Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Laurent Schwartz

Approximation d'une fonction quelconque par des sommes d'exponentielles imaginaires

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 6 (1942), p. 111-176

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1942_4_6__111_0>

APPROXIMATION D'UNE FONCTION QUELCONQUE

PAR DES SOMMES D'EXPONENTIELLES IMAGINAIRES

Par M. Laurent SCHWARTZ.

INTRODUCTION

Ce Mémoire était initialement le troisième chapitre d'un ouvrage plus étendu, constituant une étude des sommes d'exponentielles; les deux premiers chapitres, portant sur les sommes d'exponentielles réelles, ont constitué ma thèse[1], le troisième paraît ici comme mémoire autonome; mais sa complète compréhension exige une lecture des deux premiers chapitres, et je renvoie constamment à ma thèse, notamment dans les démonstrations les plus importantes.

Après des préliminaires rappelant les notions indispensables d'analyse fonctionnelle (et qui ne sont eux-mêmes qu'un résumé des préliminaires de ma thèse) le § 1 étudie les fonctions entières de type exponentiel; cette étude n'est pas faite pour elle-même, mais dans un but utilitaire, elle n'est destinée qu'à créer des instruments pour la suite; la plupart des résultats de ce paragraphe sont classiques.

Le § 2 entre dans le vif du sujet. $\Lambda = \{\lambda_\nu\}_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}$ sera un système dénombrable de nombres réels de signe quelconque, rangés par ordre de grandeurs croissantes ($\lambda_\nu > 0$ pour $\nu > 0$, $\lambda_\nu < 0$ pour $\nu < 0$, éventuellement $\lambda_0 = 0$). Nous étudierons l'approximation des fonctions continues $F(Y)$ sur un intervalle fini $(-A, +A)$ par des « polynômes trigonométriques » de la forme $P(Y) = \sum_{|\nu| \leqslant n} a_\nu e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}$. Pour certains systèmes Λ, l'approximation à moins d'ε est possible pour toute fonction continue $F(Y)$, quel que soit $\varepsilon > 0$; pour d'autres systèmes on ne peut approcher que certaines classes de fonctions continues. Pour parler en langage fonctionnel, certains systèmes de fonctions $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$ sont totaux[2] dans $C(-A, +A)$[2], d'autres ne le sont pas; le même problème se pose naturellement dans $L^p(-A, +A)$[2], p réel fini $\geqslant 1$. La séparation de ces deux sortes de systèmes est très complexe; il suffit pour s'en apercevoir de remarquer que si Λ est défini par $\lambda_\nu = \nu/2A$, le

1. Schwartz [1].
2. Voir les définitions aux préliminaires.

système $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ est total dans tout $L^p(-A, +A)$, p fini $\geqslant 1$, mais cesse de l'être quand on lui retire un quelconque de ses éléments, tandis qu'il est non total dans $C(-A, +A)$ puisqu'il ne permet que l'approximation des fonctions continues périodiques $\big(F(A) = F(-A)\big)$ mais devient total par adjonction d'une fonction quelconque $e^{-2i\pi\lambda Y}$. Le § 2 contient différents critères de totalité et non totalité, dont les uns sont connus, les autres nouveaux; il donne aussi des propriétés générales de ces systèmes, notamment une étude complète du *défaut* d'un système non total et de l'*excès* d'un système total.

Les § 3 et 4 sont relatifs aux *systèmes libres*[1] $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$, *caractérisés par un défaut* $\geqslant 0$. Si le défaut est > 0, le système est non total; si le défaut est nul, le système est à la fois libre et total, c'est une base. Dans un cas comme dans l'autre, *une fonction* $F(Y) \in L^p(-A, +A)$ $\big($ou de $C(-A, +A)\big)$, *limite de polynômes trigonométriques formés avec les* $e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}$ *du système étudié, admet un « développement non harmonique de Fourier » formel*

$$F(Y) \sim \underset{\nu}{S}\, c_\nu e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}$$

qui la caractérise; chaque coefficient c_ν *est une forme linéaire continue de* F. *Nous nous sommes proposés une étude aussi générale que possible de la convergence de ce développement.*

Dans le cas du développement de Fourier ordinaire (système Λ défini par $\lambda_\nu = \nu/2A$) on démontre que si $F(Y) \in L^2(-A, +A)$, la série $\Sigma\, |c_\nu|^2$ converge, et que le développement en série est convergent dans L^2 vers F; plus généralement si $F(Y) \in L^p(-A, +A)$, $1 < p < +\infty$, le développement en série est convergent dans L^p vers F. Ces propriétés ne semblent pas pouvoir s'étendre au cas général. Mais il existe également, pour la série de Fourier ordinaire, un mode de convergence intéressant, la convergence exponentielle d'Abel : si

$$F(Y) \sim \underset{\nu}{S}\, c_\nu e^{-\frac{i\pi\nu}{A}Y} \in L^p(-A, +A) \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty\text{[2]}$$

la série $\underset{\nu}{\Sigma}\, c_\nu e^{-\frac{i\pi\nu}{A}Y} e^{-\frac{\pi|\nu|}{A}X}$ est convergente pour $X > 0$, quel que soit Y; sa somme $F(Y; X)$ est une fonction harmonique dans le demi-plan $X > 0$; pour X fixe, $F(Y; X) \in L^p(-A, +A)$ et lorsque X tend vers 0, $F(Y; X)$ converge vers $F(Y)$ dans $L^p(-A, +A)$ (pour p fini), dans $C(-A+\delta, A-\delta)$, $\delta > 0$ quelconque (pour $p = \infty$). Nous avons généralisé la convergence exponentielle d'Abel de la façon suivante :

---

1. Voir les définitions aux préliminaires.
2. Conformément aux notations qui seront toujours utilisées dans le texte, nous considérerons pour $p = \infty$ l'espace $C(-A, +A)$ et non $L^\infty(-A, +A)$.

Si $F(Y) \sim \mathrm{S}\, c_\nu e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \in L^p(-A, +A)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *la série* $\Sigma\, c_\nu e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} e^{-2\pi|\lambda_\nu| X}$ *est convergente pour* $X > 0$, *quel que soit* Y, *du moins une fois opérés certains groupements de termes convenables, dépendant uniquement du système* Λ; *sa somme* $F(Y; X)$ *est harmonique dans le demi-plan* $X > 0$; *pour* X *fixe*, $F(Y; X) \in L^p(-A, +A)$ *et lorsque* X *tend vers* 0, $F(Y; X)$ *converge vers* $F(Y)$ *dans* $L^p(-A + \delta, A - \delta)$, *quel que soit* $\delta > 0$. *En particulier si* $F(Y) \in C(-A, +A)$, *la fonction* $F(Y; X)$, *harmonique pour* $X > 0$, *est continue sur le segment vertical* $X = 0$, $|Y| < A$, *sur lequel elle est égale à* $F(Y)$.

Naturellement pour une fonction donnée $F(Y)$, la fonction $F(Y; X)$ dépend du système Λ; mais son comportement au voisinage de $X = 0$ pour $|Y| < A$, en est indépendant, à une fonction près qui reste analytique.

Les applications de cette étude à la théorie des séries de Dirichlet lacunaires, sont bien plus vastes que celles du chapitre I de ma thèse. Elles sont développées au § 5. Elles ne permettent pas d'obtenir le théorème classique de M. Polya sur la distribution des directions de croissance maxima des fonctions entières, ni celui de M. Vl. Bernstein sur la distribution des points singuliers d'une série de Dirichlet sur sa droite d'holomorphie, sous la forme exacte indiquée par ces auteurs; mais elles donnent des propositions voisines et d'une bien plus grande généralité. Dans le but d'obtenir exactement les théorèmes de MM. Polya et Vl. Bernstein, nous avons étudié au § 6 des sommes d'exponentielles $e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$, non plus sur un segment imaginaire $X = 0$, $|Y| \leqslant A$, mais sur un ensemble compact convexe quelconque du plan complexe; on peut ainsi édifier une théorie générale, qui semble contenir comme cas particuliers la plupart des théorèmes énoncés jusqu'ici sur des questions de ce genre. Nous sommes passés très rapidement sur les démonstrations du § 5, parce qu'elles sont très simples; d'autre part le § 6 est plus une esquisse qu'une théorie complète. Ainsi les applications à la théorie des fonctions analytiques ne sont pas données, dans ce mémoire, avec tous les détails que l'on pourrait souhaiter; c'est le souci d'abréger qui nous a conduit à tout énoncer sous une forme aussi concise que possible. Mais nous avons terminé le mémoire par une note (§ 7) donnant un point de vue historique sur les applications à la théorie des fonctions analytiques, et permettant de mesurer la portée des théorèmes énoncés aux § 13 et 14 de ma thèse et aux § 5 et 6 de ce mémoire.

Comme je l'ai déjà fait dans l'introduction de ma thèse, et pour les mêmes raisons, je m'excuse à l'avance des lacunes ou des erreurs bibliographiques, conséquences d'une documentation rendue difficile par les circonstances.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à M. Buhl, qui s'est occupé de l'insertion de mon Mémoire dans les présentes Annales.

PRÉLIMINAIRES

Dans un espace vectoriel topologique $\mathcal{E}$, un système de vecteurs $\{\vec{e_\nu}\}$ est dit *total* s'il engendre un espace vectoriel dense dans $\mathcal{E}$; il est dit *libre* si aucun des vecteurs n'est adhérent au sous-espace vectoriel engendré par les autres; un système à la fois libre et total est une *base*. Si $\{e_\nu\}$ est un système libre, tout vecteur $\vec{x}$ adhérent au sous-espace vectoriel qu'il engendre admet un développement formel bien déterminé $\vec{x} \sim \mathrm{S}\, x_\nu \vec{e_\nu}$; chaque composante x_ν est une forme linéaire continue de $\vec{x}$.

Si $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel normé, les formes linéaires continues sur $\mathcal{E}$ constituent un espace vectoriel normé $\mathcal{E}'$, appelé *dual* de $\mathcal{E}$.

(a, b) étant un intervalle, fini ou infini de la droite réelle, on appelle $\mathrm{L}^p(a, b)$, p réel $\geqslant 1$, l'espace vectoriel des fonctions $f(x)$ de puissance p-ième sommable sur (a, b), par rapport à la mesure de Lebesgue (2 fonctions sont considérées comme identiques si elles sont presque partout égales); cet espace est en outre normé par

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Le dual de $\mathrm{L}^p(a, b)$ est isomorphe à $\mathrm{L}^{p'}(a, b)$, $p' = p/(p-1)$ ou $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, sauf toutefois pour $p = \infty$.

On appelle $\mathrm{C}(a, b)$ l'espace vectoriel des fonctions $f(x)$ continues sur l'intervalle compact $[a, b]$, avec la norme $||f||_{\mathrm{C}} = \underset{a \leqslant x \leqslant b}{\mathrm{Max}} |f(x)|$.

On appelle $\mathrm{V}[a, b]$ l'espace vectoriel des distributions bornées de masses sur $[a, b]$; chaque distribution est définie par une fonction $\Phi(x)$ à variation bornée sur $[a, b]$ et l'espace est normé par $||\Phi||_{\mathrm{V}} = \int_a^b |d\Phi(x)|$.

Le dual de $\mathrm{C}(a, b)$ est isomorphe à $\mathrm{V}[a, b]$.

Si $f(x) \in \mathrm{L}^1(-\infty, +\infty)$, on peut définir sa *transformée de Fourier* par l'intégrale

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xy} f(x)\, dx.$$

L'égalité de Parseval

$$||g(y)||_{L^2(-\infty,+\infty)} = ||f(x)||_{L^2(-\infty,+\infty)}$$

montre que la transformation de Fourier est une transformation linéaire continue de $L^2(-\infty, +\infty)$ dans lui-même; c'est même un isomorphisme de cet espace sur lui-même et l'on a la formule de réciprocité

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+2i\pi xy} g(y)\, dy.$$

Si $f(x) \in L^p(-\infty, +\infty)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, on peut encore définir, de la même manière, une transformée de Fourier, et l'inégalité de Parseval-Riesz

$$||g(y)||_{L^{p'}(-\infty,+\infty)} \leqslant ||f(x)||_{L^p(-\infty,+\infty)}, \quad p' = p/(p-1)$$

montre que la transformation de Fourier est une transformation linéaire continue de L^p dans $L^{p'}$.

Si $\Phi(x) \in V]-\infty, +\infty[$, on peut définir sa transformée de Fourier-Stieltjes

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xy}\, d\Phi(x).$$

§ 1. — Fonctions entières de type exponentiel.

Tandis que ma thèse avait trait à l'étude de fonctions $e^{-2\pi\lambda X}$ sur la demi-droite $(0, +\infty)$, ce Mémoire a trait à l'étude de fonctions $e^{-2i\pi\lambda Y}$ sur un intervalle fini (A, B); on peut toujours par un changement de variables, se ramener à un segment $(-A, +A)$ symétrique par rapport à o.

Il s'agit en somme des mêmes fonctions complexes $e^{-2\pi\lambda Z}$, étudiées, dans ma thèse, lorsque Z parcourt le demi-axe réel $\geqslant 0$, ici lorsque Z parcourt le segment purement imaginaire $(-Ai, +Ai)$.

Les fonctions auxiliaires utilisées dans ma thèse étaient des transformées de Laplace, pour p fini :

$$(1.a) \qquad J(\lambda) = \int_0^\infty e^{-2\pi\lambda X}\varphi(X)dX, \quad \varphi(X) \in L^{p'}(0, +\infty), \quad p' = p/(p-1)$$

et de Laplace-Stieltjes pour $p = \infty$

$$(1.b) \qquad J(\lambda) = \int_0^\infty e^{-2\pi\lambda X}\, d\Phi(X), \quad \Phi(X) \in V[0, +\infty[.$$

Dans ce Mémoire, les fonctions auxiliaires seront des transformées de Fourier de fonctions définies sur l'intervalle borné $(-A, +A)$; pour p fini

$$(1.c) \qquad J(\lambda) = \int_{-A}^{+A} e^{-2i\pi\lambda Y}\varphi(Y)dY, \quad \varphi(Y) \in L^{p'}(-A, +A)$$

et pour $p = \infty$, des transformées de Fourier-Stieltjes

$$(1.d) \qquad J(\lambda) = \int_{-A}^{+A} e^{-2i\pi\lambda Y}\, d\Phi(Y), \quad \Phi(Y) \in V[-A, +A].$$

Dans ce paragraphe nous donnerons les principales propriétés de ces fonctions $J(\lambda)$, qui font partie de la catégorie des *fonctions entières de type exponentiel.*

Théorème I.

On a $J(\lambda) \in L^q(-\infty, +\infty)$ *et il existe une constante* $K(A)$ *dépendant exclusivement de* A, *et telle que*

$$(1.e) \qquad \|J(\lambda)\|_{L^q(-\infty,+\infty)} \leqslant K(A)\|\varphi(Y)\|_{L^{p'}(-A,+A)}\ [1]$$

---

1. Pour p fini seulement; pour $p = \infty$, on doit remplacer $\|\varphi(Y)\|_{L^{p'}}$ par $\|\Phi(Y)\|_V$. Une fois pour toutes nous cesserons de faire la distinction entre p fini et p infini; il

pourvu que q *vérifie*

$$\begin{cases} q \geqslant p & si \quad p \geqslant 2, \\ q \geqslant 2 & si \quad p \leqslant 2. \end{cases}$$

Ce théorème est une conséquence immédiate de l'inégalité de Parseval-Riesz.

Pour $p \geqslant 2$, quel que soit $q' \leqslant p' \leqslant 2$, on a $\varphi(Y) \in L^{q'}(-A, +A)$ et d'après Hölder

$$(1.f) \qquad \| \varphi(Y) \|_{L^{q'}(-A,+A)} \leqslant K(A) \| \varphi(Y) \|_{L^{p'}(-A,+A)};$$

l'inégalité de Parseval-Riesz s'écrit

$$\| J(\lambda) \|_{L^{q}(-\infty,+\infty)} \leqslant \| \varphi(Y) \|_{L^{q'}(-A,+A)},$$

ce qui donne bien l'inégalité (1.e).

Pour $p \leqslant 2$, l'inégalité de Hölder reste valable; mais celle de Parseval-Riesz ne l'est que pour $q' \leqslant 2$, soit $q \geqslant 2$.

Mais $J(\lambda)$ possède bien d'autres propriétés. Avant tout elle peut se définir pour λ complexe, $\lambda = \sigma + i\tau$, par la formule :

$$(1.g) \qquad J(\sigma + i\tau) = \int_{-A}^{+A} e^{-2i\pi\sigma Y} \left[e^{2\pi\tau Y} \varphi(Y) \right] dY$$

qui montre que $J(\lambda)$ est une fonction analytique entière.

Pour τ fixe, $J(\sigma + i\tau)$ apparaît comme la transformée de Fourier de

$$e^{2\pi\tau Y} \varphi(Y) \in L^{p'}(-A, +A).$$

Compte tenu de l'inégalité

$$(1.h) \qquad \| e^{2\pi\tau Y} \varphi(Y) \|_{L^{p'}(-A,+A)} \leqslant e^{2\pi A|\tau|} \| \varphi(Y) \|_{L^{p'}(-A,+A)}$$

on peut étendre le théorème I comme suit :

Théorème II.

Pour τ *fixe,* $J(\sigma + i\tau) \in L^q(-\infty, +\infty)$ [1] *et il existe une constante* $K(A)$ *dépendant exclusivement de* A *telle que*

$$(1.i) \qquad \| J(\sigma + i\tau) \|_{L^q(-\infty,+\infty)} \leqslant K(A) e^{2\pi A|\tau|} \| \varphi(Y) \|_{L^{p'}(-A,+A)}$$

---

est entendu que pour $p = \infty$, on doit remplacer $L^p(-A, +A)$ par $C(-A, +A)$; $\varphi(Y)\,dY$, $\varphi(Y) \in L^{p'}(-A, +A)$ par $d\Phi(Y)$, $\Phi(Y) \in V[-A, +A]$; et $\|\varphi(Y)\|_{L^{p'}}$ par $\|\Phi(Y)\|_V$.

Il n'y a qu'une différence d'écritures, rien à part cela n'est changé aux résultats ni aux démonstrations.

1. Puisque nous spécifions que τ est fixe, nous considérons $J(\sigma + i\tau)$ comme fonction de σ, variant de $-\infty, +\infty$; on pourrait remplacer

$$\| J(\sigma + i\tau) \|_{L^q(-\infty,+\infty)} \quad \text{par} \quad \| J(\lambda) \|_{L^q(i\tau-\infty,\, i\tau+\infty)}.$$

pourvu que q *vérifie*

$$\begin{cases} q \geqslant p & si \quad p \geqslant 2, \\ q \geqslant 2 & si \quad p \leqslant 2. \end{cases}$$

En particulier si l'on fait $q = \infty$ on trouve

$$|J(\sigma + i\tau)| \leqslant K(A)\, e^{2\pi A|\tau|}\, ||\varphi(Y)||_{L^{p'}(-A,+A)},$$

ou

$$(1.j) \qquad |J(\sigma + i\tau)| \leqslant K\, e^{2\pi A|\tau|}$$

K dépendant de la fonction $J(\lambda)$.

Cette inégalité entraîne

$$(1.j') \qquad |J(\sigma + i\tau)| \leqslant K\, e^{2\pi A|\sigma + i\tau|}$$

ce que l'on exprime en disant que $J(\lambda)$ est au plus du type exponentiel *moyen* $2\pi A$, tandis qu'on dit d'une fonction entière quelconque $G(\lambda)$ qu'elle est au plus du type exponentiel $2\pi A$ si elle vérifie l'inégalité moins restrictive

$$(1.k) \qquad \lim. \sup_{|\sigma+i\tau| \to \infty} \frac{\log |J(\sigma + i\tau)|}{|\sigma + i\tau|} \leqslant 2\pi A.$$

Nous appellerons E_A^p *le sous-espace vectoriel de* $L^p(-\infty, +\infty)$ *formé des fonctions analytiques entières de cet espace, qui sont au plus du type exponentiel* $2\pi A$. Les propriétés de cet espace vectoriel E_A^p ont été étudiées par divers auteurs; nous allons en énoncer les principales, sans démonstration [1].

Théorème III.

Si $G(\lambda) \in E_A^p$, *alors pour toute valeur de* τ, $G(\sigma + i\tau) \in L^p(-\infty, +\infty)$ [2] *et l'on a les inégalités*

$$(1.l) \quad e^{-2\pi A|\tau|}\, ||G(\sigma)||_{L^p(-\infty,+\infty)} \leqslant ||G(\sigma + i\tau)||_{L^p(-\infty,+\infty)} \leqslant e^{2\pi A|\tau|}\, ||G(\sigma)||_{L^p(-\infty,+\infty)}.$$

---

1. Je n'ai pas pu trouver d'étude complète de ces espaces, à laquelle je puisse renvoyer pour les démonstrations des propositions ici énoncées. On trouvera des études partielles dans : Titchmarsh [1], ch. v; Zygmund [1], p. 160-162; S. Bernstein [1], p. 97-108; Paley-Wiener [1], ch. v; N. Levinson [1], ch. iii et v; Hardy [1].

2. Voir note (¹) de la page 8; on pourrait remplacer

$$||G(\sigma + i\tau)||_{L^p(-\infty,+\infty)} \quad \text{par} \quad ||G(\lambda)||_{L^p(i\tau-\infty,\, i\tau+\infty)}.$$

THÉORÈME IV.

Si $q \geqslant p$, toute fonction $G(\lambda)$ *appartenant à* E_A^p *appartient aussi à* E_A^q, *et il existe une constante* $K(A)$ *dépendant exclusivement de* A, *telle que*

$$(\text{1.m}) \qquad \|G(\sigma)\|_{L^q(-\infty,+\infty)} \leqslant K(A)\,\|G(\sigma)\|_{L^p(-\infty,+\infty)}$$

et par suite, pour toute valeur de τ :

$$(\text{1.n}) \qquad \|G(\sigma+i\tau)\|_{L^q(-\infty,+\infty)} \leqslant K(A)\,e^{2\pi A|\tau|}\,\|G(\sigma)\|_{L^p(-\infty,+\infty)}.$$

L'inégalité (1.n) pour $q=\infty$ montre que toute fonction $G(\lambda) \in E_A^p$ est bornée dans toute bande horizontale, et qu'elle au plus du type exponentiel *moyen* $2\pi A$.

D'autre part si des fonctions $G_j(L)$ appartenant à E_A^p convergent vers une fonction limite $G(\lambda)$ dans $L^p(-\infty,+\infty)$, elles convergent uniformément dans toute bande horizontale, et $G(\lambda)$ est aussi une fonction entière de type exponentiel $\leqslant 2\pi A$; cela prouve que E_A^p *est un sous-espace vectoriel fermé, donc complet de* $L^p(-\infty,+\infty)$.

La formule (1.c) définit, compte tenu de l'inégalité (1.e), une transformation linéaire continue de $L^{p'}(-A,+A)$ dans E_A^q, $q \geqslant p$ si $p \geqslant 2$, $q \geqslant 2$ si $p \leqslant 2$. En particulier pour $p \geqslant 2$, elle définit une transformation linéaire continue de $L^{p'}(-A,+A)$ dans E_A^p. Pour $p=2$, on démontre que cette transformation est un isomorphisme[1]; autrement dit si $G(\lambda) \in E_A^2$, sa transformée de Fourier

$$(\text{1.o}) \qquad \varphi(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\lambda Y}\,G(\lambda)\,d\lambda$$

est nulle en dehors de l'intervalle $(-A,+A)$.

Au contraire pour $p > 2$, la transformation n'est pas un isomorphisme, puisqu'une fonction quelconque $G(\lambda) \in E_A^p$ n'a pas de transformée de Fourier

Pour $p \leqslant 2$, la formule (1.o) définit une transformation linéaire continue[1] de E_A^p dans $L^{p'}(-A,+A)$; mais sauf pour $p=2$, ce n'est pas un isomorphisme, car une fonction quelconque $\varphi(Y) \in L^{p'}(-A,+A)$ a bien une transformée de Fourier $G(\lambda)$, mais on sait seulement que $G(\lambda) \in E_A^q$, $q \geqslant 2$.

---

1. PALEY-WIENER [1], p. 12.

Pour toute fonction entière $F(\lambda)$ de type exponentiel[1], on définit une fonction $h(\varphi)$ par

$$h(\varphi) = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log |F(re^{i\varphi})|}{r}. \tag{1.p}$$

La courbe d'équation polaire $r = h(\varphi)$ est appelée indicatrice de $F(\lambda)$.

Soit $(\mathcal{K})$ l'ensemble des points (x, y) du plan qui vérifient $x\cos\varphi + y\sin\varphi - h(\varphi) \leqslant 0$ pour tout φ; on démontre que $(\mathcal{K})$ est un compact convexe, appelé diagramme indicateur de $F(\lambda)$.

$h(\varphi)$ peut s'obtenir à partir de ~~cet ensemble~~ ensemble $(\mathcal{K})$ comme suit : pour tout φ,

$$h(\varphi) = \underset{(x,y)\in\mathcal{K}}{\mathrm{Max}} (x\cos\varphi + y\sin\varphi); \tag{1.q}$$

la courbe indicatrice est la podaire de la courbe fermée qui limite le diagramme indicateur. On démontre que $(\mathcal{K})$ est le compact convexe le plus général; autrement dit la podaire de la courbe fermée limitant un compact convexe quelconque, est l'indicatrice d'une fonction entière de type exponentiel.

De ces propriétés on déduit d'une part la continuité de $h(\varphi)$, d'autre part l'inégalité

$$h(\varphi) + h(\varphi + \pi) \geqslant 0. \tag{1.r}$$

Enfin on démontre que

$$\underset{\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2}{\mathrm{Max}}\ h(\varphi) = \limsup_{\substack{r \to \infty \\ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2}} \frac{\log |F(re^{i\varphi})|}{r}. \tag{1.s}$$

En particulier, le maximum de $h(\varphi)$, toujours $\geqslant 0$, définit exactement le type exponentiel de $F(\lambda)$, $\limsup_{\substack{r \to \infty \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi}} \frac{\log |F(re^{i\varphi})|}{r}$.

Appliquons ces résultats à une fonction $G(\lambda) \in E^p_A$. Comme $G(\lambda)$ est bornée sur l'axe réel, $h(0) \leqslant 0$, $h(\pi) \leqslant 0$, ce qui, d'après (1.r) entraîne $h(0) = h(\pi) = 0$. Le diagramme indicateur est un segment vertical $(-2i\pi B, +2i\pi C)$, B et C étant compris entre $-A$ et $+A$, $B + C \geqslant 0$. Faisons une hypothèse supplémentaire $G(\lambda)$ est symétrique par rapport à l'axe réel (autrement dit, pour λ réel, $G(\lambda)$ est réel; pour deux valeurs imaginaires conjuguées de λ, $G(\lambda)$ prend deux valeurs imaginaires conjuguées, $G(\lambda) = \overline{G}(\bar{\lambda})$). Le diagramme indicateur est alors un

1. PHRAGMEN LINDELOF [1]; POLYA [1], ch. III; DŒTSCH [1], p. 73-87.

segment symétrique $(-2i\pi B, +2i\pi B)$, $0 \leqslant B \leqslant A$ (1), et l'indicatrice a pour équation polaire

(1.t) $$r = 2\pi B \mid \sin \varphi \mid .$$

La fonction est alors du type exponentiel moyen $2\pi B$, et l'inégalité

(1.u) $$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log \mid G(re^{i\varphi}) \mid}{r} = 2\pi B \mid \sin \varphi \mid$$

peut être précisée, grâce à (1.n) ($q = \infty$) par

(1.u') $$\mid G(re^{i\varphi}) \mid \leqslant K\, e^{2\pi B \mid \sin \varphi \mid r}$$

K dépendant exclusivement de G.

Une fonction $F(\lambda)$ entière, de type exponentiel, à zéros réels et paire, de la forme

(1.v) $$F(\lambda) = \prod_{\nu} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha_\nu^2}\right), \qquad \alpha_\nu \text{ réels } > 0,$$

possède des propriétés classiques que nous nous contenterons d'énumérer (2) :

a) $\limsup_{\nu \to \infty} \nu/\alpha_\nu$ est fini;

b) les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(1.w) $$\begin{cases} (1) & \lim\limits_{\nu \to \infty} \nu/\alpha_\nu = D \text{ fini}; \\ (2) & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \log \mid F(x) \mid x^{-2}\, dx = -\pi^2 D; \\ (3) & \lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{\log \mid F(re^{i\varphi}) \mid}{r} = \pi D \mid \sin \varphi \mid . \end{cases}$$

Dans la dernière égalité, φ est supposé fixe, non multiple entier de π. Si l'égalité a lieu pour une seule valeur de φ, elle a lieu pour toutes les valeurs de φ non multiples entiers de π, et uniformément dans tout angle $\varepsilon \leqslant \mid \varphi \mid \leqslant \pi - \varepsilon$.

Chacune de ces trois propriétés entraîne la suivante : $F(\lambda)$ est du type exponentiel πD.

c) Il suffit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \overset{+}{\log} \mid F(x) \mid x^{-2}\, dx$ ait un sens pour que l'inté-

1. On montre aisément que $B > 0$ sauf si $G(\lambda)$ est constante; car si la fonction est du type exponentiel nul, d'après (1.n) elle est bornée dans tout le plan, donc constante.

2. Paley-Wiener [1], ch. v; Vl. Bernstein [1], p. 267-293; N. Levinson [1], ch. iii.

grale (1.w; 2) ait un sens aussi[1]. C'est en particulier ce qui se produit toujours si $F(\lambda) \in E_A^p$ puisque $|F(x)|$ est alors bornée.

Autrement dit, toute fonction $F(\lambda)$, de la forme (1.v) et appartenant à E_A^p, vérifie, si elle est de type exponentiel $2\pi B$, $0 < B \leqslant A$:

$$(1.w')\qquad \begin{cases} (1) & \lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{\nu}{\alpha_\nu} = 2B, \\ (2) & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \log|F(x)|\, x^{-2}\, dx = -2\pi^2 B, \\ (3) & \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\log|F(re^{i\varphi})|}{r} = 2\pi B\,|\sin\varphi|; \end{cases}$$

la dernière égalité ayant lieu dans les mêmes conditions que (1.w; 3); remarquons qu'elle constitue une amélioration considérable de (1.u).

Toujours pour ces mêmes fonctions $F(\lambda)$, de la forme (1.v), il existe un théorème du minimum de Hadamard[2] :

On peut trouver une suite de rayons $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ tendant vers $+\infty$, chacune des couronnes $r_n \leqslant r \leqslant r_{n+1}$ contenant au moins un zéro de $F(\lambda)$, et un nombre fixe q, tels que, dans la suite des couronnes d'épaisseur $2q$

$$r_n - q \leqslant r \leqslant r_n + q,$$

on ait, quel que soit $\varepsilon > 0$, pour r assez grand

$$(1.x)\qquad |F(re^{i\varphi})| \geqslant e^{-\varepsilon r}\ [3].$$

Si de plus (1.w; 3) est réalisée, on en déduit par combinaison, que l'on a, quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, et pour r assez grand, dans les couronnes indiquées

$$(1.x')\qquad |F(re^{i\varphi})| \geqslant e^{(\pi D|\sin\varphi|-\varepsilon)r}.$$

Nous allons montrer que certaines de ces propriétés des fonctions entières $F(\lambda)$ de la forme (1.v), s'étendent aux fonctions $G(\lambda) \in E_A^p$.

---

1. Paley-Wiener [1], p. 69-70.

2. Vl. Bernstein [1], p. 280, ne démontre le théorème que si $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{\nu}{\alpha_\nu}$ existe. Dans le cas général, on pose $z^2 = Z$, et on est ramené à une propriété des fonctions entières d'ordre 1/2; le théorème de Hadamard a été alors précisé par M. Valiron [1]. Dans le cas où $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{\nu}{\alpha_\nu}$ existe, l'existence de l'intégrale (1.w; 2) montre que l'inégalité (1.x) est vérifiée sauf sur un ensemble de valeurs de r de largeur logarithmique finie.

3. Voir note 30 de ma thèse.

THÉORÈME V.

Si $G(\lambda) \in E^p_A$ *est de type exponentiel* $2\pi B$, $0 < B \leqslant A$ *et vérifie* $G(\lambda) = \overline{G}(\bar{\lambda})$; *si* α'_ν *sont les zéros de* $G(\lambda)$ *situés dans le demi-plan* $\sigma > 0$, *rangés par ordre de modules croissants, et* α''_ν *les zéros de* $G(\lambda)$ *situés dans le demi-plan* $\sigma \leqslant 0$, *rangés par ordre de modules croissants,*

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\nu}{|\alpha'_\nu|} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\nu}{|\alpha''_\nu|} = 2B.$$

L'existence et l'égalité des deux limites est une conséquence immédiate du théorème XVII de N. Levinson [1].

Le fait que la valeur commune soit égale à $2B$, résulte de ce qui sera démontré dans le théorème suivant : si les α_ν sont les zéros de $G(\lambda)$ rangés par ordre de modules croissants, $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{\nu}{|\alpha_\nu|} = 4B$.

THÉORÈME VI (1).

Si $G(\lambda) \in E^p_A$ *est de type exponentiel* $2\pi B$ *et vérifie* $G(\lambda) = \overline{G}(\bar{\lambda})$, *on a, pour presque toutes les valeurs de* φ :

$$(1.y) \qquad \lim_{r \to \infty} \frac{\log |G(re^{i\varphi})|}{r} = 2\pi B\, |\sin \varphi|$$

amélioration considérable de (1.u).

Nous poserons, pour démontrer ce théorème, $H(\lambda) = G(\lambda)\, G(-\lambda)$. $H(\lambda)$ est une fonction entière paire du type exponentiel, donc de la forme $H(\lambda) = C\lambda^{\alpha}\Pi\left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha_\nu^2}\right)$, les α_ν sont des nombres complexes que nous supposerons rangés par ordre de modules croissants.

Comme $G(\lambda)$ et $G(-\lambda)$ sont bornées sur l'axe réel, $H(\lambda)$ l'est aussi, et par suite aussi $K(\lambda) = \Pi\left(1 - \frac{\lambda^2}{|\alpha_\nu^2|}\right)$. Mais cette dernière fonction étant à zéros réels et paire, on a d'après (1.w'; 1), $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{\nu}{|\alpha_\nu|} = D$. $K(\lambda)$ est alors du type exponentiel πD; mais comme $|H(\lambda)| \leqslant |C|\, |\lambda|^{\alpha}\, \Pi\left(1 + \left|\frac{\lambda}{\alpha_\nu}\right|^2\right)$ $H(\lambda)$ est au plus du type exponentiel πD.

1. Nous croyons ce théorème nouveau; c'est pourquoi nous avons cru nécessaire de le démontrer, alors qu'il n'est ici qu'un moyen pour démontrer le théorème fondamental du § 3.

Montrons que si $G(\lambda)$ est du type exponentiel $2\pi B$, $H(\lambda)$ est du type exponentiel $4\pi B$. Tout d'abord de (1.u) on déduit immédiatement

$$\text{(1.z)} \qquad \limsup_{r \to \infty} \frac{\log |H(re^{i\varphi})|}{r} \leqslant 4\pi B |\sin \varphi|$$

ce qui prouve que $H(\lambda)$ est au plus du type exponentiel $4\pi B$. Mais il existe une infinité de valeurs réelles y, tendant vers $+\infty$, pour lesquelles $\dfrac{\log |G(iy)|}{y}$ tend vers $2\pi B$; d'après la symétrie de $G(\lambda)$ par rapport à l'axe réel, pour ces mêmes valeurs de y, $\dfrac{\log |G(-iy)|}{y}$ tend vers $2\pi B$, de sorte que l'on a

$$\limsup_{y \to \infty} \frac{\log |H(iy)|}{|y|} = 4\pi B,$$

ce qui démontre bien notre affirmation.

On en déduit $D \geqslant 4B$ et l'inégalité (1.z) peut être remplacée par une égalité.

Nous séparerons les zéros α_ν de $H(\lambda)$ en deux catégories : ceux β_ν qui vérifient

$$|\operatorname{Arg} \beta_\nu| \leqslant \psi \qquad \text{ou} \qquad |\pi - \operatorname{Arg} \beta_\nu| \leqslant \psi$$

et ceux γ_ν qui ne vérifient aucune de ces inégalités; et nous poserons

$$H(\lambda) = B(\lambda)\,\Gamma(\lambda)$$

avec

$$B(\lambda) = \Pi\left(1 - \frac{\lambda^2}{\beta_\nu^2}\right);$$

$$\Gamma(\lambda) = C\lambda^2\,\Pi\left(1 - \frac{\lambda^2}{\gamma_\nu^2}\right).$$

Étudions d'abord la fonction entière $\Gamma(\lambda)$.

La fonction $e^{+4i\pi B\lambda}H(\lambda)$ est bornée, à cause de (1.u'), dans le demi-plan $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$; donc ceux des zéros de $H(\lambda)$ qui sont dans ce demi-plan satisfont à la condition de Blaschke[1]; celle-ci, restreinte aux zéros γ_ν, s'écrit $\sum \dfrac{1}{|\gamma_\nu|} < +\infty$. Alors $\lim\limits_{\nu \to \infty} \dfrac{\nu}{|\alpha_\nu|} = D$ entraîne $\lim\limits_{\nu \to \infty} \dfrac{\nu}{|\beta_\nu|} = D$. Presque tous les zéros α_ν sont donc répartis au voisinage angulaire immédiat de l'axe réel.

---

1. Voir note 27 de ma thèse. La condition de Blaschke s'écrit ici $\sum \dfrac{\sin \varphi_\nu}{|\alpha_\nu|} < +\infty$, où les φ_ν sont les arguments des α_ν.

La fonction $\Gamma(\lambda)$ est donc de genre o. Elle vérifie pour r assez grand, $|\Gamma(re^{i\varphi})| \leqslant e^{\varepsilon r}$, quel que petit que soit $\varepsilon > 0$. Elle vérifie aussi pour r assez grand, $|\Gamma(re^{i\varphi})| \geqslant e^{-\varepsilon r}$, sauf dans une suite de disques entourant ses zéros γ_ν, et vus de l'origine sous des angles dont la somme est finie[1]; seules parmi les demi-droites issues de l'origine, peuvent rencontrer une infinité de ces disques, les demi-droites d'un ensemble exceptionnel de mesure angulaire nulle.

On a donc, pour presque toutes les valeurs de φ :

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log|\Gamma(re^{i\varphi})|}{r} = 0. \tag{1.A}$$

Étudions maintenant la fonction entière $B(\lambda)$.

Nous l'étudierons pour un argument φ que nous supposerons compris entre ψ et $\frac{\pi}{2} - \psi$.

On ne peut qu'augmenter $|B(\lambda)|$ en modifiant les arguments des β_ν, de façon à les rejeter tous sur la demi-droite d'argument $-\psi$.

On peut alors évaluer $\log|B(re^{i\varphi})|$ par la formule (1.w; 3), puisque nous avons affaire à une fonction dont les zéros sont disposés, symétriquement par rapport à o, sur une droite issue de l'origine : on a ainsi

$$\lim.\sup_{r\to\infty} \frac{\log|B(re^{i\varphi})|}{r} \leqslant \pi D\,|\sin(\varphi+\psi)|.$$

De même on ne peut que diminuer $|B(\lambda)|$ en modifiant les arguments des β_ν de façon à les rejeter tous sur la demi-droite d'argument $+\psi$. On a ainsi

$$\lim.\inf_{r\to\infty} \frac{\log|B(re^{i\varphi})|}{r} \geqslant \pi D\,|\sin(\varphi-\psi)|.$$

On en déduit, pour presque toutes les valeurs de φ de l'angle $\psi \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} - \psi$

$$\left\{\begin{aligned} &\lim.\sup_{r\to\infty} \frac{\log|H(re^{i\varphi})|}{r} \leqslant \pi D\,|\sin(\varphi+\psi)|,\\ &\lim.\inf_{r\to\infty} \frac{\log|H(re^{i\varphi})|}{r} \geqslant \pi D\,|\sin(\varphi-\psi)|.\end{aligned}\right.$$

Mais comme ψ peut être pris aussi faible qu'on le désire, et que le quadrant

1. C'est une forme du théorème du minimum de Hadamard, pour le genre o.

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ne joue aucun rôle particulier, on a finalement, pour presque toutes les valeurs de φ :

$$\text{(1.B)} \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{\log|H(re^{i\varphi})|}{r} = \pi D\,|\sin\varphi|.$$

Mais d'après ce que nous avons vu, l'inégalité (1.z) est une égalité, de sorte que nécessairement $D = 4B$, et on a pour presque toutes les valeurs de φ :

$$\text{(1.C)} \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{\log|H(re^{i\varphi})|}{r} = 4\pi B\,|\sin\varphi|.$$

Revenons enfin à la définition de $H(\lambda)$: $H(re^{i\varphi}) = G(re^{i\varphi}) \,.\, G(re^{i(\varphi+\pi)})$. Donc, pour presque tous les φ

$$\lim_{r\to\infty}\text{. inf}\frac{\log|G(re^{i\varphi})|}{r} = \lim_{r\to\infty}\frac{\log|H(re^{i\varphi})|}{r} - \lim_{r\to\infty}\text{. sup}\frac{\log|G(re^{i(\varphi+\pi)})|}{r} = 2\pi B\,|\sin\varphi|,$$

ce qui démontre le théorème.

Théorème VII [1].

Si $G(\lambda) \in E^p_A$, *est du type exponentiel* $2\pi B$ *et vérifie* $G(\lambda) = \overline{G}(\overline{\lambda})$; *on peut trouver une suite de rayons* $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, *tendant vers* $+\infty$, *chaque couronne* $r_n \leqslant r \leqslant r_{n+1}$ *contenant au moins un zéro de* $G(\lambda)$, *et un nombre* q *assez faible, pour que dans la suite de couronnes d'épaisseur fixe* $2q$: $r_n - q \leqslant r \leqslant r_n + q$, *on ait, quel que soit* $\varepsilon > 0$, *pour* r *assez grand :*

$$|G(re^{i\varphi})| \geqslant e^{-\varepsilon r},$$

$$\text{(1.D)} \qquad \textit{et même} \quad |G(re^{i\varphi})| \geqslant e^{(2\pi B|\sin\varphi|-\varepsilon)r}.$$

La démonstration de ce théorème est simple, si l'on utilise les notations du précédent théorème.

La fonction $\Gamma(\lambda)$ est de genre 0; donc sauf sur une infinité d'intervalles en r, dont chacun contient au moins le module d'un λ_ν, et dont la largeur logarithmique totale est finie, on a : $|\Gamma(re^{i\varphi})| \geqslant e^{-\eta r}$.

Quant à la fonction $B(\lambda)$, elle vérifie, sauf sur une infinité d'intervalles en r dont chacun contient au moins le module d'un β_ν, et dont la largeur logarithmique totale est finie : $|B(re^{i\varphi})| \geqslant e^{[4\pi B|\sin(\varphi-\psi)|-\eta]r}$ dans l'angle $\psi \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, en vertu de (1.x'); et dans l'angle $0 \leqslant \varphi \leqslant \psi$: $|B(re^{i\varphi})| \geqslant e^{-\eta r}$.

---

1. Voir note 1, p. 123.

Mais ψ est aussi faible qu'on le désire. On a donc, pour $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, et sauf pour les valeurs de r exceptionnelles d'un ensemble de largeur logarithmique finie :

$$|H(re^{i\varphi})| \geqslant e^{(4\pi B|\sin\varphi| - \varepsilon)r}.$$

Compte tenu de

$$|G(re^{i\varphi})| = |H(re^{i\varphi})| \,/\, |G(re^{i(\varphi+\pi)})|$$

et de (1.u′) on a bien

$$|G(re^{i\varphi})| \geqslant e^{(2\pi B|\sin\varphi| - \varepsilon)r}$$

dans les conditions indiquées; et quel que soit φ, car le quadrant $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ne joue aucun rôle spécial [1].

---

1. Les théorèmes V, VI, VII, restent vrais dans des conditions bien moins restrictives. Ainsi la condition $G(\lambda) \in E_A^p$ peut être remplacée par la triple condition :

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log|G(re^{i\varphi})|}{r} < +\infty; \quad \limsup_{x\to\pm\infty} \frac{\log|G(x)|}{|x|} \leqslant 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overset{+}{\log}\,|G(x)|}{1+x^2}\,dx < +\infty.$$

§ 2. — Systèmes de vecteurs $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$.

Dans ce paragraphe nous étudierons la totalité et la liberté d'un système de vecteurs $\{\vec{e_\nu}\} = \{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$ dans $L^p(-A, +A)$ ou $C(-A, +A)$(1); $\Lambda = \{\lambda_\nu\}_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}$ est un système de nombres réels, $\lim_{\nu\to\pm\infty} \lambda_\nu = \pm\infty$, que nous supposerons rangés par ordre de grandeurs croissantes; nous supposerons de plus $\lambda_\nu > 0$ pour $\nu > 0$, $\lambda_\nu < 0$ pour $\nu < 0$; $\lambda_0 = 0$ fait éventuellement partie de la suite Λ.

Les propriétés intéressantes de la suite Λ, pour la totalité du système $\{\vec{e_\nu}\}$, ne sont pas relatives, comme dans ma thèse, à la série $\Sigma\, 1/|\lambda_\nu|$, mais à la densité de la suite $\{\lambda_\nu\}$.

Avec M. Polya(2) nous appellerons densité D d'une suite $\Lambda = \{\lambda_\nu\}_{\nu\geqslant 0}$ de nombres réels $\geqslant 0$ rangés par ordre de grandeurs croissantes, l'expression $\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu}{\lambda_\nu} = D$ si elle existe; une suite qui possède une densité est dite suite mesurable.

Si la suite Λ n'est pas mesurable, on appelle densité supérieure l'expression $\lim.\sup_{\nu\to\infty} \nu/\lambda_\nu$, densité inférieure l'expression $\lim.\inf_{\nu\to\infty} \nu/\lambda_\nu$.

On appelle d'autre part densité maxima, la borne inférieure des densités des suites mesurables contenant la suite Λ, densité minima la borne supérieure des densités des suites mesurables contenues dans la suite Λ; on démontre d'ailleurs qu'il existe une suite mesurable contenant la suite Λ et une suite mesurable contenue dans la suite Λ et dont les densités sont respectivement la densité maxima et la densité minima.

Les quatre densités rangées par ordre de grandeurs croissantes sont évidemment : densité minima, densité inférieure, densité supérieure, densité maxima (3).

Théorème fondamental I.

Pour la totalité du système $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$, *dans* $L^p(-A, +A)$, *une condition nécessaire et suffisante est la non existence d'une fonction* $J(\lambda) \not\equiv 0$, *de la forme*

$$(2.a) \qquad J(\lambda) = \int_{-A}^{+A} e^{-2i\pi\lambda Y} \varphi(Y)\, dY, \quad \varphi(Y) \in L^{p'}(-A, +A)$$

1. Voir note 1, p. 116.
2. Polya [1], ch. 1.
3. La densité supérieure et la densité maxima peuvent ne pas être égales. Si par exemple la suite $\{\lambda_\nu\}$ est la réunion d'une succession de groupes de termes consécutifs, $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$, les éléments de G_n étant en nombre $n!$ et tous compris entre $n!$ et $n!+1$; la densité supérieure est 1, la densité maxima est ∞; dans cet exemple la densité inférieure et la densité minima sont nulles, mais elles peuvent aussi ne pas être égales.

et vérifiant, pour tout ν

$$\text{(2.b)} \qquad J(\lambda_\nu) = 0.$$

Pour la liberté du système $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$, *dans* $L^p(-A, +A)$ *une condition nécessaire et suffisante est l'existence d'un système de fonctions* $\{J_k(\lambda)\}_{k=-\infty}^{k=+\infty}$, *de la forme*

$$\text{(2.c)} \qquad J_k(\lambda) = \int_{-A}^{+A} e^{-2i\pi\lambda Y}\varphi_k(Y)\,dY, \quad \varphi_k(Y) \in L^{p'}(-A, +A)$$

et vérifiant, pour tous k *et* ν.

$$\text{(2.d)} \qquad J_k(\lambda_\nu) = \delta_{k\nu} \begin{cases} = 0 & \text{pour } k \neq \nu; \\ = 1 & \text{pour } k = \nu. \end{cases}$$

Ce théorème est une conséquence immédiate des théorèmes I et II du § 2 de ma thèse.

Mais la condition pour une fonction $J(\lambda)$ d'être de la forme (2.a) n'est pas en général facile à vérifier. Pour $p = 2$, on peut remplacer cette condition par la condition équivalente : $J(\lambda) \in E^2_A$. Mais il n'en est plus de même pour $p \neq 2$; pour $p > 2$, on peut seulement affirmer qu'une fonction de la forme (2.a) appartient nécessairement à E^p_A, de sorte que la non existence d'une fonction $J(\lambda) \not\equiv 0$, $\in E^p_A$ et vérifiant (2.b) est seulement une condition suffisante de totalité; pour $p < 2$, on peut seulement affirmer qu'une fonction $J(\lambda) \in E^p_A$ est nécessairement de la forme (2.a) de sorte que la non existence d'une fonction $J(\lambda) \not\equiv 0$, $\in E^p_A$ et vérifiant (2.b) est seulement une condition nécessaire de totalité.

Même remarque pour les conditions de liberté avec les $J_k(\lambda)$.

Théorème II.

Si la densité maxima de la suite $\{\lambda_\nu\}_{\nu>0}$ *de nombre réels* ≥ 0, *est strictement supérieure à* $2A$, *le système des* $e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}$ *et celui des* $e^{+2i\pi\lambda_\nu Y}$ *sont chacun total dans tous les* $L^p(-A, +A)$.

Ce théorème a été énoncé par M. Polya[1] avec la densité inférieure, par MM. Paley et Wiener[2] avec la densité supérieure et ces auteurs ont démontré seulement la totalité du système réunion $\{e^{\pm 2i\pi\lambda_\nu Y}\}$. L'énoncé et la démonstration du théorème complet sont de M. N. Levinson[3].

1. Polya [2], prob. 108, p. 131. Pour la démonstration, voir Ssasz [1], p. 20.
2. Paley-Wiener [1], p. 84.
3. N. Levinson [1]. Th. vii, p. 13.

Démontrons le théorème pour le système $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$. Soit $J(\lambda)$ une fonction de la forme (2.a), $\not\equiv 0$, et vérifiant (2.b). On peut toujours supposer que $J(\lambda)$ est symétrique par rapport à l'axe réel; car on peut toujours la remplacer par l'une des deux fonctions (qui ne sont pas toutes deux $\equiv 0$)

$$(2.e) \quad \begin{cases} \dfrac{J(\lambda)+\bar{J}(\bar{\lambda})}{2} = \displaystyle\int_{-A}^{+A} e^{-2i\pi\lambda Y} \frac{\varphi(Y)+\bar{\varphi}(-Y)}{2}\, dY; \\ \dfrac{J(\lambda)-\bar{J}(\bar{\lambda})}{2i} = \displaystyle\int_{-A}^{+A} e^{-2i\pi\lambda Y} \frac{\varphi(Y)-\bar{\varphi}(-Y)}{2i}\, dY. \end{cases}$$

Comme $J(\lambda) \in E_A^\infty$, cette fonction vérifie toutes les conditions d'application du théorème V du § 1; si $\{ \alpha'_\nu \}$ est le système de ses zéros, rangés par ordre de modules croissants, situés dans le demi-plan $\sigma \geqslant 0$, on a $\lim\limits_{\nu \to \infty} \nu/|\alpha'_\nu| = D$, et πD est le type exponentiel de $J(\lambda)$.

Comme $J(\lambda)$ est au plus du type exponentiel $2\pi A$, on a $D \leqslant 2A$.

Mais D est la densité de la suite mesurable $|\alpha'_\nu|$; comme cette suite contient la suite $\{ \lambda_\nu \}$, D est au moins égale à la densité maxima de la suite $\{ \lambda_\nu \}$; donc $D > 2A$, ce qui est bien contradictoire.

Ainsi une telle fonction $J(\lambda)$ ne peut pas exister, et le système est bien total.

Il est probable que l'on peut énoncer le théorème suivant, que nous n'indiquons que comme une hypothèse, car nous ne sommes point parvenus à le démontrer :

Hypothèse III.

Si la densité maxima de la suite $\{ \lambda_\nu \}_{\nu \geqslant 0}$ de nombres réels $\geqslant 0$, est strictement inférieure à $2A$, le système des $\{ e^{\pm 2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ n'est total dans aucun des $L^p(-A, +A)$.

Si ce théorème était exact, il serait très intéressant; il montrerait qu'à chaque système $\{ e^{\pm 2i\pi\lambda_\nu Y} \}$, correspondant à une suite $\{ \pm \lambda_\nu \}$ symétrique par rapport à 0, on peut faire correspondre un *rayon de totalité* R; le système est total dans tous les $L^p(-A, +A)$, si $A < R$, et dans aucun des $L^p(-A, +A)$, si $A > R$; R ne serait autre que la demi-densité maxima de la suite $\{ \lambda_\nu \}$. Quant à ce qui se passera pour $A = R$, le cas doit être réservé et demande une étude plus approfondie; ainsi pour la suite $\lambda_\nu = \nu/2R$, le système des $\{ e^{\pm 2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ est total dans $L^p(-R, +R)$ pour p fini, mais cesse de l'être si on lui retire un quelconque de ses éléments; il n'est pas total dans $C(-R, +R)$(1) mais le devient par adjonction d'un vecteur quelconque $e^{-2i\pi\lambda Y}$.

---

1. Car tous les $e^{\pm \frac{i\pi\nu}{R} Y}$ sont égaux aux deux extrémités $+R$ et $-R$ de l'intervalle. Il est donc nécessaire, pour rendre le système total, de lui adjoindre une fonction $e^{-2i\pi\lambda Y}$ qui ne possède pas cette propriété.

Aussi dans $L^p(-R, +R)$ ce sont des considérations asymptotiques beaucoup plus fines qui doivent intervenir.

L'hypothèse III a été partiellement démontrée sous la forme des deux théorèmes suivants :

Théorème d'Ingham IV.

Si $\{\lambda_\nu\}_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}$ *est un système de nombres réels, tel que* $\lim_{\nu\to\pm\infty} \inf (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) > 1/2A$, *le système* $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$ *n'est total dans aucun* $L^p(-A, +A)$.

La démonstration s'appuie sur des principes très différents de ceux qui sont exposés ici [1].

Théorème V.

Si $\{\lambda_\nu\}_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}$ *est un système de nombres réels tel que* $\sum_{\lambda_\nu\neq 0} 1/|\lambda_\nu| < +\infty$, *le système* $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$ *n'est total dans aucun* $L^p(-A, +A)$ *quels que soient* $p \geqslant 1$ *et* $A > 0$.

Déterminons en effet n assez grand pour $\sum_{|\nu|>n} 1/|\lambda_\nu| \leqslant \varepsilon$, et considérons la fonction

$$J_1(\lambda) = \prod_{|\nu|>n} \frac{\sin \dfrac{\pi\lambda}{\lambda_\nu}}{\dfrac{\pi\lambda}{\lambda_\nu}}.$$

On a manifestement $J_1(\lambda_\nu) = 0$ pour $|\nu| > n$. Sur tout l'axe réel, $|J_1(\lambda)| \leqslant 1$. D'autre part il existe une constante universelle K telle que pour tout u complexe

$$\left|\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right| \leqslant e^{K|\pi u|}.$$

On a donc pour λ quelconque $|J_1(\lambda)| \leqslant e^{K\pi|\lambda| \sum_{|\nu|>n} 1/|\lambda_\nu|} \leqslant e^{\varepsilon K\pi|\lambda|}$.

Si donc ε est choisi de façon que $\varepsilon K < 2A$, $J_1(\lambda)$ est une fonction entière de type exponentiel $< 2\pi A$. Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n+3}$ un système de $2n+3$ zéros de $J_1(\lambda)$ n'appartenant pas à la suite Λ, et posons

$$J_2(\lambda) = \Big[\prod_{|\nu|\leqslant n} (\lambda - \lambda_\nu)\Big] / [(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) \ldots (\lambda - \alpha_{2n+3})].$$

$J_2(\lambda)$ est une fraction rationnelle, dont le numérateur est de degré $\leqslant 2n+1$, le dénominateur de degré $2n+3$; on a donc pour $|\lambda| \to \infty$

$$|J_2(\lambda)| < A/|\lambda|^2.$$

---

1. Ingham [1]. Voir aussi les résultats du chapitre VII de Paley-Wiener [1].

Il suffit alors de poser

$$J(\lambda) = J_1(\lambda)\, J_2(\lambda).$$

$J(\lambda)$ est une fonction entière de type exponentiel $< 2\pi A$, sommable sur l'axe réel, et s'annulant pour tous les $\lambda_\nu \in \Lambda$. Elle est de la forme $\int_{-A}^{+A} e^{-2i\pi\lambda Y} \varphi(Y)\, dY$, où $\varphi(Y)$ est continue, donc $\in L^{p'}(-A, +A)$, quel que soit $p \geqslant 1$; cela montre bien la non totalité du système $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$.

On peut d'ailleurs combiner les théorèmes IV et V : le système $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ n'est pas total, si la suite $\{ \lambda_\nu \}$ est la réunion de deux suites $\{ \lambda'_\nu \}$, $\{ \lambda''_\nu \}$, la première vérifiant $\liminf_{|\nu| \to \infty} (\lambda'_{\nu+1} - \lambda'_\nu) > 1/2A$ la deuxième $\Sigma\, 1/|\lambda''_\nu| < +\infty$. Il est à remarquer que la première condition implique à la fois une suffisante rareté et une suffisante régularité de la suite étudiée, tandis que la deuxième n'implique qu'une assez grande rareté.

Comme cas particulier, l'hypothèse III indiquerait que si la densité de la suite $\{ \lambda_\nu \}_{\nu \geqslant 0}$ est nulle, c'est-à-dire si $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{\nu}{\lambda_\nu} = 0$, le système symétrique $\{ e^{\pm 2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ n'est total dans aucun $L^p(-A, +A)$, quels que soient $p \geqslant 1$ et $A > 0$; les théorèmes IV et V indiquent seulement qu'il en est ainsi lorsque la suite $\{ \lambda_\nu \}$ est la réunion de deux suites $\{ \lambda'_\nu \}$, $\{ \lambda''_\nu \}$, la première vérifiant $\lim\limits_{|\nu| \to \infty} (\lambda'_{\nu+1} - \lambda'_\nu) = +\infty$, la deuxième $\Sigma\, 1/|\lambda''_\nu| < +\infty$.

Dans un autre ordre d'idées, MM. Paley, Wiener, Levinson, ont étudié le cas de suites $\{ \lambda_\nu \}$ se rapprochant de la suite $\lambda_\nu = \nu/2A$, qui est la plus importante et la mieux connue, puisqu'elle correspond aux fonctions périodiques fondamentales $\left\{ e^{-\frac{i\pi\nu}{A} Y} \right\}_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}$. En partant d'hypothèses de la forme :

$$|\lambda_\nu - \nu/2A| \leqslant C/2A, \text{ pour tout } \nu,$$

ces auteurs arrivent à la conclusion que si le système $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ est total, il est d'excès fini, c'est-à-dire cesse d'être total quand on lui supprime un nombre fini d'éléments; que s'il n'est pas total, il est de défaut fini, c'est-à-dire devient total par adjonction d'un nombre fini de vecteurs de la forme $e^{-2i\pi\lambda Y}$. L'excès ou le défaut sont d'ailleurs indépendants des vecteurs que l'on supprime ou que l'on adjoint; on peut les majorer, quel que soit le système, en fonction de la constante C. En particulier si C est inférieure à une quantité C_0 convenablement choisie (en fonction de p supposé fini), le système des $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ n'a ni défaut ni excès, c'est une base; M. Levinson a déterminé la valeur exacte de la constante limite C_0[1].

---

1. Pour ces questions, voir PALEY-WIENER [1], p. 94; N. LEVINSON [1], p. 48.

Il serait intéressant de former d'autres systèmes $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ qui soient des bases et ne soient pas directement liés au système fondamental des $\left\{ e^{-\frac{i\pi\nu}{A}Y} \right\}_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}$ (1).

Maintenant que nous avons suffisamment montré la difficulté de la question et la quasi impossibilité de la résoudre complètement, nous nous poserons des problèmes généraux, du type suivant : quelles propriétés possèdent le système de vecteurs $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ lorsqu'il est total ou lorsqu'il n'est pas total?

Théorème VI.

Lorsque le système de vecteurs $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ *est non total dans* $L^p(-A, +A)$, *il est libre; lorsque le système de vecteurs est total, ou bien il est libre, et c'est une base, ou bien chaque vecteur est dépendant des autres.*

Ce théorème montre que parmi les éventualités possibles pour un système de vecteurs quelconques dans un espace topologique, il y en a deux catégories qui sont impossibles pour un système de vecteurs $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ dans $L^p(-A, +A)$: la catégorie des systèmes totaux dont certains vecteurs sont dépendants, d'autres indépendants; et la catégorie des systèmes non totaux et non libres.

Démontrons d'abord la première partie du théorème. Si le système est non total, il existe une fonction $J(\lambda) \not\equiv 0$, qui est de la forme (2.a) et vérifie (2.b). Posons

$$J_k(\lambda) = \frac{J(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)\, J'(\lambda_k)} \quad (2) \tag{2.f}$$

Le système de fonctions $J_k(\lambda)$ vérifie (2.d). Mais $J(\lambda) \in L^\infty(-\infty, +\infty)$, et comme $1/(\lambda - \lambda_k)$, en dehors d'un intervalle assez grand, a toutes ses puissances > 1 sommables, $J_k(\lambda) \in E_A^q$, quel que soit $q > 1$; on peut donc écrire

$$J_k(\lambda) = \int_{-A}^{+A} e^{-2i\pi\lambda Y} \varphi_k(Y)\, dY,$$

$\varphi_k(Y) \in L^{q'}$, q' fini quelconque; on peut donc prendre $q' = p'$, si $p' \neq \infty$, de

1. Rappelons que ce système n'est une base que pour p fini; pour $p = \infty$, il est de défaut 1.

2. Si λ_k est une racine simple de $J(\lambda)$. Si λ_k est une racine multiple d'ordre α, il faudrait considérer une fonction de la forme $A \dfrac{J(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^\alpha}$, la démonstration serait encore plus simple.

sorte que le système $\{ J_k(\lambda) \}$ vérifie (2.c) et le théorème est démontré(1). De plus le système des $\varphi_k(Y) \in L^{p'}$ est un système biorthogonal normal associé au système de vecteurs. Dans le cas $p' = \infty$, $p = 1$, $J(\lambda) \in L^2(-\infty, +\infty)$, et $1/(\lambda - \lambda_k)$, en dehors d'un intervalle assez grand est de carré sommable, de sorte que $J_k(\lambda) \in E^1_\Lambda$, et les $J_k(\lambda)$ sont encore de la forme (3.c), avec des $\varphi_k(Y)$ continues(1), c. q. f. d.

La deuxième partie du théorème est une conséquence immédiate de la première; pour la prouver, il suffit de montrer que si un des vecteurs, $\vec{e_h}$, est indépendant des autres, tout autre vecteur $\vec{e_k}$ du système est aussi indépendant. Mais si $\vec{e_h}$ est indépendant des $\vec{e_\nu}$, $\nu \neq h$, le système des $\vec{e_\nu}$, $\nu \neq h$ n'est pas total et engendre un sous-espace vectoriel dont l'adhérence est un hyperplan fermé V_h; un système non total de vecteurs $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ étant toujours libre, le vecteur $\vec{e_k}$ est dans V_h, indépendant du système des $\vec{e_\nu}$, $\nu \neq k$, $\nu \neq h$, il est donc aussi dans l'espace entier indépendant du système des $\vec{e_\nu}$, $\nu \neq k$.

Dans le cas où le système des $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ est libre parce que non total, nous en avons donné plus haut un système biorthogonal normal associé.

Lorsque le système de vecteurs est une base, il possède un seul système biorthogonal normal associé; nous allons le déterminer. Si l'on retire au système le vecteur $e^{-2i\pi\lambda_1 Y}$, il reste un système non total; donc il existe $J_1(\lambda) \not\equiv 0$, de la forme (2.a) et vérifiant $J_1(\lambda_\nu) = 0$, pour $\lambda_\nu \in \Lambda$, $\lambda_\nu \neq \lambda_1$. On voit aisément que cette fonction $J_1(\lambda)$ n'a pas d'autres zéros que les λ_ν; car si elle s'annulait en outre pour $\lambda = \alpha$, la fonction $J(\lambda) = \dfrac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \alpha} J_1(\lambda)$ s'annulerait pour tous les λ_ν, et serait transformée de Fourier d'une fonction $\varphi(Y) \in L^{p'}(-A, +A)$. En effet $J(\lambda) = J_1(\lambda) + \dfrac{\alpha - \lambda_1}{\lambda - \alpha} J_1(\lambda)$ est somme de deux fonctions dont chacune est une telle transformée de Fourier, alors le système $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ serait non total, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il en résulte que la fonction $J_1(\lambda)$ est entièrement déterminée par l'égalité supplémentaire $J_1(\lambda_1) = +1$ et la condition d'être réelle pour λ réel.

Si alors on pose

$$J_k(\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_k} \frac{1}{(\lambda_k - \lambda_1) J'_1(\lambda_k)} J_1(\lambda) \tag{2.g}$$

on voit que $J_k(\lambda)$ est la fonction qui possède par rapport à λ_k les mêmes propriétés que $J_1(\lambda)$ par rapport à λ_1.

Le système biorthogonal normal cherché est celui des $\varphi_k(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\lambda Y} J_k(\lambda) \, d\lambda$.

---

1. Par une démonstration un peu plus délicate, on montrerait même que $\varphi_k(Y)$ est une fonction continue, quel que soit $p \geqslant 1$ (Voir th. III du § 6).

On pourrait donner à ces fonctions une expression plus symétrique, en introduisant la fonction $J(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) J_1(\lambda)$ et en posant

$$J_k(\lambda) = \frac{J(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k) J'(\lambda_k)}.$$

Ce théorème admet une intéressante généralisation :

Théorème VII.

Si le système de vecteurs $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ *est non total dans* $L^p(-A, +A)$, *et si en lui adjoignant* $n > 0$ *vecteurs distincts convenablement choisis de la famille des* $\{ e^{-2i\pi\lambda Y} \}$, λ *réel, et qui n'appartiennent pas déjà à ce système, on obtient une base; alors en lui adjoignant* n *vecteurs distincts quelconques de cette même famille, et qui ne lui appartiennent pas déjà, on obtient une base; le système étudié est dit de défaut* n. *Si le système de vecteurs* $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ *est total, et si en lui retirant* $n \geqslant 0$ *convenablement choisis de ses vecteurs, on obtient une base; alors en lui retirant* n *quelconque de ses vecteurs on obtient une base; le système étudié est dit d'excès* n.

La démonstration repose sur un lemme de la théorie générale des espaces vectoriels, que le lecteur démontrera aisément :

Lemme.

Si une base d'un espace vectoriel topologique est constituée par la réunion d'un système S *de vecteurs et d'un système* s_n *de* n *vecteurs :*

a) Tout système de vecteurs, réunion de S *et d'un système de* $m < n$ *vecteurs, est non total;*

b) Tout système libre, réunion de S *et d'un système* s'_n *de* n *vecteurs est total.*

Démontrons alors la partie du théoréme VII relative au défaut. Nous partons d'un système S de vecteurs $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$, $\lambda_\nu \in \Lambda$, tel que complété par un système s_n de n vecteurs de la famille $\{ e^{-2i\pi\lambda Y} \}$, λ réel, il devienne une base.

Alors d'après la partie *a*) du lemme, si on ajoute au système S un système quelconque de $n - 1$ vecteurs, on obtient un système non total. Mais si on lui ajoute un système s'_n de n vecteurs *appartenant à la famille des* $\{ e^{-2i\pi\lambda Y} \}$, on obtient nécessairement un système total : car s'il ne l'était pas, il serait libre d'après le théorème VI, donc total d'après la partie *b*) du lemme, ce qui est contradictoire. Cela prouve bien qu'en adjoignant n vecteurs de la famille, on obtient une base.

Démontrons enfin la partie du théorème VII relative à l'excès. Soit S un système de vecteurs de la famille des $\{e^{-2i\pi\lambda Y}\}$, λ réel, tel qu'en lui retranchant un système s_n de n vecteurs, on obtienne une base. Soit s'_n un sous-système quelconque de n vecteurs de S, sans éléments communs avec s_n. Le système $S - s_n$ est une base, donc le système $(S - s_n) - s'_n$ est tel qu'en lui adjoignant le système s'_n on obtienne une base, il est donc de défaut n; alors d'après la partie du théorème VII relative au défaut, le système $(S - s_n - s'_n) + s_n = S - s'_n$ est une base.

Le théorème est ainsi démontré lorsque s_n et s'_n sont sans éléments communs; lorsqu'il n'en est pas ainsi, on passera par l'intermédiaire d'un système auxiliaire s''_n sans éléments communs ni avec l'un ni avec l'autre.

Désormais nous dirons d'un système de néfaut n qu'il est d'excès $-n$.

Théorème VIII.

L'excès algébrique d'un système de vecteurs $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$ *dans* $L^p(-A, +A)$ *est une fonction décroissante de* p; *entre sa valeur dans* $L^1(-A, +A)$, *et sa valeur dans* $C(-A, +A)$, *il y a différence d'une unité au plus.*

Pour montrer que l'excès algébrique est une fonction décroissante de p, il suffit de montrer que si un système $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$ est total dans $L^p(-A, +A)$, il l'est aussi dans $L^q(-A, +A)$, $q \leqslant p$. Si le système est total dans $L^p(-A, +A)$, toute fonction continue $F(Y)$ est limite dans $L^p(-A, +A)$ de « polynômes trigonométriques »[1].

$$F(Y) = \lim_j \sum_\nu (a_\nu)_j e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}, \qquad \lambda_\nu \in \Lambda. \tag{2.h}$$

Mais il existe une constante $K(A)$ dépendant exclusivement de A, telle que l'on ait pour toute fonction $G(Y)$ (inégalité de Hölder)

$$||G(Y)||_{L^q(-A,+A)} \leqslant K(A)\,||G(Y)||_{L^p(-A,+A)}, \qquad q \leqslant p. \tag{2.i}$$

Donc la formule (2.h) est aussi valable dans L^q pour $q \leqslant p$, et comme les fonctions continues forment un sous-espace dense de $L^q(-A, +A)$ on voit que le système est bien total dans $L^q(-A, +A)$.

Pour démontrer que lorsque p varie de 1 à ∞, l'excès peut décroître d'une unité au plus, il suffit de montrer que si un système S de vecteurs $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$ est total dans L_1, son défaut ne peut dépasser 1 dans C.

---

1. Un polynôme trigonométrique est une somme d'un nombre fini de termes de la forme $a_\nu e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}$.

Pour toute fonction sommable F(Y) on peut écrire dans L^1 la formule (2.h). Intégrons :

$$(2.j) \qquad \int_0^Y F(t)\,dt + K = \lim_j \sum_\nu (b_\nu)_j\, e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} + (b_0)_j$$

avec

$$(b_\nu)_j = (a_\nu)_j\,(-2i\pi\lambda_\nu)^{-1}$$

$$(b_0)_j = \sum_\nu (a_\nu)_j\,(2i\pi\lambda_\nu)^{-1} + K$$

à la condition expresse que le polynôme trigonométrique $\Sigma\,(a_\nu)_j\, e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}$ n'ait pas de terme constant, autrement dit que $\lambda_0 = 0$ ne soit pas élément de la suite Λ. La limite est, dans la formule intégrée, une limite uniforme, une limite dans $C(-A, +A)$.

Le deuxième membre de (2.j) est un polynôme trigonométrique formé avec les mêmes vecteurs $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$, plus le vecteur représenté par la constante $1\,(\lambda_0 = 0)$. Mais les fonctions de la forme $\int_0^Y F(t)\,dt + K$, forment un sous-espace vectoriel dense dans $C(-A, +A)$; cela prouve que le système (S), augmenté d'un vecteur $e^{-2i\pi\lambda Y}$ $(\lambda = 0)$ est total; il est donc lui-même de défaut 1 au plus.

La démonstration ne semble valable que si $\lambda_0 = 0$ ne fait pas partie de la suite Λ; mais s'il en fait partie, on peut le supprimer et mettre à sa place un nombre réel quelconque $\lambda \not\in \Lambda$, il résulte du théorème VII que cela ne change rien au problème.

Théorème IX.

A chaque suite Λ *on peut faire correspondre un rayon de totalité* R *dépendant exclusivement de* Λ, *tel que pour tout* $A < R$, *le système* $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$, $\lambda_\nu \in \Lambda$, *soit total et d'excès infini dans* $L^p(-A, +A)$, $p \geqslant 1$ *quelconque, et pour tout* $A > R$, *le système soit non total et de défaut infini dans* $L^p(-A, +A)$.

Il suffit pour démontrer ce théorème de prouver que si le système est non total dans $L^p(-A, +A)$, il est de défaut infini dans $L^1(-B, +B)$, $B > A$. Mais si le système $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$ est non total dans $L^p(-A, +A)$, il existe $J(\lambda) \not\equiv 0$, $\in E_A^\infty$, et vérifiant (2.b). Soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ N nombres réels quelconques; nous allons montrer que le système des $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$, augmenté des vecteurs $e^{-2i\pi\alpha Y}$, $e^{-2i\pi\beta Y}, \ldots$ est non total dans $L^1(-B, +B)$; il suffit de former $K(\lambda) \not\equiv 0$, $\in E_B^1$, vérifiant (2.b) et $K(\alpha) = K(\beta) \ldots = 0$. Il suffit de prendre

$$K(\lambda) = J(\lambda)\,\frac{(\lambda-\alpha)\;(\lambda-\beta)\;(\lambda-\gamma)\;\ldots}{(\lambda-\alpha')\;(\lambda-\beta')\;(\lambda-\gamma')\;\ldots}\sin \varepsilon\pi\lambda$$

avec $2A + \varepsilon \leqslant 2B$; $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ sont des zéros de $\sin \varepsilon\pi\lambda$, n'appartenant ni à la suite Λ, ni au système $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ et en nombres $N+2$.

Si l'hypothèse III est vraie, alors pour une suite Λ symétrique par rapport à o, soit $\{\pm\lambda_\nu\}$, $\lambda_\nu \geqslant 0$, le rayon de totalité est la demi-densité maxima de la suite $\{\lambda_\nu\}$.

En l'absence de cette hypothèse on peut en tout cas affirmer que le rayon de totalité de la suite Λ n'est pas modifié si on lui ajoute ou retranche une suite $\{\alpha_\nu\}_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}$ vérifiant l'une ou l'autre des propriétés

$$\lim_{|\nu|\to\infty}(\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu)=+\infty; \qquad \text{ou} \qquad \sum_{\alpha_\nu\neq 0} 1/|\alpha_\nu| < +\infty.$$

Plus généralement :

THÉORÈME X.

Si deux suites Λ_1, Λ_2, *ont pour rayons de totalité* R_1 *et* R_2, *la suite réunion* $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ *a pour rayon de totalité* $R \leqslant R_1 + R_2$.

En effet le système $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$, $\lambda_\nu \in \Lambda_1$, est non total dans

$$L^2[-(R_1+\varepsilon), +(R_1+\varepsilon)], \qquad \varepsilon > 0;$$

il existe donc $J_1(\lambda) \not\equiv 0$, $\in E^2_{R_1+\varepsilon}$, et vérifiant

$$J_1(\lambda_\nu) = 0 \qquad \text{pour} \qquad \lambda_\nu \in \Lambda_1.$$

De même il existe $J_2(\lambda) \not\equiv 0$, $\in E^2_{R_2+\varepsilon}$, et vérifiant

$$J_2(\lambda_\nu) = 0 \qquad \text{pour} \qquad \lambda_\nu \in \Lambda_2.$$

Alors $J(\lambda) = J_1(\lambda)\, J_2(\lambda)$ est $\not\equiv 0$, $\in E^1_{R_1+R_2+2\varepsilon}$, et vérifie

$$J(\lambda_\nu) = 0 \qquad \text{pour} \qquad \lambda_\nu \in \Lambda, \quad \text{c. q. f. d.}$$

§ 3. — Étude de $B^p_A(\Lambda)$. Développement en série.

Dans ce paragraphe et le suivant, nous supposerons la suite $\Lambda = \{\lambda_\nu\}_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}$ choisie de telle manière que le système de vecteurs $\{\vec{e_\nu}\} = \{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$ soit libre dans $L^p(-A, +A)$; nous appellerons alors $B^p_A(\Lambda)$ l'adhérence de l'espace vectoriel qu'il engendre; si ce système est une base, $B^p_A(\Lambda)$ est l'espace entier [1].

Toute fonction $F(Y) \in B^p_A(\Lambda)$ admet un développement formel

$$F(Y) \sim \underset{\nu}{S}\, c_\nu\, e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}, \tag{3.a}$$

où les c_ν sont les composantes de $\vec{F}$ suivant le système libre $\{\vec{e_\nu}\}$ [2].

L'étude de la convergence de la somme du deuxième membre sera l'objet de ce paragraphe et du suivant.

Divers résultats ont été obtenus dans des cas particuliers par MM. Ingham, Paley, Wiener, Levinson.

M. Ingham [3] a montré, dans le cas où l'on a $\liminf\limits_{\nu\to\pm\infty}(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu) > 1/2A$, que la série $\Sigma\,|c_\nu|^2$ converge pour $p = 2$ et qu'il existe une constante K dépendant exclusivement de A et de la suite Λ [4], telle que

$$\|F\|_{L^2} \leqslant K(\Sigma\,|c_\nu|^2)^{\frac{1}{2}}; \qquad (\Sigma\,|c_\nu|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant K\,\|F\|_{L^2}. \tag{3.b}$$

Il en résulte que les propriétés du développement de $F(Y)$ sont tout à fait analogues à celles de son développement de Fourier ordinaire

$$F(Y) = \sum d_\nu\, e^{-\frac{i\pi\nu}{A}Y}.$$

M. Ingham démontre aussi qu'on peut d'une manière unique prolonger $F(Y)$ pour Y réel quelconque, le développement (3.a) restant convergent dans L^2 sur un intervalle (a, b) quelconque; de plus il existe une constante $K(a, b)$ telle que

$$\|F(Y)\|_{L^2(a,b)} \leqslant K(a, b)\,\|F(Y)\|_{L^2(-A,+A)}. \tag{3.c}$$

---

1. C'est-à-dire, rappelons-le, $L^p(-A, +A)$ pour p fini, $C(-A, +A)$ pour $p = \infty$. Voir note 1, p. 116.
2. Voir formule (3.d) de ma thèse.
3. Ingham [1].
4. Désormais, A et la suite Λ étant des données initiales, nous considérerons comme une constante absolue une quantité qui ne dépend que de A et Λ.

D'autre part, MM. Paley, Wiener[1], Levinson[2], soit dans l'hypothèse d'Ingham, soit dans l'hypothèse déjà analysée au § 2 $|\lambda_\nu - \nu/2A| \leqslant C/2A$, ont montré que le développement (3.a) se comporte, au point de vue convergence et sommabilité, comme le développement de Fourier ordinaire

$$F(Y) = \sum d_\nu \, e^{-\frac{i\pi\nu}{A}Y},$$

du moins dans tout intervalle fermé de $]-A, +A[$. Plus précisément, la somme

$$\sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \left(c_\nu \, e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} - d_\nu \, e^{-\frac{i\pi\nu}{A}Y}\right)$$

converge uniformément vers o pour $n \to \infty$ dans tout compact de $]-A, +A[$; quel que soit $p \geqslant 1$.

Nous allons nous placer maintenant dans le cas le plus général.

Considérons la série formelle

$$(3.d) \qquad \left\{ \begin{aligned} \overset{+}{F}(Y; X) &= \sum_{\nu > 0} \left(c_\nu \, e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\right) e^{-2\pi\lambda_\nu X} \\ &= \sum_{\nu > 0} c_\nu \, e^{-2\pi\lambda_\nu Z} \end{aligned} \right.$$

avec $Z = X + iY$; $X > 0$, Y réel quelconque.

Nous allons montrer qu'on peut partager la suite $\{\lambda_\nu\}_{\nu > 0}$ en une succession de groupes de termes consécutifs $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_n, \ldots$ dépendant exclusivement de cette suite, et tels que

$$(3.e) \qquad e^{2\pi\lambda_1 X} \sum_{n=1}^{n=\infty} |\mathcal{G}_n < \overset{+}{F}(Y; X) > | \leqslant C(X, Y) \, ||F||_{L^p(-A, +A)}$$

$C(X, Y)$ restant bornée dans tout secteur angulaire $(\varepsilon, K) : X \geqslant \varepsilon$, $|Y/(X - \varepsilon)| \leqslant K$ [3].

Il est plus commode pour la démonstration de supposer le système $\{\vec{e}_\nu\}$ non total; dans ce cas il existe une fonction $J(\lambda) \not\equiv 0$, de la forme (2.a) et vérifiant (2.b).

1. Paley-Wiener [1], p. 113; p. 123.
2. N. Levinson [1], p. 48.
3. Suivant les notations adoptées au § 10 de ma thèse, $\mathcal{G}_n < \overset{+}{F}(Y; X) >$ désigne la somme $\sum\limits_{\lambda_\nu \in \mathcal{G}_n} c_\nu \, e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$.

$J(\lambda)$ est une fonction entière de type exponentiel $\leqslant 2\pi A$; il est également plus commode pour la démonstration de supposer $J(\lambda)$ sommable sur l'axe réel. Montrons qu'on peut toujours, dans le cas général, se ramener à ce cas particulier.

Nous supposerons pour cela les trois premiers groupes $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ réduits chacun à un seul élément, ce que l'on peut toujours faire. (3.e) peut alors s'écrire

$$(3.f) \qquad \begin{aligned} &|c_1| + |c_2|\, e^{-2\pi(\lambda_2-\lambda_1)X} + |c_3|\, e^{-2\pi(\lambda_3-\lambda_1)X} \\ &+ e^{2\pi\lambda_1 X} \sum_{n=4}^{n=\infty} |\mathcal{G}_n < \overset{+}{F}(Y;X) > | \leqslant C(X,Y)\, ||F||_{L^p}. \end{aligned}$$

Comme c_1, c_2, c_3 sont des formes linéaires continues de $\vec{F} \in B^p_A(\Lambda)$, (3.f) est équivalent à

$$(3.g) \qquad e^{2\pi\lambda_1 X} \sum_{n=4}^{n=\infty} |\mathcal{G}_n < \overset{+}{F}(Y;X) > | \leqslant C(X,Y)\, ||F||_{L^p(-A,+A)}.$$

Supposons l'inégalité générale (3.e) démontrée pour la suite Λ' égale à la suite Λ amputée de ses trois éléments $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Si on pose

$$G(Y) = F(Y) - \sum_{\nu=1,2,3} c_\nu\, e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}$$

on a $G \in B^p_A(\Lambda')$ et l'on aura d'après (3.e)

$$(3.h) \qquad e^{2\pi\lambda_4 X} \sum_{n=4}^{n=\infty} |\mathcal{G}_n < \overset{+}{F}(Y;X) > | \leqslant C(X,\overline{Y})\, ||G||_{L^p(-A,+A)}.$$

Mais, encore une fois parce que c_1, c_2, c_3 sont des formes linéaires continues de $\vec{F} \in B^p_A(\Lambda)$, il existe une constante K telle que $\|G\|_{L^p(-A,+A)} \leqslant K\, \|F\|_{L^p(-A,+A)}$ de sorte que (3.h) entraîne une inégalité meilleure encore que (3.g). Ainsi la démonstration de (3.e) pour la suite Λ' entraîne cette même inégalité pour la suite Λ. Or la suite $\Lambda - \lambda_1$ engendre un système $\{\vec{e_\nu}\}_{\nu \in \Lambda - \lambda_1}$ non total, auquel correspond une fonction entière $J(\lambda) \not\equiv 0$, de type exponentiel $\leqslant 2\pi A$ et bornée sur l'axe réel; à la suite Λ' correspond $\dfrac{J(\lambda)}{(\lambda-\lambda_2)\,(\lambda-\lambda_3)}$ qui est sommable sur l'axe réel, c. q. f. d.

Nous supposerons donc désormais le système $\{\vec{e_\nu}\}$ non total, et la fonction $J(\lambda)$ associée sommable sur l'axe réel. Nous supposerons de plus que la fonction $J(\lambda)$ est symétrique par rapport à l'axe réel, $J(\lambda) = \overline{J}(\overline{\lambda})$, comme nous l'avons fait au théorème II du § 2. Nous supposerons enfin que $J(\lambda)$ est exactement du type exponentiel $2\pi A$; car si elle était du type $2\pi B$, $B < A$, il suffirait de la multiplier par $[\sin 2(A-B)\pi\lambda]$.

Nous calquerons ensuite la démonstration sur celle du paragraphe 10 de ma thèse. Posons

$$(3.\text{i})\quad \begin{cases} (1) & c_\nu = \int_{-A}^{+A} F(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt, \qquad \varphi_\nu(t) \in L^{p'}(-A, +A); \\ (2) & \varphi_\nu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\lambda t} J_\nu(\lambda)\,d\lambda; \\ (3) & J_\nu(\lambda) = \dfrac{J(\lambda)}{(\lambda-\lambda_\nu)\,J'(\lambda_\nu)}. \end{cases}$$

Cette dernière formule, (3.i) (3) ne doit être employée que si λ_ν est zéro simple de $J(\lambda)$. Mais nous pouvons toujours supposer que $J(\lambda)$ n'a que des racines simples; car, les racines de $J(\lambda)$ étant rangées par modules croissants, on peut toujours, de proche en proche, remplacer chaque racine multiple d'ordre k de $J(\lambda)$ par k racines voisines distinctes, et cela sans modifier finalement les propriétés essentielles de $J(\lambda)$: être de type exponentiel $2\pi A$, sommable sur l'axe réel; s'annuler pour les $\lambda_\nu \in \Lambda$; être symétrique par rapport à l'axe réel.

Posons ensuite formellement

$$(3.\text{j})\quad \begin{cases} (1) & \overset{+}{\varphi}(t; Y; X) = \sum_{\nu>0} \varphi_\nu(t)\, e^{-2\pi\lambda_\nu Z}; \\ (2) & \overset{+}{J}(\lambda; Y; X) = \sum_{\nu>0} J_\nu(\lambda)\, e^{-2\pi\lambda_\nu Z}. \end{cases}$$

On a immédiatement

$$(3.\text{k})\quad \begin{cases} |\mathcal{G}_n < \overset{+}{F}(Y; X) > | \leqslant \|F\|_p \times \|\mathcal{G}_n < \overset{+}{\varphi}(t; Y; X) > \|_{p'}, \\ \qquad \leqslant K(A)\,\|F\|_p\,\|\mathcal{G}_n < \overset{+}{\varphi}(t; Y; X) > \|_{L^\infty(-A, +A)} \\ \qquad \leqslant K(A)\,\|F\|_p\,\|\mathcal{G}_n < \overset{+}{J}(\lambda; Y; X) > \|_{L^1(-\infty, +\infty)} \end{cases}$$

$K(A)$ est une constante dépendant exclusivement de A (d'après l'inégalité de Hölder).

L'inégalité (3.e) peut donc se déduire de

$$(3.\text{l})\qquad e^{2\pi\lambda_1 X} \sum_{n=1}^{n=\infty} \|\mathcal{G}_n < \overset{+}{J}(\lambda; Y; X) > \|_{L^1(-\infty, +\infty)} \leqslant C(X, Y).$$

Comme au § 10 de ma thèse nous écrirons

$$(3.\text{m})\qquad \mathcal{G}_n < \overset{+}{J}(\lambda; Y; X) > = J(\lambda)\,\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{\mathcal{G}_n}} \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)\,(\lambda-\zeta)}\,d\zeta.$$

La courbe $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$, comme au § 10 de ma thèse, doit être parcourue dans le sens direct, entourer les $\lambda_\nu \in \mathcal{G}_n$, et aucun autre zéro de $J(\lambda)$, et ne pas entourer λ. La condition pour $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$ de n'entourer aucun autre zéro de $J(\lambda)$ que les $\lambda_\nu \in \mathcal{G}_n$ introduirait de grandes difficultés dans la suite; nous la remplacerons par la condition plus simple suivante en écrivant $\Gamma'_{\mathcal{G}_n}$ au lieu de $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$: parmi les zéros (réels ou complexes) de $J(\lambda)$ entourés par $\Gamma'_{\mathcal{G}_n}$, ceux qui appartiennent à la suite Λ sont ceux du groupe $\mathcal{G}_n$. Si nous désignons par α_i les zéros de $J(\lambda)$ entourés par $\Gamma'_{\mathcal{G}_n}$, la formule (3.m) doit être remplacée par

$$(3.\mathrm{m}') \qquad \mathcal{G}'_n < \overset{+}{J}(\lambda; Y; X) > = J(\lambda)\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'_{\mathcal{G}_n}} \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}\,d\zeta$$

en posant

$$\mathcal{G}'_n < \overset{+}{J}(\lambda; Y; X) > = \sum_{\alpha_i} \frac{J(\lambda)\, e^{-2\pi\alpha_i Z}}{(\lambda-\alpha_i)\, J'(\alpha_i)}.$$

Mais comme le développement de F ne fait intervenir que les $e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$, $\lambda_\nu \in \Lambda$, et non tous les $e^{-2\pi\alpha_i Z}$, les formules (3.k) restent exactes, avec $\mathcal{G}'$ au lieu de $\mathcal{G}$; nous pouvons donc sans inconvénient utiliser $\Gamma'_{\mathcal{G}_n}$ au lieu de $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$, et pour simplifier les écritures, nous continuerons à écrire $\mathcal{G}$ et Γ, au lieu de $\mathcal{G}'$ et Γ'. Nous démontrerons alors (3.l) en montrant

$$(3.\mathrm{n}) \qquad e^{2\pi\lambda_1 X} \sum \left\| J(\lambda)\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{\mathcal{G}_n}} \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}\,d\zeta \right\|_{L^1(+\infty,-\infty)} \leqslant C(X, Y)$$

et comme au § 10 de ma thèse[1] nous pouvons supposer le groupe $\mathcal{G}_1$ réduit au seul élément λ_1, et démontrer la formule (3.n) en étendant la somme Σ du premier membre à tous les $n \geqslant 2$.

Une difficulté se présente du fait que dans la formule (3.n) la courbe $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$ doit être choisie variable avec λ : elle ne doit pas entourer λ.

Choisissons une courbe $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$ fixe, et voyons par quoi doit être remplacée la formule (3.n) pour λ intérieur à $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$. On pourra prendre la même intégrale, mais le contour d'intégration $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$ devra être remplacé par $\Gamma_{\mathcal{G}_n} + \gamma$, γ étant un petit cercle entourant λ dans le sens rétrograde.

---

1. Formule (10.e).

Mais à l'intérieur de γ, la fonction de ζ : $e^{-2\pi\zeta Z}/J(\zeta)$ est holomorphe, de sorte que d'après la formule de Cauchy :

$$\text{(3.o)} \qquad J(\lambda)\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}d\zeta = e^{-2\pi\lambda Z}.$$

Ainsi on a le droit de choisir une courbe $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$ indépendante de λ, à condition de remplacer (3.m) par

$$\text{(3.p)} \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{G}_n < \overset{+}{J}(\lambda;\, Y;\, X) > = J(\lambda)\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_{\mathcal{G}_n}} \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}d\zeta \\ \text{pour } \lambda \text{ extérieur au contour } \Gamma_{\mathcal{G}_n}; \\ \qquad = J(\lambda)\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_{\mathcal{G}_n}} \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}d\zeta + e^{-2\pi\lambda Z} \\ \text{pour } \lambda \text{ intérieur au contour } \Gamma_{\mathcal{G}_n}. \end{array}\right.$$

On doit donc remplacer la formule (3.n) dans laquelle $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$ est variable avec λ, par la formule suivante, où $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$ est cette fois indépendant de λ :

$$\text{(3.q)} \qquad \begin{array}{l} e^{2\pi\lambda_1 X}\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left\| J(\lambda)\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{\mathcal{G}_n}} \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}d\zeta\right\|_{L^1(-\infty,+\infty)} \\ \qquad + e^{2\pi\lambda_1 X}\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left\| e^{-2\pi\lambda Z}\right\|_{L^1(R_n,\, R'_n)} \leqslant C(X,\, Y) \end{array}$$

R_n, R'_n étant les deux points où la courbe $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$ rencontre l'axe réel. La deuxième somme est bornée par $e^{2\pi\lambda_1 X}\dfrac{e^{-2\pi R_2 X}}{2\pi X}$, et comme $R_2 > \lambda_1$, cette quantité est bornée pour $X \geqslant \varepsilon > 0$. Nous pouvons donc ne plus nous en occuper et il reste finalement à montrer la formule (3.n) mais où cette fois chaque courbe $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$ peut être choisie indépendamment de λ.

La suite des courbes $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$ sera alors choisie comme au § 10 de ma thèse. D'abord les rayons $R_n = R'_{n-1}$ seront choisis de façon à vérifier le théorème du minimum de Hadamard (théorème VII du § 1) soit $r_n - q \leqslant R_n \leqslant r_n + q$. Ce théorème nous donne une marge d'indétermination $2q$ pour le choix du rayon R_n; mais cette marge est très utile; après avoir vu, en effet, que les courbes $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$ peuvent être choisies indépendamment de λ, nous les choisirons de nouveau légèrement variables avec λ, mais pour une toute autre raison : pour que, à chaque valeur de λ réel, on ait toujours, lorsque ζ parcourt les $\Gamma_{\mathcal{G}_n}$, $|\zeta-\lambda| \geqslant q$, ce qui est possible grâce à la marge d'indétermination accordée à R_n par le théorème de Hadamard. On a alors

$$(3.r) \qquad \left| J(\lambda)\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{\mathcal{C}_n}} \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}d\zeta \right| \leqslant \frac{|J(\lambda)|}{q} \times \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{\mathcal{C}_n}} \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)}d\zeta \right|.$$

Ensuite il faut choisir ψ assez faible, de la même manière qu'au § 10 de ma thèse mais tel de plus que pour $\operatorname{Arg}\zeta = \pm\psi$ on ait pour $|\zeta|$ assez grand, $|J(\zeta)| \geqslant e^{-\varepsilon|\zeta|}$, quel que soit $\varepsilon > 0$; or pour presque toutes les valeurs de ψ, on a même, d'après le théorème VI du § 1 $|J(\zeta)| \geqslant e^{(2\pi A|\sin\psi| - \varepsilon)|\zeta|}$.

Nous choisirons également ψ de façon qu'aucune courbe $\Gamma_{\mathcal{C}_n}$ ne passe par un zéro de $J(\lambda)$. La démonstration se termine alors exactement comme celle du § 10 de ma thèse, avec la seule différence suivante : pour $\alpha > 0$, la série $\Sigma\, R_n\, e^{-\alpha R_n}$ est convergente non plus parce que $\lim\limits_{n\to\infty} R_n/n = +\infty$ mais parce que $\lim\limits_{n\to\infty}.\inf R_n/n > 0$.

Ainsi l'inégalité (3.e) est démontrée.

On démontrerait une inégalité analogue avec la suite partielle des $\{\lambda_\nu\}_{\nu<0}$, mais la fonction obtenue au premier membre serait holomorphe en $Z = X + iY$ pour $X < 0$, et $C(X, Y)$ serait bornée dans tout secteur angulaire $X \leqslant -\varepsilon$, $\left|\dfrac{Y}{X+\varepsilon}\right| \leqslant K$. En admettant la possibilité de faire tendre X vers 0 dans un cas comme dans l'autre, on représente ainsi $F(Y)$ comme somme d'une fonction holomorphe pour $X > 0$ et d'une fonction holomorphe pour $X < 0$. On préfère, en général, dans la théorie des séries trigonométriques, considérer $F(Y)$ comme la limite, pour $X \to 0$, d'une fonction $F(Y; X)$ harmonique pour $X > 0$.

On pose alors

$$(3.s) \qquad \bar{F}(Y; X) = \sum_{\nu<0} c_\nu\, e^{+2\pi\lambda_\nu \bar{Z}}; \qquad Z = X + iY;$$

$$\bar{F}(Y; X) = \sum_{\nu<0} \left(c_\nu\, e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\right) e^{-2\pi|\lambda_\nu| X}; \quad X > 0, \ Y \text{ réel quelconque}.$$

Si enfin on pose $\overset{0}{F} = c_0$ il vient

$$F(Y; X) = \overset{+}{F} + \overset{0}{F} + \overset{-}{F}$$

$$(3.t) \qquad F(Y; X) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left(c_\nu\, e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\right) e^{-2\pi|\lambda_\nu| X}.$$

L'extension de l'inégalité (3.e) donne alors :

THÉORÈME FONDAMENTAL.

Si $\Lambda = \{\lambda_\nu\}_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}$ *est un système de nombres réels tel que le système de vecteurs* $\{e_\nu\} = \{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$ *soit libre dans* $L^p(-A, +A)$, *à toute fonction* $F(Y) \in B_A^p(\Lambda)$ *on peut faire correspondre une fonction de deux variables* $F(Y; X)$ *possédant les propriétés :*

1° $F(Y; X)$ *est harmonique pour* $X > 0$, Y *quelconque;*

2° $F(Y; X)$ *admet le développement formel*

$$F(Y; X) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \left(c_\nu\, e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\right) e^{-2\pi|\lambda_\nu| X} \tag{3.t}$$

où les c_ν *sont les composantes de* $\vec{F}$ *suivant le système libre* $\{\vec{e_\nu}\}$.

Il existe un partage de la suite Λ *en une succession de groupes de termes consécutifs* $(\mathcal{G}_n)_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ *dépendant exclusivement de la suite* Λ, *et tel que la série*

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mathcal{G}_n < F(Y; X) >$$

soit normalement convergente dans tout secteur angulaire

$$(\varepsilon, K), \quad X \geqslant \varepsilon, \quad |Y/X - \varepsilon| \leqslant K.$$

3° *On a l'inégalité*

$$|F(Y; X)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |\mathcal{G}_n < F(Y; X) > | \leqslant C(X, Y)\|F\|_p \tag{3.u}$$

$C(X, Y)$ *restant bornée dans tout secteur angulaire* (ε, K). *Il en résulte que si des polynômes trigonométriques* $P_j(Y)$ *ou plus généralement des fonctions quelconques* $F_j(Y) \in B_A^p(\Lambda)$ *convergent dans* $L^p(-A, +A)$ *vers* $F(Y)$, *les* $F_j(Y; X)$ *convergent vers* $F(Y; X)$ *uniformément dans tout secteur angulaire* (ε, K) *et plus généralement on a, uniformément dans un tel secteur angulaire*

$$\lim_j \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |\mathcal{G}_n < F_j(Y; X) - F(Y; X) > | = 0.$$

Lorsque la fonction F est un polynôme trigonométrique $P(Y)$, alors $P(Y; X)$ est une fonction harmonique dans tout le plan des (Y, X) et qui pour $X = 0$, $-A \leqslant Y \leqslant +A$, prend les valeurs de $P(Y)$; autrement dit, $P(Y) = P(Y; 0)$. Mais pour une fonction quelconque $F(Y) \in B_A^p(\Lambda)$, rien ne dit qu'il y ait une liaison quelconque de cette nature entre $F(Y; X)$ et $F(Y)$, puisque nous n'avons étudié la fonction $F(Y; X)$ que pour $X > 0$. Cette liaison fait l'objet du prochain paragraphe.

§ 4. — **Rapports entre** F(Y; X) **et** F(Y).

Revenons à la fonction $\overset{+}{F}(Y; X)$. On a les formules

$$\overset{+}{F}(Y; X) = \int_{-A}^{+A} F(t)\, \overset{+}{\varphi}(t; Y; X)\, dt \tag{4.a}$$

$$\overset{+}{\varphi}(t; Y; X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{+}{J}(\lambda; Y; X)\, e^{2i\pi\lambda t}\, d\lambda \text{ [1]}. \tag{4.b}$$

Les fonctions $\overset{+}{\varphi}(t; Y; X)$ et $\overset{+}{J}(\lambda; Y; X)$ sont définies formellement par les formules (3.j); mais comme au § 10 de ma thèse, elles sont réellement définies par les séries, respectivement convergentes dans $C(-A, +A)$ et E^1_A :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \mathcal{G}_n < \overset{+}{\varphi}(t; Y; X) > \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathcal{G}_n < \overset{+}{J}(\lambda; Y; X) >.$$

La fonction $\overset{+}{J}(\lambda; Y; X)$ peut d'ailleurs être définie par une intégration dans le plan complexe

$$\overset{+}{J}(\lambda; Y; X) = J(\lambda)\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}\, d\zeta.$$

Γ est une courbe choisie de façon à assurer la convergence de l'intégrale; de plus elle entoure dans le sens direct les $\{\lambda_\nu\}_{\nu>0}$, n'entoure aucun des $\{\lambda_\nu\}_{\nu\leqslant 0}$, ni le point λ [2]. On peut s'affranchir de la variabilité de Γ avec λ comme nous l'avons vu au précédent paragraphe, en écrivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{+}{J}(\lambda; Y; X) = J(\lambda)\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}\, d\zeta \\ \text{pour } \lambda \text{ non entouré par } \Gamma; \\ \overset{+}{J}(\lambda; Y; X) = J(\lambda)\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}\, d\zeta + e^{-2\pi\lambda Z} \\ \text{pour } \lambda \text{ entouré par } \Gamma. \end{array}\right. \tag{4.c}$$

---

1. Nous nous supposons placés dans les mêmes conditions qu'au paragraphe précédent : système $\{\overrightarrow{e_\nu}\}$ non total, et fonction $J(\lambda)$ sommable sur l'axe réel; le lecteur se convaincra qu'ici comme avant, ces hypothèses n'altèrent pas la généralité des résultats.

2. Le sens du mot entourer est très clair lorsqu'il s'agit d'une courbe fermée simple. Lorsqu'il s'agit comme ici d'une courbe à branches infinies du type $|\text{Arg}\,\zeta| = \psi$, nous la considérons comme la limite d'une courbe fermée, définie par les deux segments de droite $(|\text{Arg}\,\zeta| = \psi,\ |\zeta| \leqslant R)$ et l'arc de cercle $(|\zeta| = R,\ |\text{Arg}\,\zeta| \leqslant \psi)$, lorsque $R \to \infty$.

De toute façon, $\overset{+}{J}(\lambda;\ Y;\ X)$ dépend du contour Γ, par les zéros, réels ou complexes, de $J(\lambda)$, n'appartenant pas à la suite Λ, et qui sont entourés par Γ. Mais nous avons vu que c'est sans importance.

Nous pourrons prendre pour courbe Γ l'ensemble des deux demi-droites $\operatorname{Arg}\zeta = \zeta$, $\operatorname{Arg}\zeta = -\psi$, la première parcourue de $|\zeta| = \infty$ à $|\zeta| = 0$, la deuxième de $|\zeta| = 0$ à $|\zeta| = \infty$. ψ est un angle choisi entre 0 et $\pi/2$, de façon que pour $\operatorname{Arg}\zeta = \pm\psi$, $J(\zeta)$ vérifie l'égalité (1.y); à tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut alors faire correspondre $r_0(\varepsilon)$ de façon que $r \geqslant r_0(\varepsilon)$ entraîne

$$(4.\text{d}) \qquad |J(re^{\pm i\psi})| \geqslant e^{2\pi(A|\sin\psi|-\varepsilon)\,r}.$$

On devra également choisir ψ de façon que Γ ne passe par aucun zéro de $J(\lambda)$; cela suppose en particulier $J(0) \neq 0$, donc que $\lambda_0 = 0$ n'appartient pas à la suite Λ. Nous nous placerons désormais dans cette hypothèse; le lecteur pourra voir que les résultats que nous en déduirons seront néanmoins généraux[1].

Voyons dans quelles conditions l'intégrale de la formule (4.c) est convergente. Pour $r \geqslant r_0(\varepsilon)$:

$$(4.\text{e}) \qquad \left|\frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)}\right| \leqslant e^{-2\pi r[X\cos\psi - |Y||\sin\psi| + A|\sin\psi| - \varepsilon]}.$$

Nous avons déjà montré (§ 3) comment, quels que soient X et Y, $X > 0$, on peut choisir ψ assez faible pour que cette intégrale soit convergente. *Nous nous intéresserons désormais uniquement aux valeurs de* Y *vérifiant* $|Y| \leqslant A - \delta$, δ *réel* > 0; mais nous nous permettrons de prendre $X \geqslant 0$. On a alors

$$\left|\frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)}\right| \leqslant e^{-2\pi r[\delta|\sin\psi| - \varepsilon]}$$

quel que soit $\varepsilon > 0$, pour $r \geqslant r_0(\varepsilon)$.

On voit donc que, une fois choisis $\delta > 0$ et ψ quelconque entre 0 et $\pi/2$, de façon à vérifier les conditions ci-dessus énumérées, on a uniformément dans la bande $X \geqslant 0$, $|Y| \leqslant A - \delta$

$$(4.\text{f}) \qquad \left|\frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)}\right| \leqslant e^{-\pi r|\delta\sin\psi|} \quad \text{pour} \quad r \geqslant r_0\left(\frac{\delta\,|\sin\psi|}{2}\right).$$

On voit même qu'il est avantageux de prendre ψ aussi proche de $\pi/2$ que possible. Les valeurs de $\psi > \dfrac{\pi}{2}$ ne sont d'ailleurs pas interdites; mais alors ψ

---

1. Si $\lambda_0 = 0 \in \Lambda$, on considérera au lieu de $F(Y)$ et $F(Y;\ X)$, les fonctions $F(Y) - c_0$, $F(Y;\ X) - c_0$, pour faire la démonstration.

devra être pris d'autant plus proche de $\pi/2$ que X est plus grand, de façon que $|X\cos\psi| < \delta \sin\psi$. De même on pourra donner à X des valeurs < 0, et prendre ψ soit indépendamment de X dans l'angle $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, soit en fonction de X dans l'angle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ de façon que l'on ait toujours $|X\cos\psi| < \delta \sin\psi$. Mais ce qui nous intéresse avant tout, c'est ceci : l'intégrale $\int_\Gamma \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}d\zeta$ est uniformément convergente à l'∞ pour λ réel, (X, Y) dans la bande $X \geqslant 0$, $|Y| \leqslant A-\delta$. Par ailleurs, l'intégrale restreinte à une portion finie de Γ est une fonction continue de λ, Y, X, dans les mêmes conditions, sauf cependant au voisinage de $\lambda = 0$, où elle présente une discontinuité de première espèce; mais elle reste bornée indépendamment de X, Y, λ. Il existe donc une constante $C(\delta)$, dépendant exclusivement de δ (une fois naturellement A et la suite Λ donnés) telle que

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}d\zeta\right| \leqslant C(\delta),$$

lorsque $X \geqslant 0$, $|Y| \leqslant A-\delta$, λ réel.

Nous pouvons donc écrire pour λ réel

$$(4.g)\quad \begin{cases} \overset{+}{J}(\lambda; Y; X) = \overset{+}{J}_1(\lambda; Y; X) + \overset{+}{J}_2(\lambda; Y; X); \\ \overset{+}{J}_1(\lambda; Y; X) = J(\lambda)\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{-2\pi\zeta Z}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}d\zeta; \\ \overset{+}{J}_2(\lambda; Y; X) = 0 \text{ pour } \lambda < 0; \quad e^{-2\pi\lambda Z} \text{ pour } \lambda > 0. \end{cases}$$

La fonction $\overset{+}{J}_1(\lambda; Y; X)$ est, lorsque (X, Y) décrit la bande $X \geqslant 0$, $|Y| \leqslant A-\delta$, une fonction continue de λ, Y, X, sauf au voisinage de $\lambda = 0$, où elle reste bornée; on a d'ailleurs $|\overset{+}{J}_1(\lambda; Y; X)| \leqslant |J(\lambda)| \times C(\delta)$ quels que soient λ réel, $X \geqslant 0$, $|Y| \leqslant A-\delta$.

Passons aux fonctions $\overset{+}{\varphi}$. Nous pourrons écrire

$$(4.h)\quad \begin{cases} \overset{+}{\varphi}(t; Y; X) = \overset{+}{\varphi}_1(t; Y; X) + \overset{+}{\varphi}_2(t; Y; X); \\ \overset{+}{\varphi}_1(t; Y; X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\lambda t}\,\overset{+}{J}_1(\lambda; Y; X)\,d\lambda; \\ \overset{+}{\varphi}_2(t; Y; X) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2\pi\lambda Z}\, e^{2i\pi\lambda t}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi(Z-it)}. \end{cases}$$

La fonction $\overset{+}{\varphi}_1(t; Y; X)$ est uniformément continue[1] en t, Y, X dans $|t| \leqslant A$, $X \geqslant 0$, $|Y| \leqslant A-\delta$.

---

1. Ce résultat est naturellement particulier aux conditions dans lesquelles nous nous

Passons enfin aux fonctions $\overset{+}{F}(Y; X)$.

$$(4.\text{i})\qquad \left\{\begin{aligned} &\overset{+}{F}(Y; X) = \overset{+}{F}_1(Y; X) + \overset{+}{F}_2(Y; X);\\ &\overset{+}{F}_1(Y; X) = \int_{-A}^{+A} F(t)\, \overset{+}{\varphi}_1(t; Y; X)\, dt;\\ &\overset{+}{F}_2(Y; X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{+A} \frac{F(t)\,dt}{Z - it}. \end{aligned}\right.$$

La fonction $\overset{+}{F}_1(Y; X)$ est uniformément continue dans la bande $X \geqslant 0$, $|Y| \leqslant A - \delta$. Le comportement de $\overset{+}{F}(Y; X)$ est donc analogue à celui de $\overset{+}{F}_2(Y; X)$. Or cette fonction a des propriétés classiques; elle a notamment été étudiée par MM. Fatou(1), Plessner(2), M. Riesz(3). On démontre ce qui suit :

1° Lorsque le point (ξ, η) tend vers le point $(0, Y)$, sur une courbe ayant une tangente non verticale, $\overset{+}{F}_2(\eta; \xi)$ a une limite, du moins pour presque toutes les valeurs de Y; cette limite est donnée par la formule suivante, où l'intégrale est presque partout convergente au sens de la valeur principale de Cauchy :

$$(4.\text{j})\qquad \overset{+}{F}_2(Y) = \frac{1}{2i\pi}\ \text{v. p.} \int_{-A}^{+A} \frac{F(t)\,dt}{Y - t} + \frac{1}{2} F(Y);$$

2° Si $F(Y) \in L^p(-A, +A)$, $1 < p < +\infty$, alors pour tout $X \geqslant 0$, $\overset{+}{F}_2(X; Y) \in L^p(-A, +A)$, et il existe une constante $K(p)$ dépendant exclusivement de p, telle que

$$(4.\text{k})\qquad \|\overset{+}{F}_2(Y; X)\|_{L^p(-A,+A)} \leqslant K(p)\, \|F(Y)\|_{L^p(-A,+A)}.$$

Lorsque $X \to 0$, la fonction $\overset{+}{F}_2(Y; X)$ converge vers $\overset{+}{F}_2(Y)$ dans $L^p(-A, +A)$;

3° Pour $p = \infty$ et $p = 1$, les résultats énoncés au 2° sont inexacts.

a) Si $F(Y) \in C(-A, +A)$, alors quels que soient p fini et $X \geqslant 0$,

---

sommes placés, c'est-à-dire $J(\lambda)$ sommable sur l'axe réel. Lorsqu'on sait seulement que le système $\{\overrightarrow{e_\nu}\}$ est libre, on peut dire que $\overset{+}{\varphi}_1(t; Y; X)$, en tant que vecteur de $L^{p'}(-A, +A)$ est fonction continue de (Y, X) pour $X \geqslant 0$, $|Y| \leqslant A - \delta$, et c'est cela seul qui nous importe.

1. Fatou [1].
2. Plessner [1].
3. M. Riesz [1].
Voir aussi Zygmund [1], p. 144-146; Titchmarsh [1], ch. v.

$\overset{+}{F}_2(Y;X) \in L^p(-A,+A)$ et il existe une constante $K(p)$ dépendant exclusivement de p, telle que

$$(4.1)\ (a) \qquad \|\overset{+}{F}_2(Y;X)\|_{L^p(-A,+A)} \leqslant K(p)\,\|F(Y)\|_{C(-A,+A)}.$$

D'autre part, $\overset{+}{F}_2(Y;X)$ converge, lorsque $X \to 0$, vers $\overset{+}{F}_2(Y)$, dans tous les $L^p(-A,+A)$, p fini.

b) Si $F(Y) \in L^1(-A,+A)$, alors quels que soient $p < 1$ et $X \geqslant 0$, $|\overset{+}{F}_2(Y;X)|^p \in L^1(-A,+A)$ et il existe une constante $K(p)$ dépendant exclusiment de p, telle que

$$(4.1)\ (b) \qquad \||\overset{+}{F}_2(Y;X)|^p\|_{L^1(-A,+A)} \leqslant K(p)\,\|F(Y)\|_{L^1(-A,+A)}.$$

Lorsque $X \to 0$, on a

$$\lim_{X\to 0} \||F_2(Y;X) - F_2(Y)|^p\|_{L^1(-A,+A)} = 0;$$

b') Enfin si non seulement $F(Y) \in L^1(-A,+A)$, mais encore

$$F(Y)\,\overset{+}{\log}\,|F(Y)| \in L^1(-A,+A),$$

alors pour tout $X \geqslant 0$, $\overset{+}{F}_2(Y;X) \in L^1(-A,+A)$ et il existe une constante K telle que

$$(4.1)\ (b') \qquad \|\overset{+}{F}_2(Y;X)\|_{L^1(-A,+A)} \leqslant K + K\,\|F(Y)\,\overset{+}{\log}\,|F(Y)|\,\|_{L^1(-A,+A)}$$

Dans ce cas, lorsque $X \to 0$, $\overset{+}{F}_2(Y;X)$ converge vers $\overset{+}{F}_2(Y)$ dans $L^1(-A,+A)$.

On en déduit le théorème général :

Théorème I.

Si le système de vecteurs $\{\overrightarrow{e_\nu}\} = \{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$ *est libre dans* $L^p(-A,+A)$ *alors la fonction* $\overset{+}{F}(Y;X)$ *définie au § 3 possède les propriétés suivantes :*

1° *Lorsque le point* (ξ,η) *tend vers le point* $(0,Y)$ *sur une courbe ayant une tangente non verticale,* $\overset{+}{F}(\eta;\xi)$ *a une limite, du moins pour presque toutes les valeurs de* Y *de l'intervalle* $(-A,+A)$. *Cette limite est donnée par*

$$(4.m) \qquad \overset{+}{F}(Y) = \int_{-A}^{+A} F(t)\,\overset{+}{\varphi}_1(t;Y)\,dt + \frac{\text{v. p.}}{2i\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{F(t)\,dt}{Y-t} + \frac{1}{2}F(Y)$$

où pour toute valeur de Y, $\overset{+}{\varphi}_1(t;Y)$ *est un vecteur de* $L^{p'}(-A,+A)$, *continu en* Y *pour* $Y \in\,]-A,+A[$, *tandis que la deuxième intégrale est convergente en valeur principale de Cauchy pour presque toutes les valeurs de* Y.

2° *Si* $1 < p < +\infty$, *alors quels que soient* $X \geqslant 0$ *et* $\delta > 0$,

$$\overset{+}{F}(Y; X) \in L^p(-A+\delta, A-\delta),$$

et il existe une constante $K(\delta, p)$ *dépendant exclusivement de* δ *et* p *(une fois* A *et la suite* Λ *donnés)*[1] *telle que*

$$(4.\text{n}) \qquad \|\overset{+}{F}(Y; X)\|_{L^p(-A+\delta, A-\delta)} \leqslant K(\delta, p)\|F(Y)\|_{L^p(-A, +A)}.$$

Lorsque $X \to 0$, $\overset{+}{F}(Y; X)$ *converge vers* $\overset{+}{F}(Y)$ *dans* $L^p(-A+\delta, A-\delta)$.

3° *a) Si* $p = \infty$, *alors quels que soient* $X \geqslant 0$, $\delta > 0$, q *fini*,

$$\overset{+}{F}(Y; X) \in L^q(-A+\delta, A-\delta)$$

et il existe une constante $K(\delta, q)$ *dépendant exclusivement de* δ *et* q, *telle que*

$$(4.\text{o})\ (a) \qquad \|\overset{+}{F}(Y; X)\|_{L^q(-A+\delta, A-\delta)} \leqslant K(\delta, q)\|F(Y)\|_{C(-A, +A)}.$$

Lorsque $X \to 0$, *la fonction* $\overset{+}{F}(Y; X)$ *converge vers* $\overset{+}{F}(Y)$ *dans* $L^q(-A+\delta, A-\delta)$.

b) Si $p = 1$, *alors quels que soient* $X \geqslant 0$, $\delta > 0$, $q < 1$,

$$|\overset{+}{F}(Y; X)|^q \in L^1(-A+\delta, A-\delta)$$

et il existe une constante $K(\delta, q)$ *dépendant exclusivement de* δ *et* q, *telle que*

$$(4.\text{o})\ (b) \qquad \||\overset{+}{F}(Y; X)|^q\|_{L^1(-A+\delta, A-\delta)} \leqslant K(\delta, q)\|F(Y)\|_{L^1(-A, +A)}.$$

Lorsque $X \to 0$, on a

$$\lim_{X \to 0} \||\overset{+}{F}(Y; X) - \overset{+}{F}(Y)|^q\|_{L^1(-A+\delta, A-\delta)} = 0;$$

b') Si $p = 1$, *et si en outre* $F(Y)\overset{+}{\log}|F(Y)| \in L^1(-A, +A)$ *alors quels que soient* $X \geqslant 0$ *et* $\delta > 0$, $\overset{+}{F}(Y; X) \in L^1(-A+\delta, A-\delta)$ *et il existe une constante* $K(\delta)$, *dépendant exclusivement de* δ, *telle que*

$$(4.\text{o})\ (b') \quad \|\overset{+}{F}(Y; X)\|_{L^1(-A+\delta, A-\delta)} \leqslant K(\delta) + K(\delta)\|F(Y)\overset{+}{\log}|F(Y)|\|_{L^1(-A, +A)}.$$

Dans ce cas, lorsque X *tend vers* 0, $\overset{+}{F}(Y; X)$ *tend vers* $\overset{+}{F}(Y)$ *dans* $L^1(-A+\delta, A-\delta)$.

Naturellement ce théorème ne résume pas *toutes* les propriétés de $\overset{+}{F}(Y; X)$; il est toujours utile le cas échéant de revenir aux formules (4.i).

---

1. Désormais nous ne répéterons plus cette phrase entre parenthèses; il est entendu que A et la suite Λ sont donnés.

Examinons maintenant $\overline{F}(Y; X)$. Nous aurons cette fois

$$
(4.p)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\overline{J}(\lambda; Y; X) = J(\lambda)\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma'}\frac{e^{2\pi\zeta\overline{Z}}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}d\zeta + e^{2\pi\lambda\overline{Z}} \\
\text{pour } \lambda \text{ réel} > 0; \\
\overline{J}(\lambda; Y; X) = J(\lambda)\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma'}\frac{e^{2\pi\zeta\overline{Z}}}{J(\zeta)(\lambda-\zeta)}d\zeta + e^{2\pi\lambda\overline{Z}} \\
\text{pour } \lambda \text{ réel} > 0;
\end{array}
\right.
$$

Γ' est une courbe formée des deux demi-droites

$$\operatorname{Arg}\zeta = \psi,\quad \operatorname{Arg}\zeta = -\psi\left(\frac{\pi}{2} < \psi < \pi\right),$$

la première parcourue de $|\zeta| = 0$ à $|\zeta| = \infty$, la deuxième de $|\zeta| = \infty$ à $|\zeta| = 0$. Mais, comme nous l'avons vu pour $\overset{+}{J}$, il n'est pas interdit de prendre $\psi < \pi/2$, ni $X < 0$; on voit alors facilement qu'on passe de $\overset{+}{J}_1$ à $\overline{J}_1$ par changement de signe, et substitution à Z de $-\overline{Z}$: on a donc

$$\overline{J}_1(\lambda; Y; X) = -\overset{+}{J}_1(\lambda; Y; -X).$$

Comme nous nous bornons à $X \geqslant 0$, cette formule n'a d'intérêt que pour $X = 0$, où elle donne

$$(4.q)\qquad \overline{J}_1(\lambda; Y) + \overset{+}{J}_1(\lambda; Y) \equiv 0\text{[1]}.$$

D'autre part $J_2(\lambda; Y; X) = 0$ pour $\lambda > 0$, $e^{+2\pi\lambda\overline{Z}}$ pour $\lambda < 0$.

On a ensuite une formule analogue à (4.h) avec toutefois $\overline{\varphi}_2(t; Y; X) = \dfrac{1}{2\pi(\overline{Z}+it)}$.
Les propriétés de l'intégrale

$$\overline{F}_2(Y; X) = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{F(t)\,dt}{\overline{Z}+it}$$

sont tout à fait analogues à celles qui ont été énoncées pour $\overset{+}{F}_2(Y; X)$, mais on a

$$\overline{F}_2(Y) = \frac{1}{2i\pi}\text{ v. p.}\int_{-A}^{+A}\frac{F(t)\,dt}{t-Y} + \frac{1}{2}F(Y).$$

On en déduit le théorème général :

---

1. Cette formule est spéciale aux conditions dans lesquelles nous nous sommes placés pour la démonstration : $\lambda_0 = 0 \;\overline{\in}\; \Lambda$. Sinon on aurait une formule $\overset{+}{J}_1 + \overset{0}{J}_1 + \overline{J}_1 \equiv 0$.

THÉORÈME II.

Dans les conditions énoncées au théorème I, les fonctions $\overline{F}(Y; X)$ *et* $\overline{F}(Y)$ *possèdent des propriétés tout à fait analogues à celles de* $\overset{+}{F}(Y; X)$ *et* $\overset{+}{F}(Y)$; *cependant la formule* (4.m) *admet pour formule correspondante :*

$$(4.r)\qquad \overline{F}(Y) = \int_{-A}^{+A} F(t)\,\overline{\varphi}_1(t;\,Y)\,dt + \frac{\text{v. p.}}{2i\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{F(t)\,dt}{t-Y} + \frac{1}{2}F(Y).$$

Examinons maintenant enfin la fonction $F(Y; X)$ elle-même. Dans le cas où nous nous sommes placés pour la commodité de la démonstration, $\lambda_0 = 0 \in \Lambda$, on a

$$F(Y; X) = \overset{+}{F}(Y; X) + \overline{F}(Y; X),$$
$$\varphi(t; Y; X) = \overset{+}{\varphi}(t; Y; X) + \overline{\varphi}(t; Y; X),$$
$$J(\lambda; Y; X) = \overset{+}{J}(\lambda; Y; X) + \overline{J}(\lambda; Y; X).$$

Mais nous avons vu que l'on a

$$\overset{+}{J}_1(\lambda; Y) + \overline{J}_1(\lambda; Y) = 0.$$

On a donc aussi
$$\overset{+}{\varphi}_1(t;\,Y) + \overline{\varphi}_1(t;\,Y) = 0$$
et
$$\overset{+}{F}_1(Y) + \overline{F}_1(Y) = 0.$$

Comme par ailleurs $\dfrac{1}{Z-it} + \dfrac{1}{\overline{Z}+it} = \dfrac{2X}{X^2+(Y-t)^2}$ nous pouvons écrire

$$(4.s)\qquad F(Y; X) = \int_{-A}^{+A}\varphi_1(t;\,Y;\,X)\,F(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{X\,F(t)\,dt}{X^2+(Y-t)^2}$$

le noyau $\varphi_1(t; Y; X)$ est pour tous les points X, Y, de la bande $X \geqslant 0$, $|Y| \leqslant A-\delta$, un vecteur de $L^{p'}(-A, +A)$ continu en X, Y; sa limite pour $X \to 0$ est $\varphi_1(t, Y) = 0$.

Ce résultat est d'ailleurs général; il est valable lorsque le système $\{\overrightarrow{e_\lambda}\}$ est libre dans $L^p(-A, +A)$ (même si $\lambda_0 = 0 \in \Lambda$).

Les propriétés de l'*intégrale de Poisson*

$$F_2(Y; X) = \frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{X\,F(t)\,dt}{X^2+(Y-t)^2}$$

sont également classiques, et nous énumérerons les principales(1) :

1. ZYGMUND [1], p. 85-86; NEVANLINNA [1], p. 174-196.

1° Lorsque le point (ξ, η) tend vers le point (o, Y) sur une courbe ayant une tangente non verticale, $F_2(\eta; \xi)$ tend vers $F(Y)$, du moins pour presque toutes les valeurs de Y.

Lorsque le point (ξ, η) tend vers le point (o, Y) d'une façon quelconque, $F_2(\eta; \xi)$ tend vers $F(Y)$ en tout point $Y \in]-A, +A[$ où la fonction $F(Y)$ est continue; si $F(Y)$ est continue dans un intervalle (a, b), la convergence est uniforme dans tout compact de $]a, b[$.

2° Si $F(Y) \in L^p(-A, +A)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ [2], alors pour tout $X \geqslant o$, $F_2(Y; X) \in L^p(-A, +A)$ et il existe une constante K telle que

$$\|F_2(Y; X)\|_{L^p(-A,+A)} \leqslant K \|F(Y)\|_{L^p(-A,+A)}. \tag{4.t}$$

Lorsque $X \to o$, $F_2(Y; X)$ converge vers $F(Y)$ dans $L^p(-A, +A)$; sauf pour $p = \infty$, où la convergence n'a lieu que dans tout $L^\infty(-A+\delta, A-\delta)$, $\delta > o$.

On en déduit le théorème général :

Théorème fondamental III.

Lorsque le système de vecteurs $\{\vec{e_\nu}\} = \{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$ *est libre dans* $L^p(-A, +A)$, *la fonction* $F(Y; X)$ *définie au théorème fondamental du § 3 possède les propriétés suivantes :*

1° *Lorsque le point* (ξ, η) *tend vers* (o, Y) *sur une courbe ayant une tangente non verticale,* $F(\eta; \xi)$ *tend vers* $F(Y)$, *du moins pour presque toutes les valeurs de* Y.

Lorsque le point (ξ, η) *tend vers le point* (o, Y) *d'une façon quelconque,* $F(\eta; \xi)$ *tend vers* $F(Y)$ *en tout point* $Y \in]-A, +A[$ *où* $F(Y)$ *est continue; si* $F(Y)$ *est continue dans un intervalle* (a, b), *la convergence est uniforme dans tout compact de* $]a, b[$;

2° *Pour tous* $X \geqslant o$, $\delta > o$, $F(Y; X) \in L^p(-A+\delta, A-\delta)$ *et il existe une constante* $K(\delta)$ *dépendant exclusivement de* δ, *telle que*

$$\|F(Y; X)\|_{L^p(-A+\delta, A-\delta)} \leqslant K(\delta) \|F(Y)\|_{L^p(-A,+A)}. \tag{4.u}$$

Lorsque $X \to o$, $F(Y; X)$ *converge vers* $F(Y)$ *dans* $L^p(-A+\delta, A-\delta)$.

Ce théorème nous montre que le comportement de $F(Y, X)$ pour $X \to o$ est le

2. Par $p = \infty$, nous entendons $C(-A, +A)$ et non $L^\infty(-A, +A)$.

même pour tous les développements trigonométriques possibles suivant des systèmes libres[1]; c'est celui de l'intégrale de Poisson $\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{F(t)\,X\,dt}{X^2+(Y-t)^2}$.

L'inégalité (4.u), dans le cas $p=\infty$, peut se combiner avec l'inégalité (3.u) et donne :

Théorème IV.

Si le système de vecteurs $\{\vec{e_\nu}\}$ *est libre dans* $C(-A, +A)$, *on a pour toute* $F(Y) \in B_A^\infty(\Lambda)$

$$|F(Y;X)| \leqslant C(X, Y)\,\|F(Y)\|_{C(-A,+A)} \tag{4.v}$$

où $C(X, Y)$ *reste bornée dans toute région, réunion d'un secteur angulaire* $X \geqslant \varepsilon$, $|Y/X-\varepsilon| \leqslant K$, $\varepsilon > 0$ *et d'une bande horizontale* $X \geqslant 0$, $|Y| \leqslant A-\delta$, $\delta > 0$.

En particulier si des $F_j(Y) \in B_A^\infty(\Lambda)$ *convergent vers* $F(Y)$ *dans* $C(-A, +A)$, *les* $F_j(Y;X)$ *convergent vers* $F(Y;X)$ *uniformément dans une telle région.*

Considérons dans le cas général, une fonction $F(Y) \in B_A^p(\Lambda)$ et écrivons son développement $F(Y)=\sum_\nu c_\nu e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}$. Formons le développement formel

$$\sum_\nu \pm i\, c_\nu e^{-2i\pi\lambda_\nu Y};$$

le signe $\pm$ devant i signifie que l'on prend $-i$ pour $\nu>0$, $+i$ pour $\nu<0$, 0 pour $\nu=0$. Ce développement sera appelé développement conjugué du premier[2]. Ce n'est peut être pas le développement formel d'une fonction $G(Y) \in L^p(-A, +A)$. Mais sa sommation par la méthode exponentielle

$$G(Y)=\lim_{X\to 0}\,[-i\,\overset{+}{F}(Y;X)+i\,\overline{F}(Y;X)]$$

définit presque partout la fonction $G(Y)$; son comportement dans tout intervalle $(-A+\delta, A-\delta)$, $\delta>0$, est analogue à celui de l'intégrale

$$G_2(Y)=\frac{\text{v. p.}}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{F(t)\,dt}{t-Y}.$$

---

1. Il n'est question ici que du développement $F(Y)=\Sigma\, c_\nu e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}$ où les c_ν sont les composantes de $\vec{F}$ suivant le système libre des $\{\vec{e_\nu}\}$, développement qu'on peut appeler développement de Fourier.

2. Zygmund [1], p. 1.

Les propriétés de cette intégrale sont analogues à celles de l'intégrale $\overset{+}{F}_{s}(Y)$ ou $\overline{F}_{s}(Y)$. Nous ne les redonnerons pas. Remarquons que le développement conjugué de celui de $G(Y)$ est celui de $-F(Y)+c_0$.

Rappelons enfin pour terminer cette étude que si le système $\{\overrightarrow{e_\nu}\}$ est une base, les propriétés trouvées pour $F(Y) \in B_A^p(\Lambda)$ sont valables pour toute fonction $F(Y) \in L^p(-A, +A)$.

Nous n'avons pas pu obtenir une caractérisation des fonctions $F(Y) \in B_A^p(\Lambda)$; les conditions que nous avons énoncées dans le précédent paragraphe et celui-ci comme nécessaires, ne sont sûrement pas suffisantes(1); on peut seulement énoncer la réciproque suivante :

Réciproque du théorème fondamental V.

Si une fonction $F(Y) \in L^p(-A, +A)$ *admet un développement formel*

$$F(Y) = \sum c_\nu e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}$$

possédant les propriétés suivantes :

1° *La série* $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mathcal{G}_n < F(Y;X) >$, *où* $\mathcal{G}_n < F(Y;X) > = \sum_{\lambda_\nu \in \mathcal{G}_n} \left(c_\nu e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\right) e^{-2\pi|\lambda_\nu|X}$, *est normalement convergente dans tout secteur angulaire* (ε, K), $X \geqslant \varepsilon$, $|Y/X - \varepsilon| \leqslant K$, $\varepsilon > 0$, *vers une fonction* $F(Y; X)$;

2° *Lorsque* $X \to 0$, $F(Y; X)$ *converge vers* $F(Y)$ *dans* $L^p(-A, +A)$; *alors* $F(Y) \in B_A^p(\Lambda)$, *et les* c_ν *sont les composantes de* $\overrightarrow{F}$ *suivant le système libre* $\{\overrightarrow{e_\nu}\}$.

La démonstration est immédiate : la fonction de Y : $F(Y; X)$, pour $X > 0$, est limite de polynômes trigonométriques $\sum_{n=-N}^{n=+N} \mathcal{G}_n < F(Y; X) >$, dans $L^p(-A, +A)$,

---

1. Faisons, en effet, l'hypothèse suivante : $J(\lambda)$ n'a pas d'autres racines que les $\lambda_\nu \in \Lambda$. Alors si à une fonction $F(Y) \in L^p(-A, +A)$ on fait correspondre, par extension, des composantes c_ν définies par les formules conventionnelles $c_\nu = \int_{-A}^{+A} F(t)\varphi_\nu(t)\,dt$, on peut former la série

$$F(Y; X) = \sum_\nu c_\nu e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} e^{-2\pi|\lambda_\nu|X};$$

elle possède exactement toutes les propriétés que nous avons énoncées pour $F(Y) \in B_A^p(\Lambda)$, car l'hypothèse $F(Y) \in B_A^p(\Lambda)$ n'intervient plus nulle part dans les démonstrations. Ainsi, donc $F(Y;X) \in B^p_A(\Lambda)$; mais comme pour $X \to 0$, $F(Y;X)$ converge vers $F(Y)$ dans $L^p(-A, +A)$, on a aussi $F(Y) \in B^p_A(\Lambda)$.

Les théorèmes fondamentaux des § 3 et 4 et leurs réciproques répondent ainsi dans une certaine mesure aux conditions posées à la fin du § 3 de ma thèse :

1° Nous avons obtenu des conditions pour que le système de nombres $\{c_\nu\}$ soit le système des composantes d'un vecteur de $B^p_A(\Lambda)$ suivant le système libre $\{\vec{e_\nu}\}$: mais il existe un petit écart entre les conditions nécessaires et les conditions suffisantes trouvées.

2° Pour une fonction $F(Y) \in B^p_A(\Lambda)$, tous les c_ν ne peuvent être nuls que si $F(Y) \equiv 0$. Chaque fonction $F(Y) \in B^p_A(\Lambda)$ est donc caractérisée par ses composantes.

Dans le cas où le système $\{\vec{e_\nu}\}$ est une base, cela signifie que le système biorthogonal normal associé est une base (dans le cas d'un espace vectoriel involutif, c'est-à-dire sauf pour $p = \infty$ et $p = 1$).

Nous ne referons pas dans ce chapitre, les remarques faites au chapitre I de ma thèse sur l'inévitabilité des groupements de termes $\mathcal{G}_n$. Remarquons seulement que si l'on définit l'indice de condensation de la suite Λ par $\Delta = \lim. \sup_{\nu \to \pm\infty} \frac{\log 1/|J'(\lambda_\nu)|}{|\lambda_\nu|}$ [1], les groupements $\mathcal{G}_n$ se réduisent chacun à un seul élément si $\Delta = 0$, et la convergence normale dans les secteurs angulaires peut être remplacée par la convergence normale dans les demi-plans $X \geqslant \varepsilon > 0$.

---

loin d'être caractéristiques de $B^p_A(\Lambda)$, les propriétés énoncées au théorème fondamental du § 3 et aux théorèmes I, II, III du § 4, sont vraies pour toute fonction $\in L^p(-A, +A)$. On doit plutôt les considérer comme des propriétés générales de développements non harmoniques de Fourier.

Cependant pour $F(Y) \notin B^p_A(\Lambda)$, la définition par extension des coefficients c_ν est purement arbitraire; il y aurait une infinité d'autres définitions possibles et qui n'aboutiraient pas au même résultat; tandis que pour $F(Y) \in B^p_A(\Lambda)$, les c_ν ont une définition unique.

1. Sous cette forme, l'indice de condensation dépend de la fonction $J(\lambda)$ choisie. Nous dirons que l'indice de condensation est la borne inférieure de tous les indices correspondant aux diverses fonctions $J(\lambda)$ possibles.

§ 5. — Applications à la théorie des fonctions analytiques et des séries trigonométriques.

Les applications à la théorie des fonctions analytiques sont tout à fait analogues à celles du chapitre I de ma thèse (§ 13 et 14); aussi insisterons nous fort peu sur les démonstrations. Dans cette théorie, $\Lambda = \{ \lambda_\nu \}_{\nu \geqslant 0}$ est une suite croissante de nombres réels $\lambda_\nu \geqslant 0$.

THÉORÈME I.

Si par un procédé de sommation linéaire régulier, la série de Dirichlet $\Sigma\, c_\nu\, e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$ *est uniformément convergente vers* $F(Z)$ *sur un segment vertical* $(X_0 + iY_1,\ X_0 + iY_2)$ *de longueur* $2L$ *assez grande pour que le système* $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ *soit libre dans* $C(-L, +L)$, *alors la série* $\sum_{n=1}^{n=\infty} \mathcal{G}_n(Z)$ $\left(\text{où } \mathcal{G}_n(Z) = \sum_{\lambda_\nu \in \mathcal{G}_n} c_\nu\, e^{-2\pi\lambda_\nu Z} \right)$ *est normalement convergente dans tout secteur angulaire* $X \geqslant X_0 + \varepsilon$, $|Y/(X - X_0)| \leqslant K$, ε *et* K *réels* > 0, *et sa somme, qui est ainsi holomorphe pour* $X > X_0$, *est continue sur le segment* $]X_0 + iY_1,\ X_0 + iY_2[$ *et identique, sur ce segment, à* $F(Z)$.

THÉORÈME II.

Si L *est le rayon de totalite de la suite* Λ; *si* A *est le plus petit nombre réel tel que la fonction* $F(Z)$ *soit représentable par la série de Dirichlet* $\Sigma\, c_\nu\, e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$, *normalement convergente par le procédé des groupements de termes* $\mathcal{G}_n$, *dans tout secteur angulaire* $X \geqslant A + \varepsilon$, $|Y/X - A| \leqslant K$, ε *et* K *réels* > 0, *alors tout segment de longueur* $> 2L$ *de la droite* $X = A$ *contient un point singulier de* $F(Z)$.

Si en particulier $L = 0$, *la droite* $X = A$ *est une coupure.*

Si en effet il n'en est pas ainsi, il existe un segment vertical de la droite $X = A$, que nous pouvons supposer être le segment $X = A$, $|Y| \leqslant B$, $B > L$, sur lequel le rayon de convergence du développement de Taylor de $F(Z)$ admet un minimum $R > 0$. La série

$$F(Z - R/2) = \sum \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{R}{2} \right)^n \frac{d^n F(Z)}{dZ^n}$$

est uniformément convergente sur ce segment; cela prouve, comme au théorème II du § 13 de ma thèse que la série $\Sigma\, c_\nu\, e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$ converge normalement, par le procédé des groupements de termes $\mathcal{G}_n$, sur tout secteur angulaire $X \geqslant A - R/2 + \varepsilon$, $|Y/(X - A + R/2)| \leqslant K$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur le nombre réel A.

En particulier, on déduirait de l'hypothèse III du § 2 que *si la densité maxima de la suite* Λ *est égale à* $2L$, *tout segment de longueur* $2L$ *de la droite* $X = A$ *contient un point singulier de* $F(Z)$.

Ce théorème est vrai et déjà connu[1]; nous montrerons au § 6 (théorème IX) qu'il est effectivement indépendant de l'hypothèse III.

Nous désignerons désormais par $B(\Lambda)$ la famille de toutes les fonctions analytiques $F(Z)$ représentées par des séries de Dirichlet $\Sigma\, c_\nu\, e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$; le domaine de convergence par le procédé des groupements de termes $\mathcal{G}_n$ n'est pas spécifié.

Théorème III.

Si le système $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$, $\lambda_\nu \in \Lambda$, *est libre dans* $C(-L, +L)$ *toutes les fonctions* $F(Z) \in B(\Lambda)$, *dont le développement de Dirichlet est convergent par le procédé des groupements de termes* $\mathcal{G}_n$, *dans le demi-plan* $X > X_0$, *et qui sont bornées en module par un même nombre* M *sur le segment vertical* $(X_0 + iY_1, X_0 + iY_2)$ *de longueur* $\geqslant 2L$, *forment une famille normale dans le demi-plan* $X > X_0$.

Dans la suite nous ne considérerons que des fonctions $F(Z) \in B(\Lambda)$ entières; si le rayon de totalité de Λ est fini, la convergence par le procédé des groupements de termes $\mathcal{G}_n$ a lieu dans tout le plan complexe. Nous adopterons les notations du § 14 de ma thèse et nous poserons

$$M(X;\, Y_1,\, Y_2) = \operatorname*{Max}_{Y_1 \leqslant \eta \leqslant Y_2} |F(X + i\eta)|.$$

Théorème IV (Majoration des coefficients).

Si le système $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$ *est libre dans* $C(-L, +L)$, *il existe une constante* $C(k)$ *dépendant exclusivement de l'indice* k, *de* L *et de la suite* Λ, *telle que*[2]

$$|c_k| \leqslant C(k)\, e^{2\pi\lambda_k X}\, M(X;\, Y_1,\, Y_2) \tag{5.a}$$

pourvu que $|Y_2 - Y_1| \geqslant 2L$.

1. Vl. Bernstein [1], p. 138 et 141.
2. Comparer à l'inégalité (10) de Mandelbrojt [1].

CONSÉQUENCE : *Dans aucune bande horizontale d'épaisseur* $\geqslant 2L$, $F(Z)$ *ne peut rester bornée sans être une constante; lorsque* $X \to -\infty$, $M(X; Y_1, Y_2)$ *croît plus vite que* e^{-AX}, $A > 0$ *quelconque, sans quoi* $F(Z)$ *est un polynôme de Dirichlet.*

THÉORÈME V (CROISSANCE DANS DES BANDES HORIZONTALES).

Il existe une constante $C(\varepsilon, Y_1, Y_2, Y'_1, Y'_2)$, ε *réel* > 0 *telle que*

$$C^{-1}(\varepsilon, Y_1, Y_2, Y'_1, Y'_2)\, M(X+\varepsilon; Y'_1, Y'_2) \leqslant M(X; Y_1, Y_2) \leqslant C(\varepsilon, Y_1, Y_2, Y'_1, Y'_2)\, M(X-\varepsilon; Y'_1, Y'_2) \tag{5.b}$$

pourvu que le système $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$ *soit libre dans* $C(-L, +L)$ *et que* $|Y_2 - Y_1| \geqslant 2L$, $|Y'_2 - Y'_1| \geqslant 2L$.

On pourrait d'ailleurs dans les mêmes conditions remplacer $M(X; Y_1, Y_2)$ par $M(X, +\infty; Y_1, Y_2)$; et aussi faire de même pour les deux autres expressions analogues.

Ce théorème montre que dans deux bandes horizontales quelconques, d'épaisseurs $\geqslant 2L$, les croissances de $|F(Z)|$ pour $X \to -\infty$ sont du même ordre de grandeur. Ce théorème a été en partie donné par Polya[1] lorsque la densité maxima de la suite Λ est $< 2L$; nous verrons au § 6 comment on peut retrouver dans ce cas ce théorème indépendamment de l'hypothèse III du § 2.

THÉORÈME VI.

Lorsque le système $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$ *est libre dans* $C(-L, +L)$ *et que l'indice de condensation de la suite* Λ *est nul, il existe une constante* $C(\varepsilon)$ *dépendant exclusivement de* ε *réel* > 0, *de* L *et de la suite* Λ *telle que*

$$\frac{1}{C(\varepsilon)} M(X+\varepsilon, +\infty) \leqslant M(X; Y_1, Y_2) \leqslant M(X, +\infty) \tag{5.c}$$

pourvu que $|Y_2 - Y_1| \geqslant 2L$.

Ce théorème montre que dans une bande horizontale d'épaisseur $\geqslant 2L$, la croissance $|F(Z)|$ pour $X \to -\infty$ est du même ordre de grandeur que la croissance totale définie par $M(X, +\infty)$.

---

1. POLYA [1], p. 622. L'indice de condensation de la suite Λ est supposé nul (série de Taylor). D'autre part notre théorème V est plus précis que le théorème IV de M. Polya.

M. Mandelbrojt a aussi donné un théorème analogue, moins précis que le nôtre mais où intervient la densité inférieure de la suite Λ (MANDELBROJT [1], théorème VII, p. 19). Ce théorème sera expliqué aux § 6 et 7.

On en déduit, si la fonction $F(Z)$ est d'ordre infini, en appliquant le théorème de Bieberbach[1], que *toute bande horizontale d'épaisseur* $\geqslant 2L$ *contient au moins une horizontale de Julia*[2]. Résultat qui reste vrai, indépendamment de l'hypothèse III du § 2, si l'on suppose seulement que la densité maxima de la suite Λ est $\leqslant 2L$.

Théorème VII.

Si le rayon de totalité de la suite Λ *est* L, *toute bande horizontale* $Y_1 \leqslant \eta \leqslant Y_2$ *d'épaisseur* $Y_2 - Y_1 \geqslant 2L$ *contient au moins une horizontale de Julia, à moins que pour* $\varepsilon > 0$ *assez petit,* $|F(Z)|$ *ne tende uniformément vers* ∞ *pour* $X \to -\infty$ *dans la bande* $Y_1 - \varepsilon \leqslant \eta \leqslant Y_2 + \varepsilon$[3].

Nous donnerons deux applications à la théorie des séries trigonométriques; la première est une conséquence de la deuxième, mais se démontre de façon bien plus simple. Dans ces deux théorèmes, $\Lambda = \{ \lambda_\nu \}_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}$ est un système de nombres réels de signe quelconque.

Théorème VIII.

Si le système $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ *est libre dans* $C(-L, +L)$, *une série trigonométrique* $\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} c_\nu e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}$ *ne peut converger vers* 0 *uniformément dans un intervalle de longueur* $\geqslant 2L$, *par un procédé de sommation linéaire régulier quelconque, sans que tous les* c_ν *soient nuls.*

En effet, les c_ν sont les composantes de la fonction 0 suivant le système libre des $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$.

Ce théorème ne repose donc absolument pas sur les résultats des § 3 et 4, mais sur le fait que le système $\{ e^{-2i\pi\lambda_\nu Y} \}$ est libre; la nature trigonométrique des fonctions n'a ici aucune importance.

Ce théorème nous donne une classe quasi-analytique de fonctions : les fonctions qui dans un intervalle (a, b) sont représentables par des développements trigonométriques $\Sigma\, c_\nu e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}$, les suites Λ n'étant pas précisées, mais de rayon de totalité nul : deux de ces fonctions ne peuvent coïncider sur un intervalle $(c, d) \subset (a, b)$ sans coïncider dans (a, b).

---

1. Bieberbach [1].
2. Polya [1], p. 626. Mandelbrojt [1], théorème IX, p. 21.
3. Voir Mandelbrojt [1], théorème IV, p. 16.

THÉORÈME IX.

Si le système $\{e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}\}$ *est libre dans* $C(-L, +L)$, *une série trigonométrique* $\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} c_\nu e^{-2i\pi\lambda_\nu Y}$ *ne peut converger uniformément dans un intervalle de longueur* $> 2L$, *par un procédé de sommation linéaire régulier quelconque, vers une fonction analytique* $F(Y)$, *que si la série converge, par le procédé des groupements de termes* $\mathcal{G}_n$, *uniformément dans tout intervalle fini, vers une fonction* $F(Y)$ *analytique pour tout* Y *réel.*

En effet la fonction $F(Z)$ est somme de trois fonctions analytiques : $\overset{+}{F}(Y; X)$ holomorphe en $X + iY = Z$ pour $X > 0$, $\overset{o}{F}$ constante, $\overline{F}(Y; -X)$ holomorphe en $X + iY = Z$ pour $X < 0$[1]. On peut écrire

$$\overset{+}{F}(Y; X) = F(Z) - \overset{o}{F} - \overline{F}(Y; -X);$$

si (a, b) est un intervalle de longueur $> 2L$ intérieur à l'intervalle considéré, chacune de ces trois fonctions est continue sur (a, b) et holomorphe pour $X < 0$, donc aussi $\overset{+}{F}(Y; X)$; mais $\overset{+}{F}(Y; X)$ est déjà continue sur (a, b) et holomorphe pour $X > 0$, donc $\overset{+}{F}(Y; X)$ est encore holomorphe sur tout intervalle fermé de $]a, b[$. Il existe alors sur la droite $X = 0$ un segment de longueur $> 2L$ sans point singulier de $\overset{+}{F}(Y; X)$; d'après le théorème II, $\overset{+}{F}(Y; X)$ est analytique sur toute la droite $X = 0$ et la série $\sum_{n>0} \mathcal{G}_n < \overset{+}{F}(Y; X) >$ est uniformément convergente sur tout segment fini de cette droite. Comme $\overline{F}(Y; -X)$ possède la même propriété, on voit bien que $F(Y)$ est analytique pour tout Y réel et que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_n < F(Y) >$ converge uniformément sur tout segment fini.

---

1. Voir § 3.

§ 6. — Fonctions $e^{-2\pi\lambda Z}$ sur un compact convexe.

Soit **K** un ensemble compact convexe du plan des (X, Y). Nous appellerons H(**K**) l'espace vectoriel des fonctions holomorphes dans l'intérieur de **K** continues sur sa frontière, normé par

$$\| F(Z) \|_{H(\mathbf{K})} = \underset{Z \in \mathbf{K}}{\mathrm{Max}} | F(Z) |$$

H(**K**) est un espace vectoriel complet.

On peut se proposer l'étude dans H(**K**) de la totalité et de la liberté d'un système de vecteurs $\{ e^{-2\pi\lambda_\nu Z} \}$, $\lambda_\nu \in \Lambda$; Λ étant un système de nombres réels rangés par valeurs croissantes, $\lambda_\nu > 0$ pour $\nu > 0$, $\lambda_\nu < 0$ pour $\nu < 0$, $\lambda_0 = 0$ éventuellement. Le premier chapitre de ma thèse, du moins au § 12, correspond au cas où **K** est un segment horizontal (dans le reste du chapitre, les λ_ν sont > 0, et **K** est une demi-droite horizontale, donc un ensemble fermé non compact); l'étude qui précède ce paragraphe au cas où **K** est un segment vertical. Dans ce paragraphe nous ferons une étude *trés incomplète* du cas général, et sans indiquer les démonstrations.

Théorème I.

Une condition nécessaire et suffisante de totalité du système $\{ e^{-2\pi\lambda_\nu Z} \}$ *est la non existence d'une fonction analytique* $J(\lambda) \not\equiv 0$, *de la forme*

$$J(\lambda) = \int e^{-2\pi\lambda Z} \, d\Phi(Z) \tag{6.a}$$

(où $[\Phi(Z)]$ *est une distribution de masses sur la frontière du convexe* **K**), *et qui vérifie*

$$J(\lambda_\nu) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad \lambda_\nu \in \Lambda. \tag{6.b}$$

On aurait naturellement une condition analogue pour la liberté du système, mais il faut remplacer la fonction $J(\lambda)$ par un système de fonctions $\{ J_k(\lambda) \}_{k=-\infty}^{k=+\infty}$, et (6.b) par

$$J_k(\lambda_\nu) = \delta_{k\nu}. \tag{6.c}$$

Nous sommes donc amenés à étudier les fonctions de la forme (6.a).

$J(\lambda)$ est une fonction analytique entière de type exponentiel, vérifiant quels que soient r et φ

$$| J(re^{i\varphi}) | \leqslant C e^{2\pi r \underset{(X,Y) \in \mathbf{K}}{\mathrm{Max}} (Y \sin\varphi - X \cos\varphi)} \tag{6.d}$$

où $C = \int | d\Phi(Z) |$.

Introduisons la fonction d'appui $h(\varphi)$ du convexe $\mathbf{K}$(1) :

$$h(\varphi) = \max_{(X,Y) \in \mathbf{K}} (X \cos \varphi + Y \sin \varphi).$$

Donc

$$\text{(6.e)} \qquad |J(re^{i\varphi})| \leqslant C\, e^{2\pi r\, h(\pi-\varphi)}.$$

La fonction indicatrice de $J(\lambda)$ est donc $\leqslant 2\pi h(\pi - \varphi)$ et son diagramme indicateur est contenu dans $\mathbf{K}_1$, homothétique dans le rapport 2π par rapport à o du symétrique par rapport à l'axe des Y du convexe $\mathbf{K}$.

Une inégalité de la forme (6.e) n'entraîne pas nécessairement que $J(\lambda)$ soit de la forme (6.a); mais l'inégalité plus restrictive

$$\text{(6.f)} \qquad |J(re^{i\varphi})| \leqslant \frac{C}{1+r^2}\, e^{2\pi r\, h(\pi-\varphi)}$$

entraîne (6.a)(2), (et même dans ce cas $\Phi(Z)$ est absolument continue, $\Phi(Z) = \varphi(Z)\,dZ$, $\varphi(Z)$ est holomorphe à l'extérieur de $\mathbf{K}$ et nulle à l'∞.)

Nous pouvons donc énoncer :

Théorème II.

Si le système $\{e^{-2\pi\lambda_\nu Z}\}$ *est non total dans* $H(\mathbf{K})$, *il existe une fonction* $J(\lambda)$ *analytique entière* $\not\equiv 0$, *vérifiant* (6.e) *et* (6.b); *réciproquement s'il existe une telle fonction* $J(\lambda)$ *le système est peut être total, mais d'excès 1 au plus.*

Théorème III.

Un système non total $\{e^{-2\pi\lambda_\nu Z}\}$ *dans* $H(\mathbf{K})$ *est toujours libre;*
Un système total est une base, ou bien chaque vecteur est dépendant des autres.

Si $J(\lambda) = \int e^{-2\pi\lambda Z}\, d\Phi(Z)$ est la fonction associée au système non total, on peut prendre pour système de fonctions $\{J_k(\lambda)\}$(3)

$$\text{(6.g)} \qquad J_k(\lambda) = \frac{J(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)\, J'(\lambda_k)} = \int e^{-2\pi\lambda Z}\, \varphi_k(Z)\, dZ$$

$$\text{(6.h)} \qquad \text{avec} \quad \varphi_k(Z) = \frac{2\pi}{J'(\lambda_k)}\, e^{2\pi\lambda_k Z} \int_{Z_0}^{Z} e^{-2\pi\lambda_k u}\, d\Phi(u).$$

---

1. Voir § 1.
2. (6.a) définit $J(\lambda)$ comme la transformée de Borel-Stieltjes de Φ; si Φ est absolument continue, $d\Phi = \varphi(Z)dZ$, on a la transformation de Borel. Voir Polya [1], p. 578 et suiv. Borel [1], ch. IV; Doetsch [1], ch. V.
3. En supposant que $J(\lambda)$ n'ait que des racines simples; on peut toujours se ramener à ce cas.

Il résulte du théorème III que la théorie de l'excès et du défaut (théorème VII du § 2) est valable dans le cas général. Nous considérons comme probable la non existence du système ayant un défaut ou un excès fini, en dehors du cas où **K** est un segment vertical; mais en l'absence de preuve, nous devons nous contenter du théorème III et de ses conséquences.

Donnons maintenant quelques théorèmes de totalité et non totalité.

THÉORÈME IV.

Si **K** *est un segment de droite non vertical, la condition nécessaire et suffisante de totalité est la divergence de* $\sum\limits_{\lambda_\nu \neq 0} 1/|\lambda_\nu|$.

THÉORÈME V [*Carleman*(1)].

Si $\{\lambda_\nu\}_{\nu>0}$ *est une suite de nombres réels* >0 *telle que*

$$\text{(6.i)} \qquad \limsup_{R\to+\infty} \frac{\sum\limits_{\lambda_\nu<R} 1/\lambda_\nu}{\log R} = 2L,$$

le système $e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$ *est total et d'excès infini dans* H(**K**), *où* **K** *est n'importe quel rectangle à côtés horizontaux et verticaux, de dimension verticale* $< 2L$.

Il est bon de remarquer qu'une densité supérieure de la suite $\{\lambda_\nu\}$ égale à $2L$ ne suffit pas pour entraîner (6.i).

THÉORÈME VI.

Si la densité supérieure de la suite $\{\lambda_\nu\}_{\nu>0}$ *est* $2L$, *le système* $\{e^{\pm 2\pi\lambda_\nu Z}\}$ *est non total et de défaut infini dans* H(**K**), *lorsque* **K** *est un disque* $|Z-Z_0| \leqslant R$ *de rayon* $R > L$.

En effet, de $\limsup\limits_{\nu\to\infty} \nu/\lambda_\nu = 2L$ on déduit que la fonction $J(\lambda) = \Pi(1-\lambda^2/\lambda_\nu^2)$ vérifie pour $r \to \infty$ $|J(re^{i\varphi})| \leqslant e^{2\pi(L+\varepsilon)r}$, quel que soit $\varepsilon > 0$; donc pour tout r elle vérifie $|J(re^{i\varphi})| \leqslant \dfrac{C\, e^{2\pi R r}}{1+r^2}$, c. q. f. d.

---

1. CARLEMAN [1], p. 6.

Ce théorème constitue une sorte de réciproque du théorème de Carleman. Il montre que si la densité supérieure de la suite $\{\lambda_\nu\}_{\nu>0}$ est finie, sa densité maxima infinie, le système $\{e^{\pm 2\pi\lambda_\nu Z}\}$ est total sur un segment de droite de dimension et d'orientation quelconques, mais ne l'est que sur des rectangles ayant au moins une dimension bornée.

Théorème VII.

Si la densité maxima de la suite $\{\lambda_\nu\}_{\nu>0}$ *est* $2L$, *le système* $\{e^{\pm 2\pi\lambda_\nu Z}\}$ *est non total dans* $H(\mathbf{K})$ *et de défaut infini, lorsque* $\mathbf{K}$ *est un rectangle à côtés horizontaux et verticaux, de dimension verticale* $> 2L$ *de dimension horizontale* > 0 *quelconque.*

En effet la suite $\{\lambda_\nu\}_{\nu>0}$ est contenue dans une suite $\{\alpha_\nu\}_{\nu>0}$ de densité exacte $2L$. La fonction $J(\lambda) = \Pi\left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha_\nu^2}\right)$, du fait de l'existence de $\lim\limits_{\nu\to\infty} \nu/\alpha_\nu = 2L$, a pour diagramme indicateur le segment imaginaire $(-2i\pi L, +2i\pi L)$. On peut donc écrire, C étant une constante,

$$|J(re^{i\varphi})| \leqslant \frac{C}{1+r^2}\, e^{2\pi r[(L+\varepsilon)|\sin\varphi| + \eta|\cos\varphi|]}.$$

Cela prouve que le système $\{e^{\pm 2\pi\alpha_\nu Z}\}$ est non total dans $H(\mathbf{K})$, lorsque $\mathbf{K}$ est un rectangle à côtés horizontaux et verticaux, de dimension verticale $2L + 2\varepsilon$, de dimension horizontale 2η, c. q. f. d.

Ce théorème peut aussi être considéré comme réciproque du théorème de Carleman ; nous le considérerons surtout comme réciproque du théorème de N. Levinson (théorème II du § 2), en l'absence de démonstration de l'hypothèse III du § 2.

Supposons maintenant le système $\{e^{-2\pi\lambda_\nu Z}\}$ libre dans $H(\mathbf{K})$, et proposons-nous d'étudier l'adhérence $B_{\mathbf{K}}(\Lambda)$ du sous-espace vectoriel engendré par ce système. Pour $F(Z) \in B_{\mathbf{K}}(\Lambda)$, on peut poser[1] $F(Z) \sim \underset{\nu}{S}\, c_\nu\, e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$; posons également

$$(6.j)\qquad \begin{cases} \overset{+}{F}(Z) \sim \underset{\nu>0}{S}\, c_\nu\, e^{-2\pi\lambda_\nu Z}; \\ \overset{\circ}{F} = c_0 \ \text{(éventuellement)}; \\ \overline{F}(Z) = \underset{\nu<0}{S}\, c_\nu\, e^{-2\pi\lambda_\nu Z}. \end{cases}$$

Nous énoncerons le théorème suivant, que nous appellerons propriété (P) :

---

1. Voir formule (3.d) de ma thèse.

PROPRIÉTÉ P VIII.

1° *La fonction* $\overset{+}{F}(Z)$ *est holomorphe dans le demi-plan* $X + h(\pi) > 0$.

2° *Il existe un partage de la suite* Λ *en une succession de groupes de termes consécutifs,* $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_n, \ldots$ *dépendant exclusivement de la suite* Λ, *telle que la série* $\sum_{n>0} \mathcal{G}_n < \overset{+}{F}(Z) >$ *converge normalement dans tout secteur angulaire*

$$X + h(\pi) \geqslant \varepsilon, \quad \left| \frac{Y}{X + h(\pi)} \right| \leqslant K, \ \varepsilon, \ K. \ \textit{réels} > 0.$$

3° *On a l'inégalité*

$$(6.k) \qquad |\overset{+}{F}(Z)| \, e^{2\pi\lambda_1 X} \leqslant \sum_{n>0} e^{2\pi\lambda_1 X} \, |\mathcal{G}_n < \overset{+}{F}(Z) > | \leqslant C(X, Y) \, \|F\|_{H(\mathbf{K})}$$

$C(X, Y)$ *étant une constante dépendant exclusivement de* X, Y, *du convexe* $\mathbf{K}$ *et de la suite* Λ; *elle reste bornée dans tout secteur angulaire du type ci-dessus défini.*

Nous n'énonçons pas cette propriété comme un théorème, *car elle n'est pas exacte* pour n'importe quel convexe K et n'importe quel système libre $\{ e^{-2\pi\lambda_\nu Z} \}$ dans $H(K)$. *Elle est cependant exacte toutes les fois que* K *est un segment de droite, et lorsque* K *est un rectangle à côtés horizontaux et verticaux dans les conditions énoncées au théorème de non totalité VII.*

Il nous reste enfin à passer aux applications à la théorie des séries de Dirichlet. Les théorèmes sont analogues à ceux des § 13 et 14 de ma thèse (dans lesquels K est un segment horizontal) et du § 5 de ce mémoire (dans lesquels K est un segment vertical); nous les énoncerons rapidement sans démonstration; nous nous bornerons d'ailleurs au cas où la densité maxima de la suite $\Lambda = \{ \lambda_\nu \}_{\nu > 0}$ est $2L$, et où K est un rectangle à côtés horizontaux et verticaux (théorème de non totalité VII).

Appelons $B(\Lambda)$ l'ensemble des fonctions $F(Z)$ développables en série de Dirichlet $\Sigma \, c_\nu \, e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$, $\lambda_\nu \in \Lambda$, convergente par le procédé des groupements de termes $\mathcal{G}_n$.

THÉORÈME DE VL. BERNSTEIN [1] IX.

Si A *est le plus petit nombre réel tel que la série* $\Sigma \, \mathcal{G}_n < F(Z) >$ *converge normalement dans tout secteur angulaire* $X \geqslant A + \varepsilon$, $|Y/(X-A)| \leqslant K$, ε et K réels > 0, *tout segment de longueur* $2L$ *de la droite* $X = A$ *contient au moins un point singulier de* $F(Z)$.

---

1. Vl. BERNSTEIN [1], p. 138 et p. 141; POLYA [1], p. 626. Voir th. II du § 5.

Théorème X.

Toutes les fonctions $F(Z) \in B(\Lambda)$, *dont le développement de Dirichlet est convergent par le procédé des groupements de termes* $\mathcal{G}_n$ *dans le demi-plan* $X > X_0$ *et qui sont bornées en module par un même nombre* M *sur un rectangle* $X_0 \leqslant X \leqslant X'_0$, $Y_1 \leqslant Y \leqslant Y_2$, $Y_2 - Y_1 > 2L$, *forment une famille normale dans le demi-plan* $X > X_0$.

Théorème XI (Majoration des coefficients).

Il existe une constante $C(\varepsilon, k)$ *telle que*

$$|c_k| \leqslant C(\varepsilon, k)\, M(X_1, X_2; Y_1, Y_2)\, e^{2\pi\lambda_k X_1} \tag{6.1}$$

avec $X_2 - X_1 \geqslant \varepsilon$, $Y_2 - Y_1 \geqslant 2L + \varepsilon$.

Théorème XII (Croissance dans des bandes horizontales).

Il existe une constante $C = C(\varepsilon, a, Y_1, Y_2, Y'_1, Y'_2)$ $(\varepsilon, a, > 0)$ *telle que*

$$\begin{aligned} M(X, X+a; Y_1, Y_2) &\leqslant C\ \ M(X-\varepsilon, X+a-\varepsilon; Y'_1, Y'_2) \\ M(X, X+a; Y_1, Y_2) &\geqslant C^{-1} M(X+\varepsilon, X+a+\varepsilon; Y'_1, Y'_2) \end{aligned} \tag{6.m}$$

dès que $Y_2 - Y_1 > 2L$, $Y'_2 - Y'_1 > 2L$.

Ce théorème montre que dans deux bandes horizontales d'épaisseur $> 2L$, les croissances de $|F(Z)|$ pour $X \to -\infty$ sont du même ordre de grandeur.

Théorème XIII.

Si l'indice de condensation de la suite Λ *est nul, il existe une constante* $C = C(\varepsilon, \eta, a)$ *telle que*

$$C^{-1} M(X+\varepsilon, +\infty) \leqslant M(X, X+a; Y_1, Y_2) \leqslant M(X, +\infty) \tag{6.n}$$

pourvu que $Y_2 - Y_1 \geqslant 2L + \eta$.

Ce théorème montre que dans toute bande horizontale d'épaisseur $> 2L$, la croissance de $|F(Z)|$ pour $X \to -\infty$ est de l'ordre de grandeur de sa croissance totale définie par $M(X, +\infty)$(1). En particulier, d'après le théorème de Bieberbach, *si* $F(Z)$ *est d'ordre* ∞, *toute bande horizontale d'épaisseur* $\geqslant 2L$, *contient une horizontale de Julia*(2). Le théorème 7 du § 5 est d'ailleurs également vrai.

---

1. Voir Polya [1], p. 626.
2. *Ibid.*

On pourrait étudier le cas où K est un disque $|Z - Z_0| \leqslant R$, et appliquer le théorème de non totalité VI. Dans ce cas la propriété VIII n'est pas vérifiée, mais on peut de toute façon déduire des applications de l'indépendance du système $\{e^{-2\pi\lambda_\nu Z}\}$; de plus, moyennant une hypothèse de régularité du type $\liminf_{\nu \to \infty} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) > 0$, on a une propriété analogue à VIII, mais moins riche de contenu et d'applications.

Les théorèmes obtenus sont tous ceux de M. Mandelbrojt, où intervient la densité supérieure de la suite Λ[1].

On voit ainsi comment chaque particularisation du convexe K donne lieu à des théorèmes différents.

---

1. MANDELBROJT [1], chap. II.

§ 7. — Note sur les applications à la Théorie des fonctions analytiques.

L'origine de toutes les recherches concernant la distribution des points singuliers d'une série de Taylor ou de Dirichlet sur la frontière de son domaine de convergence, est la thèse de M. Hadamard[1]. Le premier théorème général qui ait été donné est du à Fabry[2] (1896). Il exprime que *si dans une série de Taylor* $\Sigma\, c_\nu\, z^{\mu_\nu}$, *la densité de la suite d'exposants* $\{\mu_\nu\}$ *est nulle, le cercle de convergence est une coupure.*

Le théorème des lacunes de Fabry a été par la suite notablement perfectionné, principalement par trois grands progrès :

1° En 1923, M. Polya[3] a étendu le théorème aux séries de Dirichlet, $\Sigma\, c_\nu\, e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$. L'étude approfondie de la densité de la suite $\{\lambda_\nu\}$, l'introduction des diverses densités lorsque cette suite n'est pas mesurable, ont permis de traiter des cas très généraux; toutefois l'indice de condensation de la suite $\{\lambda_\nu\}$ est toujours supposé nul, grâce à la condition restrictive $\lim\limits_{\nu\to\infty}.\inf(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu) > 0$.

Le théorème de M. Polya est le suivant :

Si dans une série de Dirichlet $\Sigma\, c_\nu\, e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$, *la densité maxima de la suite* $\{\lambda_\nu\}$ *est* D, *si en outre* $\lim\limits_{\nu\to\infty}.\inf(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu) > 0$, *tout segment de longueur* D *de la droite de convergence contient au moins un point singulier.*

2° Dans un mémoire de 1929, M. Polya[4] (qui cette fois se borne aux séries de Taylor) relie le problème à un problème bien plus général : celui de la répartition des directions de croissance maxima des fonctions entières. Pour une fonction entière $f(z)$, on peut définir un *ordre de Lindelöf* $(\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n)$ par :

$$(7.\mathrm{a})\qquad \lim_{r\to\infty}.\sup \frac{1}{\log_{n+1} r}\log\left\{\frac{\log \mathrm{M}(r)}{r^{\rho}(\log r)^{\rho_1}(\log_2 r)^{\rho_2}\ldots(\log_{n-1} r)^{\rho_{n-1}}}\right\} = \rho_n\ ^{(5)}.$$

D'une fonction de l'ordre $(\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n)$, on dit qu'elle est du type A si

$$(7.\mathrm{b})\qquad \lim_{r\to\infty}.\sup \frac{\log \mathrm{M}(r)}{r^{\rho}(\log r)^{\rho_1}\ldots(\log_n r)^{\rho_n}} = \mathrm{A}.$$

---

1. Voir réédition : HADAMARD [1], 1926.
2. FABRY [1].
3. POLYA [3], [4].
4. POLYA [1].
5. Dans cette formule, $\log_2 = \log\log r$, $\log_3 r = \log\log\log r$, ...
D'autre part $\mathrm{M}(r) = \mathrm{Max}_{|z|=r}\, |f(z)|$.

Pour une fonction du type A, on peut enfin introduire une indicatrice $h(\varphi)$ généralisant celle que nous avons définie pour les fonctions du type exponentiel :

$$(7.c) \qquad h(\varphi) = \lim_{r\to\infty}\text{. sup} \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r^\rho (\log r)^{\rho_1}\dots(\log_n r)^{\rho_n}}.$$

Une direction de croissance maxima est définie par un argument φ pour lequel $h(\varphi) = A$.

M. Polya démontre alors que :

pour la serie de Taylor $\Sigma c_\nu z^{\mu_\nu}$, *dont la suite d'exposants* $\{\mu_\nu\}$ *a une densité maxima* D, *tout angle* $\geqslant 2\pi D$ *contient au moins une direction de croissance maxima.*

C'est ce théorème fondamental qui, particularisé de deux façons différentes (d'une part pour les fonctions entières du type exponentiel, avec utilisation de la transformation de Borel, d'autre part pour les fonctions entières d'ordre infini, avec utilisation d'un théorème de Bieberbach) donne d'une part le théorème relatif à la distribution des points singuliers d'une fonction holomorphe sur son cercle de convergence, énoncé plus haut, d'autre part un théorème analegue sur la distribution des directions de Julia :

pour la série de Taylor $\Sigma c_\nu z^{\mu_\nu}$ *représentant une fonction entière d'ordre infini, et dont la suite d'exposants* $\{\mu_\nu\}$ *a une densité maxima* D, *tout angle* $\geqslant 2\pi D$ *contient au moins une direction de Julia.*

Le théorème XIII de notre § 6 améliore surtout les résultats de M. Polya en ce que nous introduisons dans nos majorations des constantes universelles, indépendantes des fonctions $f(z)$ étudiées, dépendant exclusivement de la suite des exposants $\{\mu_\nu\}$.

L'amélioration est surtout sensible pour les fonctions entières d'ordre infini.

3° M. Vl. Bernstein[1] semble être le premier à s'être occupé du cas où la suite $\{\lambda_\nu\}$ n'a pas un indice de condensation nul (1930-1933). En particulier l'introduction des groupements de termes $\mathcal{G}_n$, l'utilisation à cet effet du théorème du minimum de Hadamard, la définition de l'indice de condensation, sont dues à cet auteur. Nous avons énoncé le théorème de M. Vl. Bernstein dans notre théorème IX du § 6.

Signalons que M. Bernstein semble avoir abandonné le point de vue de M. Polya; la question des singularités d'une série de Dirichlet sur la droite d'holomorphie n'est pas reliée à des questions générales de croissance.

Dans tous les ouvrages précédents, aucune liaison n'existe entre la théorie des séries de Dirichlet et l'analyse fonctionnelle; aucun des auteurs précédents n'a donné

1. Vl. Bernstein [1].

d'inégalités valables pour toutes les fonctions correspondant à une suite d'exposants donnés. Aussi bien M. Polya que M. Bernstein, dans leurs démonstrations, utilisent systématiquement la fonction $J(\lambda) = \Pi\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_\nu^2}\right)$[1]; de même MM. Szasz, Szegö, Carleman, etc... dans leurs études sur les suites totales de vecteurs représentés par des exponentielles; mais la liaison entre les deux théories n'avait pas été faite.

C'est dans l'ouvrage de MM. Paley-Wiener[2] (1934), ouvrage d'analyse fonctionnelle, qu'existe pour la première fois à notre connaissance cette liaison entre les deux théories. De divers théorèmes généraux sur les séries de Fourier lacunaires, M. Wiener déduit une partie du théorème de Fabry :

Si $\lim\limits_{\nu \to \infty} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) = +\infty$, *la droite de convergence de* $\Sigma\, c_\nu\, e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$ *est une coupure.*

Ce résultat est encore éloigné du résultat définitif de M. Vl. Bernstein; M. Wiener signale (p. 127) qu'il faut sans doute de nouvelles méthodes, pour pousser plus loin les résultats et retrouver dans leur intégralité ceux de M. Bernstein. M. Ingham[3] en 1936 démontre par ses méthodes propres, que

Si lim. inf $(\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) = 1/2A$, *tout segment de longueur* $2A$ *de la droite de convergence de la série* $\Sigma\, c_\nu\, e^{-2\pi\lambda_\nu Z}$ *contient un point singulier.*

En 1936 également, M. Mandelbrojt déduit plusieurs théorèmes où intervient la densité supérieure de la suite Λ, d'une inégalité fondamentale[4] analogue à nos inégalités (5.a), (6.k), introduisant une constante universelle, dépendant exclusivement du système Λ. Nous avons vu comment les théorèmes de M. Mandelbrojt sont des cas particuliers de nos théorèmes généraux.

Les méthodes nouvelles utilisées dans notre étude (§ 10 de ma Thèse, § 3 et 4 de ce Mémoire) donnent des résultats s'appliquant à toutes les suites $\{\lambda_\nu\}$, sans aucune hypothèse de régularité; appliqués à la théorie des fonctions analytiques, ces résultats redonnent cette fois tous les théorèmes de Polya et Vl. Bernstein, mais sous une forme beaucoup plus générale, par des inégalités introduisant des constantes universelles, indépendantes des fonctions étudiées. Ces inégalités sont différentes suivant qu'on envisage les § 13 et 14 de ma thèse ou les § 5 et 6 de ce mémoire; en ce qui concerne leur application particulière aux théorèmes de Polya ou de Bernstein, les différences n'ont aucune importance; mais envisagées pour elles-mêmes ces inégalités ne peuvent pas être remplacées les unes par les autres; ainsi si la densité de la suite Λ est nulle, $F(Z)$ n'est bornée dans aucune *bande* horizontale, d'épaisseur

1. Ou des fonctions analogues.
2. Paley-Wiener [1].
3. Ingham [1].
4. Mandelbrojt [1], inégalité (10).

aussi petite que l'on veut, mais ce n'est que si la série $\Sigma\, 1/\lambda_\nu$ converge, que $F(Z)$ n'est bornée sur aucune *droite* horizontale, etc... Aussi pensons-nous que l'analyse fonctionnelle et l'étude de la totalité des systèmes $\{ e^{-2\pi\lambda_\nu Z} \}$ dans les différents espaces $H(\mathbf{K})$ est un fondement indispensable si l'on veut avoir dans sa totalité, la théorie des séries de Dirichlet lacunaires [1].

1. Nous pensons par contre que les résultats de M. Bourion [1] sont relativement indépendants de ces théories d'analyse fonctionnelle.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

S. BERNSTEIN [1] « *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle* ». Paris, 1926.

VL. BERNSTEIN [1] « *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet* ». Paris, 1933.

BIEBERBACH [1] « *Ueber eine Vertiefung des Picardschen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnung* ». Mathematische Zeitschrift, *3* (1919), p. 175-190.

BOREL [1] « *Leçons sur les séries divergentes* ». Paris, 1928.

BOURION [1] « *L'ultraconvergence dans les séries de Taylor* ». Paris, 1937.

CARLEMAN [1] « *Ueber die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen* ». Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. Svenska Vetenskapsakademien Bd. 17, n° 9, 1923.

DOETSCH [1] « *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* ». Berlin, 1937.

FABRY [1] « *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série* ». Annales de l'Ecole Normale Supérieure *13* (1896). p. 367-400.

FATOU [1] « *Séries trigonométriques et séries de Taylor* ». Acta Mathematica *30* (1906), p. 335-400.

HADAMARD [1] « *La série de Taylor et son prolongement analytique* ». 2e édition, Paris, 1926.

HARDY [1] « *The mean value of the modulus of an analytic function* ». Proceedings of the London Mathematical Society *14* (1914), p. 269-277.

INGHAM [1] « *Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series* ». Mathematische Zeitschrift *41* (1936), p. 367-379.

LEVINSON [1] « *Gap and density theorems* ». American Mathematical Society Colloquium Publications, New-York, 1940.

MANDELBROJT [1] « *Séries lacunaires* ». Paris, 1936.

NEVANLINNA [1] « *Eindeutige analytische Funktionen* ». Berlin, 1936.

PALEY AND WIENER [1] « *Fourier transforms in the complex domain* ». American Mathematical Society Colloquium Publications, New-York, 1934.

PHRAGMEN ET LINDELÖF [1] « *Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier* ». Acta Mathematica *31* (1908), p. 381-406.

PLESSNER [1] « *Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen* ». Mitteilungen der Mathematischen Seminar der Universität Giessen, *10* (1923), p. 1-36.

POLYA [1] « *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen* ». Mathematische Zeitschrift *29* (1929), p. 549-640.

— [2] Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, vol. 40 (1931).

— [3] « *Ueber die Existenz unendlich vieler singulärer Punkte auf der Konvergenzgerade gewisser Dirichletscher Reihen* ». Berliner Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1923, p. 45-50.

— [4] « *Eine Verallgemeinerung des Fabryschen Lückensatzes* ». Göttinger Nachrichten, 1927, p. 187-195.

M. RIESZ [1] « *Sur les fonctions conjuguées* ». Mathematische Zeitschrift *27* (1927), p. 218-244.

L. SCHWARTZ [1] « *Étude des sommes d'exponentielles réelles* ». Thèse, 1943.

SZASZ [1] Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, vol. 43 (1933).

TITCHMARSH [1] « *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* ». Oxford, 1937.

VALIRON [1] « *Sur le minimum du module des fonctions entières d'ordre* < 1 ». Cluj, institutal de arte grafice Ardeabul, Str. Memorandului, 22 (1935); extras din Mathematica, vol. XI, p. 264-269.

ZYGMUND [1] « *Trigonometrical series* », Monografje Matematyczne, Varsovie-Lwow, 1935.

TABLE DES MATIÈRES DE CE MÉMOIRE