ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HENRI ROURE

Sur une nouvelle classe de fonctions

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 6 (1942), p. 15-31

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1942_4_6__15_0>

SUR UNE NOUVELLE CLASSE DE FONCTIONS

Par M. Henri ROURE.

(Observatoire de Marseille.)

AVANT-PROPOS

1. Au cours de ses études sur les groupes, Émile Picard a été amené à former des fonctions de deux variables qui restent inaltérées pour toutes les substitutions d'un groupe qui transforme en elle-même une certaine forme quadratique, les substitutions du groupe ayant l'une des deux formes :

$$\left(x,\, y,\, \frac{ax+b}{cx+d},\, \frac{a'y+b'}{c'y+d'}\right),$$

$$\left(x,\, y,\, \frac{my+n}{py+q},\, \frac{m'x+n'}{p'x+q'}\right);$$

les substitutions sur chaque variable devant être faites simultanément. Il a appelé ces fonctions hyperabéliennes parce que le premier exemple s'était présenté à lui dans l'étude de certaines fonctions abéliennes.

Émile Picard a étudié aussi des fonctions de deux variables qu'il a appelées hyperfuchsiennes, et qui restent inaltérées pour toutes les substitutions d'un groupe linéaire :

$$\left(x,\, y,\, \frac{Ax+By+C}{A''x+B''y+C''},\, \frac{A'x+B'y+C'}{A''x+B''y+C''}\right)$$

ces substitutions devant transformer en elle-même une certaine forme quadratique.

De son côté, M. Fubini a étudié des fonctions de plus de deux variables qui restent inaltérées pour toutes les substitutions d'un groupe qui transforme en elle-même une forme quadratique à indéterminées conjuguées, et il les a appelées aussi hyperfuchsiennes.

Dans ce qui suit, nous nous proposons de définir des fonctions à plusieurs séries de variables, chaque série comprenant un nombre quelconque de variables; fonctions qui restent inaltérées lorsque chaque série de variables est soumise à toutes les substitutions d'un groupe linéaire portant sur les mêmes variables et qui transforme en elle-même une certaine forme quadratique.

Pour la facilité des démonstrations, nous étudierons seulement le cas de deux séries à deux variables, (x, y) d'une part et (z, t) d'autre part. Il va sans dire qu'il s'agit de variables complexes, mais les raisonnements s'appliquent aussi aux variables réelles. Nous étudierons donc des fonctions de quatre variables x, y, z, t, divisées en deux séries (x, y), (z, t), fonctions qui restent inaltérées quand on soumet les variables à toutes les substitutions des deux groupes :

$$\left(x, y, \frac{Ax + By + C}{A''x + B''y + C''}, \frac{A'x + B'y + C'}{A''x + B''y + C''}\right),$$

$$\left(z, t, \frac{Mz + Pt + R}{M''z + P''t + R''}, \frac{M'z + P't + R'}{M''z + P''t + R''}\right);$$

chacun de ces groupes devant transformer en elle-même une certaine forme quadratique à indéterminées conjuguées.

Nous nous sommes inspiré des travaux d'Émile Picard sur les fonctions hyperabéliennes et hyperfuchsiennes et aussi de ses travaux sur la réduction des formes quadratiques (*Acta Mathematica,* tome I, p. 297-320; tome V, p. 121-182; *Journal de Liouville,* 4e série, tome V, p. 87-128; *Annales de l'École Normale Supérieure,* janvier et février 1884).

Avant toute chose, nous devons démontrer que les groupes utilisés sont discontinus, puis nous formerons les fonctions que ces groupes laissent inaltérées.

CHAPITRE I

2. Nous avons à considérer deux formes quadratiques ternaires à indéterminées conjuguées sous la forme la plus générale :

$$F = axx_0 + a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b'zx_0 + b'_0z_0x + b''xy_0 + b''_0x_0y\,.$$

Nous savons, d'après les travaux de divers savants sur la réduction continuelle, que cette forme peut, par une substitution linéaire, être ramenée à la forme :

$$F = aUU_0 + bVV_0 + cWW_0\,.$$

C'est sous cette forme que nous prendrons les formes qui doivent être transformées en elles-mêmes.

Soient donc les deux formes :

$$\begin{aligned} F &= aUU_0 + bVV_0 + cWW_0\,, \\ F' &= a'U'U'_0 + b'V'V'_0 + c'W'W'_0\,; \end{aligned}$$

dans lesquelles les coefficients a, b, c, a' b' c' sont des nombres réels, les quantités U_0, V_0, W_0, U'_0, V'_0, W'_0 étant respectivement les conjuguées de U, V, W, U', V', W'. Soient aussi les substitutions :

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= Au + Bv + Cw, \\ V &= A'u + B'v + C'w, \\ W &= A''u + B''v + C''w; \end{aligned} \right. \qquad (\mathrm{I}') \quad \left\{ \begin{aligned} U' &= Mu' + Pv' + Rw', \\ V' &= M'u' + P'v' + R'w', \\ W' &= M''u' + P''v' + R''w'; \end{aligned} \right.$$

dont nous supposerons les coefficients réels et entiers (le cas des coefficients entiers complexes se traite de la même façon). Nous supposerons que les déterminants de ces substitutions sont égaux à l'unité.

Nous allons exprimer que ces substitutions transforment en elles-mêmes les formes F et F', c'est-à-dire que l'on doit avoir simultanément :

$$\begin{aligned} aUU_0 + bVV_0 + cWW_0 &= a\,.\,uu_0 + b\,.\,vv_0 + c\,.\,ww_0\,, \\ a'U'U'_0 + b'V'V'_0 + c'W'W'_0 &= a'u'u'_0 + b'v'v'_0 + c'w'w'_0\,. \end{aligned}$$

En remplaçant U, V, W, U', V', W' respectivement par leurs expressions (I) et (I'), et identifiant les deux membres, nous obtiendrons entre les coefficients A, B, C, d'une part, les coefficients M, P, R, d'autre part, les deux systèmes de relations :

$$\text{(II)}\quad \left\{\begin{aligned} &aA^2+bA'^2+cA''^2=a,\\ &aB^2+bB'^2+cB''^2=b,\\ &aC^2+bC'^2+cC''^2=c;\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &aAB+bA'B'+cA''B''=0,\\ &aAC+bA'C'+cA''C''=0,\\ &aBC+bB'C'+cB''C''=0.\end{aligned}\right.$$

$$\text{(II')}\quad \left\{\begin{aligned} &a'M^2+b'M'^2+c'M''^2=a',\\ &a'P^2+b'P'^2+c'P''^2=b',\\ &a'R^2+b'R'^2+c'R''^2=c';\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &a'MP+b'M'P'+c'M''P''=0,\\ &a'MR+b'M'R'+c'M''R''=0,\\ &a'PR+b'P'R'+c'P''R''=0.\end{aligned}\right.$$

En tenant compte des relations ci-dessus, les équations (I) et (I') se résolvent et donnent respectivement pour u, v, w, u', v', w' :

$$\left\{\begin{aligned} a.u&=aAU+bA'V+cA''W,\\ b.v&=aBU+bB'V+cB''W,\\ c.w&=aCU+bC'V+cC''W;\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} a'u'&=a'MU'+b'M'V'+c'M''W',\\ b'v'&=a'PU'+b'P'V'+c'P''W',\\ c'w'&=a'RU'+b'R'V'+c'R''W'.\end{aligned}\right.$$

et l'on voit aisément que les systèmes de relations (II) et (II') sont complètement équivalents aux deux systèmes :

$$\text{(III)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{A^2}{a}+\frac{B^2}{b}+\frac{C^2}{c}=\frac{1}{a},\\ &\frac{A'^2}{a}+\frac{B'^2}{b}+\frac{C'^2}{c}=\frac{1}{b},\\ &\frac{A''^2}{a}+\frac{B''^2}{b}+\frac{C''^2}{c}=\frac{1}{c};\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{AA'}{a}+\frac{BB'}{b}+\frac{CC'}{c}=0,\\ &\frac{AA''}{a}+\frac{BB''}{b}+\frac{CC''}{c}=0,\\ &\frac{A'A''}{a}+\frac{B'B''}{b}+\frac{C'C''}{c}=0.\end{aligned}\right.$$

$$\text{(III')}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{M^2}{a'}+\frac{P^2}{b'}+\frac{R^2}{c'}=\frac{1}{a'},\\ &\frac{M'^2}{a'}+\frac{P'^2}{b'}+\frac{R'^2}{c'}=\frac{1}{b'},\\ &\frac{M''^2}{a'}+\frac{P''^2}{b'}+\frac{R''^2}{c'}=\frac{1}{c'};\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{MM'}{a'}+\frac{PP'}{b'}+\frac{RR'}{c'}=0,\\ &\frac{MM''}{a'}+\frac{PP''}{b'}+\frac{RR''}{c'}=0,\\ &\frac{M'M''}{a'}+\frac{P'P''}{b'}+\frac{R'R''}{c'}=0.\end{aligned}\right.$$

Supposons tout d'abord que a, b, c d'une part et a', b', c' d'autre part soient de même signe; les équations de gauche des systèmes (III) et (III') montrent que les systèmes de valeurs des A, B, C et des M, P, R sont en nombre limité et qu'il n'y a qu'un nombre limité des substitutions qui transforment en elles-mêmes les formes F et F'. Le cas des coefficients de même signe est celui d'une forme définie; il n'y a donc qu'un nombre limité de substitutions qui transforment en elle-même une forme définie.

Supposons maintenant que les formes soient indéfinies, c'est-à-dire que les coefficients a, b, c, a', b', c' n'aient pas tous le même signe. Nous pouvons toujours supposer que l'on a :

$$\begin{array}{lll} a > 0, & b > 0, & c = -h < 0; \\ a' > 0, & b' > 0, & c' = -h' < 0. \end{array}$$

Dans ce cas, les mêmes équations des systèmes (III) et (III') montrent qu'il y a une infinité de substitutions à coefficients entiers et réels qui transforment les formes F et F' en elles-mêmes.

Nous nous proposons d'établir le résultat suivant :

3. Considérons les substitutions :

$$X = \frac{Ax + By + C}{A''x + B''y + C''}, \qquad Y = \frac{A'x + B'y + C'}{A''x + B''y + C''};$$

effectuées sur les variables x et y. Elles forment un groupe qui est discontinu pour tous les systèmes de valeurs tels que l'on ait :

$$a(x'^2 + x''^2) + b(y'^2 + y''^2) - h < 0,$$

où l'on a posé :

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy''.$$

En considérant les substitutions :

$$Z = \frac{Mz + Pt + R}{M''z + P''t + R''}, \qquad T = \frac{M'z + P't + R'}{M''z + P''t + R''};$$

on obtiendra un autre groupe discontinu pour tous les systèmes de valeurs de z et de t tels que l'on ait :

$$a'(z'^2 + z''^2) + b'(t'^2 + t''^2) - h' < 0,$$

en posant :

$$z = z' + iz'', \qquad t = t' + it''.$$

Les raisonnements étant identiques pour les deux groupes, nous nous occuperons seulement du premier.

Établissons tout d'abord une relation importante. Si nous posons :

$$X = \frac{U}{W}, \quad Y = \frac{V}{W}, \qquad x = \frac{u}{w}, \quad y = \frac{v}{w},$$

l'équation :

$$aUU_0 + bVV_0 + cWW_0 = a.uu_0 + b.vv_0 + c.ww_0$$

nous donnera la formule suivante :

$$\begin{aligned} &a(X'^2 + X''^2) + b(Y'^2 + Y''^2) - h \\ &= \frac{1}{\text{mod}^2(A''x + B''y + C'')} [a(x'^2 + x''^2) + b(y'^2 + y''^2) - h], \end{aligned}$$

en posant :

$$X = X' + iX'', \qquad Y = Y' + iY''.$$

Cette formule montre que si le système de valeurs x, y est tel que l'on ait :

$$a(x'^2 + x''^2) + b(y'^2 + y''^2) - h < 0,$$

il en sera de même pour le système correspondant des valeurs de X et Y.

Les substitutions forment un groupe : il est aisé, en effet, de voir que le produit de deux substitutions est une substitution de même forme et que la substitution unité fait partie de l'ensemble.

Observons maintenant que si la valeur absolue de C'' est inférieure à une quantité H, il ne peut y avoir qu'un nombre limité de substitutions jouissant de cette propriété. Il suffit pour cela de considérer l'équation :

$$\frac{A''^2}{a} + \frac{B''^2}{b} - \frac{C''^2}{h} = -\frac{1}{h},$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{A''^2}{a} + \frac{B''^2}{b} = \frac{C''^2}{h} - \frac{1}{h}.$$

Le premier membre est essentiellement positif; dans le second membre, la valeur absolue de C'' est inférieure à une quantité donnée H, il y a donc une limite pour les valeurs de A'' et de B'', limite qui est fonction de H. On démontre qu'il en est de même pour A', B', C' et pour A, B, C. Donc, le nombre des systèmes de valeurs des quantités A, B, C, est limité en fonction des valeurs de C.

Nous allons montrer maintenant que si la valeur absolue de C″ grandit indéfiniment, il en est de même du module de :

$$A''x + B''y + C''.$$

En effet, on a :

$$\mathrm{mod}\,(A''x + B''y + C'') > |C''| - \mathrm{mod}\,(A''x) - \mathrm{mod}\,(B''y),$$

et ceci peut être écrit sous la forme :

$$\text{(IV)} \qquad \mathrm{mod}\,(A''x + B''y + C'') > \frac{C''^2 - [\mathrm{mod}\,(A''x) + \mathrm{mod}\,(B''y)]^2}{|C''| + \mathrm{mod}\,(A''x) + \mathrm{mod}\,(B''y)}.$$

Suivant nos hypothèses, le mot module ne s'applique qu'aux variables x et y ou à leurs produits par une quantité réelle.

Remplaçons C''^2 par sa valeur tirée de l'équation

$$\frac{A''^2}{a} + \frac{B''^2}{b} - \frac{C''^2}{h} = -\frac{1}{h},$$

le second membre de l'inégalité (IV) pourra être écrit sous la forme :

$$\frac{1 + \left[\frac{h}{a} - \mathrm{mod}^2\, x\right] A''^2 + \left[\frac{h}{b} - \mathrm{mod}^2\, y\right] B''^2 - 2\,|A''|\,|B''|\,\mathrm{mod}\, x\, \mathrm{mod}\, y}{|C''| + |A''|\,\mathrm{mod}\, x + |B''|\,\mathrm{mod}\, y}.$$

Abstraction faite de l'unité, le numérateur est un polynôme homogène en $|A''|$ et $|B''|$. Il est essentiellement positif car son discriminant est :

$$\mathrm{mod}^2\, x\, \mathrm{mod}^2\, y - \left[\frac{h}{a} - \mathrm{mod}^2\, x\right]\left[\frac{h}{b} - \mathrm{mod}^2\, y\right],$$

et cela s'écrit :

$$\frac{h}{b}(\mathrm{mod}^2\, x) + \frac{h}{a}(\mathrm{mod}^2\, y) - \frac{h^2}{a.b},$$

ou bien encore :

$$\frac{h}{a.b}\,[a(x'^2 + x''^2) + b(y'^2 + y''^2) - h].$$

Comme, par hypothèse, a, b, h sont de même signe et que l'on a :

$$a(x'^2 + x''^2) + b(y'^2 + y''^2) - h < 0,$$

le discriminant est bien négatif et le polynome homogène en $|A''|$ et $|B''|$ est bien positif.

Ceci dit, remarquons que le coefficient de A$''$ est positif car on a :

$$\frac{h}{a}(y'^2+y''^2) < \frac{h}{b}\left(\frac{h}{a}-x'^2-x''^2\right),$$

et le premier membre est essentiellement positif. Nous pouvons donc écrire maintenant la limite inférieure de mod $(A''x + B''y + C'')$ sous la forme :

$$|C''|\frac{\frac{1}{C''^2}+\left[\frac{h}{a}-\text{mod}^2 x\right]\frac{A''^2}{C''^2}+\left[\frac{h}{b}-\text{mod}^2 y\right]\frac{B''^2}{C''^2}-2\,\text{mod}\, x\,\text{mod}\, y\frac{|A''|}{|C''|}\frac{|B''|}{|C''|}}{1+\text{mod}\, x\frac{|A''|}{|C''|}+\text{mod}\, y\frac{|B''|}{|C''|}}.$$

Considérons maintenant la troisième équation de gauche du groupe (III), elle s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{a}\frac{A''^2}{C''^2}+\frac{1}{b}\frac{B''^2}{C''^2}=\frac{1}{h}-\frac{1}{hC''^2},$$

et, sous cette forme, elle montre que si $|C''|$ augmente indéfiniment, $|A''|\,/\,|C''|$ et $|B''|\,/\,|C''|$ restent toujours moindres qu'une expression facile à calculer. En effet, on peut écrire :

$$\frac{h}{a}\frac{A''^2}{C''^2}+\frac{h}{b}\frac{B''^2}{C''^2}=1-\frac{1}{C''^2},$$

et l'on voit que si $|C''|$ augmente indéfiniment, le premier membre tend vers l'unité. On aura donc :

$$\frac{|A''|}{|C''|}<\sqrt{\frac{a}{h}}, \qquad \frac{|B''|}{|C''|}<\sqrt{\frac{b}{h}}.$$

On voit donc que l'on pourra trouver un nombre positif K qui dépendra uniquement de x, y, h, a, b et auquel le coefficient de $|C''|$ sera toujours supérieur, de sorte que l'on aura alors :

(V) $$\text{mod}\,(A''x+B''y+C'') > K\,|C''|.$$

Donc, quand $|C''|$ augmente indéfiniment, il en est de même pour

$$\text{mod}\,(A''x+B''y+C'').$$

Nous pouvons démontrer maintenant la discontinuité du groupe. Il suffit pour cela de montrer que l'on ne peut pas trouver de substitutions pour lesquelles X et Y diffèrent d'aussi peu que l'on voudra d'x et d'y.

4. Nous avons établi plus haut l'égalité :

$$\begin{aligned}&-a(X'^2+X''^2)-b(Y'^2+Y''^2)+h\\ &=\frac{1}{\operatorname{mod}^2(A''x+B''y+C'')}[-a(x'^2+x''^2)-b(y'^2+y''^2)+h],\end{aligned}$$

et l'on sait que les deux membres sont positifs. Si le groupe était continu, on aurait pour X et Y des valeurs différant infiniment peu d'x et d'y, de sorte que l'on aurait :

$$[-a(X'^2+X''^2)-b(Y'^2+Y''^2)+h]=(1+\varepsilon)[-a(x'^2+x''^2)-b(y'^2+y''^2)+h],$$

ε étant une quantité réelle dont la valeur absolue est moindre qu'une quantité positive η donnée à l'avance aussi petite que l'on voudra. Mais, en vertu de l'inégalité (V), on peut écrire :

$$\begin{aligned}&-a(X'^2+X''^2)-b(Y'^2+Y''^2)+h\\ &<\frac{1}{C''^2}\cdot\frac{1}{K^2}[-a(x'^2+x''^2)-b(y'^2+y''^2)+h].\end{aligned}$$

Nous aurons, par suite :

$$1+\varepsilon<\frac{1}{C''^2}\cdot\frac{1}{K^2},$$

et, comme :

$$|\varepsilon|<\eta,$$

nous aurons :

$$C''^2<\frac{1}{(1+\varepsilon)K^2}<\frac{1}{1-\eta}\frac{1}{K^2}.$$

D'après ce que nous avons vu plus haut, le nombre des substitutions pour lesquelles le carré de C'' est moindre que

$$\frac{1}{(1-\eta)K^2},$$

est fini et, évidemment, on ne pourra pas trouver parmi elles des substitutions pour lesquelles X et Y diffèrent d'aussi peu que l'on voudra d'x et d'y. La discontinuité du groupe est donc démontrée.

Ce que nous avons dit ne s'applique qu'aux systèmes de valeurs d'x et d'y intérieurs au domaine défini par l'inégalité :

$$a(x'^2+x''^2)+b(y'^2+y''^2)-h<0.$$

Pour les systèmes de valeurs extérieurs à ce domaine, les substitutions du groupe ne donnent pas nécessairement pour X et Y une valeur déterminée.

Soit, en effet, la substitution :

$$X = \frac{Ax + By + C}{A''x + B''y + C''}, \qquad Y = \frac{A'x + B'y + C'}{A''x + B''y + C''};$$

et supposons que le système x, y satisfasse aux équations :

$$Ax + By + C = 0, \qquad A''x + B''y + C'' = 0;$$

X sera indéterminé et Y aura une valeur infinie.

CHAPITRE II

5. **Nous nous proposons maintenant de montrer l'existence de fonctions uniformes des quatre variables x, y, z, t définies pour tous les systèmes de valeurs d'x et y, d'une part, de z et t d'autre part intérieurs respectivement aux domaines (D) et (D') définis par les inégalités :**

$$\text{(D)} \qquad a(x'^2 + x''^2) + b(y'^2 + y''^2) - h < 0,$$

$$\text{(D')} \qquad a'(z'^2 + z''^2) + b'(t'^2 + t''^2) - h' < 0;$$

et qui se reproduisent pour toutes les substitutions des groupes (A, B, C) et (M, P, R) appliquées simultanément, c'est-à-dire quand on remplace x et y d'une part, z et t d'autre part, respectivement par :

$$X = \frac{Ax + By + C}{A''x + B''y + C''}, \qquad Y = \frac{A'x + B'y + C'}{A''x + B''y + C''},$$

$$Z = \frac{Mz + Pt + R}{M''z + P''t + R''}, \qquad T = \frac{M'z + P't + R'}{M''z + P''t + R''}.$$

Nous rappelons que nous avons supposé que les déterminants de ces substitutions sont égaux à l'unité, c'est-à-dire que l'on a :

$$\text{(VI)} \qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} M & P & R \\ M' & P' & R' \\ M'' & P'' & R'' \end{vmatrix} = 1.$$

Soient les déterminants fonctionnels d'X et Y par rapport à x et y et de Z, T par rapport à z et t,

$$\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}, \qquad \frac{D(Z, T)}{D(z, t)};$$

en vertu de (VI) nous avons :

$$\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = \frac{1}{(A''x + B''y + C'')^3},$$

$$\frac{D(Z, T)}{D(z, t)} = \frac{1}{(M''z + P''t + R'')^3};$$

et nous allons étudier la série

$$\sum \left[\operatorname{mod} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right]^{3m} \times \left[\operatorname{mod} \frac{D(Z, T)}{D(z, t)} \right]^{3m},$$

la sommation étant étendue à toutes les substitutions des deux groupes.

En réalité nous pouvons considérer cette série comme le produit des deux séries :

$$\sum \left[\operatorname{mod} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right]^{3m}, \qquad \sum \left[\operatorname{mod} \frac{D(Z, T)}{D(z, t)} \right]^{3m};$$

puisque nous pouvons associer chaque substitution du premier groupe à toutes celles du second. Nous nous bornerons donc à étudier la série :

$$\sum \left[\operatorname{mod} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right]^{3m}.$$

Pour montrer la convergence de cette série, nous allons montrer tout d'abord que $\operatorname{mod}(A''x + B''y + C'')$ reste compris entre des limites déterminées qui ne comprennent pas zéro.

Nous pouvons écrire :

$$\text{(VII)} \qquad \operatorname{mod}(A''x + B''y + C'') = |C''| \operatorname{mod}\left(\frac{A''}{C''} x + \frac{B''}{C''} y + 1 \right),$$

et nous avons vu (N° 3) que si C'' augmente indéfiniment, on a :

$$\frac{A''^2}{C''^2} < \frac{a}{h}, \qquad \frac{B''^2}{C''^2} < \frac{b}{h}.$$

D'autre part, l'inégalité :

$$a(x'^2 + x''^2) + b(y'^2 + y''^2) - h < 0,$$

peut s'écrire sous la forme :

$$a \operatorname{mod}^2 x + b \operatorname{mod}^2 y - h < 0,$$

et elle montre que l'on a toujours :

$$\sqrt{\frac{a}{h}} \operatorname{mod} x < 1, \qquad \sqrt{\frac{b}{h}} \operatorname{mod} y < 1.$$

En remplaçant dans (VII) les valeurs absolues des A''/C'', B''/C'' et les modules d'x et d'y par leurs limites supérieures, nous obtiendrons :

$$\text{(VIII)} \qquad \operatorname{mod}\left(\frac{A''}{C''}x + \frac{B''}{C''}y + 1\right) < 3.$$

Nous pouvons écrire ensuite (N° 3) :

$$\operatorname{mod}(A''x + B''y + C'') > \frac{C''^2 - [\operatorname{mod}(A''x) + \operatorname{mod}(B''y)]^2}{|C''| + |A''| \operatorname{mod} x + |B''| \operatorname{mod} y},$$

et, faisant usage des mêmes transformations que plus haut, la limite inférieure de $\operatorname{mod}(A''x + B''y + C'')$ pourra être écrite sous la forme :

$$\operatorname{mod}\left(\frac{A''}{C''}x + \frac{B''}{C''}y + 1\right) > \frac{\left[\frac{h}{a} - \operatorname{mod}^2 x\right]\frac{A''^2}{C''^2} + \left[\frac{h}{b} - \operatorname{mod}^2 y\right]\frac{B''^2}{C''^2} - 2 \operatorname{mod} x \operatorname{mod} y \frac{|A''|}{|C''|}\frac{|B''|}{|C''|} + \frac{1}{C''^2}}{1 + \frac{|A''|}{|C''|}\operatorname{mod} x + \frac{|B''|}{|C''|}\operatorname{mod} y}.$$

Nous diminuerons cette limite si, au numérateur, nous remplaçons les rapports :

$$\frac{|A''|}{|C''|}, \qquad \frac{|B''|}{|C''|},$$

par leur limite supérieure. Nous diminuerons encore la limite si au dénominateur, nous remplaçons $\operatorname{mod} x$ et $\operatorname{mod} y$ d'une part et les rapports $|A''|/|C''|$, $|B''|/|C''|$ d'autre part par leurs limites supérieures. Nous aurons donc ainsi :

$$\operatorname{mod}\left(\frac{A''}{C''}x + \frac{B''}{C''}y + 1\right) > \frac{1 - \left[\sqrt{\frac{a}{h}}\operatorname{mod} x + \sqrt{\frac{b}{h}}\operatorname{mod} y\right]^2}{3}.$$

Si donc nous écrivons :

$$\operatorname{mod}(A''x + B''y + C'') = E\,|C''|,$$

E sera compris entre les limites :

$$\frac{1 - \left[\sqrt{\frac{a}{h}}\operatorname{mod} x + \sqrt{\frac{b}{h}}\operatorname{mod} y\right]^2}{3} < E < 3.$$

Nous sommes en mesure maintenant de démontrer la convergence de la série étudiée.

Considérons un système de valeurs x_0 et y_0 d'x et y, ou un point tel que la substitution unité soit la seule qui le transforme en lui-même. Ce point est naturellement à l'intérieur du domaine D. (Pour un point arbitraire, il arrivera évidemment que la substitution unité sera la seule qui le transforme en lui-même.) Considérons la série des points transformés du point x_0, y_0 par les substitutions du groupe. Traçons autour du point x_0, y_0 un petit domaine dont la frontière soit telle que la distance maximum du point x_0, y_0 à cette frontière soit inférieure à une quantité très petite ε. Nous appellerons ce domaine δ_0. Soient δ_1, δ_2, ... les transformés de δ_0 par les substitutions du groupe. Comme celui-ci est discontinu, on pourra prendre ε assez petit pour que tous les domaines transformés soient extérieurs les uns aux autres. Considérons maintenant l'intégrale quadruple

$$\int\int\int\int dx'\,dx''\,dy'\,dy'',$$

étendue à chacun des domaines δ_0, δ_1, δ_2, ...; la somme de toutes ces intégrales aura une valeur moindre que la valeur de l'intégrale étendue à tout le domaine D puisque les domaines δ_0, δ_1, δ_2, ... sont extérieurs les uns aux autres et sont tous intérieurs à D.

Soit maintenant l'intégrale :

$$\int\int\int\int dX'\,dX''\,dY'\,dY'',$$

étendue au domaine δ transformé de δ_0 par la substitution

$$X = \frac{Ax + By + C}{A''x + B''y + C''}, \qquad Y = \frac{A'x + B'y + C'}{A''x + B''y + C''},$$

on voit aisément qu'elle est égale à l'intégrale :

$$\int\int\int\int \frac{dx'\,dx''\,dy'\,dy''}{\operatorname{mod}^4 (A''x + B''y + C'')^4},$$

étendue au domaine δ_0; ainsi donc, toutes les intégrales peuvent être ramenées à ce domaine. En se rappelant que :

$$\operatorname{mod} (A''x + B''y + C'') = E\,|\,C''\,|,$$

le terme général de la série étudiée correspondra au terme :

$$\frac{1}{|C''|^4}\int\int\int\int \frac{dx'\,dx''\,dy'\,dy''}{E^4}$$

de la série des intégrales.

D'après les limites données plus haut pour E, cette dernière intégrale quadruple sera comprise entre deux limites fixes (pour chaque valeur de x_0, y_0) la limite inférieure étant une quantité différente de zéro et supérieure à zéro. On en conclut que la série de terme général :

$$\frac{1}{|C''|^4},$$

étendue à toutes les substitutions du groupe est convergente. Il en résulte que la série de terme général :

$$\frac{1}{\operatorname{mod}(A''x+B''y+C'')^{2m}},$$

est convergente, m étant supérieur ou égal à 2, E étant limité comme il a été dit plus haut.

Tout ce qui vient d'être dit pouvant être appliqué à la série :

$$\frac{1}{\operatorname{mod}(M''z+P''t+R'')^{2m}},$$

il en résulte que le produit des deux séries est une série convergente pour les mêmes valeurs de m.

6. Nous pouvons maintenant démontrer l'existence de fonctions uniformes de quatre variables x, y, z, t qui restent invariables quand on effectue les substitutions de deux groupes :

$$\left(x,\, y,\, X=\frac{Ax+By+C}{A''x+B''y+C''}, \qquad Y=\frac{A'x+B'y+C'}{A''x+B''y+C''}\right);$$

$$\left(z,\, t,\, Z=\frac{Mz+Pt+R}{M''z+P''t+R''}, \qquad T=\frac{M'z+P't+R'}{M''z+P''t+R''}\right).$$

Soit une fonction rationnelle des quatre variables, $R(x, y, z, t)$ dans laquelle les variables sont divisées en deux séries (x, y) et (z, t). Nous supposerons que cette fonction reste uniforme et continue pour tous les points situés à l'intérieur des domaines (D) et (D') définis par les inégalités :

(D) $$a(x'^2+x''^2)+b(y'^2+y''^2)-h<0.$$

(D') $$a'(z'^2+z''^2)+b'(t'^2+t''^2)-h'<0.$$

sauf, peut-être, pour un certain nombre de points dont nous désignerons les ensembles par (E') et (E'').

On aura un exemple de fonction rationnelle qui reste finie et continue pour tous les points de (D) et (D′) en prenant une forme algébrique de degré quelconque à deux séries de variables, par exemple une forme doublement quadratique par rapport à chaque série de variables.

Formons la série :

$$\text{(A)} \qquad \sum R(X, Y, Z, T) \frac{1}{(A''x + B''y + C'')^{3m} (M''z + P''t + R'')^{3m}},$$

la sommation étant étendue à toutes les substitutions des deux groupes qui transforment en eux-mêmes les domaines (D) et (D′). Dans cette série, R(X, Y, Z, T) ne devient infinie qu'en des points isolés que nous supposerons entourés chacun d'un domaine très petit; donc R est limitée et comme les facteurs de R dans chacun des termes forment une série convergente, il en résulte que la série (A) est uniformément convergente dans l'ensemble des domaines (D) et (D′) sauf, peut-être, pour deux ensembles (E′) et (E″) de points.

Cette fonction, que nous appellerons $P(x, y, z, t)$ est donc uniforme et continue dans l'ensemble des domaines (D) et (D′) et elle possède la propriété fondamentale suivante : si l'on effectue sur elle les substitutions :

$$X = \frac{Ax + By + C}{A''x + B''y + C''}, \qquad Y = \frac{A'x + B'y + C'}{A''x + B''y + C''},$$

$$Z = \frac{Mz + Pt + R}{M''z + P''t + R''}, \qquad T = \frac{M'z + P't + R'}{M''z + P''t + R''};$$

chaque terme de la série se transforme en un terme de la même série multiplié par le produit des dénominateurs des formules de transformation, élevés à la puissance $3m$. On a donc, pour toutes les substitutions des groupes (A, B, C) et (M, P, R) :

$$P(X, Y, Z, T) = (A''x + B''y + C'')^{3m} (M''z + P''t + R'')^{3m} P(x, y, z, t).$$

On voit donc que cette fonction est analogue aux fonctions appelées, pour une variable [1], thétafuchsiennes par Henri Poincaré.

En prenant le quotient de deux fonctions P relatives toutes deux aux mêmes groupes et à la même valeur de m, et en faisant le quotient, nous obtiendrons une fonction invariable pour toutes les substitutions des deux groupes et c'est ce résultat que nous voulions atteindre. Donc, en posant :

$$Q(x, y, z, t) = \frac{P(x, y, z, t)}{P_1(x, y, z, t)},$$

---

[1] Cf. A. Buhl, *Nouveaux Éléments d'Analyse*, t. III, ch. IV.

nous aurons :

$$Q(X, Y, Z, T) = Q(x, y, z, t).$$

Nous avons donc formé des fonctions invariables pour toutes les substitutions des groupes considérés. Nous ferons remarquer seulement, comme nous l'avons dit au commencement de ce mémoire, que les raisonnements s'appliquent à des groupes à un nombre de variables quelconque et à des fonctions ayant un nombre de séries de variables quelconque, chaque série étant formée d'un nombre quelconque de variables, chaque groupe de variables étant caractérisé par un domaine défini par la forme quadratique qui doit être transformée en elle-même par le groupe de substitutions correspondant.

Par analogie avec les appellations données par Émile Picard, on pourrait appeler ces fonctions ultraautomorphes.