quad d\nu = -\sin\theta d\theta \cos 2\varphi + \cos\theta \frac{d\varphi}{d\tau} d\theta + \sin\theta \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} d\tau - 2\cos\theta \sin 2\varphi \frac{d\varphi}{d\tau} d\tau.$$

En tenant compte de II 7, II 4, II 5, l'équation II 6 devient :

$$\begin{aligned} \text{II 8} \quad & \sin\theta \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} - 2\cos\theta \sin 2\varphi \frac{d\varphi}{d\tau} + \left( \sin\theta \frac{d\varphi}{d\tau} + \cos\theta \cdot \cos 2\varphi \right) (\alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi) \\ & + \cos\theta (\alpha \cos\varphi - \beta \sin\varphi) - \sin\theta [-\alpha_2 \cos^2\theta + (\alpha_1 - \beta_2) \sin\varphi \cos\varphi + \beta_1 \sin^2\varphi] \\ & = - \left\{ \frac{p_2^3}{d\tau} + \frac{d\theta}{d\tau} \right\} \left( \cos\theta \frac{d\varphi}{d\tau} - \sin\theta \cdot \cos 2\varphi \right); \end{aligned}$$

$$c) \quad p_2^0 = \pm p_0^1; \quad \text{ou :} \quad d\bar{A}_2 = \pm p_0^1 \bar{A}_0 + p_2^3 \bar{A}_3.$$

Le terme en  $A_0$  de  $d\bar{A}_2$  est donc :

$$(\pm p_0^1 \zeta + \nu p_2^3) A_0.$$

Le calcul direct, effectué à partir de II 1 différenciée donne, pour le coefficient du terme en  $A_0$  de  $d\bar{A}_2$  :

$$d\mu + \mu\omega_0^0 - \cos\theta(\sin\varphi\omega_1^0 - \cos\varphi\omega_2^0) - \sin\theta\omega_3^0;$$

donc :

$$\text{II 9} \quad \pm p_0^1 \zeta + \nu p_2^3 = d\mu + \mu\omega_0^0 - \cos\theta(\sin\varphi\omega_1^0 - \cos\varphi\omega_2^0) - \sin\theta\omega_3^0.$$

Différentions membre à membre II 4, nous obtenons :

$$\text{II 10} \quad \left| d\mu = -\cos\theta \cos 2\varphi d\theta - \sin\theta \frac{d\varphi}{d\tau} d\theta + 2\sin\theta \sin 2\varphi d\varphi + \cos\theta \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} d\tau. \right.$$

II 4, II 5, II 9 et II 10 combinées conduisent à :

$$\begin{aligned} \text{II 11} \quad & \cos \theta \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + 2 \sin \theta \sin 2\varphi \frac{d\varphi}{d\tau} + \left( \sin \theta \cos 2\varphi + \cos \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \right) (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) \\ & - \sin \theta (\alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi) - \cos \theta \left( -\alpha_2 \cos^2 \varphi + (\alpha_1 - \beta_2) \sin \varphi \cos \varphi + \beta_1 \sin^2 \varphi \right) \\ & = \left( \frac{p_2^3}{d\tau} + \frac{d\theta}{d\tau} \right) \left( \sin \theta \frac{d\varphi}{d\tau} + \cos \theta \cos 2\varphi \right) \pm \frac{p_0^4}{d\tau} \zeta. \end{aligned}$$

d)  $p_0^4 = 0$ ; cette condition s'écrit :

$$d \bar{A}_0 = p_0^4 \bar{A}_1 :$$

Le terme en  $A_0$  de  $d \bar{A}_0$  est  $(d\zeta + \zeta \omega_0^0) A_0$ .

Le terme en  $A_0$  de  $p_0^4 \bar{A}_1$  est :  $p_0^4 A$ ; d'où :

$$\text{II 12} \quad d\zeta + \zeta \omega_0^0 = p_0^4 \lambda.$$

Mais : le terme en  $A_1$  de  $d \bar{A}_0$  est :  $\zeta \omega_0^2 A_1$ .

Le terme en  $A_1$  de  $p_0^4 \bar{A}_1$  est :  $p_0^4 A_1$ ; donc :

$$p_0^4 \cos \varphi = \zeta \omega_0^4;$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{p_0^4}{d\tau} = \zeta; \quad \text{ou :} \quad \zeta = \frac{d\sigma}{d\tau} \quad (\text{II 13}).$$

II 12 devient donc :

$$\text{II 14} \quad \lambda = \frac{\sigma'^2}{\sigma'} + \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi.$$

2. — Calculons  $p_2^3$  de deux manières différentes : II 2 et les conditions II 3 donnent :

$$\frac{p_2^3}{d\tau} = -\frac{hd\sigma}{d\tau}.$$

D'autre part, on peut remarquer que  $p_2^3$  n'est autre que  $(\bar{A}_3 d \bar{A}_2)$ .

Pour connaître ce produit scalaire, il suffit de connaître les coefficients des termes en  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , dans le développement de  $d \bar{A}_2$ .

Ces coefficients sont :

terme en  $A_1$  :  $d(-\cos \theta \sin \varphi) + \mu \omega_0^4 + \sin \theta \omega_0^4$ ;

terme en  $A_2$  :  $d(\cos \theta \cos \varphi) + \mu \omega_0^2 - \sin \theta \omega_0^2$ ;

terme en  $A_3$  :  $d(-\sin \theta) - \omega_0^4 \cos \theta \sin \varphi - \omega_0^2 \cos \theta \cos \varphi$ ;

terme en  $A_4$  : 0.

En tenant compte de ce qui précède et de II 1, on obtient :

$$\begin{aligned} (\bar{A}_3 \cdot d\bar{A}_3) = & -\sin \theta \sin \varphi (d(-\cos \theta \sin \varphi) + \mu \omega_0^4 + \sin \theta \omega_0^4) \\ & + \sin \theta \cos \varphi (d(\cos \theta \cos \varphi) + \mu \omega_0^4 - \sin \theta \omega_0^2) + \cos \theta [d(-\sin \theta) - \omega_0^4 \cos \theta \sin \varphi \\ & - \omega_0^2 \cos \theta \cos \varphi]. \end{aligned}$$

Toutes réductions faites, on obtient :

$$(\bar{A}_3 \cdot d\bar{A}_3) = -d\theta - \sin 2\varphi d\tau.$$

Par conséquent :

$$\text{II 15} \quad p_2^3 = -d\theta - \sin 2\varphi d\tau = -hd\sigma.$$

De II 15 on peut déduire<sup>(1)</sup> :

$$\text{II 16} \quad p_2^3 + \frac{d\theta}{d\tau} = -\sin 2\varphi.$$

$$\text{II 17} \quad h \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{d\theta}{d\tau} + \sin 2\varphi.$$

3. — L'équation II 16 nous permet d'écrire II 8 et II 11 sous de nouvelles formes :

$$\begin{aligned} \text{II 18} \quad \pm \left( \frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 = & + \sin \theta \left\{ 3 \sin 2\varphi \frac{d\varphi}{d\tau} - 2(\alpha \cos^2 \varphi - \beta \sin^2 \varphi) \right\} \\ & + \cos \theta \left\{ \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} + \alpha_2 \cos^2 \varphi + (\beta_2 - \alpha_1) \cos \varphi \sin \varphi \right. \\ & \left. - \beta_1 \sin^2 \varphi + \sin 2\varphi \cos 2\varphi \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II 19} \quad \sin \theta \left\{ \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} + \alpha_2 \cos^2 \varphi + (\beta_2 - \alpha_1) \cos \varphi \sin \varphi \right. \\ \left. - \beta_1 \sin^2 \varphi + \sin 2\varphi \cos 2\varphi \right\} \\ - \cos \theta \left\{ 3 \sin 2\varphi \frac{d\varphi}{d\tau} - 2(\alpha \cos^2 \varphi - \beta \sin^2 \varphi) \right\} = 0. \end{aligned}$$

---

<sup>(1)</sup> L'équation II 17 est à rapprocher d'une équation due à M. Vessiot, qui exprime, au fond la même réalité géométrique (VII e, p. 63).

Nous pouvons simplifier l'écriture de II 18 II 19 en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{H} = -2(\alpha \cos^3 \varphi - \beta \sin^3 \varphi) + 3 \sin 2\varphi \frac{d\varphi}{d\tau}; \\ \text{K} = \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} + \alpha_2 \cos^2 \varphi + (\beta_2 - \alpha_1) \cos \varphi \sin \varphi \\ \quad - \beta_1 \sin^2 \varphi + \sin 2\varphi \cos 2\varphi. \end{array} \right.$$

II 18 et II 19 deviennent<sup>(1)</sup> :

$$\text{II } 20 \quad \pm \sigma'^2 = \text{H} \sin \theta + \text{K} \cos \theta.$$

$$\text{II } 21 \quad \text{tg } \theta = \frac{\text{H}}{\text{K}}.$$

On peut également écrire II 20 et II 21 sous la forme :

$$\text{II } 22 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{H} = \pm \sigma'^2 \sin \theta; \\ \text{K} = \pm \sigma'^2 \cos \theta. \end{array} \right.$$

De II 22 on déduit aisément l'équation :

$$\text{II } 23 \quad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \cotg \theta \left\{ -2(\alpha \cos^3 \varphi - \beta \sin^3 \varphi) + 3 \sin 2\varphi \frac{d\varphi}{d\tau} \right\} - (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} \\ - \alpha_2 \cos^2 \varphi - (\beta_2 - \alpha_1) \cos \varphi \sin \varphi + \beta_1 \sin^2 \varphi - \sin 2\varphi \cos 2\varphi.$$

Occupons-nous, maintenant, de la courbure conforme de l' en M.

Nous avons :

$$\text{II } 24 \quad d\bar{A}_1 = p_1^0 \bar{A}_0 + 2p_0^1 \bar{A}_1.$$

Le terme en  $A_0$  du premier membre de II 24 a pour coefficient :

$$d\lambda + \lambda \omega_0^0 + \cos \varphi \omega_0^1 + \sin \varphi \omega_2^0.$$

Le terme en  $A_1$  du second membre de II 24 a pour coefficient :

$$\zeta p_1^0 + 2p_0^1 \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{4\zeta}.$$

En égalant ces valeurs, nous obtenons :

$$d\lambda + \lambda \omega_0^0 + \cos \varphi \omega_0^1 + \sin \varphi \omega_2^0 = \zeta p_1^0 + 2p_0^1 \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{4\zeta}.$$

---

(<sup>1</sup>) Cf. Vessiot, VII f, p. 61 et suivantes.

En tenant compte des valeurs de  $\zeta, \lambda, \mu, \nu, p_0^1, \omega_0^0, p_1^0, \omega_1^0, \omega_2^0$ , et en posant :

$$\begin{cases} d\alpha = \alpha/1 \omega_0^1 + \alpha/2 \omega_0^2, \\ d\beta = \beta/1 \omega_0^1 + \beta/2 \omega_0^2; \end{cases}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{II 25} \quad \left\{ \sigma \right\}_\tau - k(\sigma'_\tau)^2 &= (\alpha \sin \varphi - \beta \cos \varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} - \alpha/1 \cos^2 \varphi \\ &- (\alpha/2 + \beta/1) \sin \varphi \cos \varphi - \beta/2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)^2 \\ &- (\alpha_1 \cos^2 \varphi + (\alpha_2 + \beta_1) \sin \varphi \cos \varphi + \beta_2 \cos^2 \varphi) + \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \cos^2 2\varphi. \end{aligned}$$

Dans II 25,  $\left\{ \sigma \right\}_\tau$  est la dérivée Schwarzienne de  $\sigma$  par rapport à  $\tau$ , c'est-à-dire l'expression  $\frac{\sigma'''}{\sigma'} - \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma''}{\sigma'} \right)^2$ .

**3.** — Nous allons tirer quelques conclusions géométriques des formules précédemment obtenues.

En premier lieu, nous retrouvons un théorème dû à M. Harnegnies (C. R., 205, p. 641) :

Deux courbes,  $c$  et  $c'$ , tracées sur une surface  $\Sigma$ , passant par un point  $M$ , ayant en ce point même sphère osculatrice, ont en  $M$  un contact de troisième ordre, si toutefois leur sphère osculatrice commune n'est pas tangente en  $M$  à  $\Sigma$ . Dans le cas contraire, leur contact est du second ordre au moins (1).

Pour  $c$  et  $c'$ ,  $\varphi$  a, en  $M$ , la même valeur  $\varphi_0$ , car  $c$  et  $c'$  sont évidemment tangentes en  $M$ ,  $\theta$  a, aussi, la même valeur  $\theta_0$  pour les deux courbes; le paramètre  $\nu$  a, en  $M$ , pour  $c$  et  $c'$ , la valeur  $\nu_0$ .

L'équation II 5 donne :

$$\nu_0 = + \cos \theta_0 \cos 2\varphi_0 + \sin \theta_0 \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)_0;$$

Si  $\sin \theta_0 \neq 0$  ( $\theta \neq K\pi$ , donc, la sphère osculatrice est non tangente à  $\Sigma$  en  $M$ ), on a une valeur et une seule de  $\left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)_0$  satisfaisant à II 5. Et en vertu de II 23, le  $\left( \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} \right)_0$  de  $c$  et  $c'$  en  $M$  est le même.

Dans le cas où  $\sin \theta_0 = 0$ , on a  $H = 0$ ; donc :

$$\left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)_0 = \frac{2}{3 \sin 2\varphi_0} \{ \alpha \cos^2 \varphi_0 - \beta \sin^2 \varphi_0 \},$$

(1) Sauf si  $C$  et  $C'$  sont tangentes à une des directions principales de  $\Sigma$  en  $M$ .



$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)_0$  est le même, pour  $c$  et  $c'$ , sauf si  $c$  et  $c'$  sont tangentes en  $M$  à une des directions principales de  $\Sigma$ . Il nous suffit donc de démontrer le lemme suivant : deux courbes  $c$  et  $c'$  de  $\Sigma$  tangentes en  $M$  entre elles, ayant en  $M$  même valeur de  $\varphi'_0$  ont en  $M$  un contact de second ordre; si elles ont aussi en  $M$  même  $\varphi''_0$ , elles ont en ce point un contact du troisième ordre.

En gardant nos notations du chapitre premier, nous pouvons écrire :

$$\text{II 26} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cot \varphi = \frac{a}{b} \frac{du}{dv}; \\ \frac{d\tau}{du} = \frac{a}{\sin \varphi}. \end{array} \right.$$

D'après la théorie des changements de variables, II 26 nous permet d'affirmer que :

$$\begin{array}{l} 1^\circ \frac{d^2 u}{dv^2} \text{ s'exprime en fonction de } u, v, \varphi \text{ et } \frac{d\varphi}{d\tau}; \\ 2^\circ \frac{d^3 u}{dv^3} \text{ s'exprime en fonction de } u, v, \varphi, \frac{d\varphi}{d\tau}, \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2}. \end{array}$$

C'est ce que nous voulions démontrer.

#### 4. — Élément linéaire conforme de $\Sigma$ .

On appelle élément linéaire conforme de  $\Sigma$  la quantité  $d\xi^2 = \frac{4(\omega_0^1)^2 + (\omega_0^2)^2}{(\omega_0^1)^2 + (\omega_0^2)^2}$ ;  $d\xi$  n'est autre que la quantité  $\sin 2\varphi d\tau$ . Le théorème suivant donne une interprétation géométrique de  $d\xi$ .

**THÉORÈME.** — Soit une courbe (C) tracée sur  $\Sigma$ , passant par  $M_0$  soit  $M$  le point courant de (C). Soit S une sphère passant par  $M$  et  $M_0$ , tendant vers la sphère  $S_0$  quand  $M \rightarrow M_0$ ,  $S_0$  étant non réduite à un point et non tangente à  $\Sigma$  en  $M_0$ . S fait avec  $\Sigma$  : en  $M$  l'angle  $\omega$ , en  $M_0$  l'angle  $\omega_0$ . Quand  $M \rightarrow M_0$ ,  $\omega - \omega_0$  est infiniment petit équivalent à  $-\int_{M_0}^M d\xi$ , l'intégrale étant prise sur (C).

En effet, (S) coupe  $\Sigma$  selon une courbe  $(\Gamma_M)$  passant par  $M$  et  $M_0$ .

La torsion conforme de  $(\Gamma_M)$  est nulle en chacun de ses points. Donc, pour  $(\Gamma_M)$ , l'équation II 15 s'écrit :

$$d\theta = -\sin 2\varphi d\tau = -d\xi$$

Mais, S étant la sphère osculatrice à  $(\Gamma_M)$ , l'intégrale de  $d\theta$  prise de  $M_0$  à M le long de  $(\Gamma_M)$  est  $\omega - \omega_0$ .

Donc  $\omega - \omega_0 = - \int_{(\Gamma_M)_{M_0}} d\xi$ . Il reste donc à démontrer que  $\int_{(\Gamma_M)_{M_0}} d\xi$  est un infiniment petit équivalent à  $\int_{(C)_{M_0}} d\xi$  quand  $M \rightarrow M_0$ .

$d\xi$  peut se mettre sous la forme  $\psi \left( u, v, \frac{dv}{du} \right) du$ ,  $\psi$  étant une fonction continue des arguments sur lesquels elle porte. En coordonnées cartésiennes rectangulaires, la surface  $\Sigma$  a les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(u, v); \\ y = g(u, v); \\ z = h(u, v). \end{cases}$$

Pendant que l'équation de la sphère est :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z = 0$$

Si  $o$   $x$  est tangent à la première ligne de courbure, et  $o$   $y$  tangent à la seconde, on a, évidemment :  $(f'v)_0 = (g'u)_0 = (h'u)_0 = (h'v)_0 = 0$  et :  $(f'u)_0 \neq 0$ ;  $(g'v)_0 \neq 0$ . L'intersection de S et  $\Sigma$  a pour équation :

$$f^2(u, v) + g^2(u, v) + h^2(u, v) + 2\alpha f(u, v) + 2\beta g(u, v) + 2\gamma h(u, v) = 0.$$

La dérivée  $v'_u$  le long de cette intersection a pour valeur :

$$v'_u = - \frac{\alpha f'_u + \beta g'_u + \gamma h'_u + f f'_u + g g'_u + h h'_u}{\alpha f'_v + \beta g'_v + \gamma h'_v + f f'_v + g g'_v + h h'_v} = \chi(\alpha, \beta, \gamma, u).$$

Quand on a fait  $u = u_0$ ,  $v = v_0$  (point,  $M_0$ ), on a :

$$v'_u = - \frac{\alpha (f'_u)_0}{\beta (g'_v)_0}.$$

$\chi(\alpha, \beta, \gamma, u)$  est continué pour  $u = u_0$ , pourvu que  $\beta$  ne tende pas vers 0. Donc l'intégrale :

$$\int_{(\Gamma_M)_{M_0}} d\xi = \int_{u_0}^{u_1} \psi(u, v(u), \chi(\alpha, \beta, \gamma, u)) du$$

peut s'écrire :

$$(u_1 - u_0) \psi(u_2, v(u_2), \gamma(x, \beta, \gamma, u_2)) \text{ avec } u_0 < u_2 < u_1, \\ \text{(on suppose par exemple : } u_0 < u_1).$$

Quand  $u_1 \rightarrow u_0$ ,  $u_2 \rightarrow u_0$ , et  $x, \beta, \gamma \rightarrow x_0, \beta_0, \gamma_0$ .

Le rapport  $\frac{\int_{(\Gamma_M)_{M_0}^{M_1}} d\xi}{u_1 - u_0} \rightarrow \psi(u_0, v_0, \gamma(x_0, \beta_0, \gamma_0, u_0)) = \psi\left(u_0, v_0, -\frac{\alpha_0(f'u)_0}{\beta_0(g'v)_0}\right)$ ; or,  $-\frac{\alpha(f'u)_0}{\beta(g'v)_0}$  est le  $\left(\frac{dv}{du}\right)_0$  relatif à l'intersection  $\Gamma$  de  $\Sigma$  et de la sphère-limite de  $S$ .

La sphère-limite de  $S$  est tangente à  $(C)$  en  $M$ . Donc, en  $M_0$ ,  $\Gamma$  est tangente à  $C$ , et ces deux courbes ont même  $\left(\frac{dv}{du}\right)_0$  en  $M_0$ .

Puisque  $\frac{\int_{(C)_{M_0}^{M_1}} d\xi}{u_1 - u_0} \rightarrow \psi\left(u_0, v_0, \left(\frac{dv}{du}\right)_0\right)$  quand  $u_1 \rightarrow u_0 (M_1 \rightarrow M_0)$ , il est clair que :

$$\frac{\int_{(\Gamma_M)_{M_0}^{M_1}} d\xi}{u_1 - u_0} = \frac{\int_{(\Gamma_M)_{M_0}^{M_1}} d\xi}{u_1 - u_0} \rightarrow \frac{\psi\left(u_0, v_0, -\frac{\alpha_0(f'u)_0}{\beta_0(g'v)_0}\right)}{\psi\left(u_0, v_0, -\frac{\alpha_0(f'u)_0}{\beta_0(g'v)_0}\right)} = 1.$$

$$\frac{\int_{(C)_{M_0}^{M_1}} d\xi}{u_1 - u_0} = \frac{\int_{(C)_{M_0}^{M_1}} d\xi}{u_1 - u_0} \rightarrow \frac{\psi\left(u_0, v_0, \left(\frac{dv}{du}\right)_0\right)}{\psi\left(u_0, v_0, \left(\frac{dv}{du}\right)_0\right)} = 1.$$

Nous avons excepté le cas où  $\beta_0 = 0$ ; ce cas est celui où  $(C)$  est tangente à la deuxième ligne de courbure de  $\Sigma$  en  $M_0$ . Il suffirait de changer les rôles de  $u$  et  $v$  ( $v$  devenant la variable indépendante) pour que ce cas rentre dans le raisonnement précédent ( $\alpha_0$  est alors forcément différent de 0).

Si  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ , la limite de  $S$  est tangente à  $\Sigma$ .

On ne peut plus rien conclure dans le cas général.

*Mais si  $S$  est constamment tangente à  $\Sigma$  en  $M$  :  $\alpha = \beta = 0$ ,  $\gamma \neq 0$ , l'angle de  $S$  et de  $\Sigma$  au point  $M_1$ , infiniment voisin de  $M_0$ , où  $S$  et  $\Sigma$  se coupent, est un infiniment petit équivalent à l'élément linéaire conforme  $d\xi$  pris entre  $M_0$  et  $M_1$ . On est ainsi ramené à la définition même de l'élément linéaire conforme, selon M. E. Cartan.*

5. — *Asymptotiques conformes : géodésiques conformes* (1).

Les formules II 22 nous permettent d'écrire :

$$\sigma^4 = H^2 + K^2.$$

$\sigma^4$  a donc la même valeur pour deux courbes ayant en un point un contact du 3<sup>e</sup> ordre.

Si deux courbes de  $\Sigma$  ont en un point même cercle osculateur, elles ont en ce point même valeur de la quantité  $H$ , donc même valeur de  $\pm \sigma^2 \sin \theta$ .

La considération des mêmes formules II 22 nous permet d'affirmer l'existence de deux familles de courbes remarquables sur  $\Sigma$  : les asymptotiques conformes et les géodésiques conformes.

a) *Asymptotiques conformes.* — Nous donnerons ce nom aux courbes de  $\Sigma$  dont la sphère osculatrice est partout tangente à  $\Sigma$  (en géométrie ordinaire, les asymptotiques d'une surface sont les lignes dont le *plan osculateur* est partout tangent à la surface). Les formules II 22 montrent que tout le long d'une asymptotique conforme, on a :  $H = 0$ . Réciproquement, toute ligne satisfaisant à  $H = 0$  est asymptotique conforme.

Si, grâce aux équations II 26, nous remplaçons dans  $H = 0$  les arguments  $\varphi$ ,  $\frac{d\varphi}{d\tau}$  par leurs expressions en  $\frac{dv}{du}$ ,  $\frac{d^2v}{du^2}$ , nous obtenons :

$$\text{II 27} \quad \frac{b \left( \frac{b}{a} \right)'_u (v'_u)^2 + \frac{b}{a} v'_u v''_{u^2}}{\left( 1 + \frac{b^2}{a^2} (v'_u)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\alpha}{\frac{b}{a} v'_u \left\{ 1 + \frac{b^2}{a^2} (v'_u)^2 \right\}} - \frac{\beta \frac{b^3}{a^3} (v'_u)^3}{1 + \frac{b^2}{a^2} (v'_u)^2} \right\}$$

( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$ ,  $b$ , sont fonctions de  $u$ ,  $v$ ).

II 27 montre que, en général, par un point de  $\Sigma$ , tangentielllement à un élément linéaire donné :  $\left( \frac{dv}{du} \right)_0$ , il passe une asymptotique conforme de  $\Sigma$  et une seule.

Les asymptotiques conformes ont donc un degré de généralité comparable à celui des géodésiques (au sens ordinaire) d'une surface.

Remarquons que la sphère osculatrice  $S$  à une asymptotique conforme  $\Gamma$  en un point  $M$  contient le cercle osculateur de  $\Gamma$  en  $M$  et est tangente à la surface  $\Sigma$  en  $M$ . Elle contient donc, selon le théorème de Meusnier, tous les cercles osculateurs des courbes tangentes en  $M$  à  $\Gamma$ . On peut dire que les asymptotiques conformes

---

(1) C'est M. Delens qui a introduit les notions d'asymptotiques et de géodésiques conformes (cf. VI a).

sont les lignes de  $\Sigma$  telles que leur « sphère de Meusnier » coïncide, en chacun de leurs points, avec la sphère osculatrice.

b) *Géodésiques conformes.* — Les géodésiques conformes sont les courbes dont la sphère osculatrice au point courant  $M$  est normale en  $M$  à  $\Sigma$ . Elles généralisent les lignes géodésiques au sens ordinaire, dont le plan osculateur en chacun de leurs points est normal à  $\Sigma$ .

Il va de soi qu'elles n'ont pas certaines des propriétés des géodésiques ordinaires. Notamment, elles ne sont pas extrémales de l'arc  $\tau$ ; elles ne sont pas non plus les extrémales de l'élément linéaire conforme  $d\xi$ , car les lignes de courbure qui sont de telles extrémales ne sont pas, en général, géodésiques conformes.

La considération des formules II 22 montre que les géodésiques conformes satisfont à l'équation :

$$\text{II 28} \quad K = 0.$$

D'après II 26, on peut transformer II 28 en une équation différentielle du 3<sup>e</sup> ordre en  $u, v, \frac{dv}{du}, \frac{d^2v}{du^2}, \frac{d^3v}{du^3}$ . L'existence de cette équation nous permet d'énoncer le résultat suivant :

par un point  $P$  d'une courbe  $(C)$  de  $\Sigma$ , il passe une ligne géodésique conforme et une seule ayant avec  $(C)$  en  $P$  un contact du 2<sup>e</sup> ordre.

Les géodésiques conformes de  $\Sigma$  ont donc un degré de généralité comparable à celui des cercles d'un plan (ou d'une sphère).

## 6. — Torsion et courbure conformes des courbes tracées sur $\Sigma$ .

### a) TORSION.

II 17 s'écrit :

$$h \frac{d\sigma}{d\tau} - \frac{d\theta}{d\tau} = -\sin 2\varphi.$$

On peut donc énoncer un premier résultat :

Pour deux courbes tangentes entre elles en un point, la quantité

$$h \frac{d\sigma}{d\tau} - \frac{d\theta}{d\tau} \text{ est la même en ce point.}$$

Tenons, maintenant, compte de II 22; nous avons :

$$\sigma^2 = \mp \frac{H}{\sin \theta};$$

donc :

$$\text{II 29} \quad \sqrt{\mp \frac{H}{\sin \theta}} h - \frac{d\theta}{d\tau} = -\sin 2\varphi; \quad \text{ou : } h = \sqrt{\mp \frac{\sin \theta}{H}} \left( \frac{d\theta}{d\tau} - \sin 2\varphi \right).$$

On peut aussi écrire, simplement :

$$\text{II 30} \quad h - \frac{d\theta}{d\sigma} = -\frac{\sin 2\varphi}{\sigma'_{\tau}}.$$

Nous pouvons interpréter géométriquement II 29 et II 30.

Soit une courbe C de  $\Sigma$ . Soit, passant par M de C la géodésique conforme  $\Gamma$  ayant avec C en M un contact du 2<sup>e</sup> ordre. Pour C et  $\Gamma$  en M, H est le même. La torsion de  $\Gamma$  en M est, selon II 29 :

$$\text{II 31} \quad h_0 = -\sqrt{\mp \frac{1}{H}} \sin 2\varphi.$$

selon II 29, également, la torsion de C en M sera, en tenant compte de II 31 :

$$\text{II 32} \quad h = \sqrt{\varepsilon \sin \theta} \left( h_0 - \frac{1}{\sin 2\varphi} \frac{d\theta}{d\tau} \right) \quad (\varepsilon = \mp 1).$$

II 32 n'est évidemment valable que pour une ligne C non asymptotique conforme (ou n'ayant pas en M de contact d'ordre 2 avec une asymptotique conforme) et non tangente à une direction principale.

Pour une ligne tangente, par exemple, à la 1<sup>re</sup> direction principale de  $\Sigma$  en M, la formule II 29 s'écrit simplement :

$$\text{II 33} \quad h = \sqrt{\mp \frac{\sin \theta}{2\alpha}} \frac{d\theta}{d\tau}.$$

Quant à II 30, son interprétation est immédiate :

Deux courbes de  $\Sigma$ , ayant en M un contact d'ordre 3, ont en M même valeur de la quantité  $h - \frac{d\theta}{d\sigma}$ .

C'est bien évident, car de telles courbes ont même valeur de  $\sigma'_{\tau}$  en M. Le résultat précédent présente une certaine analogie avec le théorème classique sur la torsion géodésique des courbes tracées sur une surface.

b) *Courbure.*

Montrons qu'on peut exprimer, pour toutes les courbes osculatrices (ayant un contact d'ordre 2) à une courbe  $\Gamma$  en un point  $M$ , la courbure  $k$  en fonction de  $\theta$ ,

$$\frac{d\theta}{d\tau}, \frac{d^2\theta}{d\tau^2}.$$

En effet, on peut écrire, en vertu de II 22 :

$$\text{II 34} \quad \mp \sigma'^2 = \frac{H}{\sin \theta}.$$

En dérivant deux fois II 34 membre à membre par rapport à  $\tau$ , en portant dans II 25 les résultats obtenus, et en tenant compte de II 23, on obtient une équation de la forme :

$$\text{II 35 :} \quad k = a\theta'' + b\theta'^2 + c\theta' + d$$

les coefficients  $a, b, c, d$  dépendant de  $\theta, \varphi$ , et  $\frac{d\varphi}{d\tau}$  d'une manière assez compliquée.

On peut ainsi interpréter l'équation II 25 en remarquant que pour deux courbes de  $\Sigma$  ayant en  $M$  un contact d'ordre 2, la quantité  $\left\{ \sigma \right\}_{\tau} - k \sigma'^2$  est la même.

### 7. — Sur certaines directions remarquables d'une surface en un point.

Les cercles d'une surface (s'il en existe sur  $\Sigma$ ) sont les lignes pour lesquelles on a, à la fois :

$$H = 0 \quad \text{et} \quad K = 0.$$

Ce sont, en un certain sens, les lignes à la fois asymptotiques conformes et géodésiques conformes.

Le problème de la recherche des cercles sur  $\Sigma$  par les méthodes de la géométrie différentielle (que nous ne nous proposons pas d'ailleurs de traiter dans ce paragraphe) suggère de résoudre un problème préliminaire : *Existe-t-il, passant par le point  $M$  de  $\Sigma$  des lignes asymptotiques conformes ayant, en  $M$  avec une géodésique conforme un contact d'ordre 3?* (Si nous choisissons le nombre 3, c'est que nous sommes sûrs que  $M$  étant un point quelconque d'une asymptotique conforme, il existe déjà une géodésique conforme ayant en  $M$  avec l'asymptotique conforme donnée un contact d'ordre 2.)

Soit  $\Gamma$  une telle asymptotique conforme et  $G$  la géodésique conforme ayant en  $M$  avec  $\Gamma$  un contact d'ordre 3.

$$\Gamma \text{ satisfait à } H = 0, \text{ donc à } H'_{\tau} = 0.$$

Quant à  $G$ , elle satisfait à  $k = 0$ ; mais, puisque  $\Gamma$  a avec  $G$  en  $M$  un contact d'ordre 3,  $\varphi, \frac{d\varphi}{d\tau}, \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}$  ont, en  $M$ , la même valeur pour les deux courbes, et  $G$  satisfait aussi; *mais en  $M$  seulement*, à  $K = 0$ .

En éliminant  $\varphi''$  et  $\varphi'$  entre  $H = 0, H' = 0, K = 0$ , on obtient une condition en  $\varphi$  qui doit être réalisée pour que  $G$  et  $\Gamma$  aient un contact du troisième ordre. Réciproquement, si un angle  $\varphi$  vérifie cette condition,  $H = 0, H' = 0, K = 0$  sont compatibles pour cette valeur de  $\varphi$ , et il en résulte que l'asymptotique conforme  $\Gamma$  faisant, en  $M$ , l'angle  $\varphi$  avec la première direction principale, a, en  $M$ , un contact du troisième ordre avec la géodésique conforme dont le  $\frac{d\varphi}{d\tau}$  en  $M$  est égal à celui de  $\Gamma$  en  $M$ .

Nous allons chercher quelle est la condition en  $\varphi$  dont nous venons de parler.

$H = 0$  s'écrit :

$$\text{II 36} \quad \varphi' = \frac{1}{3} (\alpha \cos \varphi \cot \varphi - \beta \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi).$$

$H' = 0$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \text{II 37} \quad \varphi'' = \frac{1}{3} \{ (\alpha/1 \cos \varphi + \alpha/2 \sin \varphi) \cos \varphi \cot \varphi - (\beta/1 \cos \varphi + \beta/2 \sin \varphi) \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi \} \\ + \frac{1}{3} \left\{ \alpha \left( -\sin \varphi \cot \varphi - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) - \beta \left( \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi + \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \right) \right\} \varphi'. \end{aligned}$$

En combinant II 37, II 36 et  $K = 0$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{II 38} \quad + \frac{1}{3} \left\{ (\alpha/1 \cos \varphi + \alpha/2 \sin \varphi) \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} - (\beta/1 \cos \varphi + \beta/2 \sin \varphi) \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \right\} \\ + \frac{1}{3} \left\{ \alpha \cos \varphi \left[ \frac{2}{3} - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \right] + \beta \sin \varphi \left[ \frac{2}{3} - \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right] \right\} \cdot \left\{ \alpha \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} - \beta \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \right\} \\ + \alpha_1 \cos^2 \varphi - (\alpha_1 - \beta_1) \sin \varphi \cos \varphi - \beta_1 \sin^2 \varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0. \end{aligned}$$

En posant  $t = \operatorname{tg} \varphi$ , II 38 s'écrit :

$$\begin{aligned} + \frac{1}{3} \left\{ \frac{\alpha/1}{t(1+t^2)} + \frac{\alpha/2}{1+t^2} - \frac{\beta/1 t^2}{1+t^2} - \frac{\beta/2 t^2}{1+t^2} \right\} + \frac{2}{9} \frac{\alpha^2}{t(1+t^2)} - \frac{1}{9} \frac{\alpha^2}{t^2} + \frac{2}{9} \alpha \beta \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ - \frac{2}{9} \frac{\beta^2 t^2}{1+t^2} + \frac{1}{9} \beta^2 t^2 + \frac{\alpha_1}{1+t^2} - \frac{(\alpha_1 - \beta_1)t}{1+t^2} - \frac{\beta_1 t^2}{1+t^2} + \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = 0. \end{aligned}$$



En chassant les dénominateurs, nous obtenons, finalement :

$$\begin{aligned} \text{II } 39 \quad & -\beta^2 t^0 + 3\beta/2 t^2 + (2\alpha\beta + 3\beta/1 + 9\beta_1) t^3 \\ & + (\beta^2 + 3\beta/2 + 9(\alpha_1 - \beta_2) + 18) t^4 - (3(\alpha/2 - \beta/1) + 9(\alpha_2 - \beta_1)) t^5 \\ & - (\alpha_2 + 3\alpha/1 + 9(\beta_2 - \alpha_1) + 18) t^6 + -(2\alpha\beta + 3\alpha/2 + 9\alpha_2) t^7 + -3\alpha/1 t^8 + \alpha^2 = 0. \end{aligned}$$

Les racines de cette équation du dixième degré nous donnent les valeurs de  $\text{tg } \varphi$  qui résolvent le problème que nous nous sommes posé.

Il existe donc en un point  $M$  dix directions remarquables au plus telles que l'asymptotique conforme  $\Gamma$  passant par  $M$  tangente à l'une de ces directions ait un contact du troisième ordre avec une géodésique conforme.

Remarquons que l'asymptotique conforme  $\Gamma$  dont il est question dans l'énoncé ci-dessus a une infinité de sphères osculatrices en  $M$  (sphère osculatrice est ici pris au sens de sphère ayant avec la courbe en  $M$  un contact d'ordre 3).

La sphère osculatrice à  $\Gamma$  en  $M'$  voisin de  $M$ , qui est tangente en  $M'$  à  $\Sigma$ , tend, quand  $M' \rightarrow M$ , vers une sphère  $S$  tangente à  $\Sigma$  en  $M$ , ayant avec  $\Gamma$  en  $M$  un contact du quatrième ordre. Nous pouvons donc aussi définir nos directions privilégiées de la façon suivante :

La « sphère de Meusnier<sup>(1)</sup> » d'une de ces directions  $a$ , avec l'asymptotique conforme tangente en  $M$  à cette direction, un contact d'ordre 4.

Les directions privilégiées que nous venons de définir donnent naissance à un certain nombre de familles de courbes à un paramètre (dix au plus) définies par la propriété suivante : chaque courbe, en chacun de ses points est tangente à une des directions relatives à ce point.

C'est parmi les courbes de ces familles qu'il faut chercher les cercles tracés sur  $\Sigma$ . Pour savoir si une de ces courbes est un cercle, il suffit de voir si elle est asymptotique conforme  $\left[ \varphi' = \frac{1}{3} (\alpha \cos \varphi \cot \varphi - \beta \sin \varphi \text{tg } \varphi) \right]$ . Elle sera, du même coup, géodésique conforme.

L'expression de la condition  $\varphi' = \frac{1}{3} \left\{ \alpha \cos \varphi \cot \varphi - \beta \sin \varphi \text{tg } \varphi \right\}$  nous conduirait à dériver membre à membre II 39, puis, à tenir compte de la valeur de  $t'$  obtenue; nous obtiendrions une nouvelle équation algébrique en  $t$ . L'élimination de  $t$  entre cette nouvelle équation et II 39 donnerait une relation entre les invariants de la surface et leurs invariants dérivés, qui devrait être vérifiée tout le long du cercle. Il serait possible, en se servant de cette relation, d'étudier le problèmes des familles de cercles tracées sur une surface, résolu en partie par M. Adad dans sa thèse (X).

Avant de terminer ce chapitre, signalons le résultat suivant, qui découle de l'existence même de l'équation II 39.

(1) Cf. paragraphe 5, chapitre II.

**THÉORÈME** — Par un point non ombilic d'une surface au moins cinq fois différentiable ne peuvent passer plus de dix cercles tracés sur la surface<sup>(1)</sup>.

En effet, si  $M$  n'est pas un ombilic, le repère intrinsèque de  $\Sigma$  en  $M$  existe, et il existe en outre dans un certain voisinage de  $M$ . Les invariants différentiels et leurs dérivés intervenant dans II 39 existent en  $M$ . Donc l'équation II 39 peut être écrite en  $M$ . Elle ne s'y réduit pas à une identité, car, dans cette hypothèse, on aurait :  $\beta = \alpha = \alpha/1 = \beta/2 = 0$ ; il en résulterait que :

$$\begin{cases} g(\alpha_1 - \beta_2) + 18 = 0, \\ g(\beta_2 - \alpha_1) + 18 = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont manifestement contradictoires.

<sup>(1)</sup> Darboux a démontré (VII Ib) qu'une surface non sphérique ne pouvait contenir plus de dix familles de cercles à un paramètre. Le théorème ci-dessus rend ce résultat immédiat : en effet, pour qu'il y ait sur  $\Sigma$  onze familles de cercles à un paramètre au moins, il faut que tous les points de  $\Sigma$  soient des ombilics, propriété qui n'appartient qu'à la sphère.

### CHAPITRE III

#### Quelques théorèmes sur la déformation isométrique conforme des surfaces.

1. — Relations entre les invariants d'une surface et ceux de ses lignes de courbure :

a) Ligne de courbure  $v = c$  (première ligne de courbure). Pour cette ligne, II 21 s'écrit :

$$\operatorname{tg} \theta = -2 \frac{\alpha}{\alpha_2} \quad \text{ou} \quad \theta = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 \frac{\alpha}{\alpha_2}.$$

D'autre part, on voit que :

$$\text{III 1} \quad \sigma' = \sqrt[4]{H^2 + K^2} = (4\alpha^2 + (\alpha_2)^2)^{\frac{1}{4}}.$$

Par conséquent, d'après II 17, la torsion conforme  $h$  de la ligne de courbure a pour expression :

$$h = (4\alpha^2 + (\alpha_2)^2)^{-\frac{1}{4}} \theta'.$$

Mais en écrivant la différentielle de toute fonction  $f(u, v)$  sous la forme  $df = f/1 \omega_0^1 + f/2 \omega_0^2$ , on a :

$$\theta' = -\frac{2(\alpha/1 \alpha_2 - \alpha \alpha_{2/1})}{(\alpha_2)^2 + 4\alpha^2};$$

d'où :

$$\text{III 2} \quad h = -\frac{2(\alpha/1 \alpha_2 - \alpha \alpha_{2/1})}{[(\alpha_2)^2 + 4\alpha^2]^{\frac{5}{4}}}.$$

Nous allons déterminer la courbure conforme  $k$  en nous servant de l'équation :

$$\text{III 3} \quad \{\sigma\}' - k\sigma'^2 = -\alpha/1 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha_1 + \frac{1}{2}.$$

qui n'est autre que l'équation II 25 appliquée à la première ligne de courbure.

(Remarquons que III 3 donne une interprétation de l'invariant  $\alpha_1$ ).

Pour cela dérivons par rapport à  $\tau$ , successivement les deux membres de III 1, l'équation obtenue par une première dérivation de III 1, etc...

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sigma' &= (4\alpha^2 + (\alpha_2)^2)^{\frac{1}{4}}; \\ \sigma'' &= \frac{1}{4} (4\alpha^2 + (\alpha_2)^2)^{-\frac{3}{4}} (8\alpha\alpha'/1 + 2\alpha_2\alpha_{2,1}) = \frac{1}{2} (4\alpha^2 + (\alpha_2)^2)^{-\frac{3}{4}} (4\alpha\alpha'/1 + \alpha_2\alpha_{2,1}); \\ \sigma''' &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} (4\alpha^2 + (\alpha_2)^2)^{-\frac{7}{4}} (8\alpha\alpha'/1 + 2\alpha_2\alpha_{2,1})^2 + \frac{1}{2} (4\alpha^2 + (\alpha_2)^2)^{-\frac{3}{4}} \\ &\quad \cdot (4\alpha\alpha_{1,1,1} + 4(\alpha_{1,1})^2 + \alpha_2\alpha_{2,1,1} + (\alpha_{2,1})^2).\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\{\sigma\}'_{\tau} = -\frac{9}{8} (4\alpha^2 + (\alpha_2)^2)^{-2} (4\alpha\alpha_{1,1} + \alpha_2\alpha_{2,1})^2 + \frac{1}{2} (4\alpha^2 + (\alpha_2)^2)^{-1} (4\alpha\alpha_{1,1,1} + 4(\alpha_{1,1})^2 + \alpha_2\alpha_{2,1,1} + (\alpha_{2,1})^2);$$

puisque

$$\sigma'^2 = (4\alpha^2 + (\alpha_2)^2)^{\frac{1}{2}};$$

on a :

$$\begin{aligned}\text{III 4 } k &= -\frac{9}{8} (4\alpha^2 + (\alpha_2)^2)^{-\frac{5}{2}} (\alpha\alpha_{1,1} + \alpha_2\alpha_{2,1})^2 + \frac{1}{2} (4\alpha^2 + (\alpha_2)^2)^{-\frac{3}{2}} (4\alpha\alpha_{1,1,1} + 4(\alpha_{1,1})^2 + \alpha_2\alpha_{2,1,1} + (\alpha_{2,1})^2) \\ &\quad + \left(\alpha_{1,1} + \frac{\alpha^2 - 1}{2} + \alpha_1\right) (4\alpha^2 + (\alpha_2)^2)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

b) Ligne de courbure  $u=c$  (deuxième ligne de courbure).

Pour cette ligne, on aurait :

$$\text{tg } \theta = -2 \frac{\beta}{\beta_1} \quad \theta = -\text{arc tg } 2 \frac{\beta}{\beta_1};$$

$$\sigma' = (4\beta^2 + (\beta_1)^2)^{\frac{1}{4}};$$

et

$$\{\sigma\}'_{\tau} - k\sigma'^2 = -\left(\beta/2 + \frac{\beta^2 - 1}{2} + \beta_2\right);$$

ce qui pourrait permettre d'interpréter  $\beta_2$ .

Le calcul donnerait, pour la torsion  $h$ , et la courbure  $k$  de cette ligne, le résultat suivant :

$$\text{III 5} \quad h = -\frac{2(\beta_{12}\beta_1 - \beta\beta_{1,2})}{((\beta_1)^2 + 4\beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{III 6} \quad k = -\frac{9}{8}(4\beta^2 + (\beta_1)^2)^{-\frac{5}{2}}(4\beta\beta_{12} + \beta_1\beta_{1,2})^2 + \left(\beta_{12} + \frac{\beta^2 - 1}{2} + \beta_2\right)(4\beta_2 + (\beta_1)^2)^{-\frac{1}{2}} \\ + \frac{1}{2}(4\beta^2 + (\beta_1)^2)^{-\frac{3}{2}}(4\beta\beta_{12,2} + 4(\beta_2)^2 + \beta_1\beta_{1,2,2} + (\beta_{1,2})^2).$$

2. — *Cas d'exception* :  $\alpha = \alpha_2 = 0$  (ou  $\beta = \beta_1 = 0$ ).

Si  $\alpha = \alpha_2 = 0$ , en un point, on voit que les formules :

$$\mp \cos \theta \zeta^2 = \alpha_2 = 0,$$

$$\mp \sin \theta \zeta^2 = 2\alpha = 0;$$

ne permettent pas de définir  $\theta$  ( $\text{otg } \theta = 0$ ). Il y a donc en ce point une infinité de sphères osculatrices à la ligne de courbure  $v=C$ ; on tirerait la même conclusion pour la ligne de courbure  $u=C$  dans le cas où  $\beta = \beta_1 = 0$ . En donnant à  $\theta$  une valeur quelconque, on voit que  $\zeta = 0$ ; donc, si, en tout point d'une ligne de courbure  $v=C$  (ou  $u=C$ ) on a  $\alpha = \alpha_2 = 0$  (ou  $\beta = \beta_1 = 0$ ), *cette ligne de courbure est un cercle*.

Il est évident, d'après le théorème de Joachimstal qu'il existe une sphère tangente en tout point de cette ligne à la surface. Cette sphère est représentée par la sphère analytique  $A_0 + A_3$  ou  $(A_0 - A_3)$  du repère en un point quelconque M de la ligne de courbure; car on a : (le long de la première ligne de courbure) :

$$dA_0 = (\alpha \omega_0^1 + \beta \omega_0^2) A_0 + \omega_0^1 A_1 + \omega_0^2 A_2,$$

$$dA_3 = (\alpha \omega_0^1 - \beta \omega_0^2) A_0 - \omega_0^1 A_1 + \omega_0^2 A_2;$$

avec  $\omega_0^2 = 0$ ; donc :

$$\text{III 7} \quad d(A_0 + A_3) = 0.$$

*Remarque* : Il est bien connu que si une surface admet une famille de lignes de courbure circulaires, elle est l'enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre.

3. — *Les surfaces isothermiques* :

Une surface isothermique est une surface dont l'élément linéaire (au sens de l'espace euclidien) peut se mettre sous la forme :  $ds^2 = A(u, v)(du^2 + dv^2)$ ,  $u$  et  $v$  étant les paramètres des lignes de courbure de la surface.

Étant donné une surface isothermique  $\Sigma$ , il existe une infinité de surfaces  $\Sigma'$  qu'on peut mettre en correspondance ponctuelle biunivoque avec  $\Sigma$  (au moins localement) de façon que cette correspondance conserve les formes  $\omega_0^1$  et  $\omega_0^2$ . On exprime ce fait en disant qu'on peut, au point de vue conforme faire subir une déformation isométrique à  $\Sigma$ . On démontre que, réciproquement, seules les surfaces isothermiques sont ainsi déformables. Ces résultats sont dus à M. E. Cartan.

Nous allons rappeler rapidement les particularités des invariants des surfaces isothermiques, et en déduire certaines conséquences relatives aux lignes de courbure de ces surfaces<sup>(1)</sup>.

La déformation isométrique conforme conserve  $\omega_0^1$  et  $\omega_0^2$ , donc elle conserve les lignes de courbure ( $\omega_0^1 = 0$  et  $\omega_0^2 = 0$ ).

On peut s'arranger pour que cette correspondance (entre  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  par exemple) conserve  $u$  et  $v$ . Par conséquent  $a$  et  $b$  sont conservés. Donc, en vertu des équations II 22 et II 23 du chapitre I,  $\alpha$  et  $\beta$  sont conservés. De même, en vertu de I 24 et I 26  $\alpha_2$  et  $\beta_1$  sont conservés. Si  $\alpha_1$  et  $\beta_2$  étaient conservés, les surfaces  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  seraient superposables. Nous supposons qu'il n'en est pas ainsi. Appelons  $z$  la différence des invariants  $\alpha_1$  et  $\alpha'_1$  relatifs à  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  respectivement  $z = \alpha'_1 - \alpha_1$ ; en vertu de :

$$\alpha_1 + \beta_2 + 1 = 0$$

et

$$\alpha'_1 + \beta'_2 + 1 = 0, \text{ on a :}$$

III 8 
$$\beta'_2 - \beta_2 = -z \quad (\beta_2 \text{ et } \beta'_2 \text{ étant invariants de } \Sigma \text{ et } \Sigma').$$

L'équation I 28 écrite pour  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  conduit à la conséquence

$$\frac{\partial z}{\partial v} + 2b\beta z = 0.$$

D'autre part, I 29 écrite pour  $\Sigma$ , puis  $\Sigma'$ , conduit à :

$$\frac{\partial z}{\partial u} + 2a\alpha z = 0.$$

donc on a :

III 9 
$$\frac{dz}{z} = -2(\alpha adu + \beta b dv) = -2\omega_0^0.$$

(1) Les résultats que nous exposons ici ont fait l'objet d'une note aux comptes rendus de l'Académie des Sciences (IX). En ce qui concerne la déformation conforme, il existe notamment un mémoire de M. Demoulin (IVa); les surfaces isothermiques ont été l'objet de nombreux travaux.

Par conséquent  $\omega_0^0$  est une différentielle totale, et on voit que  $\frac{\partial(a\alpha)}{\partial v} = \frac{\partial(b\beta)}{\partial u}$ , par conséquent, en vertu de l'équation I 21 du chapitre I, on a :

$$\text{III } 10 \quad \beta_1 = \alpha_2,$$

si  $\omega_0^0 = d\lambda$ , on voit qu'en vertu de 9 :

$$\text{III } 11 \quad z = z_0 e^{-2\lambda}.$$

4. — *Les lignes de courbure des surfaces isothermiques et la déformation isométrique conforme.*

Nous allons démontrer la proposition suivante :

**THÉORÈME 1.** — Dans la déformation d'une surface  $\Sigma$ , isothermique, qui conserve l'élément linéaire conforme de cette surface, la torsion  $h$  des lignes de courbure de  $\Sigma$  en chacun de leurs points reste constante. De même, entre la courbure  $k$  de la première ligne de courbure de  $\Sigma$  en  $M$ , et celle de la seconde ligne de courbure en  $M$ , il existe une relation linéaire à coefficients ne dépendant que de la famille des déformées de  $\Sigma$  et du choix de  $M$  (il reviendrait au même de choisir un homologue de  $M$  dans la déformation).

En effet, dans l'expression de la torsion conforme des lignes de courbure d'une surface, donnée par les équations III 2 et III 5, n'entrent que les invariants dont la valeur ne change pas durant la déformation.

D'autre part, si nous considérons les équations III 4 et III 6, nous pouvons remarquer qu'il est possible de tirer : de III 4 la valeur de  $\alpha_1$ , en fonction linéaire de la courbure  $k_1$  de la première ligne de courbure, et en fonction (non linéaire) des invariants de  $\Sigma$  qui ne changent pas durant la déformation. De même, de III 6, on peut tirer  $\beta_2$  en fonction linéaire de la courbure  $k_2$  de la deuxième ligne de courbure :

Comme  $\alpha_1$  et  $\beta_2$  sont liés par la relation :  $\alpha_1 + \beta_2 + 1 = 0$  (voir chapitre I, paragraphe 3),  $k_1$  et  $k_2$  sont bien liées par la relation linéaire annoncée.

**COROLLAIRE :** On peut déduire du théorème précédent la conséquence suivante : si une ligne de courbure de  $\Sigma$  (surface isothermique) est contenue dans une sphère, elle restera courbe sphérique au cours de la déformation.

La proposition contraire est vraie; une courbe non sphérique ligne de courbure de  $\Sigma$  ne deviendra jamais courbe sphérique au cours de la déformation.

**THÉORÈME 2.** — Si  $S$  et  $\Sigma$ , isothermiques, sont déformées l'une de l'autre, la transformation conforme qui amène le repère en  $M$  de  $S$  sur le repère en  $M'$  de  $\Sigma$ .

(correspondant) amène les lignes de courbures de  $S$  passant par  $M$  dans une position où elles ont, en  $M'$ , un contact du 4<sup>e</sup> ordre avec celles de  $\Sigma$  passant par  $M'$ . Le contact ne peut être d'ordre supérieur à quatre en un point où aucun des invariants  $\alpha, \beta, \alpha_2 = \beta_1$ , n'est nul.

*En effet* : les valeurs de  $\zeta$ , de  $\theta$ , de  $\varphi$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$ , sont les mêmes pour deux lignes de courbure correspondantes en deux points correspondants, ainsi qu'on le voit immédiatement sur les formules (les invariants  $\alpha_1$ , et  $\beta_2$  qui changent dans la déformation n'interviennent pas dans les formules qui donnent les paramètres permettant de situer les repères les uns par rapport aux autres, dans le cas des lignes de courbure).

La superposition des repères des deux surfaces entraînera donc la superposition de ceux des lignes de courbure.

Or, deux courbes ayant même repère en un point commun ( $M(\sigma_0) = M'(\sigma_0)$ ) et même torsion en ce point ont en ce point un contact du 4<sup>e</sup> ordre, ainsi qu'il résulte du développement effectué au chapitre I :

$$\text{III } 12 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x_1}{x_0} \quad y = \frac{x_2}{x_0} \quad z = \frac{x_3}{x_0}, \\ y = \mp \frac{x^3}{6} + \left( \frac{\mp h^2 + k}{120} \right) x^5 \dots, \\ z = \mp \frac{h}{24} x^4 \mp \frac{dh}{d\sigma} \frac{x^5}{120} \dots, \end{array} \right.$$

(où  $x_0, x_1, x_2, x_3$  sont quatre des coordonnées d'un point courant d'une courbe par rapport au repère conforme en un point voisin de cette courbe, et où  $\sigma$  est l'arc conforme de cette courbe).

5. — *Nous avons réservé le cas où on a :  $\alpha = \alpha_2 = 0$  (et, de même,  $\beta = \beta_1 = 0$ ).*

Supposons que ce cas se présente tout le long d'une ligne de courbure. Cette ligne de courbure est alors un cercle, car, d'après nos formules en tout point de cette ligne, on a  $\zeta = 0$  (avec les notations utilisées précédemment) et, par conséquent, le choix du repère intrinsèque de cette ligne n'est possible en aucun de ses points (le choix de  $\bar{A}_0 = \zeta A_0$  est impossible). Nous tombons sur le cas d'exception prévu au chapitre I, paragraphe 1, qui est le cas du cercle.

REMARQUE. — Tout le long d'une ligne de courbure  $\omega_0^2 = 0$ , circulaire, on a  $\beta_2 = C$ , (et donc aussi  $\alpha_1 = C$ ).

En effet, en tenant compte de  $\alpha_2 = \alpha = 0$ , I 29 se réduit à :

$$\text{III } 8 \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial u} = 0.$$



Nous allons déduire de ce qui précède certaines conséquences relatives à la déformation conforme des surfaces isothermiques possédant une ligne de courbure circulaire. Soit  $(\Sigma)$  une telle surface,  $(\Sigma')$  une déformée de  $(\Sigma)$ ,  $(C)$  la ligne de courbure circulaire de  $(\Sigma)$  à laquelle correspond  $(C')$  ligne de courbure de  $(\Sigma')$ , également circulaire ( $\alpha = \alpha_2 = 0$  pour  $(\Sigma)$  comme pour  $(\Sigma')$ , en tout point de  $(C)$  et  $(C')$ ,  $M$  un point de  $(C)$ ,  $M'$  le point correspondant de  $(C')$ .

Le repère attaché à  $\Sigma'$  en  $M'$  peut être amené sur le repère attaché à  $\Sigma$  en  $M$  par une transformation conforme. Cela étant, la variation du repère  $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$  attaché à  $(\Sigma)$  en un point courant  $P$  de  $(C)$  est donnée par le système :

$$\text{III 13} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_0}{dz} = A_1, \quad \frac{dA_4}{dz} = \alpha_1 A_0 + A_3 + 2A_4, \\ \frac{dA_2}{dz} = \alpha_2 A_0, \quad \frac{dA_3}{dz} = -A_1, \quad \frac{dA_4}{dz} = \frac{\alpha_1}{2} A_1; \end{array} \right.$$

(où  $z$  est l'arc conforme de  $(\Sigma)$  compté le long de  $(C)$  à partir de  $M$ ).

De III 13, on déduit :

$$\text{III 14} \quad \frac{d^2 A_0}{dz^2} = \alpha_1 A_0 + A_3 + 2A_4.$$

Si  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$  sont les coordonnées de  $A_0$  par rapport au repère en  $M$ , on a, en se bornant aux termes du 2<sup>e</sup> ordre au plus, les développements de Mac Laurin suivants :

$$\text{III 15} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{x_0} = z + \dots; \\ \frac{x_2}{x_0} = 0 + \dots; \\ \frac{x_3}{x_0} = \frac{z^2}{2} + \dots \end{array} \right.$$

Il existerait pour  $A'_0$  (coordonnées  $x'_0, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4$  par rapport au repère en  $M'$  superposé avec le repère attaché à  $\Sigma$  en  $M$ ) des formules :

$$\text{III 16} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x'_1}{x'_0} = z + \dots; \\ \frac{x'_2}{x'_0} = 0 + \dots; \\ \frac{x'_3}{x'_0} = \frac{z^2}{2} + \dots \end{array} \right.$$

III 15 et III 16 comparées montrent que (C) et (C') ont en M un contact d'ordre 2. Or cela suffit pour que (C) et (C') soient superposés.

Par conséquent : le déplacement conforme amenant le repère de ( $\Sigma'$ ) en M' sur le repère de ( $\Sigma$ ) en M superpose (C) et (C'), homologues.

6. — Nous allons voir qu'en dehors de M et M' ce déplacement conforme ne superpose pas les points de (C) et (C') homologues les uns des autres.

Pour cela, utilisons le système III 13 :

Nous avons :

$$\frac{d^2 A_1}{dz^2} = \alpha_1 A_1 - A_1 + \alpha_1 A_1,$$

ou :

III 17 
$$\frac{d^2 A_1}{dz^2} + (1 - 2\alpha_1) A_1 = 0.$$

La forme de III 17 nous oblige à considérer deux cas :

a)  $1 - 2\alpha_1 > 0$  ou  $\alpha_1 < \frac{1}{2};$

b)  $1 - 2\alpha_1 < 0$  ou  $\alpha_1 > \frac{1}{2};$

a)  $1 - 2\alpha_1 > 0$   $\alpha_1 < \frac{1}{2}.$

On peut alors poser  $1 - 2\alpha_1 = \omega^2$ ; et on sait que la solution de III 17 est de la forme :

$$A_1 = A \cos \omega z + B \sin \omega z.$$

Appelons ( $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ ) le repère de ( $\Sigma$ ) en M.

On a, pour  $Z = 0$ , en comparant l'expression trouvée de  $A_1$  avec  $\mathcal{A}_1$  :

$$A = \mathcal{A}_1.$$

Comparons, pour  $z = 0$  les expressions :

$$\frac{dA_1}{dz} = -A \omega \sin \omega z + B \omega \cos \omega z$$

et 
$$\frac{dA_1}{dz} = \alpha_1 A_0 + A_3 + 2A_4 \quad (\text{tirée de III 13}); \text{ il vient}$$

$$B \omega = \alpha_1 \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_3 + 2\mathcal{A}_4;$$

d'où

$$B = \frac{1}{\omega} \{ \alpha_1 \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_3 + 2\mathcal{A}_4 \}$$

et :

$$A_1 = \mathcal{A}_1 \cos \omega z + \frac{1}{\omega} \{ \alpha_1 \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_3 + 2\mathcal{A}_4 \} \sin \omega z.$$

Mais de III 13 on peut extraire :

$$\frac{dA_0}{dz} = A_1;$$

donc :

$$A_0 = \frac{1}{\omega} \mathcal{A}_1 \sin \omega z - \frac{1}{\omega^2} \{ \alpha_1 \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_3 + 2\mathcal{A}_4 \} \cos \omega z + K.$$

La sphère K va être déterminée par la condition qui s'écrit :

$$\mathcal{A}_0 = -\frac{1}{\omega^2} \{ \alpha_1 \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_3 + 2\mathcal{A}_4 \} + K.$$

Ce qui conduit au résultat :

$$\text{III 18} \quad A_0 = \frac{1}{\omega} \mathcal{A}_1 \sin \omega z + \frac{1}{\omega^2} \{ \alpha_1 \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_3 + 2\mathcal{A}_4 \} \{ 1 - \cos \omega z \} + \mathcal{A}_0;$$

$$\text{b) } \quad \underline{1 - 2\alpha_1 < 0,} \quad \alpha_1 > \frac{1}{2}.$$

III 17 conduit à écrire :

$$A_1 = A \operatorname{Ch} \lambda z + B \operatorname{Sh} \lambda z$$

$$\text{avec : } \quad \lambda^2 = 2\alpha_1 - 1.$$

On a, en procédant comme à la subdivision a) :

$$A = \mathcal{A}_1; \quad B = \frac{1}{\lambda} \{ \alpha_1 \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_3 + 2\mathcal{A}_4 \}.$$

Ce qui conduit à :

$$A_1 = \mathcal{A}_1 \operatorname{Ch} \lambda z + \frac{1}{\lambda} \{ \alpha_1 \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_3 + 2\mathcal{A}_4 \} \operatorname{Sh} \lambda z.$$

En prenant la primitive de  $A_1$  et en posant :

$$(A_0)_{z=0} = \mathfrak{A}_0,$$

on obtient :

$$\text{III 19} \quad A_0 = \frac{1}{\lambda} \mathfrak{A}_1 \operatorname{Sh} \lambda z + \frac{1}{\lambda^2} \{ \alpha_1 \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_3 + 2 \mathfrak{A}_4 \} \{ \operatorname{Ch} \lambda z - 1 \} + \mathfrak{A}_0.$$

Des expressions de même forme que III 18 et III 19 existent pour  $A'_0$  avec des coefficients  $\lambda'$  ou  $\omega'$  qui ne peuvent être égaux à  $\lambda$  ou  $\omega$ , car cela entraînerait l'égalité des invariants  $\alpha_1$  et  $\alpha'_1$  et, par conséquent, la superposabilité conforme de  $(\Sigma)$  et  $(\Sigma')$ . Il résulte de ceci que les points homologues (de même  $z$ ) sur le cercle  $(C)$  (confondu avec  $(C')$  après superposition des repères en  $M'$  et  $M$ ) ne sont pas superposés.

7. — Jusqu'ici, nous nous en sommes tenus à un point de vue strictement local; dans ce paragraphe, nous allons, au contraire, faire quelques remarques de nature globale.

Soit une surface  $\Sigma$  contenant un cercle  $(C)$  entier, ligne de courbure de  $\Sigma$  le long de laquelle  $\alpha_1 < \frac{1}{2}$ . A mesure que croîtra  $z$ ,  $A_0$  décrira le cercle, et il repassera par une position déjà franchie quand  $\omega z$  se sera accru de  $2\pi$ . La « longueur » conforme totale du cercle sera

$$\frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 2\alpha_1}}.$$

Pour mesurer  $\alpha_1$  sur  $(C)$  il suffit donc de prendre le « tour de taille conforme » de  $(\Sigma)$  selon  $(C)$ .

Si la surface  $(\Sigma)$  précédente est isothermique, la période  $\frac{2\pi}{\omega}$  et celle  $\frac{2\pi}{\omega'}$  d'une de ses déformées  $(\Sigma')$  le long du cercle  $(C')$  homologue ne seront pas égales, si bien qu'à la totalité du cercle  $(C)$  ne correspondra pas la totalité du cercle  $(C')$  (ou au contraire) à la totalité de  $(C')$  ne correspondra pas la totalité de  $(C)$ .

Il se peut même que pour  $(\Sigma)$  le long de  $(C)$ , on ait  $\alpha_1 < \frac{1}{2}$ , et que pour  $(\Sigma')$  le long de  $(C')$ , on ait  $\alpha_1 > \frac{1}{2}$ .

Dans ce cas, à un arc de  $(C')$  correspondrait une infinité de fois le cercle  $(C)$ .

## CHAPITRE IV

### La connexion induite sur une surface plongée dans l'espace conforme à trois dimensions.

#### 1. — La notion de connexion conforme.

Dans un mémoire des *Annales de la Société polonaise de Mathématiques*, M. Élie Cartan a, pour la première fois, introduit la notion de connexion conforme (I d).

Nous allons rappeler succinctement en quoi consiste cette notion.

Soit une variété numérique à trois dimensions, où les points sont repérés grâce à trois coordonnées :  $x, y, z$ . Nous assimilerons le voisinage de chacun des points de cette variété à une portion d'un espace conforme : l'espace conforme tangent. Dans cet espace conforme tangent existera un repère pentasphérique  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$ . Un système d'équations

$$IV \quad dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta$$

donnera la variation infinitésimale du repère quand on passe d'un point  $M$  de la variété au point  $M + dM$ . Les formes  $\omega_\alpha^\beta$  sont des fonctions linéaires de  $dx, dy, dz$ .

$$\text{On a :} \quad \omega_\alpha^\beta = \pi_{\alpha x}^\beta dx + \pi_{\alpha y}^\beta dy + \pi_{\alpha z}^\beta dz.$$

Les  $\pi_{\alpha x}^\beta$  etc... sont fonctions de  $x, y, z$ .

Les formes  $\omega_\alpha^\beta$  ne servent qu'à raccorder entre eux dans le voisinage immédiat d'un point  $M$ , les divers espaces conformes tangents à la connexion conforme.

Pour parler un langage plus précis, les formes  $\omega_\alpha^\beta$  serviront à *développer* les courbes de l'espace à connexion conforme sur l'espace conforme tangent. Les propriétés des courbes de l'espace à connexion conforme seront, par définition, celles de leur développement sur l'espace conforme. Il s'ensuit tout naturellement que le repère pentasphérique intrinsèque d'une courbe s'obtiendra, en géométrie à connexion conforme selon les mêmes règles qu'en géométrie conforme. Les formules donnant la variation infinitésimale du repère mobile d'une courbe seront alors de la même forme que les formules correspondantes en géométrie conforme.

La définition de l'espace à connexion conforme à deux dimensions se fait de façon analogue à celle de l'espace à connexion conforme à trois dimensions. Les cinq sphères analytiques du repère sont remplacées par un tétracycle.

2. — *Connexion induite sur une surface.*

De même qu'en géométrie ordinaire, on peut considérer une surface comme un espace de Riemann à deux dimensions, nous allons considérer, dans ce chapitre, une surface de l'espace conforme comme un espace à connexion conforme à deux dimensions.

L'espace conforme à deux dimensions tangent en un point à la connexion conforme définie sur la surface sera matérialisé par la sphère  $A_3$  du repère de la surface. Le repère tétracyclique sera, bien entendu, l'ensemble des quatre cercles :  $(A_0; A_3)$ ,  $(A_1; A_3)$ ,  $(A_2; A_3)$ ,  $(A_4; A_3)$ ; appelons ces cercles  $B_0$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  :

Nous aurons toujours :

$$(B_1)^2 = 1, (B_2)^2 = 1, (B_0)^2 = 0, (B_3)^2 = 0, (B_0 B_3) = -\frac{1}{2}.$$

Nous définirons la loi de raccord des espaces tangents de la façon suivante : en un point  $M + dM$ , infiniment voisin du point  $M$ , sur la surface, les sphères  $A_1$ ,  $A_3$  du repère sont devenues :

$$\begin{aligned} A_1 + dA_1 &= A_1 + \omega_1^0 A_0 + \omega_1^2 A_3 + 2 \omega_1^4 A_4 \\ \text{et : } A_3 + dA_3 &= A_3 + \omega_3^0 A_0 - \omega_3^2 A_1 + 2 \omega_3^4 A_4. \end{aligned}$$

Le cercle  $B'_1 (A_1 + dA_1; A_3)$  ne sera autre que le cercle  $(A_3; A_1 + \omega_1^0 A_0 + 2 \omega_1^4 A_4)$ .

Le cercle  $B'_3 (A_3 + dA_3; A_1)$  sera le cercle :  $(A_3; A_3 + \omega_3^0 A_0 + 2 \omega_3^4 A_4)$ .

Ces deux cercles se couperont en deux points  $B'_0$  et  $B'_4$ , que nous soumettrons à

la condition  $(B'_0, B'_4) = -\frac{1}{2}$ .

Le point  $B'_0$  aura le même support géométrique que le point  $A_0 + dA_0$ .

Nous normerons ce point de façon que  $B'_0 - B_0$  soit exactement :

$$\omega_0^0 B_0 + \omega_0^1 B_1 + \omega_0^2 B_2.$$

Nous aurons donc :

$$\left\{ \begin{aligned} B'_0 - B_0 &= \omega_0^0 B_0 + \omega_0^1 B_1 + \omega_0^2 B_2; \\ B'_1 - B_1 &= \omega_1^0 B_0 + 2 \omega_1^4 B_4; \\ B'_2 - B_2 &= \omega_2^0 B_0 + 2 \omega_2^4 B_4; \\ B'_3 - B_3 &= \frac{1}{2} (\omega_3^0 B_1 + \omega_3^2 B_2) - \omega_3^4 B_4. \end{aligned} \right.$$

Notre loi de connexion sera :

$$\text{IV } 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} dB_0 = \omega_0^0 B_0 + \omega_0^1 B_1 + \omega_0^2 B_2; \\ dB_1 = \omega_1^0 B_0 + 2\omega_1^1 B_1; \\ dB_2 = \omega_2^0 B_0 + 2\omega_2^1 B_1; \\ dB_3 = \frac{1}{2} (\omega_1^0 B_1 + \omega_2^0 B_2) - \omega_0^0 B_1. \end{array} \right.$$

Il va de soi qu'on ne peut pas, en général, intégrer le système IV 2 sans quoi notre connexion serait réduite à être un simple choix de repère mobile tétracyclique sur une sphère proprement dite.

Les équations IV 2 vont nous permettre d'étudier les courbes tracées sur la surface  $\Sigma$  d'un point de vue différent de celui qui domine le chapitre II.

Nous considérerons les courbes de  $\Sigma$  comme courbes d'un espace à connexion conforme à deux dimensions, et nous leur attacherons un repère intrinsèque tétracyclique, et des invariants différentiels nouveaux, qui, bien entendu, dépendront de la surface sur laquelle la courbe est tracée, en même temps que de la courbe elle-même.

### 3. — Les courbes, étudiées au point de vue de la connexion.

Pour étudier les courbes au point de vue de la connexion, il nous faut introduire un repère tétracyclique intrinsèque  $(\bar{B}_0, \bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3)$ , tel que sa variation le long de la courbe soit donnée par des équations de la forme :

$$\text{IV } 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{B}_0}{ds} = \bar{B}_1; \\ \frac{d\bar{B}_1}{ds} = \bar{k} \bar{B}_0 + 2\bar{B}_1; \\ \frac{d\bar{B}_2}{ds} = \bar{B}_0; \\ \frac{d\bar{B}_3}{ds} = \frac{1}{2} (\mp \bar{B}_2 + \bar{k} \bar{B}_1). \end{array} \right.$$

Nous savons d'avance qu'un tel repère existe. Mais le calcul que nous allons faire, en le déterminant complètement, sera une preuve supplémentaire de son existence.

Le repère  $(\bar{B}_0, \bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3)$  se déduira du repère  $(B_0, B_1, B_2, B_3)$  par un système de formules linéaires où entreront : l'angle  $\varphi$  de  $B_1$  avec  $\bar{B}_1$  (qui ne sera autre

que l'angle de la courbe avec la première ligne de courbure), des paramètres  $\zeta, \mu, \nu$ .  
Ces formules seront :

$$IV\ 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{B}_0 = \zeta B_0; \\ \bar{B}_1 = \cos \varphi B_1 + \sin \varphi B_2 + \mu B_0; \\ \bar{B}_2 = -\sin \varphi B_1 + \cos \varphi B_2 + \nu B_0; \\ \bar{B}_3 = \frac{1}{4\zeta} \{ \mu^2 + \nu^2 \} B_0 + \frac{1}{2\zeta} \{ \mu \cos \varphi - \nu \sin \varphi \} B_1 \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2\zeta} \{ \mu \sin \varphi + \nu \cos \varphi \} B_2 + \frac{1}{\zeta} B_3. \end{array} \right.$$

Elles peuvent s'inverser selon :

$$IV\ 5 \quad \left\{ \begin{array}{l} B_0 = \frac{1}{\zeta} \bar{B}_0; \\ B_1 = \frac{1}{\zeta} \{ \nu \sin \varphi - \mu \cos \varphi \} \bar{B}_0 + \cos \varphi \bar{B}_1 - \sin \varphi \bar{B}_2; \\ B_2 = -\frac{1}{\zeta} \{ \mu \sin \varphi + \nu \cos \varphi \} \bar{B}_0 + \sin \varphi \bar{B}_1 + \cos \varphi \bar{B}_2; \\ B_3 = \frac{1}{4\zeta} \{ \mu^2 + \nu^2 \} \bar{B}_0 - \frac{\mu}{2} \bar{B}_1 - \frac{\nu}{2} \bar{B}_2 + \zeta \bar{B}_3. \end{array} \right.$$

Comparons les formules IV 4 différenciées avec les formules IV 5, IV 3 et IV 2 :  
Nous obtenons :

$$\begin{aligned} a) : \quad d\bar{B}_0 &= \zeta dB_0 + d\zeta B_0; \\ &= \zeta (\omega_0^0 B_0 + \omega_0^1 B_1 + \omega_0^2 B_2) + d\zeta B_0; \\ &= (d\zeta + \zeta \omega_0^0 + \omega_0^1 \{ \nu \sin \varphi - \mu \cos \varphi \} - \omega_0^2 \{ \mu \sin \varphi + \nu \cos \varphi \}) \frac{\bar{A}_0}{\zeta}; \\ &\quad + \zeta (\omega_0^1 \cos \varphi + \omega_0^2 \sin \varphi) \bar{A}_1 + \zeta (\omega_0^2 \cos \varphi - \omega_0^1 \sin \varphi) \bar{A}_2. \end{aligned}$$

Nous déduisons de la comparaison de ce qui précède avec :

$$d\bar{B}_0 = ds \bar{B}_1$$

les conséquences suivantes :

$$\frac{d\zeta}{\zeta} + \omega_0^0 = \mu \frac{ds}{\zeta}; \quad \omega_0^1 = \cos \varphi \frac{ds}{\zeta}; \quad \omega_0^2 = \sin \varphi \frac{ds}{\zeta};$$

donc, en gardant à  $\tau$  la signification que cette lettre a au chapitre II :

$$\frac{ds}{d\tau} = \zeta \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\zeta' \tau}{\zeta} + \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi.$$



b) Exprimons  $d\bar{B}_2$  de deux manières différentes et égalons les coefficients de  $\bar{B}_0, \bar{B}_1, \bar{B}_2$  obtenus :

$$\begin{aligned} \mp B_0 ds &= -\sin \varphi (\omega_0^4 B_0 + 2\omega_0^4 B_1) + \cos \varphi (\omega_2^0 B_0 + 2\omega_0^2 B_1) \\ &\quad + \nu (\omega_0^0 B_0 + \omega_0^4 B_1 + \omega_0^2 B_2) - \cos \varphi d\varphi B_1 - \sin \varphi d\varphi B_2 + d\nu B_0; \\ \mp \bar{B}_0 ds &= (-\omega_1^0 \sin \varphi + \omega_2^0 \cos \varphi + \nu \omega_0^0 + d\nu) \frac{\bar{B}_0}{\zeta} + (\nu \omega_2^0 - \cos \varphi d\varphi) \left\{ \frac{1}{\zeta} (\nu \sin \varphi \right. \\ &\quad \left. - \mu \cos \varphi) \bar{B}_0 + \sin \varphi \bar{B}_1 + \cos \varphi \bar{B}_2 \right\} \\ &\quad + (\nu \omega_0^2 - \sin \varphi d\varphi) \left\{ -\frac{1}{\zeta} (\mu \sin \varphi + \nu \cos \varphi) \bar{B}_0 + \sin \varphi \bar{B}_1 + \cos \varphi \bar{B}_2 \right\}. \end{aligned}$$

Nous déduisons de ce qui précède les équations :

$$\nu = \frac{d\varphi}{d\tau}$$

$$\mp \zeta ds = -\omega_1^0 \sin \varphi + \omega_2^0 \cos \varphi + \omega_0^0 \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} d\tau.$$

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \mp \zeta^2 &= \mp \left( \frac{ds}{d\tau} \right)^2 = -\beta_1 \sin^2 \varphi + (\beta_2 - \alpha_1) \sin \varphi \cos \varphi + \alpha_2 \cos^2 \varphi \\ &\quad + (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}. \end{aligned}$$

c) Répétons pour  $d\bar{B}_1$  ce qui a été fait pour  $d\bar{B}_2$  :

$$\begin{aligned} d\bar{B}_1 &= \bar{k} \cdot ds \bar{B}_0 + 2 ds \bar{B}_1 \\ &= \cos \varphi (\omega_1^0 B_0 + 2\omega_0^4 B_1) + \sin \varphi (\omega_2^0 B_0 + 2\omega_0^2 B_1) \\ &\quad + \mu (\omega_0^0 B_0 + \omega_0^4 B_1 + \omega_0^2 B_2) - \sin \varphi d\varphi B_1 + \cos \varphi d\varphi B_2 + d\mu B_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où :} \quad \bar{k} \cdot ds \bar{B}_0 + 2 ds \bar{B}_1 &= (\cos \varphi \omega_0^4 + \sin \varphi \omega_2^0 + \mu \omega_0^0 + d\mu) \frac{\bar{B}_0}{\zeta} \\ &\quad + (\mu \omega_0^4 - \sin \varphi d\varphi) \left\{ \frac{1}{\zeta} (\nu \sin \varphi - \mu \cos \varphi) \bar{B}_0 + \cos \varphi \bar{B}_1 - \sin \varphi \bar{B}_2 \right\} \\ &\quad + (\mu \omega_0^2 + \cos \varphi d\varphi) \left\{ -\frac{1}{\zeta} (\mu \sin \varphi + \nu \cos \varphi) \bar{B}_0 + \sin \varphi \bar{B}_1 + \cos \varphi \bar{B}_2 \right\} \\ &\quad + 2 d\tau \left\{ \frac{1}{4\zeta} (\mu^2 + \nu^2) \bar{B}_0 - \frac{\mu}{2} \bar{B}_1 - \frac{\nu}{2} \bar{B}_2 + \zeta \bar{B}_1 \right\}. \end{aligned}$$

Ce qui précède entraîne la conséquence suivante :

$$\bar{k} ds = \frac{1}{\zeta} (\cos \varphi \omega_1^0 + \sin \varphi \omega_2^0 + \mu \omega_0^0 + d\mu) - \frac{d\tau}{\zeta} (\mu \cos \varphi - \nu \sin \varphi)^2 - \frac{d\tau}{\zeta} (\mu \sin \varphi + \nu \cos \varphi)^2 + \frac{d\tau}{2\zeta} \{ \mu^2 + \nu^2 \}.$$

Par conséquent :

$$\bar{k}\zeta^2 = \alpha_1 \cos^2 \varphi + (\beta_1 + \alpha_2) \sin \varphi \cos \varphi + \beta_2 \sin^2 \varphi + \mu (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) + \frac{d\mu}{d\tau} - \frac{1}{2} \{ \mu^2 + \nu^2 \}.$$

Cette formule, transformée grâce à  $\mu = \frac{\zeta'}{\zeta} + \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi$  et  $\zeta = s'$ , devient :

$$\{s'\}_\tau - \bar{k}(s')^2 = -\alpha_1 \cos^2 \varphi - (\beta_1 + \alpha_2) \sin \varphi \cos \varphi - \beta_2 \sin^2 \varphi - \alpha/1 \cos^2 \varphi - (\alpha/2 + \beta/1) \sin \varphi \cos \varphi - \beta/2 \sin^2 \varphi + (\alpha \sin \varphi - \beta \cos \varphi) \varphi' + \frac{1}{2} (\varphi')^2 - \frac{1}{2} (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)^2.$$

Groupons et numérotons les formules que nous venons d'obtenir :

$$\text{IV 6 : } \zeta = \frac{ds}{d\tau}; \quad \text{IV 7 : } \mu = \frac{\zeta'}{\zeta} + \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi; \quad \text{IV 8 : } \nu = \frac{d\nu}{d\tau};$$

$$\text{IV 9 : } \mp \left( \frac{ds}{d\tau} \right)^2 = -\beta_1 \sin^2 \varphi + (\beta_2 - \alpha_1) \sin \varphi \cos \varphi + \alpha_2 \cos^2 \varphi + (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) \frac{d\varphi}{d\tau};$$

$$\text{IV 10 : } \{s'\}_\tau - \bar{k}(s')^2 = -\alpha_1 \cos^2 \varphi - (\beta_1 + \alpha_2) \sin \varphi \cos \varphi - \beta_2 \sin^2 \varphi - \alpha/1 \cos^2 \varphi - (\alpha/2 + \beta/1) \sin \varphi \cos \varphi - \beta/2 \sin^2 \varphi + (\alpha \sin \varphi - \beta \cos \varphi) \varphi' + \frac{1}{2} (\varphi')^2 - \frac{1}{2} (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)^2.$$

4. — Les formules que nous venons d'obtenir résolvent complètement le problème de l'étude différentielle des courbes tracées sur  $\Sigma$ , cette surface étant considérée comme espace à connexion conforme à deux dimensions. Nous allons comparer les résultats obtenus dans le paragraphe précédent à ceux du chapitre II.

En conservant les notations de ce chapitre, IV 9 s'écrit :

$$\mp s'^2 = K - \sin 2\varphi \cos 2\varphi, \quad \text{ou : } K = \mp s'^2 + \cos 2\varphi \sin 2\varphi.$$

La formule II 20 s'écrit alors :

$$\text{IV 11} \quad \varepsilon_1 \sigma'^2 = H \sin \theta + \cos \theta \{ \varepsilon_2 s'^2 + \cos 2\varphi \sin 2\varphi \}.$$

$\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont égaux à  $\mp 1$ .

Une courbe en un point peut être telle que  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = -1$ ; autrement dit, une courbe « dextrorsum » au sens de l'espace peut être « sinistrorsum<sup>(1)</sup> » au point de vue de la connexion.

Il est facile de vérifier le résultat suivant :

Des deux lignes de courbure d'une surface isothermique passant par un point de cette surface, l'une est « dextrorsum » au sens de la connexion, l'autre est « sinistrorsum » au sens de la connexion.

En effet : pour l'une, on a :  $\varepsilon \left( \frac{ds}{d\tau} \right)^2 = -\beta_1$ , et pour l'autre :  $\varepsilon' \left( \frac{ds}{d\tau} \right)^2 = \alpha_2$ ; comme  $\alpha_2 = \beta_1$ , il s'ensuit que  $\varepsilon\varepsilon' = -1$ . (On remarquera que la valeur de  $\left( \frac{ds}{d\tau} \right)^2$  est la même, pour les deux lignes de courbure considérées, au point considéré.)

Nous pouvons comparer IV 10 et II 25.

Le résultat de cette comparaison est l'équation :

$$\text{IV } 12 \quad \left\{ s'_{\tau} - \bar{k}(s'_{\tau})^2 + \frac{1}{2} \cos^2 2\varphi = \left\{ \sigma'_{\tau} - h(\sigma'_{\tau})^2 \right. \right.$$

5. — Nous pouvons poser, à propos des cercles généralisés de la connexion induite le problème que nous posons au chapitre II relativement aux géodésiques conformes : existe-t-il, passant par un point M de  $\Sigma$  un cercle généralisé et une asymptotique conforme ayant entre eux en M un contact de 3<sup>e</sup> ordre?

Nous sommes ramenés, comme au chapitre II, au problème d'algèbre suivant : éliminer  $\varphi'$  et  $\varphi''$  entre les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} H = 0; \\ H'_{\tau} = 0; \\ K - \sin 2\varphi \cos 2\varphi = 0. \end{array} \right.$$

On procéderait à cette élimination, comme il est indiqué au paragraphe 7 du chapitre II. En posant  $t = \operatorname{tg} \varphi$ , on obtiendrait l'équation :

$$\text{IV } 13 \quad -\beta^2 t^6 + 3\beta/2 t^5 + (2\alpha\beta + 3\beta/1 + 9\beta_1) t^4 + (\beta^2 + 3\beta/2 + 9(\alpha_1 - \beta_2)) t^3 \\ - (3(\alpha/2 - \beta/1) + 9(\alpha_2 - \beta_1)) t^2 - (\alpha^2 + 3\alpha/1 + 9(\beta_2 - \alpha_1)) t - (2\alpha\beta + 3\alpha/2 + 9\alpha_2) t^2 \\ - 3\alpha/1 t^2 + \alpha^2 = 0.$$

La particularité intéressante de IV 13 est qu'à l'inverse de II 8, elle peut se réduire à une identité (quand en M

$$\beta = \alpha = \alpha/1 = \beta/2 = 0, \quad \beta_1 = \alpha_2 \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \beta_2 = -\frac{1}{2}).$$

(<sup>1</sup>) Les mots « dextrorsum » et « sinistrorsum » ont ici un sens qui n'est pas le sens habituel; par exemple, quand  $\varepsilon_2$  est positif, la courbe traverse son cercle osculateur en passant de la région « droite » à la région « gauche » de la sphère (le sens défini sur le cercle osculateur étant « tangent » à celui défini sur la courbe).

Donc, il peut exister : ou un nombre pair inférieur ou égal à 10 de couples cercle généralisé-asymptotique conforme passant par M ayant la propriété indiquée, ou une infinité de tels couples, ce dernier cas n'entraînant pas pour M la nécessité d'être un ombilic.

6. — Remarquons qu'alors qu'il y a identité entre la notion de géodésique d'une surface de l'espace ordinaire et la notion de « droite généralisée » au sens de la connexion euclidienne induite sur cette surface, les géodésiques conformes ne coïncident pas en général avec les « cercles généralisés » de la connexion conforme induite sur la surface. Pour que cette coïncidence se produise, il faut et il suffit que  $\sin 2\varphi \cos 2\varphi = 0$ , c'est-à-dire que le cercle généralisé soit ligne de courbure, ou bien coupe toutes les lignes de courbure sous un angle de 45 degrés.

Relevons également, entre les géométries euclidienne et conforme, les différences suivantes :

a) La déformation isométrique euclidienne conserve la connexion induite, la déformation isométrique conforme ne conserve pas cette connexion.

En effet, les invariants  $\alpha_1$  et  $\beta_1$ , qui entrent dans la définition des formes  $\omega_\alpha^2$  de la connexion induite, sont modifiés dans la déformation isométrique conforme d'une surface isothermique.

b) La déformation isométrique euclidienne conserve les géodésiques.

La déformation isométrique conforme ne conserve ni les géodésiques conformes, ni les cercles généralisés.

En effet, les équations différentielles de ces deux familles de courbes sont :

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} + \alpha_2 \cos^2 \varphi + (\beta_2 - \alpha_1) \sin \varphi \cos \varphi - \beta_1 \sin^2 \varphi + \sin 2\varphi \cos 2\varphi = 0$$

et :

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} + \alpha_2 \cos^2 \varphi + (\beta_2 - \alpha_1) \sin \varphi \cos \varphi - \beta_1 \sin^2 \varphi = 0.$$

Dans ces équations, rien n'est modifié par la déformation conforme, sauf la quantité  $(\beta_2 - \alpha_1)$  : si une ligne  $\Gamma$  satisfait à une de ces équations sur une surface isothermique  $\Sigma$ , la ligne homologue sur une déformée  $\Sigma'$  de  $\Sigma$  ne satisfera plus à l'équation considérée. Il y a, toutefois, exception pour les lignes de courbure qui seraient géodésiques conformes (donc cercles généralisés), qui restent géodésiques conformes dans la déformation (pour ces lignes, la variation de  $\beta_2 - \alpha_1$  n'intervient pas, car  $\beta_2 - \alpha_1$  est multiplié par  $\sin \varphi \cos \varphi$ , qui est alors une quantité égale à 0).

## CHAPITRE V

### Courbes, surfaces, courbes tracées sur une surface en géométrie à connexion conforme à trois dimensions.

1. — Soit  $\mathcal{E}$  un espace à connexion conforme à trois dimensions, dans lequel est tracée une surface  $\Sigma$ . Nous supposons toujours  $\Sigma$  cinq fois différentiable. Nous nous proposons d'attacher à  $\Sigma$  un repère intrinsèque, en chacun de ses points, en suivant la méthode de M. Élie Cartan.

Nous procéderons, au fond, exactement comme au chapitre I<sup>er</sup>.

Au point M de  $\Sigma$  le repère de l'espace à connexion conforme est  $A_\alpha$  ( $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$ ). On prend toujours un repère tel que  $A_0$  est un point analytique représentant M et tel que  $(A_0, A_i) = 0$ ,  $(A_0, A_4) = -\frac{1}{2}$ ,  $(A_1)^2 = 1$ ,  $(A_4)^2 = 0$ ,  $(A_i, A_j) = 0$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Nous attacherons à  $\Sigma$  en M la famille de repères  $(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4)$  se déduisant de  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$  par :

$$\text{V I} \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_0 = \zeta A_0; \\ \bar{A}_1 = \cos \theta A_1 + \sin \theta A_2 + \mu A_0; \\ \bar{A}_2 = -\sin \theta A_1 + \cos \theta A_2 + \nu A_0; \\ \bar{A}_3 = \alpha A_0 + A_3; \\ \bar{A}_4 = \frac{1}{\zeta} (\alpha^2 + \mu^2 + \nu^2) A_0 + \frac{1}{2\zeta} (\mu \cos \theta - \nu \sin \theta) A_1 + \frac{1}{2\zeta} (\mu \sin \theta + \nu \cos \theta) A_2 \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{\alpha}{2\zeta} A_3 + \frac{1}{\zeta} A_4. \end{array} \right.$$

Les équations :

$$\text{V 2} \qquad dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta,$$

$$\text{V 3} \qquad d\bar{A}_\alpha = \bar{\omega}_\alpha^\beta A_\beta.$$

définissent le déplacement infinitésimal des deux repères mobiles.

On exprime toujours les  $\bar{\omega}_\alpha^\beta$  en fonction de  $\omega_\alpha^\beta$ ,  $\zeta$ ,  $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  et des différentielles de ces paramètres.

On fixe d'abord  $\alpha$  comme au chapitre I, paragraphe 2, de façon que la somme des coefficients de  $\bar{\omega}_0^1$  dans  $\bar{\omega}_1^3$  et de  $\bar{\omega}_0^2$  dans  $\bar{\omega}_2^3$  soit nulle. Puis on fixe  $\theta$  pour que le coefficient de  $\bar{\omega}_0^2$  dans  $\bar{\omega}_1^3$  soit opposé à celui de  $\bar{\omega}_0^1$  dans  $\bar{\omega}_2^3$ .

On fixe  $\zeta$  pour que le coefficient de  $\bar{\omega}_0^1$  dans  $\bar{\omega}_1^3$  soit  $+1$ , puis, on fixe  $\lambda$  et  $\mu$  pour que  $\bar{\omega}_1^2$  soit nulle.

Toutes ces opérations sont possibles, car elles se conduisent formellement comme il a été indiqué au chapitre I.

Nous avons donc attaché à  $\Sigma$  un repère intrinsèque, et les formules de son déplacement infinitésimal sont :

$$V\ 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega_0^1 A_1 + \omega_0^2 A_2; \\ dA_1 = \omega_1^0 A_0 + (\omega_1^1 - \bar{a} \omega_0^2) A_3 + 2 \omega_0^1 A_4; \\ dA_2 = \omega_2^0 A_0 - (\omega_0^2 - \bar{a} \omega_0^1) A_3 + 2 \omega_0^2 A_4; \\ dA_3 = \omega_3^0 A_0 - (\omega_0^1 - \bar{a} \omega_0^2) A_1 + (\omega_0^2 - \bar{a} \omega_0^1) A_2; \\ dA_4 = \frac{1}{2} (\omega_1^0 A_1 + \omega_2^0 A_2 + \omega_3^0 A_3) - \omega_0^0 A_4. \end{array} \right.$$

Nous verrons qu'en général  $\bar{a}$  ne s'annule pas.

**2. — Équations de structure :**

Les équations IV 4 définissent la connexion conforme de l'espace dans le voisinage infinitésimal de la surface  $\Sigma$ . Changeons le repère mobile de l'espace  $\mathcal{E}$  de façon que, pour les points de la surface, il coïncide avec le repère intrinsèque de celle-ci.

Nous allons écrire les équations de structure de M. Élie Cartan.

Supposons (cela ne restreint pas la généralité des raisonnements) que l'équation de  $\Sigma$  soit  $z = 0$ . Posons :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad \delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y.$$

Les équations de structure de M. Cartan peuvent s'écrire :

$$V\ 5 \quad (\omega_\alpha^\beta)' = [\omega_\alpha^\lambda \omega_\lambda^\beta] + 2 R_{\alpha\lambda}^\beta [\omega_0^1 \omega_0^2].$$

La notation  $(\omega_\alpha^\beta)'$  signifie :

$$d\omega_\alpha^\beta(\delta) - \delta\omega_\alpha^\beta(d).$$

Quant à la signification du crochet de multiplication extérieure, elle est donnée par :

$$[\omega_\alpha^\lambda \omega_\lambda^\beta] = \omega_\alpha^\lambda(d) \omega_\lambda^\beta(\delta) - \omega_\alpha^\lambda(\delta) \omega_\lambda^\beta(d).$$

Pour des renseignements détaillés sur les règles du calcul différentiel extérieur, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages classiques qui développent cette question (I a; I b).

Les quantités  $R_{\alpha ij}^{\beta}$  constituent une partie des composantes  $R_{\alpha ij}^{\beta}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) du tenseur de courbure et de torsion de l'espace à connexion conforme.

Posons, comme au chapitre I :

$$\begin{aligned}\omega_0^0 &= \alpha \omega_0^1 + \beta \omega_0^2, & \omega_3^0 &= m \omega_0^1 + n \omega_0^2, \\ \omega_1^0 &= \alpha_1 \omega_0^1 + \beta_1 \omega_0^2, & \omega_2^0 &= \alpha_2 \omega_0^1 + \beta_2 \omega_0^2.\end{aligned}$$

Et portons ces valeurs dans V 5.

Nous obtenons :

$$(\omega_0^1)' = [\omega_0^0 \omega_0^1] + 2 R_{0 12}^1 [\omega_0^1 \omega_0^2].$$

Ce qui donne :

$$\text{V 6} \quad (\omega_0^1)' = (-\beta + 2 R_{0 12}^1) [\omega_0^1 \omega_0^2]$$

De même :

$$\text{V 7} \quad (\omega_0^2)' = (\alpha + 2 R_{0 12}^2) [\omega_0^1 \omega_0^2]$$

et :

$$0 = (\omega_1^2)' = [\omega_1^0 \omega_0^2] + [\omega_0^1 \omega_0^2] + 2 R_{1 12}^2 [\omega_0^1 \omega_0^2] + [\omega_0^1 - \bar{a} \omega_0^2 \omega_0^2 - \bar{a} \omega_0^1],$$

d'où :

$$\text{V 8} \quad \alpha_1 + \beta_2 + 1 - \bar{a}^2 + 2 R_{1 12}^2 = 0,$$

on a :

$$(\omega_1^3)' = (\omega_0^1)' - \bar{a} (\omega_0^2)' - [d\bar{a} \omega_0^2] = [\omega_0^1 \omega_0^3] + 2 R_{1 12}^3 [\omega_0^1 \omega_0^2].$$

Si

$$d\bar{a} = \bar{a}/1 \omega_0^1 + \bar{a}/2 \omega_0^2,$$

il vient :

$$\text{V 9} \quad n + \beta - \bar{a}\alpha - 2 R_{0 12}^1 - 2 \bar{a} R_{0 12}^2 + \bar{a}/1 + 2 R_{1 12}^3 = 0.$$

De même, l'équation en  $(\omega_2^3)'$  donnerait :

$$\text{V 10} \quad m - \alpha - \bar{a}\beta + 2 \bar{a} R_{0 12}^1 - 2 R_{0 12}^2 - \bar{a}/2 - 2 R_{2 12}^3 = 0.$$

Si

$$\begin{cases} d\alpha = \alpha/1 \omega_0^1 + \alpha/2 \omega_0^2, \\ d\beta = \beta/1 \omega_0^1 + \beta/2 \omega_0^2, \end{cases}$$

$$(\omega_0^0)' = [\omega_0^1 \omega_0^0] + [\omega_0^2 \omega_0^0] + 2 R_{0 12}^0 [\omega_0^1 \omega_0^2]$$

donne :

$$\text{V 11} \quad -\alpha/2 + \beta/1 + 2\alpha R_{0 12}^1 + 2\beta R_{0 12}^2 = (\beta_1 - \alpha_2 + 2 R_{0 12}^0);$$

on a :

$$(\omega_3^0)' = [\omega_3^0 \omega_0^0] + [\omega_3^1 \omega_1^0] + [\omega_3^2 \omega_2^0] + 2R_{3,12}^0 [\omega_0^1 \omega_0^2];$$

d'où

$$V 12 \quad (\omega_3^0)' - [\omega_3^0 \omega_0^0] = [-(\beta_1 + \alpha_2) - \bar{a}(\beta_2 + \alpha_1) + 2R_{3,12}^0] [\omega_0^1 \omega_0^2].$$

On a également :

$$(\omega_0^3)' = 0 = [\omega_0^1 \omega_1^3] + [\omega_0^2 \omega_2^3] + 2R_{0,12}^3 [\omega_0^1 \omega_0^2].$$

On en déduit que :

$$V 13 \quad \bar{a} = R_{0,12}^3.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} (\omega_1^0)' &= [\omega_1^0 \omega_0^0] + [\omega_1^3 \omega_3^0] + 2R_{1,12}^0 [\omega_0^1 \omega_0^2]. \\ \left\{ \begin{array}{l} dx_1 = \alpha_{1,1} \omega_0^1 + \alpha_{1,2} \omega_0^2, \\ d\beta_1 = \beta_{1,1} \omega_0^1 + \beta_{1,2} \omega_0^2; \end{array} \right. \end{aligned}$$

on déduit :

$$\begin{aligned} V 14 \quad -\alpha_{1,2} + \beta_{1,1} + \alpha_1(-\beta + 2R_{0,12}^1) + \beta_1(\alpha + 2R_{0,12}^2) \\ = (\alpha_1\beta - \beta_1\alpha) + \bar{a}m + n + 2R_{1,12}^0. \end{aligned}$$

$$\text{Et :} \quad (\omega_2^0)' = [\omega_2^0 \omega_0^0] + [\omega_2^3 \omega_3^0] + 2R_{2,12}^0 [\omega_0^1 \omega_0^2].$$

Ce qui conduit, après avoir posé :

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_2 = \alpha_{2,1} \omega_0^1 + \alpha_{2,2} \omega_0^2; \\ d\beta_2 = \beta_{2,1} \omega_0^1 + \beta_{2,2} \omega_0^2; \end{array} \right.$$

à l'équation :

$$\begin{aligned} V 15 \quad -\alpha_{2,2} + \beta_{2,1} + \alpha_2(-\beta + 2R_{0,12}^2) + \beta_2(\alpha + 2R_{0,12}^1) \\ = \alpha_2\beta - \beta_2\alpha + \bar{a}n + m + 2R_{2,12}^0. \end{aligned}$$

Quand l'espace est *normal*<sup>(\*)</sup>, les relations numérotées de V 6 à V 15 s'écrivent :

$$V 16 \quad \left\{ \begin{array}{ll} (\omega_0^1)' = -\beta [\omega_0^1 \omega_0^2], & \beta_{1,1} - \alpha_{1,2} = \beta_1 - \alpha_2 + 2R_{0,12}^0; \\ (\omega_0^2)' = \alpha [\omega_0^1 \omega_0^2], & \beta_{1,1} + \alpha_{1,2} + 4\alpha\beta = \beta_1 + \alpha_2 + 2R_{0,12}^0; \\ \alpha_1 + \beta_2 + 1 = 0, & \bar{a} = 0; \\ n = -\beta, & \beta_{1,1} - \alpha_{1,2} = 2(\alpha_1\beta - \beta_1\alpha) + n + 2R_{1,12}^0; \\ m = \alpha, & \beta_{2,1} - \alpha_{2,2} = 2(\alpha_2\beta - \beta_2\alpha) + m + 2R_{2,12}^0. \end{array} \right.$$

(\*) Dans le cas tridimensionnel, cela veut dire que seules les composantes  $R_{1ij}^0, R_{2ij}^0, R_{3ij}^0$ , sont non nulles.



En se bornant au cas où  $\mathcal{E}$  est normal, on obtient, pour la courbure de  $\Sigma$  considérée comme espace à connexion conforme à deux dimensions, le tenseur  $\bar{R}_{\alpha,12}^{\beta}$  dont les composants sont immédiatement donnés par les équations de structure précédemment écrites :

$$V_{17} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{R}_{0,12}^0 = 0, & {}_2\bar{R}_{1,12}^0 = {}_2R_{1,12}^0 - \beta; \\ \bar{R}_{1,12}^2 = \frac{1}{2}, & {}_2\bar{R}_{2,12}^0 = {}_2R_{2,12}^0 + \alpha. \end{array} \right.$$

En particulier, si  $\mathcal{E}$  est l'espace conforme, on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{R}_{0,12}^0 = 0, & \bar{R}_{1,12}^0 = -\frac{\xi}{2}. \\ \bar{R}_{1,12}^2 = \frac{1}{2}, & \bar{R}_{2,12}^0 = \frac{\alpha}{2}. \end{array} \right.$$

**3. — Lignes de courbure :** On sait que l'on peut prendre pour définition d'une ligne de courbure d'une surface de l'espace conforme ordinaire la propriété suivante : en chaque point d'une telle ligne, il existe une certaine sphère, tangente à la surface, dont le cercle caractéristique se réduise à un point (le point considéré).

Nous étendrons cette définition au cas de l'espace à connexion conforme. La sphère considérée sera une sphère  $S = A_3 + \alpha A_0$ .

Nous aurons :

$$dS = A_3 + dx A_0 + x dA_0 = (\omega_3^0 + dx + x\omega_0^0) A_0 + (x\omega_0^2 - (\bar{a}\omega_0^1 - \omega_0^2)) A_2 + (x\omega_0^1 - (\omega_0^1 - \bar{a}\omega_0^2)) A_4.$$

Le cercle caractéristique est défini par les sphères  $S$  et  $dS$ . Pour que ce cercle se réduise à un point, il faut et il suffit que les sphères  $S$  et  $dS$  se coupent selon un angle nul (soient tangentes).

Pour cela, on écrit :

$$(dS, A_3)^2 = \mp (S)^2 (dS)^2;$$

Or  $(dS, A_3) = 0$ ,  $(S)^2 = 1$ ; il faut donc que  $(dS)^2 = 0$ .

Ce qui implique que :

$$V_{18} \quad \left\{ \begin{array}{l} x\omega_0^2 - \bar{a}\omega_0^1 + \omega_0^2 = 0, \\ x\omega_0^1 - \omega_0^1 + \bar{a}\omega_0^2 = 0; \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} (x+1)\omega_0^2 - \bar{a}\omega_0^1 = 0; \\ \bar{a}\omega_0^2 + (x-1)\omega_0^1 = 0. \end{array} \right.$$

Donc :

$$x^2 - 1 + \bar{a}^2 = 0, \quad \text{ou} \quad V_{19} \quad x^2 = 1 - \bar{a}^2.$$

Si  $|\bar{a}| < 1$ , le choix d'un  $\alpha$  est possible de deux manières, ce qui définit, en un point de la surface, deux directions. Les lignes constamment tangentes à ces directions sont les lignes de courbure de  $\Sigma$ . On voit que, par un point, il peut passer deux lignes de courbure tangentes ou non entre elles, ou bien aucune ligne de courbure. On peut même imaginer une surface ayant uniquement des lignes de courbure doubles (si  $|\bar{a}| = 1$  partout).

Nous avons vu que  $\bar{a} = R_{0,1}^3$ .  $\bar{a}$  dépend des propriétés de l'espace au point que l'on considère, mais aussi du repère choisi en ce point, qui dépend lui-même de  $\Sigma$ . Soit un point P : il peut exister deux surfaces passant par P, tangentes entre elles en ce point, l'une telle que par P passent deux lignes de courbure, et l'autre telle que par P il ne passe pas de ligne de courbure.

Calculons les angles  $\varphi$  attachés aux lignes de courbure passant par P (angles  $\varphi$  faits par ces courbes avec la direction  $\omega_0^2 = 0$ ).

Nous avons :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^1} = \frac{\bar{a}}{1 + \alpha}.$$

D'où :

$$\alpha = \frac{\bar{a}}{\operatorname{tg} \varphi} - 1, \quad 1 - \alpha^2 = \left( \frac{\bar{a}}{\operatorname{tg} \varphi} - 1 \right)^2 + 1 = \bar{a}^2;$$

ou :

$$\bar{a} \left[ 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \right] = \frac{2}{\operatorname{tg} \varphi}; \quad \bar{a} = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \sin 2\varphi.$$

L'angle que font entre elles les lignes de courbure passant par un point n'est  $\frac{\pi}{2}$  que si  $\bar{a} = 0$  (cet angle est  $\frac{\pi}{2} - \arcsin \bar{a}$ ).

Nous voyons que l'angle des lignes de courbure d'une surface  $\Sigma$  en un point est lié à la torsion de l'espace (et au repère intrinsèque de  $\Sigma$ ).

#### 4. — Courbes tracées sur les surfaces en géométrie à connexion conforme.

La définition du repère intrinsèque attaché à une courbe  $\Gamma$ , dans l'espace à connexion conforme, ne présente aucune espèce de difficulté, puisque les propriétés d'une telle courbe sont définies par l'intermédiaire de son développement sur l'espace conforme tangent. Les formules  $d\bar{A}_\alpha = p_\alpha^3 \bar{A}_3$  définissant le déplacement infinitésimal de ce repère sont toujours de la forme I 8.

Rappelons, pour mémoire, le système II 1 permettant de passer du repère de la

surface  $\Sigma$  au repère de la courbe  $\Gamma$  tracée sur  $\Sigma$ , et le système II 3 exprimant la forme particulière du tableau des  $p_a^b$  :

$$\text{II 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_0 = \zeta A_0; \\ \bar{A}_1 = \cos \varphi A_1 + \sin \varphi A_2 + \lambda A_0; \\ \bar{A}_2 = -\cos \theta (\sin \varphi A_1 - \cos \varphi A_2) - \sin \theta A_3 + \mu A_0; \\ \bar{A}_3 = -\sin \theta (\sin \varphi A_1 - \cos \varphi A_2) + \cos \theta A_3 + \nu A_0; \\ \text{coefficient de } A_0 \text{ dans l'expression de } \bar{A}_1 : \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{4\zeta}. \end{array} \right.$$

$$\text{II 3} \quad \begin{array}{l} p_1^2 = 0; p_1^3 = 0; p_3^0 = 0; p_2^0 = \mp p_0^1; p_0^0 = 0; p_0^1 = d\tau; p_2^3 = -h d\tau; \\ p_1^0 = k d\tau. \end{array}$$

Nous allons procéder comme au chapitre III : nous exprimerons successivement les conditions II 3, en tenant compte de II 1, du système déduit de II 1 en différenciant membre à membre ses équations, et de IV 4. La présence du terme de torsion :  $\bar{a}$  dans les équations IV 4 modifiera évidemment nos résultats.

$$a) \quad \left[ \begin{array}{l} p_2^1 = 0. \\ p_1^3 = 0. \end{array} \right. \quad \text{Cette double condition s'exprime exactement comme au paragraphe 2 du chapitre II. Elle conduit à :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{II 4} \quad \mu = -\sin \theta \cos 2\varphi + \cos \theta \frac{d\varphi}{d\tau}, \\ \text{II 5} \quad \nu = +\cos \theta \cos 2\varphi + \sin \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \end{array} \right.$$

(en posant, comme d'habitude :  $\omega_0^1 = d\tau \cos \varphi$ ;  $\omega_0^2 = d\tau \sin \varphi$ ).

$$b) \quad \underline{p_3^0 = 0.} \quad \text{Cette condition entraîne, comme au chapitre II :}$$

$$\text{II 6} \quad d\nu + \nu \omega_0^0 + \cos \theta \omega_3^0 + \sin \theta (\cos \varphi \omega_2^0 - \sin \varphi \omega_1^0) = -\mu p_2^3.$$

II 6 transformée donne une équation qui correspond à II 8 :

$$\begin{aligned} \text{V 20} \quad & \sin \theta \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} - 2 \cos \theta \sin 2\varphi \frac{d\varphi}{d\tau} + \left( \sin \theta \frac{d\varphi}{d\tau} + \cos \theta \cos 2\varphi \right) (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) \\ & + \cos \theta (m \cos \varphi + n \sin \varphi) - \sin \theta \left\{ -\alpha_2 \cos^2 \varphi + (\alpha_1 - \beta_2) \sin \varphi \cos \varphi + \beta_1 \sin^2 \varphi \right\} \\ & = - \left\{ \frac{p_2^3}{d\tau} + \frac{d\theta}{d\tau} \right\} \left( \cos \theta \frac{d\varphi}{d\tau} - \sin \theta \cos 2\varphi \right); \end{aligned}$$

c)  $\underline{p_2^0 = \mp p_0^1}$ . On obtient l'équation suivante, réplique de II 11.

$$\begin{aligned} \text{V 21} \quad \cos \theta \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + 2 \sin \theta \sin 2 \varphi \frac{d\varphi}{d\tau} + \left( \sin \theta \cos 2 \varphi + \cos \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \right) (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) \\ - \sin \theta (m \cos \varphi + n \sin \varphi) - \cos \theta (-\alpha_2 \cos^2 \varphi + (\alpha_1 - \beta_2) \sin \varphi \cos \varphi + \beta_1 \sin^2 \varphi) \\ = \left( \frac{p_2^3}{d\tau} + \frac{d\theta}{d\tau} \right) \left( \sin \theta \frac{d\varphi}{d\tau} + \cos \theta \cos \varphi \right) \mp \zeta \frac{p_0^1}{d\tau}. \end{aligned}$$

d)  $\underline{p_0^0 = 0}$ . Cette condition entraîne toujours :

$$\text{II 12} \quad d\zeta + \zeta \omega^0 = p_0^1 \lambda,$$

qui jointe à  $\zeta = \sigma'$  donne :

$$\text{II 14} \quad \lambda = \frac{\sigma''}{\sigma'} + \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi.$$

Le calcul de  $p_2^3$  effectué de deux manières va faire apparaître la différence essentielle entre le cas de l'espace à connexion conforme doué de torsion et celui de l'espace conforme.

En effet, on a :

$$\frac{p_2^3}{d\tau} = -h \frac{d\sigma}{d\tau}.$$

D'autre part :

$$p_2^3 = (\bar{\Lambda}_3 \cdot d\bar{\Lambda}_2).$$

Calculons les coefficients des termes en  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$  de  $d\bar{\Lambda}_2$  :

terme en  $\Lambda_1$   $d(-\cos \theta \sin \varphi) + \mu \omega_0^4 + \sin \theta (\omega_0^1 - \bar{a} \omega_0^2)$ ;

terme en  $\Lambda_2$   $d(\cos \theta \cos \varphi) + \mu \omega_0^2 - \sin \theta (\omega_0^2 - \bar{a} \omega_0^1)$ ;

terme en  $\Lambda_3$   $d(-\sin \theta) - \cos \theta \sin \varphi (\omega_0^4 - \bar{a} \omega_0^3) - \cos \theta \cos \varphi (\omega_0^2 - \bar{a} \omega_0^1)$ ,

terme en  $\Lambda_4$  : 0.

On obtient :

$$\begin{aligned} (\bar{\Lambda}_3 \cdot d\bar{\Lambda}_2) = & -\sin \theta \sin \varphi [d(-\cos \theta \sin \varphi) + \mu \omega_0^4 + \sin \theta (\omega_0^1 - \bar{a} \omega_0^2)] \\ & + \sin \theta \cos \varphi [d(\cos \theta \cos \varphi) + \mu \omega_0^2 - \sin \theta (\omega_0^2 - \bar{a} \omega_0^1)] \\ & + \cos \theta [d(-\sin \theta) - \cos \theta \sin \varphi (\omega_0^4 - \bar{a} \omega_0^3) - \cos \theta \cos \varphi (\omega_0^2 - \bar{a} \omega_0^1)]. \end{aligned}$$

En transformant cette expression, on obtient finalement :

$$(\bar{\Lambda}_3 d\bar{\Lambda}_2) = -d\theta - (\sin 2 \varphi - a) d\tau,$$

formule qui conduit aux deux équations :

$$V_{22} \quad \frac{p_2^3}{d\tau} + \frac{d\theta}{d\tau} = \bar{a} - \sin 2\varphi.$$

$$V_{23} \quad h \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{d\theta}{d\tau} + (\sin 2\varphi - \bar{a}).$$

En vertu de V 22, V 20 et V 21 peuvent s'écrire :

$$V_{24} \quad \sin \theta \left\{ \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} + \alpha_2 \cos^2 \varphi + (\beta_2 - \alpha_1) \sin \varphi \cos \varphi \right. \\ \left. - \beta_1 \sin^2 \varphi + \cos 2\varphi (\sin 2\varphi - \bar{a}) \right\} - \cos \theta \left\{ (3 \sin 2\varphi - \bar{a}) \frac{d\varphi}{d\tau} - [\cos 2\varphi (\alpha \cos \varphi \right. \\ \left. + \beta \sin \varphi) + m \cos \varphi + n \sin \varphi] \right\} = 0.$$

$$V_{25} \quad \cos \theta \left\{ \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} + \alpha_2 \cos^2 \varphi + (\beta_2 - \alpha_1) \sin \varphi \cos \varphi \right. \\ \left. - \beta_1 \sin^2 \varphi + \cos 2\varphi (\sin 2\varphi - \bar{a}) \right\} + \sin \theta \left\{ (3 \sin 2\varphi - \bar{a}) \frac{d\varphi}{d\tau} - [\cos 2\varphi (\alpha \cos \varphi \right. \\ \left. + \beta \sin \varphi) + m \cos \varphi + n \sin \varphi] \right\} = \pm \sigma_1^2.$$

Les quantités H et K du chapitre II deviennent :

$$V_{26} \quad \left\{ \begin{array}{l} H = + (3 \sin 2\varphi - \bar{a}) \frac{d\varphi}{d\tau} - [\cos 2\varphi (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) + m \cos \varphi + n \sin \varphi]; \\ K = \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} + \alpha_2 \cos^2 \varphi + (\beta_2 - \alpha_1) \sin \varphi \cos \varphi \\ \quad - \beta_1 \sin^2 \varphi + \cos 2\varphi (\sin 2\varphi - \bar{a}). \end{array} \right.$$

Rien n'est changé en ce qui concerne la courbure conforme. Celle-ci est toujours donnée par la formule II 25 :

$$II_{25} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 - k(\sigma_2^2) = (\alpha \sin \varphi - \beta \cos \varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} - \alpha/1 \cos^2 \varphi - (\alpha/2 + \beta/1) \sin \varphi \cos \varphi \\ - \beta/2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)^2 - [\alpha_2 \cos^2 \varphi + (\alpha_2 + \beta_1) \sin \varphi \cos \varphi + \beta/2 \cos^2 \varphi] \\ \quad + \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \cos^2 2\varphi. \end{array} \right.$$

*Connexion induite* : L'étude des courbes de  $\Sigma$  au point de vue de la connexion induite sur  $\Sigma$  conduirait exactement aux formules du chapitre IV.

*Tirons quelques conclusions géométriques de la formule V 23.*

Pour toutes les lignes tangentes en un point aux lignes de courbure de  $\Sigma$  (au sens du paragraphe 3 du présent chapitre) la torsion est donnée par :

$$h = \frac{\theta' \tau}{A}, \quad A \text{ étant une fonction de } \theta.$$

Nous avons bien une formule analogue dans le cas de l'espace conforme, ce qui est une justification supplémentaire de notre extension de la notion de lignes de courbure.

Remarquons en outre que c'est la torsion de l'espace qui intervient (par sa composante  $R_{0,11}^3$ ) dans la formule donnant la *torsion* conforme d'une courbe de  $\Sigma$  en un point.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- I. E. CARTAN. a) *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* (Paris, 1928).  
b) *Leçons sur les invariants intégraux* (Paris, Hermann, 1922).  
c) *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés* (Paris, Hermann, 1935).  
d) *Les espaces à connexion conforme* (Annales Soc. Pol. Math.; 1923).
- II. P. C. DELENS. a) *Méthodes et problèmes des géométries différentielles euclidienne et conforme* (Paris, Gauthier-Villars, 1927).
- III. CALAPSO. a) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. 22, 1906, p. 197.
- IV. DEMOULIN. a) *Proceedings of the International Mathematical Congress. Toronto, 1924*, t. 1, p. 795.
- V. G. THOMSEN. a) *Grundlagen der konformen Flächentheorie* (Thèse, Hambourg, 1923).
- VI. A. TRESSE. a) *Sur les invariants différentiels d'une surface par rapport aux transformations conformes de l'espace* (C. R., 1892).  
b) *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations* (Acta Mathematica, t. 18, 1892).
- VII. VESSIOT. a) *Contribution à la géométrie conforme; cercles et surfaces cercleées* (Journal de Math. pures et appliquées, 9<sup>e</sup> série, 2-1923).  
b) *Définition du pentasphère attaché à certaines familles de cercles* (Journal de Liouville, 1923, p. 122).  
c) *Contribution à la géométrie conforme: enveloppes de sphères et courbes gauches* (Journal de l'École Polytechnique, 1925, vol. 25, 2<sup>e</sup> série).  
d) *Note aux C. R. de l'Académie des Sciences*, 22 mars 1926, t. 182, p. 762.  
e) *Contribution à la géométrie conforme, théorie des surfaces* (Bulletin de la Société mathématique de France, 1926, t. LIV).  
f) *Suite du mémoire précédent* (Bulletin de la Société mathématique de France, 1927, t. LV).
- VIII. DARBOUX. a) *Principes de géométrie analytique* (Paris, 1917).  
b) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1880, p. 131.
- IX. R. POTIER. *Sur certaines propriétés de la déformation conforme des surfaces isothermiques* (C. R. de l'Académie des Sciences, séance du 12 juin 1939).
- X. H. ADAD. Thèse (Paris, 1935).
-

## TABLE DU PRÉSENT MÉMOIRE

	Pages.
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE PREMIER.	
<b>Les repères intrinsèques en géométrie conforme.</b>	
1. Propriétés différentielles des courbes en géométrie conforme.....	4
2. Etude différentielle des surfaces.....	10
CHAPITRE II	
<b>Propriétés différentielles des courbes tracées sur une surface.</b>	
1. ....	17
2. ....	20
3. ....	23
4. Élément linéaire conforme.....	24
5. Asymptotiques et géodésiques conformes.....	27
6. Torsion et courbure conformes des courbes tracées sur une surface.....	28
7. Sur certaines directions remarquables d'une surface en un point.....	30
CHAPITRE III	
<b>Quelques théorèmes sur la déformation isométrique conforme des surfaces.</b>	
1. Relations entre les invariants d'une surface et ceux de ses lignes de courbure....	34
2. Cas d'exception.....	36
3. Les surfaces isothermiques.....	36
4. Les lignes de courbure des surfaces isothermiques et la déformation isométrique conforme.....	38
5. ....	39
6. ....	41
7. ....	43
CHAPITRE IV	
<b>La connexion induite.</b>	
1. La notion de connexion conforme.....	44
2. Connexion induite sur une surface.....	45
3. Les courbes, étudiées au point de vue de la connexion.....	46
4. ....	49
5. ....	50
CHAPITRE V	
<b>Courbes, surfaces en géométrie à connexion conforme à trois dimensions.</b>	
1. ....	52
2. Equations de structure.....	53
3. Lignes de courbure.....	56
4. Courbes tracées sur les surfaces en géométrie à connexion conforme.....	57
BIBLIOGRAPHIE.....	62