Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Robert Croisot

Quelques applications et propriétés des treillis semi-modulaires de longueur infinie

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 16 (1952), p. 11-74
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1952_4_16__11_0>

QUELQUES APPLICATIONS ET PROPRIÉTÉS DES TREILLIS SEMI-MODULAIRES DE LONGUEUR INFINIE

PAR M. ROBERT CROISOT

RÉSUMÉ : Recherche de diverses caractérisations des treillis modulaires quelconques puis des treillis modulaires satisfaisant à la condition de chaîne ascendante ou descendante. Exemples montrant que certaines conditions caractéristiques de la semi-modularité dans les treillis de longueur finie accompagnées de leur duale n'entraînent pas nécessairement la modularité dans les treillis satisfaisant à une condition de chaîne.

Étude d'une propriété d'indépendance liée à l'axiome d'échange de Steinitz et Mac Lane (et, par suite, à la semi-modularité) et généralisation aux treillis vérifiant cette propriété d'un théorème établi par G. Birkhoff pour les treillis modulaires.

Étude de la permanence des différentes conditions de semi-modularité par passage aux sous-treillis, produits cardinaux, treillis homomorphes.

Utilisation d'une propriété de semi-modularité pour l'obtention d'une condition suffisante pour l'égalité des longueurs de deux chaînes de mêmes extrémités dans un treillis quelconque. Application de cette condition à quelques cas d'égalité des longueurs de deux chaînes de sous-hypergroupes partiels d'un hypergroupe partiel inversible; cas particuliers : groupe partiel, groupe, relations d'équivalence.

INTRODUCTION

Dans un autre travail (1), j'ai considéré un certain nombre de conditions équivalentes à la semi-modularité dans les treillis de longueur finie et j'ai étudié les implications binaires qui les lient dans les treillis quelconques. De cette étude, il résulte que *la notion de semi-modularité se morcelle à l'extrême dans les treillis de longueur infinie.*

Ce fait soulève le problème de la définition générale d'un treillis semi-modulaire. Un tel problème ne se pose guère pour la modularité car, bien qu'il en existe plusieurs caractérisations dans les treillis de longueur finie et bien qu'elles ne soient plus équivalentes dans les treillis quelconques, l'une d'elles s'impose devant les autres, celle qui se traduit par une *règle de calcul.* Il n'existe pas de telle caractérisation de la semi-modularité, et il ne peut pas en exister, car *un sous-treillis d'un treillis semi-modulaire n'est pas nécessairement semi-modulaire.* On est guidé dans le choix de la meilleure définition par les résultats du chapitre III dans lequel on examine comment se conservent les conditions envisagées lorsqu'on passe de deux

(1) Contribution à l'étude des treillis semi-modulaires de longueur infinie, *Annales de l'École Normale Supérieure,* 1951, pp. 203-265, référé T dans ce travail.

treillis à leur produit cardinal ou d'un treillis à un treillis homomorphe. Le comportement des différentes conditions n'est pas le même dans le passage au produit cardinal, les unes se conservant en toute généralité, d'autres pour des treillis conditionnellement complets, les dernières seulement pour des treillis satisfaisant à la condition de chaîne descendante. Quant à la permanence par homomorphisme, elle n'a pas lieu dans le cas général et, même, pour la plupart des conditions, dans le cas d'une condition de chaîne. Néanmoins, la condition suivante due à S. Mac Lane

(5) $x \wedge z < y < x < x \vee z$ entraîne l'existence de t tel que l'on ait $$x \wedge z < t \leqslant z \quad \text{et} \quad (t \vee y) \wedge x = y$$

se conserve par homomorphisme si l'on part d'un treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante; de plus, elle fait partie de celles qui se conservent sans restriction par passage au produit cardinal. Le choix de la définition doit aussi tenir compte de l'intérêt des applications possibles. Dans cet ordre d'idées, le chapitre II est consacré à une application de la condition (2)

$$x \text{ couvre } x \wedge y \text{ implique } x \vee y \text{ couvre } y$$

aux treillis complémentés liée à la théorie de l'indépendance. La condition (5), plus forte que la condition (2), entraîne aussi les propriétés envisagées dans ce chapitre. Il semble donc naturel de prendre cette condition (5) comme *définition générale de la semi-modularité,* la condition (2) devant être rejetée parce que trivialement vérifiée dans les treillis où il n'existe pas de relations de couverture. D'ailleurs, la condition (5) est vérifiée dans les cas importants : treillis des partitions d'un ensemble quelconque, treillis des sur-corps algébriquement fermés d'un corps K contenus dans un sur-corps algébriquement fermé de K de dimension quelconque sur K, treillis des variétés linéaires fermées de l'espace de Hilbert.

On sait que, dans les treillis de longueur finie, la modularité peut être caractérisée par le couple de conditions (2) et (2′), duale de (2). Les autres conditions examinées, accompagnées de leur duale respective, conduisent-elles à des caractérisations de la modularité dans des treillis plus généraux que ceux de longueur finie ? Le chapitre I montre effectivement qu'un certain nombre des conditions étudiées, accompagnées de leur duale, caractérisent la modularité dans les treillis satisfaisant à une condition de chaîne (ascendante ou descendante). De plus, on trouvera là d'autres conditions équivalentes à la condition modulaire dans les treillis quelconques et d'énoncé souvent très voisin de ceux de certaines conditions de semi-modularité. On trouvera même quelques conditions du même type équivalentes à la distributivité dans les treillis quelconques.

Parmi les conditions envisagées dans le travail cité plus haut, je mentionne spécialement la condition

(3) x couvre y, z couvre t implique $[(x \vee t) \wedge z] \vee y = [(z \vee y) \wedge x] \vee t$

intéressante, malgré son expression compliquée, car elle permet d'obtenir, par une méthode très naturelle, un cas assez général dans lequel deux chaînes finies de mêmes extrémités ont même longueur et ceci dans un treillis absolument arbitraire. C'est l'objet du chapitre IV et on en trouvera une application algébrique concrète au chapitre V qui redonne comme cas particuliers certains résultats de O. Ore sur les chaînes de sous-groupes d'un groupe et de P. Dubreil et M.-L. Dubreil-Jacotin sur les chaînes de relations d'équivalence sur un ensemble.

CHAPITRE I

Application à l'axiomatique des treillis modulaires.

1. Propriétés et caractérisations des treillis modulaires quelconques.

Théorème 1. — *Un treillis modulaire satisfait aux conditions* (R), (F), (α^i), (α_i).

Démonstration. — Si, dans un treillis, la condition (R) est en défaut, il existe un couple d'éléments (x, y) tel qu'on puisse trouver une chaîne non maximale du produit cardinal $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$, soit $\{(x_\iota, y_\iota)\}$, qui donne une chaîne $\{x_\iota \wedge y_\iota\}$ maximale entre $x \wedge y$ et $x \vee y$. Dans la chaîne

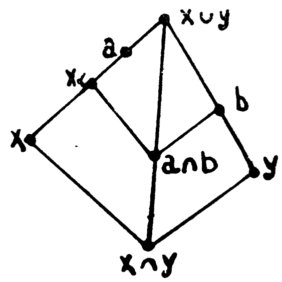


Fig. 1

$\{(x_\iota, y_\iota)\}$, on peut alors intercaler un élément, soit (a, b). L'élément $a \wedge b$ appartient à la chaîne $\{x_\iota \wedge y_\iota\}$. Soit α l'indice ι pour lequel on a $x_\iota \wedge y_\iota = a \wedge b$. On a $(a, b) \neq (x_a, y_a)$, soit par exemple $(a, b) > (x_a, y_a)$. On ne peut avoir simultanément $a = x_a$, $b = y_a$. Supposons qu'on ait $a \neq x_a$. Les cinq éléments a, x_a, b, $a \wedge b$, $x \vee y$ constituent alors un sous-treillis isomorphe au treillis non modulaire à cinq éléments car on a $a > x_a$, $a \wedge b = x_a \wedge b = a \vee b = x_a \vee b = x \vee y$. Le treillis envisagé n'est donc pas modulaire et un treillis modulaire satisfait à la condition (R).

Soient maintenant un treillis modulaire et un couple (x, y) de ses éléments. Envisageons une chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ maximale dans le produit cardinal $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$ et montrons que la chaîne $\{x_\iota \vee y_\iota\}$ est maximale entre $x \wedge y$ et $x \vee y$ (1). Supposons qu'on puisse intercaler un élément c dans cette dernière chaîne. Posons $x'_c = c \wedge x$, $y'_c = c \wedge y$. Pour tout indice ι tel que l'on ait $x_\iota \vee y_\iota \leqslant c$, on a $x_\iota \leqslant x'_c$ car $x_\iota = (x_\iota \vee y_\iota) \wedge x$,

(1) Cette démonstration est directement inspirée de celle qu'on trouve dans G. Birkhoff [1], p. 101. Cette dernière utilise le fait que les chaînes $\{x_\iota\}$ et $\{y_\iota\}$ sont maximales. Elle est donc valable dans le cas d'un treillis complet d'après le lemme 3 du chapitre II de T, mais elle ne l'est pas dans le cas général.

et $y_\iota \leqslant y'_c$ car $y_\iota = (y_\iota \vee x_\iota) \wedge y$, d'où l'on déduit $(x_\iota, y_\iota) \leqslant (x'_c, y'_c)$. De la même façon, on voit que, pour tout indice ι tel que l'on ait $x_\iota \vee y_\iota \geqslant c$, on a $(x_\iota, y_\iota) \geqslant (x'_c, y'_c)$. Il résulte de là que l'élément (x'_c, y'_c) appartient à la chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ puisque cette chaîne est maximale et l'élément $x'_c \vee y'_c$ appartient à la chaîne $\{x_\iota \vee y_\iota\}$. Posons d'autre part $x_c = (c \vee y) \wedge x$, $y_c = (c \vee x) \wedge y$. Pour tout indice ι tel que l'on ait $x_\iota \vee y_\iota \leqslant c$, on a $x_\iota \leqslant x_c$ car $x_\iota = (x_\iota \vee y_\iota \vee y) \wedge x$, et $y_\iota \leqslant y_c$ car $y_\iota = (y_\iota \vee x_\iota \vee x) \wedge y$, d'où l'on déduit $(x_\iota, y_\iota) \leqslant (x_c, y_c)$. De la même façon, pour tout indice ι tel que l'on ait $x_\iota \vee y_\iota \geqslant c$, on a $(x_\iota, y_\iota) \geqslant (x_c, y_c)$. Donc, l'élément (x_c, y_c) appartient à la chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ puisqu'elle est maximale. De plus, on a nécessairement $(x_c, y_c) = (x'_c, y'_c)$ (c'est-à-dire $x_c = x'_c$, $y_c = y'_c$). Remarquons finalement d'une part $c \geqslant x'_c \vee y'_c$, d'autre part $x_c \vee y_c = x_c \vee [y \wedge (c \vee x)] = (x_c \vee y) \wedge (c \vee x) = ([(c \vee y) \wedge x] \vee y) \wedge (c \vee x) = (c \vee y) \wedge (x \vee y) \wedge (c \vee x) = (c \vee y) \wedge (c \vee x) \geqslant c$ soit $x_c \vee y_c \geqslant c \geqslant x'_c \vee y'_c$ d'où $c = x'_c \vee y'_c$ et c appartient à la chaîne $\{x_\iota \vee y_\iota\}$. Un treillis modulaire satisfait donc à la condition (F).

On sait que le treillis des idéaux et le treillis des idéaux duaux d'un treillis modulaire sont modulaires. Ils satisfont donc à la propriété (R) et à la propriété (α) qui en est conséquence. C'est dire qu'un treillis modulaire satisfait aux conditions (α_1) et (α^1).

Corollaire. — *Un treillis modulaire satisfait à toutes les conditions étudiées sauf peut être à la condition (I), ainsi qu'aux conditions duales.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du théorème 1 du chapitre II de T, et du fait que la modularité est une propriété auto-duale.

Théorème 2. — *Un treillis est modulaire si et seulement si il satisfait à l'une quelconque des conditions suivantes ou à sa duale* (2) :

(2) Notons, par analogie, la caractérisation suivante des treillis distributifs. Un treillis est distributif si et seulement si il satisfait à l'une quelconque des propriétés suivantes ou à sa duale :

(E₁) Pour tout couple d'éléments (x, y), si une chaîne $\{z_\iota\}$ du treillis $[x \wedge y, x \vee y]$ est sans répétition, la chaîne $\{(z_\iota \vee x, z_\iota \vee y)\}$ du treillis $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$ est sans répétition.

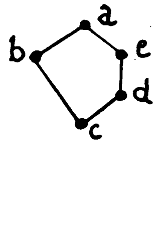
(E₂) Pour tout couple (x, y), l'application $z' \to (z' \vee x, z' \vee y)$ de $[x \wedge y, x \vee y]$ dans $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$ est biunivoque.

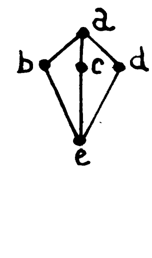
(E₃) Pour tout couple (x, y) l'application $(x', y') \to x' \wedge y'$ de $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$ dans $[x \wedge y, x \vee y]$ est une application sur.

(E₄) Pour tout couple (x, y), toute chaîne maximale $\{z_\iota\}$ de $[x \wedge y, x \vee y]$ peut être obtenue sous la forme $z_\iota = x_\iota \wedge y_\iota$ à partir d'une chaîne de $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$.

(Q) Pour tout couple (x, y), si une chaîne $\{z_\iota\}$ est maximale sans répétition entre $x \wedge y$ et $x \vee y$, la chaîne $\{(z_\iota \vee x, z_\iota \vee y)\}$ est maximale sans répétition dans le produit cardinal $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$.

Les quatre premières conditions sont équivalentes car elles expriment toutes que tout couple (x, y) possède la propriété e du chapitre I. de T.





(A_1) Pour tout couple d'éléments (x, y), si une chaîne $\{x_\iota\}$ entre $x \wedge y$ et x est sans répétition, la chaîne $\{x_\iota \vee y\}$ est sans répétition.
(A_2) Pour tout couple (x, y) l'application $x' \to x' \vee y$ du sous-treillis $[x \wedge y, x]$ dans le sous-treillis $[y, x \vee y]$ est biunivoque.
(A_3) Pour tout couple (x, y), l'application $y' \to y' \wedge x$ du sous-treillis $[y, x \vee y]$ dans le sous-treillis $[x \wedge y, x]$ est une application sur.
(A_4) Pour tout couple (x, y), toute chaîne maximale $\{x_\iota\}$ entre $x \wedge y$ et x peut être obtenue sous la forme $x_\iota = y_\iota \wedge x$ à partir d'une chaîne $\{y_\iota\}$ entre y et $x \vee y$.
(A_5) Pour tout couple $(x\ y)$, si un élément z satisfait à $x \wedge y \leqslant z \leqslant x$, on a $(z \vee y) \wedge x = z$.
(C) Pour tout couple (x, y), si une chaîne $\{x_\iota\}$ entre $x \wedge y$ et x est maximale sans répétition, la chaîne $\{x_\iota \vee y\}$ est maximale sans répétition entre y et $x \vee y$.
(D_1) Pour tout couple (x, y), si une chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ du produit cardinal $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$ est sans répétition, la chaîne $\{x_\iota \vee y_\iota\}$ est sans répétition.
(D_2) Pour tout couple (x, y), l'application $(x', y') \to x' \vee y'$ de $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$ dans $[x \wedge y, x \vee y]$ est biunivoque.
(D_3) Pour tout couple (x, y), l'application $z' \to (z' \wedge x, z' \wedge y)$ de $[x \wedge y, x \vee y]$ dans $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$ est une application sur.
(D_4) Pour tout couple (x, y), toute chaîne maximale $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ de $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$ peut être obtenue sous la forme $x_\iota = z_\iota \wedge x, y_\iota = z_\iota \wedge y$ à partir d'une chaîne de $[x \wedge y, x \vee y]$.
(G) Pour tout couple (x, y), si une chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ du produit cardinal $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$ est maximale sans répétition, la chaîne $\{x_\iota \vee y_\iota\}$ est maximale sans répétition entre $x \wedge y$ et $x \vee y$.

(3) $x \geqslant y$ et $z \geqslant t$ implique $[(x \vee t) \wedge z] \vee y = [(z \vee y) \wedge x] \vee t$.

Démonstration. — D'après le théorème 1 du chapitre I de T, les cinq conditions (A_1), (A_2), (A_3), (A_4), (A_5) équivalent au fait que tout couple (x, y) est modulaire, c'est-à-dire au fait que le treillis envisagé est modulaire.

Un treillis distributif vérifie (E_2) : l'application $z' \to (z' \vee x, z' \vee y)$ est biunivoque car z' est déterminé par $z' \vee x$ et $z' \vee y$; en effet, $z' = z' \vee (x \wedge y) = (z' \vee x) \wedge (z' \vee y)$. Un treillis non distributif ne vérifie pas (E_2) : il contient un des deux sous-treillis représentés par les diagrammes de la page précédente; dans le premier cas, le couple (b, e) ne vérifie pas la propriété e car, dans l'application envisagée dans (E_2), les éléments e et d sont appliqués sur l'élément (b, e); dans le deuxième cas, le couple (b, d) ne vérifie pas la propriété e car, dans cette application, les éléments a et e sont appliqués sur l'élément (a, a).

Un treillis distributif satisfait à (Q). En effet, si une chaîne $\{z_\iota\}$ est sans répétition, la chaîne $\{(z_\iota \vee x, z_\iota \vee y)\}$ est sans répétition d'après (E_1). Si une chaîne $\{z_\iota\}$ est maximale, puisqu'elle est obtenue d'après (E_4) à partir de la chaîne $\{(z_\iota \vee x, z_\iota \vee y)\}$, cette dernière chaîne doit être maximale d'après (R). D'autre part, un treillis satisfaisant à (Q) est distributif car (Q) entraîne (E_1).

Dans des ordres d'idées différents, on pourra trouver d'autres caractérisations des treillis distributifs dans R. CROISOT, *Axiomatique des lattices distributives, Canadian Journal of Mathematics* p. 24, 1951. (Ce travail constitue une réponse aux problèmes 64 et 65 de G. BIRKHOFF [1] p. 138-139)

On a déjà remarqué que, pour un couple d'éléments (x, y), la propriété c est équivalente à l'ensemble des propriétés a et b. La condition (C) pour un treillis équivaut donc à l'ensemble des conditions (A) et (B). Or, la condition (A) qui exprime que le treillis est modulaire entraîne la condition (B) d'après le corollaire du théorème 1. Il en résulte que les conditions (A) et (C) sont équivalentes, c'est-à-dire que la condition (C) caractérise la modularité.

D'après le théorème 2 du chapitre I de T, les quatre conditions (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) équivalent au fait que tout couple (x, y) est modulaire (d'après la forme 5 de la propriété d). Elles équivalent donc aux conditions précédentes.

On voit aisément que, pour un couple (x, y), la propriété g équivaut à l'ensemble des propriétés d et f. La condition (G) pour un treillis équivaut donc à l'ensemble des condition (D) et (F). Or, la condition (D) exprimant la modularité entraîne la condition (F) d'après le corollaire du théorème 1. Il en résulte que les conditions (D) et (G) sont équivalentes, c'est-à-dire que la condition (G) caractérise aussi la modularité.

Quant à la condition $(\overline{3})$, elle implique la modularité. En effet, soient trois éléments x, y, z tels que l'on ait $x \geqslant y$, et posons $t = z \wedge y$. En appliquant la condition $(\overline{3})$, il vient l'égalité

$$(x \wedge z) \vee y = (z \vee y) \wedge x.$$

Réciproquement, la modularité implique la condition $(\overline{3})$. En effet, soient quatre éléments x, y, z, t tels que l'on ait $x \geqslant y$ et $z \geqslant t$. On a, en appliquant deux fois la condition modulaire, $[(x \vee t) \wedge z] \vee y = [(z \wedge x) \vee t] \vee y = [(z \wedge x) \vee y] \vee t = [(z \vee y) \wedge x] \vee t$.

Les conditions duales caractérisent évidemment aussi la modularité.

THÉORÈME 3. — *Un treillis est modulaire si et seulement si il satisfait aux conditions simultanées* $[(F)$ *ou* $(B)]$ *et* $[(R')$ *ou* $(L')]$ (3). *On a évidemment aussi le résultat dual.*

Démonstration. — On sait que la condition (F) entraîne la condition (B) et que la condition (R′) entraîne la condition (L′) d'après le théorème 1 du chapitre II de T. On sait également que les treillis modulaires satisfont aux conditions (F) et (R′). Il suffit donc d'établir qu'un treillis satisfaisant aux conditions (B) et (L′) est modulaire.

Envisageons pour cela un treillis non modulaire. Il possède un sous-treillis de cinq éléments, a, b, c, d, e tels que $a > b > c$ et $a > e > d > c$.

Soit $\{x_\iota\}$ une chaîne maximale entre c et d. Si la chaîne $\{x_\iota \vee b\}$ n'est pas maximale, le couple (d, b) ne possède pas la propriété b et la

(3) (R′) désigne la condition duale de la condition (R). Le procédé de notation est général.

condition (B) est en défaut. Si la chaîne $\{x_\iota \vee b\}$ est maximale, le couple (b, e) ne satisfait pas à la propriété l' et la condition (L') est en défaut.

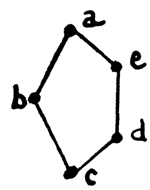


FIG. 4

Le résultat à établir est démontré.

2. Caractérisation des treillis modulaires satisfaisant a une condition de chaine.

THÉORÈME 4. — *Un treillis satisfaisant à une condition de chaîne (ascendante ou descendante) est modulaire si et seulement si il possède l'une quelconque des propriétés suivantes :*

(R) et (R') : Pour tout couple d'éléments (x, y), si une chaîne $\{z_\iota\}$ maximale entre $x \wedge y$ et $x \vee y$ est obtenue sous la forme $z_\iota = x_\iota \wedge y_\iota$ à partir d'une chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ du produit cardinal $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$ ou sous la forme $z_\iota = x_\iota \vee y_\iota$ à partir d'une chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ du produit cardinal $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$, la chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ est nécessairement maximale.

(S) et (S') : Pour tout couple (x, y), dans les mêmes conditions que ci-dessus, la chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ peut être choisie maximale.

(F) et (F') : Pour tout couple (x, y), si une chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ est maximale dans le produit cardinal $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$, la chaîne $\{x_\iota \vee y_\iota\}$ est maximale entre $x \wedge y$ et $x \vee y$ et si une chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ est maximale dans le produit cardinal $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$, la chaîne $\{x_\iota \wedge y_\iota\}$ est maximale entre $x \wedge y$ et $x \vee y$.

(B) et (B') : Pour tout couple (x, y), si une chaîne $\{x_\iota\}$ entre $x \wedge y$ et x est maximale, la chaîne $\{x_\iota \vee y\}$ est maximale entre y et $x \vee y$ et si une chaîne $\{y_\iota\}$ entre y et $x \vee y$ est maximale, la chaîne $\{y_\iota \wedge x\}$ est maximale entre $x \wedge y$ et x.

(L) et (L') : Pour tout couple (x, y), si une chaîne $\{x_\iota\}$ maximale entre $x \wedge y$ et x est obtenue sous la forme $x_\iota = y_\iota \wedge x$ à partir d'une chaîne $\{y_\iota\}$ entre y et $x \vee y$, la chaîne $\{y_\iota\}$ est nécessairement maximale et si une chaîne $\{y'_\iota\}$ maximale entre y et $x \vee y$ est obtenue sous la forme $y'_\iota = x'_\iota \vee y$ à partir d'une chaîne $\{x'_\iota\}$ entre $x \wedge y$ et x, la chaîne $\{x'_\iota\}$ est nécessairement maximale.

(M) et (M') : Pour tout couple (x, y), dans les mêmes conditions que ci-dessus les chaînes $\{y_\iota\}$ et $\{x'_\iota\}$ peuvent être choisies maximales.

Démonstration. — On sait d'abord, d'après le théorème 1, qu'un treillis modulaire satisfait à toutes ces conditions. D'après T (théorème 1, chapitre II), il suffit de montrer qu'un treillis satisfaisant à une condition de chaîne et aux conditions (M) et (M′) est modulaire. Ceci résulte du théorème 3 et de T (théorèmes 2 et 3, chapitre II) : en effet, si le treillis satisfait par exemple à la condition de chaîne descendante, la condition (M) entraîne la condition (B) et la condition (M′) entraîne la condition (L′), et le treillis est modulaire.

COROLLAIRE. — *Un treillis satisfaisant à une condition de chaîne (ascendante ou descendante) et aux conditions (I) et (I′) est modulaire.*

Démonstration. — Ceci résulte de T (théorème 1, chapitre II) qui affirme que la condition (I) entraîne la condition (M).

Pour établir le théorème 5, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 1. — *Dans un treillis non modulaire satisfaisant aux conditions* (α) et (α'), *il existe une chaîne ascendante et une chaîne descendante infinies.*

Démonstration. — Le treillis envisagé n'étant pas modulaire possède cinq éléments x_1, z_1, y_1, y'_1, t_1 tels que l'on ait $y_1 > y'_1$, $t_1 = x_1 \wedge y_1 = x_1 \wedge y'_1$, $z_1 = x_1 \vee y_1 = x_1 \vee y'_1$. Le couple (y_1, x_1) ne possède pas la propriété a car on a $(y'_1 \vee x_1) \wedge y_1 = y_1 \neq y'_1$. La condition ($\alpha$) étant vérifiée, le couple (x_1, y_1) ne possède pas la propriété a et il existe un élément x_2 $(x_1 > x_2 > t_1)$ tel que l'élément $x_2 \vee y_1 = z_2$ (z_2 peut être égal à z_1) satisfasse à $z_2 \wedge x_1 = x'_2 > x_2$. Le couple (x_2, y_1) ne possède pas la pro-

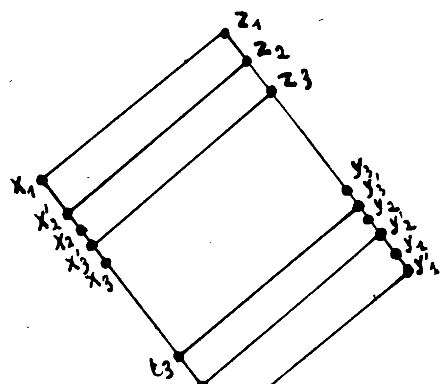


FIG. 5

priété a' car on a $(x'_2 \wedge y_1) \vee x_2 = x_2 \neq x'_2$. La condition ($\alpha'$) étant vérifiée, le couple (y_1, x_2) ne possède pas la propriété a' et il existe un élément y_2

$(y_1 < y_2 < z_2)$ tel que l'élément $y_2 \wedge x_2 = t_2$ (t_2 peut être égal à t_1) satisfasse à $t_2 \vee y_1 = y'_2 < y_2$. Le raisonnement fait avec le couple (x_1, y_1) peut être répété avec le couple (x_2, y_2) et montre qu'il existe un élément x_3 tel que $x_2 > x_3 > t_2$. Le raisonnement fait avec le couple (y_1, x_2) peut de même être répété avec le couple (y_2, x_3) et montre qu'il existe un élément y_3 tel que $y_2 < y_3 < z_3$. Et ainsi de suite. On obtient une chaîne descendante infinie : $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots$, et une chaîne ascendante infinie $y_1 < y_2 < y_3 < \ldots$

THÉORÈME 5. — *Un treillis satisfaisant à une condition de chaîne (ascendante ou descendante) est modulaire si et seulement si il possède l'une quelconque des propriétés suivantes :*

(α) et (α') : La modularité des couples et la propriété duale sont des propriétés symétriques.
(α_i) et (α_i') : La modularité des couples est une propriété symétrique dans le treillis des idéaux et la propriété duale est une propriété symétrique dans le treillis des idéaux duaux.
(α^i) et $(\alpha^{i\prime})$: La modularité des couples est une propriété symétrique dans le treillis des idéaux duaux et la propriété duale est une propriété symétrique dans le treillis des idéaux.

Démonstration : Un treillis modulaire satisfait à ces conditions d'après le théorème 1. D'après le théorème 1 du chapitre II de T, il suffit de montrer qu'un treillis satisfaisant à une condition de chaîne et aux conditions (α) et (α') est modulaire. Ceci résulte du lemme 1.

3. PROPRIÉTÉS NÉGATIVES.

a) Le théorème 1 affirme qu'un treillis modulaire satisfait à toutes les conditions étudiées sauf peut être à la condition (I). En fait, il existe des treillis modulaires ne satisfaisant pas à cette condition. Le treillis suivant C 8 en est un exemple. C'est un treillis satisfaisant à la condition de chaîne descendante [4]. Un diagramme suggestif de ce treillis devrait être situé dans l'espace à quatre dimensions et il est difficile de le représenter clairement dans un plan; aussi, nous contenterons-nous d'une étude algébrique.

Les éléments de C 8 sont x_{ijkl}, $x_{\infty kl}$, $x_{ij\infty}$, $x_{\infty\infty}$ et z_{ijkl} où les indices sont des entiers positifs quelconques. La *relation* qui est imposée entre ces éléments est la suivante :

1° on a : $x_{ijkl} \leqslant x_{i'j'k'l'}$ si et seulement si $i \leqslant i'$, $j \leqslant j'$, $k \leqslant k'$, $l \leqslant l'$.
$x_{ijkl} \leqslant x_{i'j'\infty}$ si et seulement si $i \leqslant i'$, $j \leqslant j'$.
$x_{ijkl} \leqslant x_{\infty k'l'}$ si et seulement si $k \leqslant k'$, $l \leqslant l'$.

(4) Un treillis modulaire satisfaisant à la condition de chaîne ascendante satisfait à la condition (I) d'après le théorème 2 du chapitre II de T. Un treillis distributif quelconque satisfait aussi à la condition (I).

$x_{ij\infty} \leqslant x_{i'j'\infty}$ si et seulement si $i \leqslant i'$, $j \leqslant j'$.
$x_{\infty kl} \leqslant x_{\infty k'l'}$ si et seulement si $k \leqslant k'$, $l \leqslant l'$.
$x_{ijkl} \leqslant x_{\infty\,\infty}$.
$x_{ij\infty} \leqslant x_{\infty\,\infty}$.
$x_{\infty kl} \leqslant x_{\infty\,\infty}$.
$x_{\infty\,\infty} \leqslant x_{\infty\,\infty}$.

2° on a : $z_{ijkl} \leqslant z_{i'j'k'l'}$ si et seulement si $i \leqslant i'$, $j < j'$, $k \leqslant k'$, $l < l'$.
ou $i \leqslant i'$, $j = j'$, $k \leqslant k'$, $l = l'$.

3° on a : $x_{ijkl} \leqslant z_{i'j'k'l'}$ si et seulement si $i \leqslant i'$, $j \leqslant j'$, $k \leqslant k'$, $l \leqslant l'$.

4° on a : $z_{ijkl} \leqslant x_{i'j'k'l'}$ si et seulement si $i \leqslant i'$, $j < j'$, $k \leqslant k'$, $l < l'$.
$z_{ijkl} \leqslant x_{i'j'\infty}$ si et seulement si $i \leqslant i'$, $j < j'$.
$z_{ijkl} \leqslant x_{\infty k'l'}$ si et seulement si $k \leqslant k'$, $l < l'$.
$z_{ijkl} \leqslant x_{\infty\,\infty}$.

il n'y a pas d'autre cas où deux éléments soient en relation.

Cette relation est une relation d'ordre :

1° elle est ***réflexive*** *:* la vérification est immédiate quelle que soit la forme de l'élément envisagé.

2° elle est ***transitive*** *:* en appelant x_1, x_2, x_3 des éléments de la forme x, z_1, z_2, z_3, des éléments de la forme z, on s'assure facilement que

$$x_1 \leqslant x_2,\ x_2 \leqslant x_3 \to x_1 \leqslant x_3;\ \ x_1 \leqslant x_2,\ x_2 \leqslant z_3 \to x_1 \leqslant z_3;$$
$$x_1 \leqslant z_2,\ z_2 \leqslant x_3 \to x_1 \leqslant x_3;\ \ x_1 \leqslant z_2,\ z_2 \leqslant z_3 \to x_1 \leqslant z_3;$$
$$z_1 \leqslant x_2,\ x_2 \leqslant x_3 \to z_1 \leqslant x_3;\ \ z_1 \leqslant x_2,\ x_2 \leqslant z_3 \to z_1 \leqslant z_3;$$
$$z_1 \leqslant z_2,\ z_2 \leqslant x_3 \to z_1 \leqslant x_3;\ \ z_1 \leqslant z_2,\ z_2 \leqslant z_3 \to z_1 \leqslant z_3.$$

3° elle est ***antisymétrique*** *:* On voit que

$x_1 \leqslant x_2,\ x_2 \leqslant x_1 \to x_1 = x_2$; $x_1 \leqslant z_2,\ z_2 \leqslant x_1$ est impossible;
$z_1 \leqslant z_2,\ z_2 \leqslant z_1 \to z_1 = z_2$.

L'ensemble partiellement ordonné ainsi défini satisfait à la condition de chaîne descendante comme on le vérifie sans peine.

Il possède un élément zéro, x_{1111} et un élément universel, $x_{\infty\,\infty}$. On s'assurera que *c'est un treillis complet* en montrant que deux éléments quelconques admettent un plus grand minorant :

1° x_{ijkl} et $x_{i'j'k'l'}$ admettent le plus grand minorant $x_{\alpha\beta\gamma\delta}$ où $\alpha =$ minimum (i, i'), $\beta = \min\,(j, j')$, $\gamma = \min\,(k, k')$, $\delta = \min\,(l, l')$.

x_{ijkl} et $x_{i'j'\infty}$ admettent $x_{\alpha\beta kl}$.
x_{ijkl} et $x_{\infty k'l'}$ admettent $x_{ij\gamma\delta}$.
$x_{ij\infty}$ et $x_{i'j'\infty}$ admettent $x_{\alpha\beta\infty}$.
$x_{\infty kl}$ et $x_{\infty k'l'}$ admettent $x_{\infty\gamma\delta}$.
$x_{ij\infty}$ et $x_{\infty k'l'}$ admettent $x_{ijk'l'}$.

2° Envisageons les deux éléments z_{ijkl} et $z_{i'j'k'l'}$.

On a $z_{abcd} \leqslant z_{ijkl}$ et $z_{abcd} \leqslant z_{i'j'k'l'}$ dans les cas suivants : 1) $a \leqslant \alpha$, $b < \beta$, $c \leqslant \gamma$, $d < \delta$ (où on a encore posé $\alpha = \min\,(i, i')$, $\beta = \min\,(j, j')$, $\gamma = \min$

(k, k'), $\delta = \min(l, l')$; 2) $a \leqslant \alpha$, $b = j < j'$, $c \leqslant \gamma$, $d = l < l'$; 3) $a \leqslant \alpha$, $b = j' < j$, $c \leqslant \gamma$, $d = l' < l$; 4) $a \leqslant \alpha, b = j = j'$, $c \leqslant \gamma$, $d = l = l'$.

On a $x_{abcd} \leqslant z_{ijkl}$ et $x_{abcd} \leqslant z_{i'j'k'l'}$ si et seulement si $a \leqslant \alpha$, $b \leqslant \beta$, $c \leqslant \gamma$, $d \leqslant \delta$.

Il existe toujours un minorant de la forme x plus grand que tous les autres, c'est $x_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Il existe également un minorant de la forme z plus grand que tous les autres, mais il dépend de la valeur relative des indices j et j', l et l' :
1) si $j = j'$, $l = l'$, si $j < j'$, $l < l'$ ou si $j' < j$, $l' < l$, c'est $z_{\alpha\beta\gamma\delta}$; sinon c'est $z_{\alpha\beta'\gamma\delta'}$ (où $\beta' = \beta - 1$, $\delta' = \delta - 1$).

Finalement, il existe un plus grand minorant parmi tous les minorants : c'est $z_{\alpha\beta\gamma\delta}$ si $j = j'$, $l = l'$, si $j < j'$, $l < l'$ ou si $j' < j$, $l' < l$; c'est $x_{\alpha\beta\gamma\delta}$ dans tous les autres cas.

3° Envisageons les deux éléments x_{ijkl} et $z_{i'j'k'l'}$.

On a $z_{abcd} \leqslant x_{ijkl}$ et $z_{abcd} \leqslant z_{i'j'k'l'}$ si $a \leqslant \alpha$, $b < \beta$, $c \leqslant \gamma$, $d < \delta$ ou si $a \leqslant \alpha$, $b = j' < j$, $c \leqslant \gamma$, $d = l' < l$.

On a $x_{abcd} \leqslant x_{ijkl}$ et $x_{abcd} \leqslant z_{i'j'k'l'}$ si et seulement si $a \leqslant \alpha$, $b \leqslant \beta$, $c \leqslant \gamma$, $d \leqslant \delta$.

Il existe donc un minorant de la forme x plus grand que tous les autres, c'est $x_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Il existe aussi un minorant de la forme z plus grand que tous les autres, c'est $z_{\alpha\beta\gamma\delta}$ si $j' < j$ et $l' < l$, c'est $z_{\alpha\beta'\gamma\delta'}$ dans les autres cas.

Finalement si $j' < j$ et $l' < l$, l'élément $z_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est plus grand minorant; sinon, l'élément $x_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est plus grand minorant.

On voit de la même façon que les éléments $x_{ij\infty}$ et $z_{i'j'k'l'}$ admettent pour plus grand minorant l'élément $z_{\alpha\beta k'l'}$ si $j' < j$ et l'élément $x_{\alpha\beta k'l'}$ si $j' \geqslant j$, et que les éléments $x_{\infty kl}$ et $z_{i'j'k'l'}$ admettent pour plus grand minorant l'élément $z_{i'j'\gamma\delta}$ si $l' < l$ et l'élément $x_{i'j'\gamma\delta}$ si $l' \geqslant l$.

On a donc bien affaire à un treillis complet. Nous montrons maintenant que *ce treillis est modulaire.* Nous aurons besoin des plus petits majorants. L'étude duale de celle qui vient d'être faite donne leur expression.

1° Le plus petit majorant de x_{ijkl} et $x_{i'j'k'l'}$ est $x_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1}$ (où on a posé $\alpha_1 = \max(i, i')$, $\beta_1 = \max(j, j')$, $\gamma_1 = \max(k, k')$, $\delta_1 = \max(l, l')$. On écrit facilement l'expression du plus petit majorant de deux éléments de la forme x dans les autres cas.

2° Le plus petit majorant de z_{ijkl} et $z_{i'j'k'l'}$ est $z_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1}$ si $j = j'$, $l = l'$, si $j < j'$, $l < l'$ ou si $j' < j$, $l' < l$; c'est $x_{\alpha_1\beta'_1\gamma_1\delta'_1}$ (où $\beta'_1 = \beta_1 + 1$, $\delta'_1 = \delta_1 + 1$) dans les autres cas.

3° Le plus petit majorant de x_{ijkl} et $z_{i'j'k'l'}$ est $z_{\alpha_1 j'\gamma_1 l'}$ si $j' \geqslant j$ et $l' \geqslant l$; c'est $x_{\alpha_1\beta_2\gamma_1\delta_2}$ (où on a posé $\beta_2 = \max(j, j' + 1)$, $\delta_2 = \max(l, l' + 1)$ dans les autres cas.

Le plus petit majorant de $x_{ij\infty}$ et $z_{i'j'k'l'}$ est $x_{\alpha_1\beta_2\infty}$; celui de $x_{\infty kl}$ et $z_{i'j'k'l'}$ est $x_{\infty\gamma_1\delta_2}$.

Pour établir la modularité, nous montrons qu'il est impossible de trouver des éléments u, v, w tels que $u \wedge v < w < v < u \vee w$. Distinguons plusieurs cas :

1° *u et v sont de hauteur finie :* $u \vee v$ est alors de hauteur finie et tous les éléments envisagés appartiennent au sous-treillis convexe $[x_{1111}, u \vee v]$ de longueur finie. On s'assure facilement que ce treillis satisfait aux conditions (1) et (1′) : x_{ijkl} couvre $x_{i'j'k'l'}$ si et seulement si $i \geqslant i'$, $j \geqslant j'$, $k \geqslant k'$, $l \geqslant l'$ et $i + j + k + l = i' + j' + k' + l' + 1$, z_{ijkl} couvre $z_{i'j'k'l'}$ si et seulement si $i \geqslant i'$, $j = j'$, $k \geqslant k'$, $l = l'$ et $i + k = i' + k' + 1$, x_{ijkl} couvre $z_{i'j'k'l'}$ si et seulement si $i = i'$, $j = j' + 1$, $k = k'$, $l = l' + 1$, z_{ijkl} couvre $x_{i'j'k'l'}$ si et seulement si $i = i'$, $j = j'$, $k = k'$, $l = l'$; ces remarques faites, on vérifie que si x_1 et x_2 couvrent $x_1 \wedge x_2$, $x_1 \vee x_2$ couvre x_1 et x_2, si z_1 et z_2 couvrent $z_1 \wedge z_2$, $z_1 \vee z_2$ couvre z_1 et z_2 ($z_1 \wedge z_2$ est nécessairement de la forme z), si x_1 et z_2 couvrent $x_1 \wedge z_2$, $x_1 \vee z_2$ couvre x_1 et z_2 ($x_1 \wedge z_2$ peut être de la forme x : quatre cas sont à distinguer, soit $x_1 \wedge z_2 = x_{ijkl}$, $z_2 = z_{ijkl}$, $x_1 = x_{ijkl+1}$ — alors $x_1 \vee z_2 = x_{ij+1kl+1}$ —, soit $x_1 \wedge z_2 = x_{ijkl}$, $z_2 = z_{ijkl}$, $x_1 = x_{ijk+1l}$ — alors $x_1 \vee z_2 = z_{ijk+1l}$ —, et deux autres cas analogues; $x_1 \wedge z_2$ peut être de la forme z : on a deux cas analogues soit, par exemple, $x_1 \wedge z_2 = z_{ijkl}$, $x_1 = x_{ij+1\,kl+1}$, $z_2 = z_{i+1jkl}$ — alors $x_1 \vee z_2 = x_{i+1\,j+1\,k\,l+1}$ —); la condition (1′) se vérifie de façon tout à fait analogue, le treillis $[x_{1111}, x_{ijkl}]$ est d'ailleurs auto-dual. Le treillis $[x_{1111}, u \vee v]$ est donc modulaire et on ne peut trouver w satisfaisant aux inégalités précédentes.

2° *u est de hauteur finie et v de hauteur infinie :* on a, par exemple, $v = x_{ij\infty}$ et $u = x_{i'j'k'l'}$ ou $u = z_{i'j'k'l'}$.

Soit d'abord $u = x_{i'j'k'l'}$ et $v = x_{ij\infty}$. L'élément w devrait être de l'une des formes $x_{ab\infty}$, x_{abcd}, z_{abcd} (avec $a \leqslant i$, $b \leqslant j$). On ne peut avoir $w = x_{ab\infty}$ car, de $u \vee v = u \vee w$, on déduit $\max(i', i) = \max(i', a)$, $\max(j', j) = \max(j', b)$, et de $u \wedge v = u \wedge w$, on déduit $\min(i', i) = \min(i', a)$, $\min(j', j) = \min(j', b)$, ce qui entraîne $i = a$, $j = b$. On ne peut avoir $w = x_{abcd}$ pour la même raison. On ne peut avoir $w = z_{abcd}$ car $u \vee w$ serait de hauteur finie.

Soit maintenant $u = z_{i'j'k'l'}$ et $v = x_{ij\infty}$. L'élément w devrait être de l'une des formes précédentes. Il ne peut être de l'une des deux dernières car $u \vee w$ serait de hauteur finie. On ne peut pas non plus avoir $w = x_{ab\infty}$: de $u \vee v = u \vee w$, on déduit $\max(i', i) = \max(i', a)$ et $\max(j' + 1, j) = \max(j' + 1, b)$; de $u \wedge v = u \wedge w$, on déduit d'une part $\min(i', i) = \min(i', a)$, d'autre part qu'on doit avoir $j' < b < j$ ou $b < j \leqslant j'$; il faut déjà $a = i$; de plus, si $j' < b < j$, on a $j = \max(j' + 1, j) = \max(j' + 1, b) = b$, si $b < j \leqslant j'$, $u \wedge v$ est de la forme x et on a $j = \min(j', j) = \min(j', b) = b$.

3° *u est de hauteur infinie et v de hauteur finie :* on a, par exemple, $u = x_{ij\infty}$ et $v = x_{i'j'k'l'}$ ou $v = z_{i'j'k'l'}$.

Soit d'abord $u = x_{ij\infty}$ et $v = x_{i'j'k'l'}$. L'élément w devrait être de l'une des formes x_{abcd} (avec $a \leqslant i'$, $b \leqslant j'$, $c \leqslant k'$, $d \leqslant l'$) ou z_{abcd} (avec $a \leqslant i'$, $b < j'$, $c \leqslant k'$, $d < l'$). On ne peut avoir $w = x_{abcd}$ car $u \wedge v = u \wedge w$

impose $c = k'$, $d = l'$, $\min(i, i') = \min(i, a)$, $\min(j, j') = \min(j, b)$ et $u \vee v = u \vee w$ impose $\max(i, i') = \max(i, a)$ et $\max(j, j') = \max(j, b)$, d'où $a = i'$, $b = j'$. On ne peut avoir non plus $w = z_{abcd}$ car $u \wedge v = u \wedge w$ impose $l' = d$ en contradiction avec $d < l'$.

Soit maintenant $u = x_{ij\infty}$ et $v = z_{i'j'k'l'}$. L'élément w devrait être de l'une des formes x_{abcd} (avec $a \leqslant i'$ $b \leqslant j'$, $c \leqslant k'$, $d \leqslant l'$) ou z_{abcd} (avec $a \leqslant i'$ $b < j'$, $c \leqslant k'$, $d < l'$ ou $a \leqslant i'$, $b = j'$, $c \leqslant k'$, $d = l'$). La forme x_{abcd} ne peut pas convenir : de $u \wedge v = u \wedge w$, on déduit $j' \geqslant j$ pour que $u \wedge v$ soit de la forme x, $j = \min(j, j') = \min(j, b)$ soit $j \leqslant b$; de $u \vee v = u \vee w$, on déduit $j' + 1 = \max(j, j' + 1) = \max(j, b) = b$ qui contredit $b \leqslant j'$. La forme z_{abcd} ne convient pas davantage : $u \wedge v = u \wedge w$ impose d'abord $c = k'$, $d = l'$, donc $b = j'$, puis $\min(i, i') = \min(i, a)$; $u \vee v = u \vee w$ impose $\max(i, i') = \max(i, a)$, d'où $a = i'$.

4° *u et v sont de hauteur infinie :* on a, par exemple, $u = x_{ij\infty}$ et $v = x_{i'j'\infty}$ ou $v = x_{\infty k'l'}$.

Si $u = x_{ij\infty}$ et $v = x_{i'j'\infty}$, il faut prendre w de la forme $x_{ab\infty}$ sans quoi $u \wedge w$ serait de hauteur finie; on voit immédiatement que c'est impossible.

Si $u = x_{ij\infty}$ et $v = x_{\infty k'l'}$, on a $u \vee v = x_{\infty\infty}$, il faut donc prendre w de la forme $x_{\infty cd}$ et c'est impossible.

Finalement, le treillis C 8 est un treillis complet modulaire satisfaisant à la condition de chaîne descendante. *Il ne satisfait pas à la condition* (*I*) car le couple $(x_{11\infty}, x_{\infty 11})$ ne possède pas la propriété *i :* en effet, la chaîne $\{(x_{1111}, x_{1111}) < (x_{1121}, x_{1111}) < (x_{1121}, x_{2111}) < \dots < (x_{11n1}, x_{n111}) < (x_{11n+11}, x_{n111}) < \dots < (x_{11\infty}, x_{\infty 11})\}$ maximale dans le produit cardinal $[x_{1111}, x_{11\infty}] \times [x_{1111}, x_{\infty 11}]$ est obtenue à partir de la chaîne $\{z_{1111} < z_{1121} < z_{2121} < \dots < z_{n1n1} < z_{n1n+11} < \dots < x_{\infty\infty}\}$ non maximale entre x_{1111} et $x_{\infty\infty}$ puisqu'elle ne contient pas l'élément x_{1111}.

b) Les théorèmes 4 et 5 montrent que, parmi les treillis satisfaisant à une condition de chaîne, les treillis modulaires sont caractérisés par l'un quelconque des couples de conditions : (α_i) et (α_i'), (α^i) et $(\alpha^{i\prime})$, (R) et (R'), (F) et (F'), (S) et (S'), (L) et (L'), (B) et (B', (α) et (α'), (M) et (M').

Les exemples suivants montrent qu'un treillis satisfaisant à une condition de chaîne et à un des couples de conditions (2_i) et $(2_i')$, (2^i) et $(2^{i\prime})$, (J_1) et (J_1'), (1_i) et $(1_i')$, (1^i) et $(1^{i\prime})$, (5) et (5'), (γ) et (γ'), (β) et (β'), (J) et (J'), (6) et (6'), (2) et (2'), (1) et (1'), (3) et (3') n'est pas nécessairement modulaire.

1) *B 3 :* Ce treillis a été étudié au chapitre II de T. Il satisfait à la condition (γ). Son dual est le treillis C 3 également étudié au chapitre II de T. Il satisfait aussi à la condition (γ).

2) *B 7 :* Les éléments du treillis B 7 sont a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} et d, où i et j sont des indices entiers positifs quelconques. Le diagramme représente un ensemble partiellement ordonné satisfaisant à la condition de chaîne ascendante.

Deux éléments quelconques admettent un plus petit majorant. On a donc un treillis complet. Ce treillis satisfait à la condition (α) : les couples d'éléments $(a_{ij}, a_{i'j'})$, $(a_{ij}, b_{i'j'})$, $(a_{ij}, c_{i'j'})$, $(b_{ij}, b_{i'j'})$, $(c_{ij}, c_{i'j'})$ possèdent manifestement la propriété a et il en est de même des couples symétriques; les couples $(b_{ij}, c_{i'j'})$ et les couples symétriques ne la possèdent pas. On peut en dire autant pour la propriété b; le treillis B 7 satisfait donc à la condition (β). On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les idéaux non principaux a'_{oj}, a'_{io}, a'_{oo}, b'_{oj}, b'_{io}, b'_{oo}, c'_{oj}, c'_{io}, c'_{oo}. Ce dernier treillis ne satisfait pas à la condition (1); donc, le treillis B 7 ne satisfait pas à la condition (1'). Il ne satisfait pas à la condition (6) car on a $b_{11} \wedge c_{11} = c_{21} \wedge b_{11} = d$, $b_{11} \vee c_{21} = b_{11} \vee c_{11} = a_{11}$ et pour tout élément x tel que $d < x \leqslant b_{11}$, on a $(x \vee c_{21}) \wedge c_{11} = c_{11}$. Il ne satisfait pas à la condition (J) car le couple (b_{12}, c_{21}) ne possède pas la propriété j : la chaîne $\{(d, d) < (b_{1n}, d) < (b_{12}, c_{2m})$ (où n décroît jusqu'à 2 et m décroît jusqu'à 1) est maximale dans le produit cardinal $[d, b_{12}] \times [d, c_{21}]$; elle est obtenue à partir de la chaîne $\{d < b_{1n} < a_{1m}\}$ et seulement à partir de cette chaîne ou de celle qu'on obtient en remplaçant b_{12} par b_{11} et ces deux chaînes sont non maximales entre d et a_{11}.

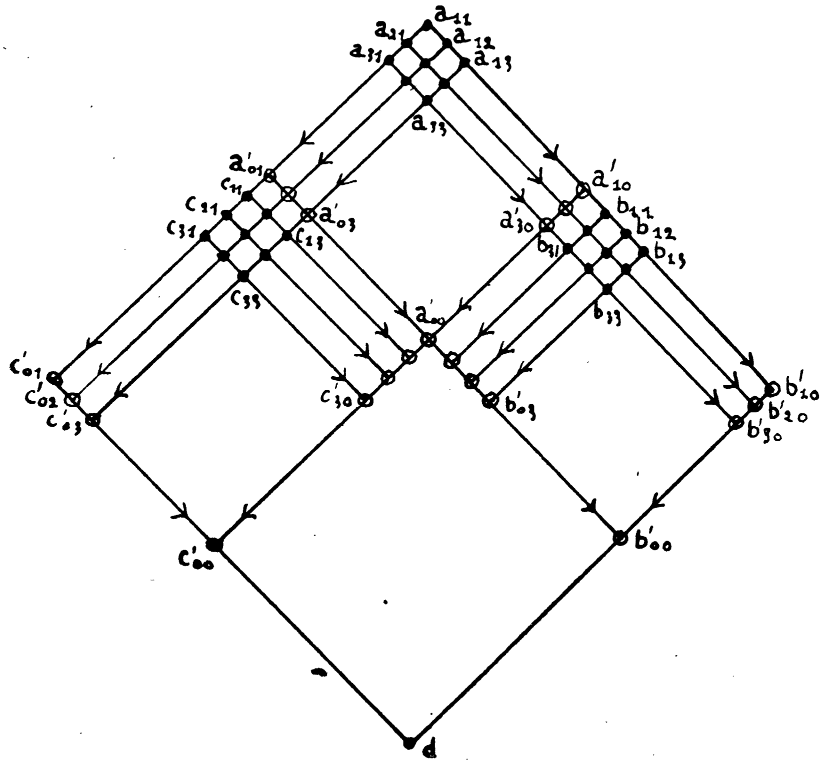


FIG. 6

Le treillis B 7 satisfait donc aux conditions (α), (γ), (β), (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions (α^i), (R), (I), (F), (2^i), (B), (J), (1^i), (5), (6).

Le dual du treillis B 7 est le treillis suivant C 6. Il satisfait à la condition (S) : les couples d'éléments $(a_{ij}, a_{i'j'})$, $(a_{ij}, b_{i'j'})$, $(a_{ij}, c_{i'j'})$, $(b_{ij}, b_{i'j'})$, $(c_{ij}, c_{i'j'})$ possèdent la propriété s et il en est de même des couples $(b_{ij}, c_{i'j'})$. Il ne satisfait pas à la condition (γ) car le couple (b_{11}, c_{21}) possède la propriété c et le couple (c_{21}, b_{11}) ne la possède pas. Il ne satisfait pas à la condition (1_i).

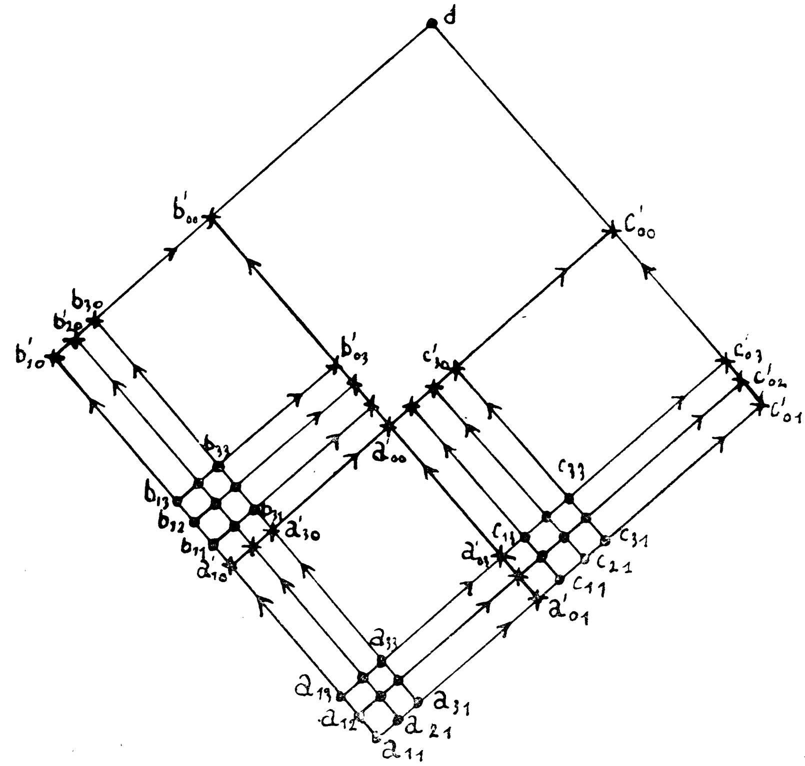


FIG. 7

Finalement, le treillis C 6 satisfait aux conditions (S), (β), (2), (1). Il ne satisfait pas aux conditions (α_i), (R), (I), (2_i), (L), (1_i), (α), (γ).

Le treillis B 7 et son dual satisfont aux conditions (β), (2), (1).

3) *B 11 :* Ce treillis a été étudié au chapitre II de T. Il satisfait aux conditions (2^i), (1^i), (5), (6), (2), (1), (3).

Étudions son dual C 7. Il satisfait à la condition (2). Il ne satisfait pas à la condition (γ) car le couple (b_{10}, a_{01}) ne possède pas la propriété c alors que le couple symétrique la possède. Il ne satisfait pas à la condition (1_i) car α_1 et α_2 couvrent a'_{00} alors que b_{00} ne les couvre pas. Il ne satisfait pas à la condition (S) car le couple (a_{01}, a_{10}) ne vérifie pas la propriété s : la chaîne $\{(a_{11}, a_{11}) < \ldots < (a_{n1}, a_{1n}) < (a_{n+11}, a_{1n}) < \ldots < (a_{01}, a_{10})\}$ maximale dans le produit cardinal $[a_{11}, a_{01}] \times [a_{11}, a_{10}]$ peut être obtenue à partir d'une chaîne entre a_{11} et b_{oo} mais ne peut l'être à partir d'une chaîne maximale.

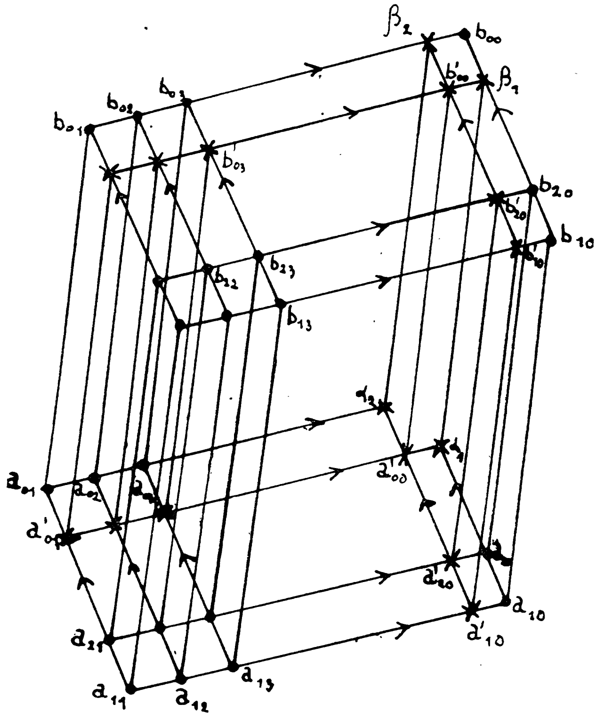


FIG. 8

Le treillis C 7 satisfait donc aux conditions (β), (2) et (1). Il ne satisfait pas aux conditions (α_i), (R), (I), (2_i), (S), (L), (1_i), (α), (γ).

Le treillis B 11 et son dual satisfont aux conditions (2^i), (1^i), (5), (6), (2), (1), (3).

4) *B 8 :* Les éléments de ce treillis sont a_{ij}, b_i, c_j, d_i, e_j, f et g où les indices sont des entiers positifs quelconques. On voit aisément qu'il s'agit bien d'un treillis complet qui satisfait à la condition de chaîne ascendante. Il satisfait à la condition (2). Il ne satisfait pas à la condition (γ) ni à la condition (α) car le couple (c_1, d_1) ne possède ni la propriété c ni la propriété a alors que le couple (d_1, c_1) les possède. Il ne satisfait pas à la condition (J) car le couple (e_1, d_1) ne possède pas la propriété j : la chaîne $\{(g, g) < \ldots < (e_n, d_n) < (e_n, d_{n-1}) < \ldots < (e_1, d_1)\}$ maximale dans le produit cardinal $[g, e_1] \times [g, d_1]$ est obtenue à partir de la chaîne $\{g < \ldots < a_{nn} <$

$a_{n-1\,n} < \dots < a_{11}\}$ et peut être obtenue seulement à partir de celle-là ou de celle qu'on obtient en remplaçant g par f, et ces deux chaînes sont non maximales entre g et a_{11}. On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les idéaux non principaux a'_{i0}, a'_{0j}, a'_{00}, b'_{0}, c'_{0}, d'_{0}, e'_{0}. Le treillis **B 8**,

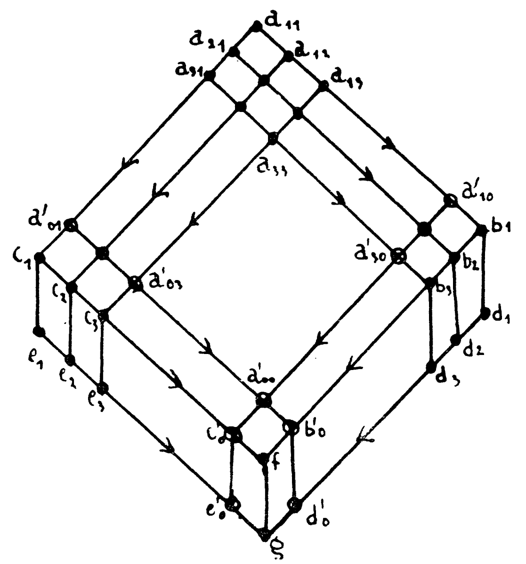


Fig. 9

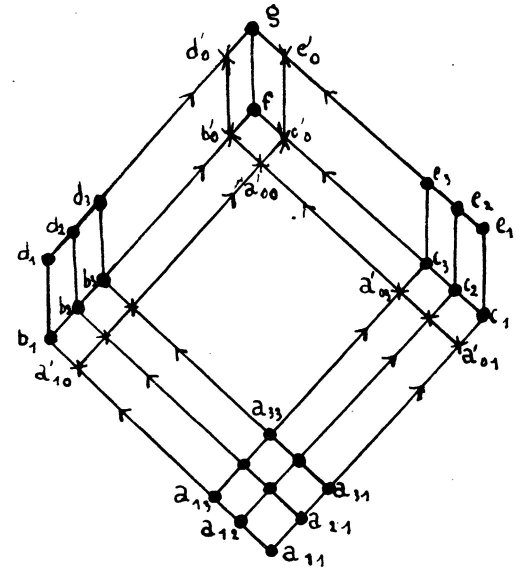


Fig. 10

ne satisfait pas à la condition (1^i) car d'_0 et e'_0 couvrent g sans que a'_{00} couvre d'_0 et e'_0.

Le treillis B 8 satisfait aux conditions (2) et (1). Il ne satisfait pas aux conditions (α^i), (R), (I), (F), (2^i), (B), (J), (1^i), (5), (α), (γ), (β), (6).

Son dual C 10 (voir page précédente) satisfait à la condition (α_i) car les seuls couples d'éléments du treillis des idéaux ne possédant pas la propriété a sont les couples (d_i, e_j) et les couples symétriques. Il satisfait aux conditions (R) et (I), donc ainsi à toutes les conditions étudiées.

Le treillis B 8 et son dual satisfont donc aux conditions (2_i), (1_i), (2), (1), (3).

5) *B 2* : Ce treillis et son dual ont été étudiés au chapitre II de T. Ils satisfont aux conditions (J) et (1).

c) Les exemples suivants montrent que, parmi les treillis quelconques (même complets), l'un des couples de conditions (α_i) et (α_i'), (R) et (R') (F) et (F'), (S) et (S'), (L) et (L'), (B) et (B'), (α) et (α'), (M) et (M') ne suffit pas à caractériser les treillis modulaires [5].

1) *A 6* : Les éléments du treillis A 6 sont ceux des chaînes $\{a_i\}$ et $\{b_j\}$ où les indices sont des entiers relatifs quelconques et les éléments c et d. On a manifestement affaire à un treillis complet. On obtient le treillis des idéaux et celui des idéaux duaux en ajoutant les idéaux non principaux a' et b'. Le treillis A 6 est auto-dual. Il satisfait aux conditions (α_i), (R), (I), (β), mais il ne satisfait pas à la condition (6) car on a $a_0 \wedge b_0 = a_0 \wedge b_1 = d$, $a_0 \vee b_0 = a_0 \vee b_1 = c$ et pour tout x tel que $d < x \leqslant a_0$, on a $(x \vee b_0) \wedge b_1 = b_1$. Il ne satisfait pas à la condition (1^i).

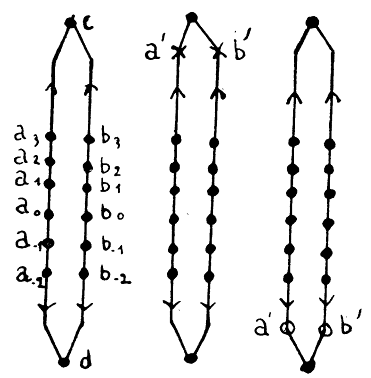


FIG. 11

Finalement, le treillis A 6 satisfait aux conditions suivantes et à leurs duales : (α_i), (R), (I), (2_i), (S), (L), (J), (1_i), (α), (γ), (β), (M), (2), (1), (3). Il ne satisfait pas aux conditions (α^i), (F), (2^i), (B), (1^i), (5), (6).

(5) La question reste ouverte en ce qui concerne le couple (α^i) et ($\alpha^{i\prime}$).

2) *A 2* : Les éléments du treillis A 2 sont a_{ij}, b_{ij}, c_i, d_j, e où les indices sont des entiers positifs quelconques. On vérifie facilement que deux éléments quelconques admettent un plus petit majorant, puis qu'il en est de même d'une famille quelconque d'éléments. Le diagramme étant auto-dual, il représente un treillis complet auto-dual. Ce treillis satisfait à la condition (S) car les couples d'éléments $(a_{ij}, a_{i'j'})$, $(a_{ij}, b_{i'j'})$, $(a_{ij}, c_{i'})$, $(a_{ij}, d_{i'})$, $(b_{ij}, b_{i'j'})$, $(b_{ij}, c_{i'})$, $(b_{ij}, d_{j'})$ vérifient manifestement la propriété s et il en est de même des couples (a_{ij}, e) et (b_{ij}, e) (ces derniers ne vérifient pas la propriété r). Il satisfait à la condition (F) : on voit que les couples précédents possèdent la propriété f. Il ne satisfait pas aux conditions (α) et (γ) car le couple (e, a_{11}) possède les propriétés a et c que ne possède pas le couple (a_{11}, e).

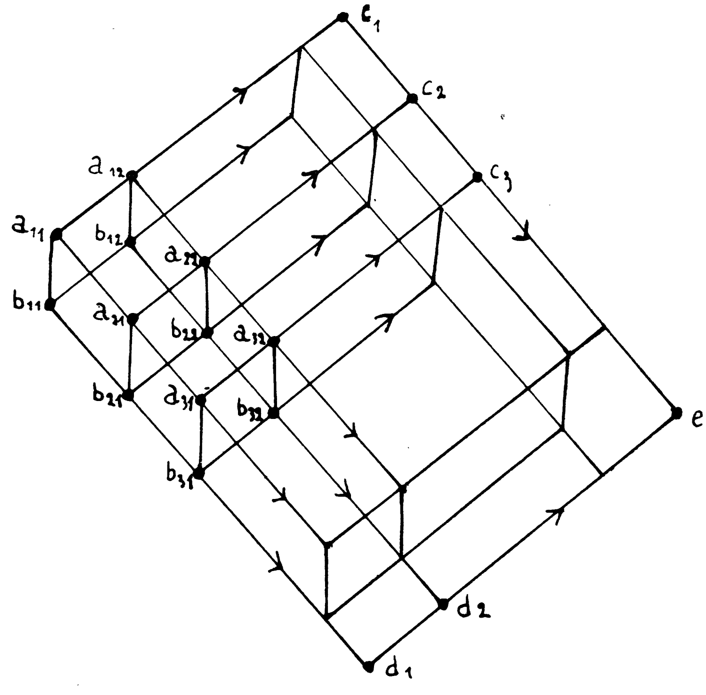


FIG. 12

On obtient le treillis des idéaux (voir page suivante) en ajoutant les idéaux non principaux a'_{i0}, b'_{i0} et d'. Ce treillis satisfait à la condition (1) mais non à la condition (2) car e couvre $d' = e \wedge b'_{10}$ et $c_1 = e \vee b'_{10}$ ne couvre pas b'_{10}.

On obtient le treillis des idéaux duaux en ajoutant les éléments a'_{0j}, b'_{0j} et c'. Ce treillis satisfait à la condition (2).

Le treillis A 2 satisfait donc aux conditions suivantes et à leurs duales : (F), (2^i), (S), (B), (J), (1_i), (1^i), (5), (β), (M), (6), (2), (1), (3). Il ne satisfait pas aux conditions (α_i), (α^i), (R), (I), (2_i), (L), (α), (γ).

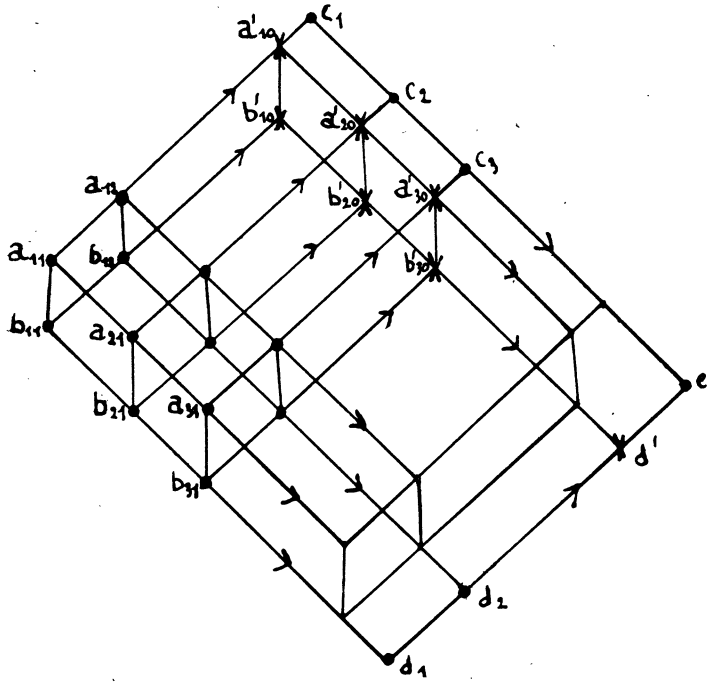

c1
a'10
c2
b'10
a'20
c3
a12
b'20
a'30
a11
b12
b'30
b11
a21
e
b21
a31
d'
b31
d2
d1

FIG. 13

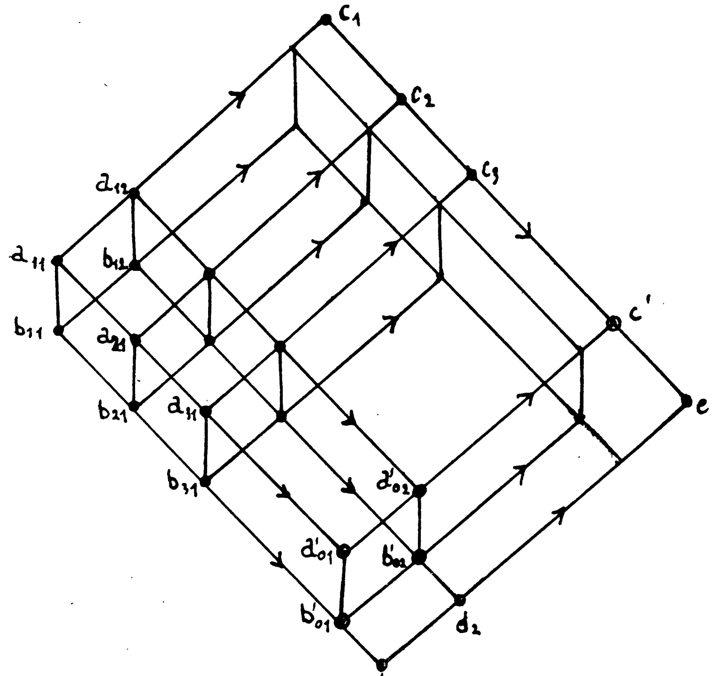

c1
c2
a12
c3
a11
b12
b11
a21
c'
e
b21
a31
b31
a'02
a'01
b'02
b'01
d2
d1

FIG. 14

CHAPITRE II

Application aux treillis complémentés.

1. **Propriété** (Π).

Dans un treillis avec élément zéro, pour qu'on puisse parler avec intérêt de famille (finie) d'éléments indépendants, il est nécessaire que cette notion ne dépende pas de l'ordre dans lequel on énonce ces éléments.

Il est donc nécessaire que la propriété suivante qui traduit cette exigence pour une famille de trois éléments soit vérifiée :

$$(\Pi)\quad x_1 \wedge x_2 = 0 \text{ et } (x_1 \vee x_2) \wedge x_3 = 0 \rightarrow (x_1 \vee x_3) \wedge x_2 = 0.$$

Réciproquement, dans un treillis avec élément zéro qui possède la propriété (Π), la symétrie de la notion d'indépendance a lieu pour toute famille finie d'éléments. On l'établit aisément par récurrence :

Supposons cette symétrie vérifiée pour toute famille de n-1 éléments et soit une famille de n éléments $x_1, x_2, \ldots x_n$ telle qu'on ait (s'il en existe) :

$$(\bigvee_{i<j} x_i) \wedge x_j = 0 \text{ pour tout } j = 2, \ldots, n. \qquad (\mathcal{E})$$

Il suffit de montrer qu'on a, pour tout indice $k < n$,

$$(\bigvee_{i \neq k} x_i) \wedge x_k = 0.$$

Or, on a $(\bigvee_{i \neq k, n} x_j) \wedge x_k = 0$, puisque la famille des n-1 éléments $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ est supposée posséder la propriété de symétrie. L'égalité à établir résulte de cette égalité et de l'égalité ($\mathcal{E}$) pour $j = n$, compte-tenu de la propriété (Π).

La propriété (Π) est vérifiée par un treillis modulaire quelconque (à élément zéro) : en effet, on a, dans un tel treillis,

$$[(x_1 \vee x_3) \wedge x_2] \vee x_1 = (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_1) = x_1 \vee [x_3 \wedge (x_2 \vee x_1)] = x_1,$$

puisque le crochet est l'élément zéro d'après l'hypothèse. On en déduit

$$(x_1 \vee x_3) \wedge x_2 \leqslant x_1, \text{ d'où } (x_1 \vee x_3) \wedge x_2 = x_1 \wedge x_2 = 0.$$

Cette propriété n'est pas vérifiée par tout treillis semi-modulaire de longueur finie (1).

2. **Propriété** $(\overline{\Pi})$.

Il existe toutefois une propriété plus faible que la propriété (Π), suffisante dans certaines applications de la théorie de l'indépendance qui est conséquence de la semi-modularité dans un treillis de longueur finie.

---

(1) Elle ne l'est pas par le treillis 7 *b* de G. Birkhoff [1], p. 106, ni par le treillis des partitions d'un ensemble à quatre éléments (voir la fin du § 2). Il existe par contre des treillis de longueur finie non semi-modulaires qui possèdent la propriété (Π) : citons le treillis non modulaire à cinq éléments.

Cette propriété est la suivante :

$(\overline{\Pi})$ $x_1 \wedge x_2 = 0$, $(x_1 \vee x_2) \wedge x_3 = 0$ et x_3 couvre $0 \to (x_1 \vee x_3) \wedge x_2 = 0$ (2).

THÉORÈME 1. — *Dans un treillis quelconque (avec élément zéro), la condition* (2) *entraîne la propriété* $(\overline{\Pi})$.

Soit un treillis avec élément zéro satisfaisant à la condition (2). Soient trois éléments x_1, x_2, x_3 satisfaisant à l'hypothèse de la propriété $(\overline{\Pi})$. Supposons qu'on ait $(x_1 \vee x_3) \wedge x_2 = a > 0$. De $a \leqslant x_2$, on déduit $x_1 \vee a \leqslant x_1 \vee x_2$. D'autre part, on a $x_1 \leqslant x_1 \vee a \leqslant x_1 \vee x_3$. Or, x_3 couvre $x_2 \wedge x_3 = 0$. D'après la condition (2), $x_1 \vee x_3$ couvre x_1. On a donc, ou bien $x_1 \vee a = x_1$, ou bien $x_1 \vee a = x_1 \vee x_3$. Dans le premier cas, on déduit $a \leqslant x_1$ d'où $a \leqslant x_1 \wedge x_2 = 0$, en contradiction avec la supposition faite. Dans le deuxième cas, on déduit $x_3 \leqslant x_1 \vee a \leqslant x_1 \vee x_2$, en contradiction avec l'égalité $(x_1 \vee x_2) \wedge x_3 = 0$, ce qui achève d'établir le résultat envisagé.

La propriété $(\overline{\Pi})$ suffit en particulier dans la démonstration du théorème 13 de G. Birkhoff, p. 129 et permet d'en déduire le théorème suivant (3) :

THÉORÈME 2. — *Dans un treillis T complet satisfaisant à la condition* $(\overline{\Pi})$ *et à la condition de* $\wedge$— *continuité :*

$$y_\iota \uparrow y \to x \wedge y_\iota \uparrow x \wedge y \ (4)$$

la condition (L7′) L'élément universel est union de points
entraîne (L7) Tout élément possède au moins un complément;
la condition (L7R′) Tout élément est union de points
entraîne (L7R) Tout élément d'un sous-treillis $[a, b]$ *admet au moins un complément dans ce sous-treillis* (5).

---

(2) La propriété $(\overline{\Pi})$ est intimement liée à l'axiome d'échange de Steinitz et Mac Lane. Elle est en effet entraînée (dans les treillis quelconques) par la forme suivante de cet axiome

$$(\overline{2}) \text{ on n'a pas } p \leqslant x \to x \vee p \text{ couvre } x$$

et elle entraîne la forme

$$(\varepsilon)\ x < x \vee p \leqslant x \vee q \to x \vee p = x \vee q.$$

Les réciproques ne sont pas vraies en toute généralité. La première l'est en présence de l'axiome (G_1) de S. Mac Lane [illegible], la seconde en présence de l'axiome suivant plus faible :

Pour tout x, il existe p tel que l'on ait $p \leqslant x$

vérifié en particulier si la condition de chaîne descendante est satisfaite.

(3) Elle suffit évidemment aussi à chaque fois que l'on se borne à considérer l'indépendance de familles de points.

(4) G. BIRKHOFF [**1**], p. 40. On écrit $y_\iota \uparrow y$ si la famille $\{y_\iota\}$ constitue un ensemble filtrant supérieurement, c'est-à-dire si deux éléments de la famille ont toujours un majorant commun dans la famille, et si on a $y = \bigvee\limits_\iota y_\iota$.

(5) Pour les treillis de longueur finie qui sont évidemment complets et vérifient trivialement la $\wedge$- continuité, ceci résulte du théorème 6 de G. BIRKHOFF [**1**], p. 105. Avec les hypothèses du théorème 2, la condition (L7′) n'entraîne pas (L7R) et (L7R′) comme le montre le contre exemple 7 *b* de G. BIRKHOFF [**1**], p. 106. Le théorème 2 a été démontré indépendamment par L. Lesieur à partir de l'axiome d'échange $(\overline{2})$.

On établit la première partie du théorème comme dans la démonstration du théorème 13 de G. Birkhoff où le fait que le treillis est modulaire n'intervient que par la propriété $\overline{(\mathrm{II})}$.

On établit la deuxième partie de la manière suivante : Soit un sous-treillis convexe $[a, b]$. Il satisfait à la condition (2). Il est évidemment complet et satisfait à la condition de $\wedge$ — continuité. Il satisfait à la condition (L7′) : en effet, dans le treillis T, b est union de points p_ι; on a $b = (\bigvee_\iota p_\iota) \vee a = \bigvee_\iota (p_\iota \vee a)$; les éléments $p_\iota \vee a$ distincts de a sont des points dans le treillis $[a, b]$ car dans le treillis T, p_ι couvre $p_\iota \wedge a = 0$ donc $p_\iota \vee a$ couvre a. Il suffit alors d'appliquer la première partie du théorème.

Un exemple important de treillis satisfaisant à la propriété (II) et non à la propriété (II), ainsi qu'aux hypothèses du théorème 2 est constitué par le treillis des relations d'équivalence sur un ensemble quelconque E.

Ce treillis satisfait à $\overline{(\mathrm{II})}$ (6) : Soient trois relations d'équivalence sur E, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ telles que l'on ait $\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2 = 0$, $(\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2) \wedge \mathcal{R}_3 = 0$, $\mathcal{R}_3$ est un point c'est-à-dire qu'il existe seulement deux éléments distincts soit a et b, appartenant à E, avec $a \equiv b\ (\mathcal{R}_3)$. Nous montrons que l'on a $(\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_3) \wedge \mathcal{R}_2 = 0$. Pour cela, envisageons deux éléments x et y de E tels que $x \equiv y\ (\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_3)$ et $x \equiv y\ (\mathcal{R}_2)$. Puisque l'on a $x \equiv y\ (\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_3)$, il existe une suite finie d'éléments de E soit $z_1, z_2, \dots z_n$ tels que $x_1 = z_1 \equiv z_2\ (\mathcal{R}_1)$, $z_2 \equiv z_3\ (\mathcal{R}_3), \dots z_{n-1} \equiv z_n = y\ (\mathcal{R}_2)$ où $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_3$ interviennent alternativement. Si l'on convient, ce qui est légitime, que deux des éléments $z_2, z_3, \dots z_{n-1}$ sont toujours distincts, on voit que $\mathcal{R}_3$ ne peut intervenir qu'une fois. Si $\mathcal{R}_3$ n'intervient pas, on a $x \equiv y\ (\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2)$ d'où $x = y$. Si $\mathcal{R}_3$ intervient une fois, on a $x \equiv a\ (\mathcal{R}_1)$, $a \equiv b\ (\mathcal{R}_3)$, $b \equiv y\ (\mathcal{R}_1)$ par exemple, d'où on déduit $a \equiv b\ (\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2)$ et $a \equiv b\ (\mathcal{R}_3)$ donc $a = b$ en contradiction avec ce qui précède. Le résultat est établi.

Ce treillis ne satisfait pas à (II). Prenons pour E un ensemble à quatre éléments et soient les partitions définies par $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ conformes au graphique ci-dessous. On voit immédiatement que (II) est en défaut.

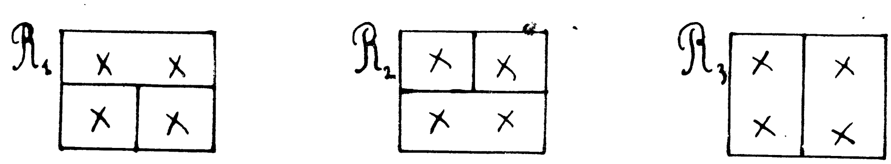


FIG. 15

On sait que ce treillis est complet et qu'il satisfait à la condition (2), ainsi qu'aux conditions (L7′) et (L7R′). Il satisfait aussi à la condition de $\wedge$— continuité : Soit $\{\mathcal{R}_\iota\}$ une famille dirigée de relations d'équivalence

(6) Il satisfait d'ailleurs à la condition plus forte (2).

telles que $\mathcal{R}_\iota \uparrow \mathcal{R}$ et soit ρ une relation d'équivalence quelconque. On a $\rho \wedge \mathcal{R}_\iota \uparrow \rho \wedge \mathcal{R}$. En effet, si on a $x \equiv y\ (\rho \wedge \mathcal{R})$, on a $x \equiv y\ (\rho)$ et $x \equiv y\ (\mathcal{R})$; il existe donc une valeur de ι telle que $x \equiv y\ (\mathcal{R}_\iota)$ (on a $x \equiv y\ (\mathcal{R})$ si et seulement si $x \equiv y\ (\mathcal{R}_\iota)$ pour un certain ι) ; on a alors $x \equiv y\ (\rho \wedge \mathcal{R}_\iota)$ ce qui montre que $\rho \wedge \mathcal{R}_\iota \uparrow \rho \wedge \mathcal{R}$.

CHAPITRE III

Etude de la permanence des différentes conditions de semi-modularité par passage aux sous-treillis, produits cardinaux, treillis homomorphes.

1. Passage aux sous-treillis.

Il est trivial que la propriété de semi-modularité d'un treillis de longueur finie ne se conserve pas nécessairement lorsqu'on passe à un sous-treillis quelconque. Aucune des conditions envisagées dans T ne se conserve donc généralement par passage d'un treillis à un de ses sous-treillis.

Toutefois, on sait qu'un sous-treillis convexe d'un treillis semi-modulaire de longueur finie est semi-modulaire (1). La propriété s'étend facilement par le théorème suivant :

Théorème 1. — *Chacune des conditions étudiées se conserve par passage d'un treillis à l'un quelconque de ses sous-treillis convexes.*

L'affirmation est à peu près triviale en ce qui concerne les conditions (R), (I), (F), (S), (L), (B), (J_1), (5), (α), (γ), (β), (M), (J), (6), (2), (1), (3). Elle est une conséquence immédiate du lemme suivant pour les conditions (α_i), (2_i), (1_i) et du lemme dual pour les conditions (α^i), (2^i), (1^i).

Lemme 1. — *Le treillis des idéaux C_i d'un sous-treillis convexe C d'un treillis T est isomorphe à un sous-treillis convexe du treillis des idéaux T_i de T.*

A chaque idéal $\mathcal{A}$ du treillis C, faisons correspondre l'ensemble $\mathcal{X}$ des éléments x de T tels qu'il existe a $\in \mathcal{A}$ pour lequel on ait $x \leqslant a$. L'ensemble $\mathcal{X}$ est un idéal de T : si on a $x' \leqslant x$ et $x \in \mathcal{X}$, on a, pour un certain $a \in \mathcal{A}$, $x' \leqslant x \leqslant a$, d'où $x' \in \mathcal{X}$; si on a $x_1 \in \mathcal{X}$ et $x_2 \in \mathcal{X}$, on a, pour certains éléments $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$, $x_1 \leqslant a_1$, $x_2 \leqslant a_2$, d'où $x_1 \vee x_2 \leqslant a_1 \vee a_2$; or $a_1 \vee a_2$ appartient à C qui est un sous-treillis de T donc à $\mathcal{A}$ qui est un idéal de C, si bien que $x_1 \vee x_2$ appartient à $\mathcal{X}$.

L'application $\mathcal{A} \to \mathcal{X}$ est biunivoque : si on a $\mathcal{A}_1 \neq \mathcal{A}_2$, il existe au moins par exemple un élément a_1 tel que l'on ait $a_1 \in \mathcal{A}_1$ et que l'on ait pas$a_1 \in \mathcal{A}_2$; on a alors $a_1 \in \mathcal{X}_1$, et on n'a pas $a_1 \in \mathcal{X}_2$ car il existerait $a_2 \in \mathcal{A}_2$ tel que $a_1 \leqslant a_2$ en contradiction avec le fait que l'on a pas $a_1 \in \mathcal{A}_2$.

L'ensemble C'_i des $\mathcal{X}$ est un sous-treillis de T_i : si $\mathcal{X}_1 \in C'_i$, $\mathcal{X}_2 \in C'_i$, on a aussi $\mathcal{X}_1 \vee \mathcal{X}_2 \in C'_i$ et $\mathcal{X}_1 \wedge \mathcal{X}_2 \in C'_i$; $\mathcal{X}_1 \vee \mathcal{X}_2$ qui est l'ensemble x de T tels qu'il existe $x_1 \in \mathcal{X}_1$, $x_2 \in \mathcal{X}_2$ avec $x \leqslant x_1 \vee x_2$ est obtenu à partir de $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$; $\mathcal{X}_1 \wedge \mathcal{X}_2$ qui est l'ensemble des éléments x de T tels

(1) G. Birkhoff [**1**], p. 103.

qu'il existe $x_1 \in \mathcal{X}_1$, $x_2 \in \mathcal{X}_2$ avec $x \leqslant x_1 \wedge x_2$ est obtenu à partir de $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2$.

Le sous-treillis C'_i de T_i est convexe; si $\mathcal{X}_1 \leqslant \mathcal{X} \leqslant \mathcal{X}_2$ avec $\mathcal{X}_1 \in C'_i$, $\mathcal{X}_2 \in C'_i$, on a aussi $\mathcal{X} \in C'_i$; en effet, $\mathcal{X}_1 \overline{\wedge} C$ (2) n'est pas vide (c'est $\mathcal{A}_1$), donc $\mathcal{X} \overline{\wedge} C$ n'est pas vide; posons $\mathcal{X} \overline{\wedge} C = \mathcal{A}'$ qui est bien un idéal de C; il lui correspond un idéal $\mathcal{X}'$ de T par l'application précédente; montrons que $\mathcal{X}' = \mathcal{X}$; il est évident que l'on a d'abord $\mathcal{X}' \leqslant \mathcal{X}$; soit maintenant un élément $x \in \mathcal{X}$; on a $x \in \mathcal{X}_2$ et il existe $a_2 \in \mathcal{A}_2$ tel que $x \leqslant a_2 \in C$; soit a_1 un élément quelconque de $\mathcal{A}_1$; on a $a_1 \in \mathcal{X}_1 \leqslant \mathcal{X}$ d'où $a_1 \vee x \in \mathcal{X}$; le sous-treillis C étant convexe, de $a_1 \leqslant a_1 \vee x \leqslant a_1 \vee a_2$, on déduit $a_1 \vee x \in C$, d'où $a_1 \vee x \in \mathcal{A}'$ et, par conséquent $x \in \mathcal{X}'$; on a donc $\mathcal{X}' \geqslant \mathcal{X}$ et finalement $\mathcal{X}' = \mathcal{X}$.

L'application $\mathcal{A} \to \mathcal{X}$ étant manifestement isotone, elle réalise un isomorphisme de C_i et C'_i, sous-treillis convexe de T_i.

2. Passage aux produits cardinaux.

On sait que le produit cardinal de deux treillis semi-modulaires de longueur finie est semi-modulaire [1]. La propriété se généralise aux conditions étudiées par les théorèmes suivants.

a) Certaines conditions se conservent par passage au produit cardinal pour des treillis absolument quelconques.

Théorème 2. — *Si un treillis S et un treillis T satisfont à l'une des conditions suivantes* (1), (2), (3), (5), (6), (α), (1_i), (2_i), (α_i), (1^i), (2^i), (α^i), *le produit cardinal* $S \times T$ *y satisfait aussi.*

1° *Condition* (1) : Soient deux éléments (p, q) et (u, v) du treillis $S \times T$ tels que (p, q) et (u, v) couvrent $(p \wedge u, q \wedge v)$. On a donc $p = p \wedge u$ et q couvre $q \wedge v$ ou bien p couvre $p \wedge u$ et $q = q \wedge v$: de même, on a $u = p \wedge u$ et v couvre $q \wedge v$ ou u couvre $p \wedge u$ et $v = q \wedge v$. Dans les quatre cas possibles, le fait que les treillis S et T satisfont à la condition (1) entraîne que $(p \vee u, q \vee v)$ couvre (p, q) et (u, v).

2° *Condition* (2) : Soient deux éléments (p, q) et (u, v) du treillis $S \times T$ tels que (p, q) couvre $(p \wedge u, q \wedge v)$. On a $p = p \wedge u$ et q couvre $q \wedge v$ ou bien p couvre $p \wedge u$ et $q = q \wedge v$. Dans le premier cas, $(p \vee u, q \vee v) = (u, q \vee v)$ couvre (u, v) puisque le treillis T satisfait à la condition (2); dans le deuxième cas $(p \vee u, q \vee v) = (p \vee u, v)$ couvre (u, v) puisque le treillis S satisfait à la condition (2).

3° *Condition* (3) : Soient quatre éléments (m, n) couvrant (p, q), (s, t) couvrant (u, v) du produit cardinal $S \times T$. On a m couvre p et $n = q$ ou bien $m = p$ et n couvre q, et, de la même façon, s couvre u et $t = v$ ou

(2) Le symbole $\overline{\wedge}$ désigne l'intersection au sens de la théorie des ensembles.

bien $s = u$ et t couvre v. On a quatre cas à examiner; dans chacun d'eux, l'égalité de la condition (3) est satisfaite, compte tenu, soit du fait que la condition (3) est satisfaite dans le treillis S ou dans le treillis T, soit du fait que, dans un treillis quelconque, les relations $x = y$ et $z \geqslant t$ entraînent l'égalité $[(x \vee t) \wedge z] \vee y = [(z \vee y) \wedge x] \vee t$. (Le second membre est en effet $x \vee t$ et on a $[(x \vee t) \wedge z] \vee x \leqslant x \vee t$ et $[(x \vee t) \wedge z] \vee x \geqslant t \vee x$).

4° *Condition* (5) : Soient trois éléments $x = (m, n)$, $y = (u, v)$, $z = (p, q)$ du treillis $S \times T$ tels que l'on ait $y \wedge z < x < z < y \vee x$. Les éléments x et z étant distincts, on ne peut avoir à la fois $m = p$ et $n = q$. Supposons, par exemple, que nous ayons $m \neq p$. De $u \wedge p \leqslant m < p \leqslant u \vee m$, on déduit $u \wedge p \neq m$ car de l'égalité $u \wedge p = m$, résulterait $u \geqslant m$, d'où $u \vee m = u$, et finalement $u \geqslant p$ et $u \wedge p = p$ en contradiction avec $u \wedge p = m$. De la même manière, on déduit $u \vee m \neq p$, si bien qu'on a $u \wedge p < m < p < u \vee m$. Le treillis S satisfait à la condition (5); ceci entraîne l'existence d'un élément s tel que $u \wedge p < s \leqslant u$ et $(m \vee s) \wedge p = m$. Dans le treillis $S \times T$, l'élément $t = (s, v \wedge q)$ vérifie $y \wedge z < t \leqslant y$ et $(x \vee t) \wedge z = x$, ce qui montre que ce treillis satisfait à la condition (5).

5° *Condition* (6) : L'hypothèse est celle du 4°. Le raisonnement fait s'applique; ici, l'élément s vérifie $u \wedge p < s \leqslant u$ et $(m \vee s) \wedge p < p$. Dans le produit cardinal $S \times T$, l'élément $t = (s, v \wedge q)$ vérifie $y \wedge z < t \leqslant y$ et $(x \vee t) \wedge z < z$, ce qui montre que ce treillis satisfait à la condition (6).

6° *Condition* (α) : Soient deux éléments $x = (p, q)$ et $y = (u, v)$ du produit cardinal $S \times T$. Supposons que le couple (x, y) possède la propriété a, c'est-à-dire que, pour tout élément $x' = (p', q')$ tel que $x \wedge y \leqslant x' \leqslant x$, on ait $(x' \vee y) \wedge x = x'$. Ceci entraîne que, pour tout élément p' tel que $p \wedge u \leqslant p' \leqslant p$, on a $(p' \vee u) \wedge p = p'$ et, pour tout élément q' tel que $q \wedge v \leqslant q' \leqslant q$, on a $(q' \vee v) \wedge q = q'$; autrement dit, dans les treillis S et T, les couples d'éléments (p, u) et (q, v) possèdent la propriété a. Ces treillis satisfaisant à la condition (α), les couples d'éléments (u, p) et (v, q) possèdent aussi cette propriété : tout élément u' tel que $u \wedge p \leqslant u' \leqslant u$ satisfait à $(u' \vee p) \wedge u = u'$ et tout élément v' tel que $v \wedge q \leqslant v' \leqslant v$ satisfait à $(v' \vee q) \wedge v = v'$. Il en résulte que tout élément $y' = (u', v')$ de $S \times T$ tel que $x \wedge y \leqslant y' \leqslant y$ satisfait à $(y' \vee x) \wedge y = y'$. Le couple (y, x) possède donc la propriété a comme le couple (x, y) et le treillis $S \times T$ satisfait à la condition (α).

7° *Conditions* (1_i), (2_i), (α_i) : Leur conservation au produit cardinal résulte de la conservation des conditions (1), (2), (α) et du lemme suivant.

LEMME 2. — *Le treillis des idéaux $(S \times T)_i$ du produit cardinal $S \times T$ est isomorphe au produit cardinal $S_i \times T_i$ des treillis d'idéaux de S et T.*

Soit $\mathfrak{X}$ un idéal de S, élément de S_i, $\mathfrak{Y}$ un idéal de T, élément de T_i. L'ensemble des éléments (x, y) de $S \times T$ où $x \in \mathfrak{X}$, $y \in \mathfrak{Y}$ est un idéal; désignons-le par $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$.

Considérons l'application $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ de $S_i \times T_i$ dans $(S \times T)_i$. Cette application est évidemment biunivoque. Montrons que c'est une application sur. Si $\mathcal{Z}$ est un idéal de $S \times T$, l'ensemble x des éléments $x \in S$ tels qu'il existe $y \in T$ avec $(x, y) \in \mathcal{Z}$ est un idéal de S : en effet, $x_1 \in \mathcal{X}$ et $x_2 \leqslant x_1$ entraînent $x_2 \in \mathcal{X}$ car il existe $y_1 \in T$ tel que $(x_1, y_1) \in \mathcal{Z}$ et $(x_2, y_1) \in \mathcal{Z}$; d'autre part, $x_1 \in \mathcal{X}$ et $x_2 \in \mathcal{X}$ entraînent $x_1 \vee x_2 \in \mathcal{X}$ car il existe $y_1 \in T$, $y_2 \in T$ tels que $(x_1, y_1) \in \mathcal{Z}$, $(x_2, y_2) \in \mathcal{Z}$, d'où l'on déduit $(x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) \in \mathcal{Z}$. De même, l'ensemble $\mathcal{Y}$ des éléments $y \in T$ tels qu'il existe $x \in S$ avec $(x, y) \in \mathcal{Z}$ est un idéal de T. Enfin, on a $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$: tout élément de $\mathcal{Z}$ appartient évidemment à $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$; réciproquement, si $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, il existe $y' \in T$ et $x' \in S$ tels que $(x, y') \in \mathcal{Z}$ et $(x', y) \in \mathcal{Z}$, d'où il résulte $(x \vee x', y \vee y') \in \mathcal{Z}$ et $(x, y) \in \mathcal{Z}$. L'application est isotone, c'est donc un isomorphisme de $S_i \times T_i$ sur $(S \times T)_i$.

8° *Conditions* (1^i), (2^i), (α^i) : Leur permanence au produit cardinal résulte de celle des conditions (1), (2), (α) et du lemme dual du lemme 2.

Pour démontrer le théorème 3, nous ferons usage du lemme suivant.

LEMME 3. — *Soient $x = (p, q)$ et $y = (u, v)$ deux éléments du produit cardinal $S \times T$ de deux treillis S et T. Si une chaîne $\{x_\iota\}$ maximale entre $x \wedge y$ et x est obtenue sous la forme $x_\iota = y_\iota \wedge x$ à partir d'une chaîne $\{y_\iota\}$ entre y et $x \vee y$, si, dans le treillis S, le couple (p, u) possède la propriété b et si, dans le treillis T, le couple (q, v) possède la propriété b, la chaîne $\{x_\iota \vee y\}$ est maximale entre y et $x \vee y$.*

Nous pouvons admettre que la chaîne $\{x_\iota\}$ est sans répétition. Posons $x_\iota = (p_\iota, q_\iota)$; on a $x_\iota \vee y = (p_\iota \vee u, q_\iota \vee v)$. Il faut montrer que la chaîne $\{(p_\iota \vee u, q_\iota \vee v)\}$ est maximale entre (u, v) et $(p \vee u, q \vee v)$. Supposons que cette chaîne ne soit pas maximale : on peut y intercaler un élément (a', b'); l'élément $(a' \wedge p, b' \wedge q)$ appartient à la chaîne $\{(p_\iota, q_\iota)\}$; posons $a' \wedge p = c$, $b' \wedge q = d$, $c \vee u = a$, $d \vee v = b$. On a $(a', b') > (a, b)$ et il n'existe aucun élément de la chaîne $\{p_\iota \vee u, q_\iota \vee v)\}$ tel que $(a', b') > (p_\iota \vee u, q_\iota \vee v) > (a, b)$. On ne peut avoir simultanément $a' = a$ et $b' = b$; supposons qu'on ait par exemple $a' > a$. Introduisons parmi les éléments p_ι la relation $\mathcal{R}$ suivante : $p_{\iota'} \mathcal{R} p_{\iota''}$ si l'ensemble des éléments p_ι compris entre $p_{\iota'}$ et $p_{\iota''}$ constitue une chaîne maximale entre ces deux éléments; cette relation est manifestement réflexive, symétrique et transitive; c'est une relation d'équivalence et elle réalise une partition de l'ensemble des éléments p_ι. Ceci posé, ou bien c est un élément maximum d'une classe de cette partition, ou bien il n'en est pas ainsi. Examinons d'abord le premier cas. L'élément d est certainement le dernier élément de la forme q_ι associé à c comme élément p_ι (car, s'il en existait un autre soit f, tel que $f > d$, on aurait $(c, f) > (c, d)$ et $(c \vee u, f \vee v) > (a', b') > (c \vee u, d \vee v)$ et ceci contredit $a' \neq a = c \vee u$). Nous devons distinguer deux sous-cas : 1° il existe un élément e n'appartenant pas à la chaîne $\{p_\iota\}$ mais que l'on peut intercaler dans cette chaîne immédiatement au-dessus de c; l'élément (e, d) peut alors être intercalé dans la chaîne $\{(p_\iota, q_\iota)\}$ ce qui contredit le fait que cette chaîne est maximale; 2° il n'existe pas de tel élément; considérons alors une chaîne $\{\bar{p}_\alpha\}$ maximale entre $p \wedge u$ et p et contenant tous les éléments p_ι; pour tout élément $\bar{p}_\alpha$ tel que $\bar{p}_\alpha > c$, il existe un élément p_ι tel que $\bar{p}_\alpha \geqslant p_\iota > c$ et on a $\bar{p}_\alpha \vee u \geqslant p_\iota \vee u > a' > a = c \vee u$; donc, l'élément a' peut être intercalé dans la chaîne $\{\bar{p}_\alpha \vee u\}$ contrairement au fait que le couple (p, u) du treillis S possède la propriété b. Examinons maintenant le deuxième cas. Considérons une chaîne $\{\bar{p}_\alpha\}$ comme ci-dessus; ici encore, l'élément a' peut être intercalé dans la chaîne $\{\bar{p}_\alpha \vee u\}$ d'où la contradiction. La supposition faite n'est donc pas légitime et le lemme est démontré.

THÉORÈME 3. — *Si un treillis S et un treillis T satisfont la condition* (γ), (γ), *il en est de même du treillis* $S \times T$.

Soient $x = (p, q)$, $y = (u, v)$ deux éléments de $S \times T$. Supposons que le couple (y, x) possède la propriété c. On sait que cette propriété équivaut aux propriétés a et b. Le couple (y, x) possédant la propriété a dans $S \times T$, le couple (u, p) la possède dans S et le couple (v, q) la possède dans T (voir 6° dans la démonstration du théorème 2). Le couple (y, x) possédant la propriété b, il en est de même des couples (u, p) et (v, q) : si $\{u_\iota\}$ est une chaîne maximale dans S entre $u \wedge p$ et u, $\{v_\alpha\}$ une chaîne maximale dans T entre $v \wedge q$ et v, la chaîne $\{(u_\iota, v \wedge q) \leqslant (u, v_\alpha)\}$ est maximale dans $S \times T$ entre $(u \wedge p,\ v \wedge q)$ et $(u,\ v)$, donc la chaîne $\{(u_\iota \vee p,\ q) \leqslant (u \vee p,\ v_\alpha \vee q)\}$ est maximale dans $S \times T$ entre $(p,\ q)$ et $(u \vee p,\ v \vee q)$ ce qui montre que la chaîne $\{u_\iota \vee p\}$ est maximale dans S entre p et $u \vee p$ et la chaîne $\{v_\alpha \vee q\}$ maximale dans T entre q et $v \vee q$. Le couple (u, p) vérifie dans S les propriétés a et b, donc la propriété c et il en est de même du couple (p, u) puisque S satisfait à la condition (γ). De même, le couple (v, q) vérifiant la propriété c dans T qui satisfait à la condition (γ), le couple (q, v) vérifie aussi cette propriété. Il résulte d'abord de là que le couple (x, y) possède la propriété a puisqu'il en est ainsi des couples (p, u) et (q, v) (voir encore 6° dans la démonstration du théorème 2). Ceci a pour conséquence que toute chaîne maximale $\{x_\iota\}$ entre $x \wedge y$ et x peut être obtenue sous la forme $x_\iota = y_\iota \wedge x$ à partir d'une chaîne $\{y_\iota\}$ entre y et $x \vee y$ (T, chapitre I, théorème 1). Les couples (p, u) et (q, v) possédant la propriété b, le lemme 3 s'applique et montre que le couple (x, y) possède aussi la propriété b. Finalement, le couple (x, y) vérifie la propriété c et la condition (γ) est valable dans $S \times T$.

b) D'autres conditions se conservent par passage au produit cardinal pour des treillis conditionnellement complets.

THÉORÈME 4. — *Si un treillis S et un treillis T conditionnellement complets satisfont à l'une des conditions (L), (R), (I), le treillis $S \times T$ y satisfait.*

1° *Condition (L)* : Soient $x = (p, q)$ et $y = (u, v)$ deux éléments de $S \times T$. Les couples d'éléments (p, u) de S, (q, v) de T étant supposés posséder la propriété *l*, nous montrons que le couple $[(p, q), (u, v)]$ de $S \times T$ la possède également. Supposons qu'il existe une chaîne $\{x_\iota\}$ maximale entre $x \wedge y$ et x obtenue sous la forme $x_\iota = y_\iota \wedge x$ à partir d'une chaîne $\{y_\iota\}$ entre y et $x \vee y$. Nous devons montrer que la chaîne $\{y_\iota\}$ est maximale entre y et $x \vee y$. Posons $x_\iota = (p_\iota, q_\iota)$, $y_\iota = (u_\iota, v_\iota)$. On a $p_\iota = u_\iota \wedge p$, $q_\iota = v_\iota \wedge q$. Les treillis S et T étant conditionnellement complets, il résulte du lemme 3 de T, chapitre II, que la chaîne $\{p_\iota\}$ est maximale entre $p \wedge u$ et p dans S et que la chaîne $\{q_\iota\}$ est maximale entre $q \wedge v$ et q dans T. De plus, la chaîne $\{p_\iota\}$ est obtenue sous la forme $p_\iota = u_\iota \wedge p$ à partir de la chaîne $\{u_\iota\}$ entre u et $p \vee u$, la chaîne $\{q_\iota\}$ est obtenue sous la forme $q_\iota = v_\iota \wedge q$ à partir de la chaîne $\{v_\iota\}$ entre v et $q \vee v$. Les couples (p, u) et (q, v) possédant la propriété *l*, il en résulte que la chaîne $\{(u_\iota, v_\iota)\}$ est maximale entre (u, v) et $(p \vee u, q \vee v)$. En effet, admettons qu'il n'en soit pas ainsi et qu'on puisse intercaler dans cette chaîne un élément, soit (a', b'). L'élément $(a' \wedge p, b' \wedge q)$ appartient à la chaîne maximale $\{(u_\iota \wedge p, v_\iota \wedge q)\}$, c'est-à-dire à la chaîne $\{(p_\iota, q_\iota)\}$. Posons $a' \wedge p = c$, $b' \wedge q = d$. Il existe un élément de la chaîne $\{(u_\iota, v_\iota)\}$ soit (a, b) tel que $a \wedge p = c$, $b \wedge q = d$. On a $(a', b) \neq (a, b)$. On ne peut avoir à la fois $a' = a$, $b' = b$. Supposons qu'on ait par exemple, $a' \neq a$. L'élément a' appartient à la chaîne $\{u_\iota\}$ ou peut y être intercalé et l'élément a appartient à cette chaîne. Ces éléments sont tels que $a \wedge p = a' \wedge p$ ce qui contredit le fait que la chaîne maximale déduite de la chaîne $\{p_\iota\}$ par suppression des répétitions et obtenue à partir de la chaîne déduite de la chaîne $\{u_\iota\}$ de façon correspondante ne peut être obtenue qu'à partir d'une chaîne maximale.

Il en résulte immédiatement que le treillis $S \times T$ satisfait à la condition (L) s'il en est ainsi des treillis S et T.

2° *Condition (R)* : La démonstration est analogue. Soient $x = (p, q)$ et $y = (u, v)$ deux éléments de $S \times T$, les couples d'éléments (p, u) de S, (q, v) de T possédant la propriété *r*. Soit $\{z_\iota\}$ une chaîne maximale entre $x \wedge y$ et $x \vee y$ obtenue sous la forme $z_\iota = x_\iota \wedge y_\iota$ à partir d'une chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ du produit cardinal $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$. Posons $z_\iota = (s_\iota, t_\iota)$, $x_\iota = (p_\iota, q_\iota)$, $y_\iota = (u_\iota, v_\iota)$. On a $s_\iota = p_\iota \wedge u_\iota$, $t_\iota = q_\iota \wedge v_\iota$. Les treillis S et T étant conditionnellement complets, il résulte du lemme 3 de T, chapitre II, que la chaîne $\{s_\iota\}$ est maximale entre $p \wedge u$ et $p \vee u$ dans S et que la chaîne $\{t_\iota\}$ est maximale entre $q \wedge v$ et $q \vee v$ dans T. De plus, la chaîne $\{s_\iota\}$ est obtenue sous la forme $s_\iota = p_\iota \wedge u_\iota$ à partir de la chaîne

$\{(p_\iota, u_\iota)\}$ du produit cardinal $[p, p \vee u] \times [u, p \vee u]$, la chaîne $\{t_\iota\}$ est obtenue sous la forme $t_\iota = q_\iota \wedge v_\iota$ à partir de la chaîne $\{(q_\iota, v_\iota)\}$ du produit cardinal $[q, q \vee v] \times [v, q \vee v]$. Les couples (p, u) et (q, v) possédant la propriété r, il en résulte que la chaîne $\{(x_\iota, y_\iota) = [(p_\iota, q_\iota), (u_\iota, v_\iota)]\}$ est maximale dans le produit cardinal $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$. En effet, supposons qu'on puisse intercaler un élément $(x', y') = [(a', b'), (e', f')]$ dans cette chaîne. L'élément $x' \wedge y' = (a' \wedge e', b' \wedge f')$ appartient à la chaîne maximale $\{z_\iota = (s_\iota, t_\iota)\}$. Posons $a' \wedge e' = c$, $b' \wedge f' = d$. Il existe un élément de la chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ soit $[(a, b), (e, f)]$ tel que $(a, b) \wedge (e, f) = (c, d)$ soit $a \wedge e = c$, $b \wedge f = d$. On a $[(a', b'), (e', f')] \neq [(a, b), (e, f)]$. On ne peut avoir à la fois $(a', e') = (a, e)$ et $(b', f') = (b, f)$. Supposons qu'on ait, par exemple, $(a', e') \neq (a, e)$. L'élément (a', e') appartient à la chaîne $\{(p_\iota, u_\iota)\}$ ou peut y être intercalé et l'élément (a, e) appartient à cette chaîne. Ces éléments étant tels que $a' \wedge e' = a \wedge e$, ceci contredit le fait que la chaîne maximale déduite de la chaîne $\{s_\iota\}$ par suppression des répétitions et obtenue à partir de la chaîne déduite de la chaîne $\{(p_\iota, u_\iota)\}$ de façon correspondante peut être obtenue seulement à partir d'une chaîne maximale.

Il en résulte que le treillis $S \times T$ satisfait à la condition (R) s'il en est ainsi des treillis S et T.

3° *Condition* (*I*) : La démonstration est encore analogue. Soient deux éléments de $S \times T$, $x = (p, q)$ et $y = (u, v)$, les couples d'éléments (p, u) de S et (q, v) de T vérifiant la propriété i. Soit $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ une chaîne maximale du produit cardinal $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$ obtenue sous la forme $x_\iota = z_\iota \wedge x$, $y_\iota = z_\iota \wedge y$ à partir d'une chaîne $\{z_\iota\}$ entre $x \wedge y$ et $x \vee y$. Posons $x_\iota = (p_\iota, q_\iota)$, $y_\iota = (u_\iota, v_\iota)$, $z_\iota = (s_\iota, t_\iota)$. On a $p_\iota = s_\iota \wedge p$, $q_\iota = t_\iota \wedge q$, $u_\iota = s_\iota \wedge u$, $v_\iota = t_\iota \wedge v$. Le lemme 3 de T, chapitre II, montre que la chaîne $\{(p_\iota, u_\iota)\}$ est maximale dans le produit cardinal $[p \wedge u, p] \times [p \wedge u, u]$ et que la chaîne $\{(q_\iota, v_\iota)\}$ est maximale dans le produit cardinal $[q \wedge v, q] \times [q \wedge v, v]$. De plus, la chaîne $\{(p_\iota, u_\iota)\}$ est obtenue sous la forme $p_\iota = s_\iota \wedge p$, $u_\iota = s_\iota \wedge u$ à partir de la chaîne $\{s_\iota\}$ entre $p \wedge u$ et $p \vee u$, la chaîne $\{(q_\iota, v_\iota)\}$ est obtenue sous la forme $q_\iota = t_\iota \wedge q$, $v_\iota = t_\iota \wedge v$ à partir de la chaîne $\{t_\iota\}$ entre $q \wedge v$ *et* $q \vee v$. Du fait que les couples (p, u) et (q, v) possèdent la propriété i, nous déduisons que la chaîne $\{z_\iota = (s_\iota, t_\iota)\}$ est maximale entre $x \wedge y$ et $x \vee y$. En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi et qu'on puisse y intercaler un élément, soit (a', b'). L'élément $[(a' \wedge p, b' \wedge q), (a' \wedge u, b' \wedge v)]$ appartient à la chaîne maximale $\{(x_\iota, y_\iota)\}$. Posons $a' \wedge p = c$, $b' \wedge q = d$, $a' \wedge u = g$, $b' \wedge v = h$. Il existe un élément de la chaîne $\{z_\iota\}$ soit (a, b) tel que $a \wedge p = c$, $b \wedge q = d$, $a \wedge u = g$, $b \wedge v = h$. On a $(a', b') \neq (a, b)$. On ne peut avoir $a' = a$ et $b' = b$. Supposons, par exemple, qu'on ait $a' \neq a$. L'élément a' appartient à la chaîne $\{a_\iota\}$ ou peut y être intercalé et l'élément a appartient à cette chaîne. Ces éléments sont tels que $a' \wedge p = a \wedge p$,

$a' \wedge u = a \wedge u$ et ceci est en contradiction avec le fait que la chaîne maximale déduite de la chaîne $\{(p_i, u_i)\}$ par suppression des répétitions et obtenue à partir de la chaîne déduite de la chaine $\{s_i\}$ de façon correspondante peut être obtenue seulement à partir d'une chaîne maximale.

Donc, le treillis $S \times T$ satisfait à la condition (I) si les treillis S et T y satisfont.

Un contre-exemple montre que les conditions (L), (R), (I) ne se conservent pas au produit cardinal si les treillis S et T ne sont pas tous deux conditionnellement complets. On peut même prendre pour S un treillis semi-modulaire de longueur finie et pour T une chaîne non complète : S

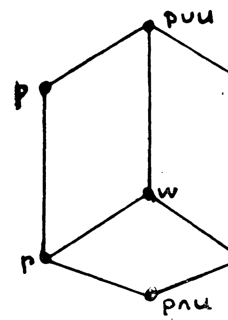


FIG. 16

est représentée par le diagramme ci-contre et T est la chaîne des nombres rationnels t tels que $0 \leqslant t \leqslant 1$. Prenons, dans $S \times T$, $x = (p, q)$ et $y = (u, v)$ avec p et u comme indiqué sur le diagramme, $q = 1$ et $v = 0$. Le couple (x, y) ne possède pas la propriété l : la chaîne formée par la juxtaposition des deux chaînes $\{(p \wedge u, t)\}$ avec $t < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\{(p, t)\}$ avec $t > \frac{1}{\sqrt{2}}$ est maximale entre $(p \wedge u, 0)$ et $(p, 1)$; elle est obtenue à partir de la chaîne formée par la juxtaposition des chaînes $\{(s, t)\}$ avec $t < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\{(p \vee u, t)\}$ avec $t > \frac{1}{\sqrt{2}}$; cette chaîne n'est pas maximale entre $(u, 0)$ et $(p \vee u, 1)$ puisqu'on peut y intercaler l'élément $(u, 0)$.

THÉORÈME 5. — *Si un treillis S et un treillis T conditionnellement complets satisfont à l'une des conditions (M), (S), (J), (J_1), le treillis $S \times T$ y satisfait.*

1° *Condition (M)* : Soient $x = (p, q)$ et $y = (u, v)$ deux éléments de $S \times T$. Admettons que les couples (p, u) et (q, v) possèdent la propriété m et montrons qu'il en est de même du couple (x, y). Soit $\{x_i\}$ une chaîne maximale entre $x \wedge y$ et x obtenue sous la forme $x_i = y_i \wedge x$ à partir d'une chaîne $\{y_\iota\}$ entre y et $x \vee y$. Nous devons établir que la chaîne $\{y_\iota\}$ peut être choisie maximale entre y et $x \vee y$. Posons $x = (p_\iota, q_\iota)$, $y_\iota = (u_\iota, v_\iota)$. Le lemme 3 de T, chapitre II, montre que les chaînes $\{p_\iota\}$ et $\{q_\iota\}$ sont maximales respectivement entre $p \wedge u$ et p et entre $q \wedge v$ et q. D'autre part, ces chaînes sont obtenues à partir des chaînes respectives $\{u_\iota\}$ et $\{v_\iota\}$. Envisageons les chaînes maximales $\{\overline{p_\alpha}\}$ et $\{\overline{q_\beta}\}$ déduites des chaînes $\{p_\iota\}$ et $\{q_\iota\}$ respectivement, par suppression des répétitions. Ses chaînes sont également obtenues à partir de chaînes déduites facilement de $\{u_\iota\}$ et $\{v_\iota\}$. On peut donc les obtenir à partir de chaînes $\{\overline{u_\alpha}\}$ et $\{\overline{v_\beta}\}$ maximales respectivement entre u et $p \vee u$ et entre v et $q \vee v$. Ceci posé, nous choisirons les éléments $y_\iota = (u_\iota, v_\iota)$ de la manière suivante : $u_\iota = \overline{u_\alpha}$ si $p_\iota = \overline{p_\alpha}$, $v_\iota = \overline{v_\beta}$ si $q_\iota = \overline{q_\beta}$. Je dis que la chaîne $\{y_\iota\}$ ainsi choisie est maximale entre y et $x \vee y$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et soit $y' = (a', b')$ un élément qu'on puisse y intercaler. L'élément $y' \wedge x = (a' \wedge p,\ b' \wedge q)$ appartient à la chaîne $\{x_\iota\}$. Il existe donc un élément de la chaîne $\{y_\iota\}$ choisie ci-dessus, soit (a, b), tel qu'on ait $a' \wedge p = a \wedge p$, $b' \wedge q = b \wedge q$. On a $(a' b') \neq (a, b)$. On a donc nécessairement au moins une des deux inégalités : $a' \neq a$, $b' \neq b$. Supposons, par exemple, qu'on ait la première. L'élément a' n'appartient pas à la chaîne $\{\overline{u_\alpha}\}$ puisque a en fait partie et que l'on a $a' \wedge p = a \wedge p$. Il peut donc être intercalé dans cette chaîne ce qui contredit sa maximalité.

La condition (M) se conserve donc bien à $S \times T$.

2° *Condition* (S) : Considérons deux éléments $x = (p, q)$, $y = (u, v)$ de $S \times T$ tels que les couples (p, u) et (q, v) vérifient la propriété s. Soit $\{z_\iota\}$ une chaîne maximale entre $x \wedge y$ et $x \vee y$ obtenue sous la forme $z_\iota = x_\iota \wedge y_\iota$ à partir d'une chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ du produit cardinal $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$. Pour établir que le couple (x, y) vérifie la propriété s, nous montrons que la chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ peut être choisie maximale. Posons $z_\iota = (s_\iota, t_\iota)$, $x_\iota = (p_\iota, q_\iota)$, $y_\iota = (u_\iota, v_\iota)$. D'après le lemme 3 de T, chapitre II, les chaînes $\{s_\iota\}$ et $\{t_\iota\}$ sont maximales respectivement entre $p \wedge u$ et $p \vee u$ et entre $q \wedge v$ et $q \vee v$. D'autre part, ces chaînes sont obtenues à partir des chaînes $\{(p_\iota, u_\iota)\}$ et $\{(q_\iota, v_\iota)\}$. Envisageons les chaînes maximales $\{\overline{s_\alpha}\}$ et $\{\overline{t_\beta}\}$ déduites des chaînes $\{s_\iota\}$ et $\{t_\iota\}$ par suppression des répétitions. Ces chaînes sont également obtenues à partir de chaînes facilement déduites de $\{(p_\iota, u_\iota\}$ et $\{(q_\iota, v_\iota)\}$. On peut donc les obtenir à partir de chaînes $\{(\overline{p_\alpha}, \overline{u_\alpha})\}$ et $\{(\overline{q_\beta}, \overline{v_\beta})\}$ maximales respectivement dans le produit cardinal $[p, p \vee u] \times [u, p \vee u]$ et dans le produit cardinal $[q, q \vee v] \times [v, q \vee v]$. Ceci posé, nous choisirons les éléments $(x_\iota, y_\iota) = [(p_\iota, q_\iota), (u_\iota, v_\iota)]$ de la manière suivante : $(p_\iota, u_\iota) = (\overline{p_\alpha}, \overline{u_\alpha})$ si $s_\iota = \overline{s_\alpha}$ et $(q_\iota, v_\iota) = (\overline{q_\beta}, \overline{v_\beta})$ si $t_\iota = \overline{t_\beta}$. Je dis que la chaîne $\{(x_\iota\, y_\iota)\}$ ainsi choisie est maximale dans le produit cardinal $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait y intercaler un élément $(x', y') = [a', b'), (e', f')]$. L'élément $x' \wedge y' = (a' \wedge e', b' \wedge f')$ appartiendrait à la chaîne $\{z_\iota\}$. Il existerait donc un élément de la chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ choisie ci-dessus, soit $[(a, b), (e, f)]$ tel qu'on ait $a' \wedge e' = a \wedge e$, $b' \wedge f' = b \wedge f$. On aurait $[(a', b'), (e' f')] \neq [(a, b), (e, f)]$ donc nécessairement aussi une au moins des inégalités $(a', e') \neq (a, e)$, $(b' f') \neq (b, f)$. Dans le premier cas, par exemple, l'élément (a', e') pourrait être intercalé dans la chaîne $\{(\overline{p_a}, \overline{u_a})\}$ en contradiction avec le fait que cette chaîne est maximale.

La condition (S) se conserve par passage à S $\times$ T.

3° *Condition* (*J*) : Soient deux éléments $x = (p, q)$, $y = (u, v)$ de S $\times$ T tels que les couples (p, u) et (q, v) possèdent la propriété *j*. Soit $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ une chaîne maximale du produit cardinal $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$ obtenue sous la forme $x_\iota = z_\iota \wedge x$, $y_\iota = z_\iota \wedge y$ à partir d'une chaîne $\{z_\iota\}$ entre $x \wedge y$ et $x \vee y$. Nous montrons que le couple (x, y) possède la propriété *j* et pour cela que la chaîne $\{z_\iota\}$ peut être choisie maximale. Posons $x_\iota = (p_\iota, q_\iota)$, $y_\iota = (u_\iota, v_\iota)$, $z_\iota = (s_\iota, t_\iota)$. D'après le lemme 3 de T, chapitre II, les chaînes $\{(p_\iota, u_\iota)\}$ et $\{(q_\iota, v_\iota)\}$ sont maximales respectivement dans le produit cardinal $[p \wedge u, p] \times [p \wedge u, u]$ et dans le produit cardinal $[q \wedge v, q] \times [q \wedge v, v]$. D'autre part, ces chaînes sont obtenues à partir des chaînes $\{s_\iota\}$ et $\{t_\iota\}$. Envisageons les chaînes maximales $\{(\overline{p_a}, \overline{u_a})\}$ et $\{(\overline{q_\beta}, \overline{v_\beta})\}$ déduites des chaînes $\{(p_\iota, u_\iota)\}$ et $\{(q_\iota, v_\iota)\}$ par suppression des répétitions. Ces chaînes sont également obtenues à partir de chaînes déduites facilement des chaînes $\{s_\iota\}$ et $\{t_\iota\}$. On peut donc les obtenir à partir de chaînes $\{\overline{s_a}\}$ et $\{\overline{t_\beta}\}$ maximales respectivement entre $p \wedge u$ et $p \vee u$ et entre $q \wedge v$ et $q \vee v$. Ceci posé, nous choisirons les éléments $z_\iota = (s_\iota, t_\iota)$ de la manière suivante : $s_\iota = \overline{s_a}$ si $(p_\iota, u_\iota) = (\overline{p_a}, \overline{u_a})$, $t_\iota = \overline{t_\beta}$ si $(q_\iota, v_\iota) = (\overline{q_\beta}, \overline{v_\beta})$. Je dis que la chaîne $\{z_\iota\}$ ainsi choisie est maximale entre $x \wedge y$ et $x \vee y$. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait y intercaler un élément $z' = (s', t')$. L'élément

$$(z' \wedge x, z' \wedge y) = [(s' \wedge p, t' \wedge q), (s' \wedge u, t' \wedge v)]$$

appartiendrait à la chaîne $\{(x_\iota, y_\iota)\}$. Il existerait donc un élément de la chaîne $\{z_\iota\}$ choisie ci-dessus soit (s, t) tel qu'on ait $s' \wedge p = s \wedge p$, $t' \wedge q = t \wedge q$, $s' \wedge u = s \wedge u$, $t' \wedge v = t \wedge v$. On aurait $(s', t') \neq (s, t)$, donc nécessairement aussi l'une au moins des inégalités $s' \neq s$, $t' \neq t$. Dans le premier cas, par exemple, l'élément s' pourrait être intercalé dans la chaîne $\{\overline{s_a}\}$ en contradiction avec le fait que cette chaîne est maximale.

La condition (J) se conserve par passage à S $\times$ T.

4° *Condition* (J_1) : Soient deux éléments $x = (p, q)$, $y = (u, v)$ de S $\times$ T, les treillis S et T satisfaisant à la condition (J_1). Soit $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ une chaîne maximale du produit cardinal $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$ telle que l'on ait $x_\iota = (x_\iota \vee y_\iota) \wedge x$, $y_\iota = (x_\iota \vee y_\iota) \wedge y$ pour tout ι. Nous devons montrer que la chaîne $\{x_\iota \vee y_\iota\}$ est maximale entre $x \wedge y$ et $x \vee y$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, posons $x_\iota = (p_\iota, q_\iota)$, $y_\iota = (u_\iota, v_\iota)$ et soit $a = (b, c)$ un élément qu'on puisse intercaler dans la chaîne $\{x_\iota \vee y_\iota\}$. L'élément $(a \wedge x, a \wedge y)$ appartient à la chaîne maximale $\{(x_\iota, y_\iota)\}$. Il existe donc un des indices ι soit α tel que l'on ait $a \wedge x = x_\alpha$, $a \wedge y = y_\alpha$. On a certainement $a \neq x_\alpha \vee y_\alpha$, donc au moins une des deux inégalités $b \neq p_\alpha \vee u_\alpha$, $c \neq q_\alpha \vee v_\alpha$. Si on a par exemple $b \neq p_\alpha \vee u_\alpha$, ceci contredit le fait que le treillis S satisfait à la condition (J_1) car, dans ces conditions, la chaîne $\{(p_\iota, u_\iota)\}$ maximale dans le produit cardinal $[p \wedge u, p] \times [p \wedge u, u]$ (puisque les treillis S et T sont conditionnellement complets), telle que l'on ait $p_\iota = (p_\iota \vee u_\iota) \wedge p$, $u_\iota = (p_\iota \vee u_\iota) \wedge u$ pour tout ι, n'est pas telle que la chaîne $\{p_\iota \vee u_\iota\}$ soit maximale entre $p \wedge u$ et $p \vee u$ (puisqu'on peut intercaler dans cette chaîne l'élément b).

La condition (J_1) se conserve donc par passage à $S \times T$.

Des contre-exemples montrent que les conditions (M), (S), (J) ne se conservent pas au produit cardinal $S \times T$ si les treillis S et T ne sont pas tous deux conditionnellement complets.

1° Prenons pour S le treillis représenté par le diagramme ci-contre. Il est complet et satisfait à la condition de chaîne ascendante; on s'assure

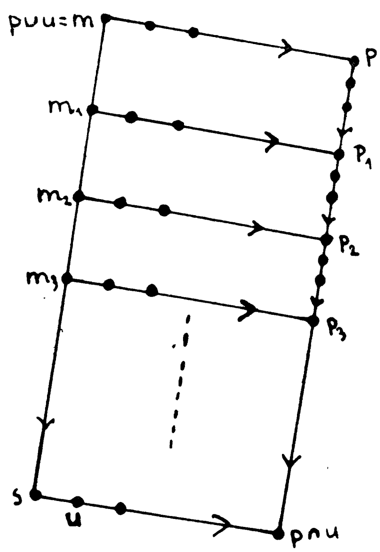


Fig. 17

sans peine qu'il satisfait à la condition (M). Prenons pour T la chaîne des nombres rationnels t tels que $0 \leqslant t \leqslant 1$. Choisissons, dans $S \times T$, $x = (p, q)$ et $y = (u, v)$ avec p et u comme indiqué sur le diagramme, $q = 1$ et $v = 0$. Le couple (x, y) ne possède pas la propriété m : la chaîne constituée par l'élément $(p \wedge u, 0)$ et par la juxtaposition des chaînes telles que $\{(p_n, t)\}$

où t satisfait à $\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} < t < \frac{1}{\sqrt{2\,n}}$ et de la chaîne $\{(p, t)\}$ où t satisfait à $\frac{1}{\sqrt{2}} < t \leqslant 1$ est maximale entre $(p \wedge u, 0)$ et $(p, 1)$; elle est obtenue à partir de la chaîne constituée par l'élément $(u, 0)$ et par la juxtaposition des chaînes telles que $\{(m_n, t)\}$ où t satisfait à $\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} < t < \frac{1}{\sqrt{2\,n}}$ et de la chaîne $\{(m, t)\}$ où t satisfait à $\frac{1}{\sqrt{2}} < t \leqslant 1$; cette dernière chaîne n'est pas maximale entre $(u, 0)$ et $(p \vee u, 1)$ car on peut y intercaler l'élément $(s, 0)$ et on ne peut pas la remplacer par une chaîne maximale assurant l'obtention.

2° Le contre-exemple précédent montre aussi que la condition (S) ne se conserve pas par passage au produit cardinal si T n'est pas conditionnellement complet : S satisfait en effet à cette condition à laquelle ne satisfait évidemment pas $S \times T$.

Nous donnerons néanmoins un autre contre-exemple où S est de longueur finie, T restant la chaîne des nombres rationnels tels que $0 \leqslant t \leqslant 1$. Nous prendrons pour S le treillis de la note 2 du chapitre III de T. Nous choisirons, dans $S \times T$, les éléments $x = (p, q)$, $y = (u, v)$ où $p = c$ et $u = g$, $q = 1$ et $v = 0$. Le couple (x, y) ne vérifie pas la propriété s : la chaîne constituée par l'élément $(e, 0)$ et les chaînes $\{(d, t)\}$ où on a $t < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\{(a, t)\}$ où on a $t > \frac{1}{\sqrt{2}}$ est maximale entre $(e, 0)$ et $(a, 1)$; elle est obtenue à partir de la chaîne constituée par l'élément $[(c, 1), (g, 0)]$ et les chaînes $\{[(b, 1), (f, t)]\}$ où on a $t < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\{[(a, 1), (a, t)]\}$ où on a $t > \frac{1}{\sqrt{2}}$; cette chaîne n'est pas maximale dans le produit cardinal $[x, x \vee y] \times [y, x \vee y]$ et ne peut être remplacée par une chaîne maximale assurant l'obtention.

3° Le contre-exemple suivant montre que les conditions (J) et (J_1) ne se conservent pas au produit cardinal si T n'est pas conditionnellement complet. Prenons pour S le treillis B 4 (T, chapitre II) et pour T encore la chaîne des nombres rationnels t tels que $0 \leqslant t \leqslant 1$. Prenons, dans $S \times T$, $x = (p, q)$ et $y = (u, v)$ avec $p = a_1$, $u = c_1$, $q = 1$, $v = 0$. Le couple (x, y) ne possède pas la propriété j : la chaîne constituée par l'élément $[(d, 0), (d, 0)]$ et la juxtaposition des chaînes $\{[(a_n, t), (c_n, 0)]\}$ où t varie de $\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}$ à $\frac{1}{\sqrt{2\,n}}$ (sauf pour $n = 1$, auquel cas t varie de $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ à 1) est maximale dans le produit cardinal $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$; elle est obtenue à partir de la chaîne constituée par l'élément $(d, 0)$ et la juxtaposition des chaînes $\{(b_n, t)\}$ où t varie de $\dfrac{1}{\sqrt{2}(n+1)}$ à $\dfrac{1}{\sqrt{2}\,n}$ (sauf si $n=1$, cas où t varie de $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ à 1); cette chaîne n'est pas maximale car on peut y intercaler l'élément $(b, 0)$ et elle ne peut être remplacée par une chaîne maximale assurant l'obtention.

c) Les conditions restantes (F), (B), (β) se conservent à $S \times T$ si S et T satisfont à la condition de chaîne descendante. C'est trivial pour les conditions (F) et (B) puisqu'elles sont alors équivalentes à la condition (2). Pour la condition (β), cela résulte du lemme suivant.

LEMME 4. — *Soient S et T deux treillis conditionnellement complets et* $x=(p, q)$, $y=(u, v)$ *deux éléments de* $S \times T$. *Supposons que les couples d'éléments* (p, u) *et* (q, v) *de T possèdent la propriété b. Supposons également que l'un des treillis S et T au moins satisfasse à la condition de chaîne descendante. Alors, le couple d'éléments* (x, y) *de* $S \times T$ *possède la propriété b.*

Soit $\{x_\iota\}$ une chaîne maximale entre $x \wedge y$ et x. Posons $x_\iota=(p_\iota, q_\iota)$. Les treillis S et T étant conditionnellement complets, les chaînes $\{p_\iota\}$ et $\{q_\iota\}$ sont maximales respectivement entre $p \wedge u$ et p et entre $q \wedge v$ et q. Les couples (p, u) et (q, v) possédant la propriété b, les chaînes $\{p_\iota \vee u\}$ et $\{q_\iota \vee v\}$ sont maximales respectivement entre u et $p \vee u$ et entre v et $q \vee v$. Supposons que la chaîne $\{(p_\iota \vee u, q_\iota \vee v)\}$ ne soit pas maximale entre (u, v) et $(p \vee u, q \vee v)$. On peut donc y intercaler un élément, soit (u', v'). Les chaînes $\{p_\iota \vee u\}$ et $\{q_\iota \vee v\}$ étant maximales, u' et v' en font respectivement partie. Soit I_1 l'ensemble des indices ι tels que $(p_\iota \vee u, q_\iota \vee v)<(u', v')$ et I_2 l'ensemble des indices ι tels que $(p_\iota \vee u, q_\iota \vee v)>(u' v')$. Il existe $\iota \in I_1$ tel que $p_\iota \vee u=u'$ et $\iota \in I_2$ tel que $q_\iota \vee v=v'$ (ou les mêmes égalités, I_1 et I_2 étant permutés; ce cas se traiterait de la même manière). Le treillis $S \times T$ est lui aussi conditionnellement complet et l'élément $\bigvee_{\iota \in I_1} (p_\iota, q_\iota)=(p_1, q_1)$ existe. La chaîne $\{(p_\iota, q_\iota)\}$ étant maximale, (p_1, q_1) en fait partie et $(p_1 \vee u, q_1 \vee v)$ fait partie de la chaîne $\{(p_\iota \vee u, q_\iota \vee v)\}$. On a $\bigvee_{\iota \in I_1} (p_\iota \vee u, q_\iota \vee v)=(p_1 \vee u, q_1 \vee v)$, d'où $(p_1 \vee u, q_1 \vee v)<(u', v')$ et $p_1 \vee u=u'$, $q_1 \vee v<v'$. Si T satisfait à la condition de chaîne descendante, il existe un élément minimum q_2 tel que $q_\iota=q_2$ avec $\iota \in I_2$. On doit avoir $q_2 \vee v=v'$. Ceci est impossible car l'élément (p_1, q_2) pourrait être intercalé dans la chaîne $\{(p_\iota, q_\iota)\}$ (il ne peut pas en faire partie puisque $p_1 \vee u=u'$, $q_2 \vee v=v'$). Si S satisfait à la condition de chaîne descendante, il existe un élément minimum p_2 tel que $p_\iota=p_2$ avec $\iota \in I_2$. L'élément (p_2, q_1) peut être alors intercalé dans la chaîne $\{(p_\iota, q_\iota)\}$ (il ne peut lui appartenir puisque $p_2 \vee u>u'$ et $q_1 \vee v<v'$), ce qui est impossible. On aboutit donc de toutes façons à une contradiction et le lemme est établi.

Théorème 6. — *Si deux treillis S et T satisfont à la condition de chaîne descendante et à la condition (β), il en est de même de leur produit cardinal S × T.*

Soient $x = (p, q)$ et $y = (u, v)$ deux éléments de S × T tels que le couple (x, y) possède la propriété b. Les couples (p, u) de S et (q, v) de T possèdent aussi la propriété b comme on l'a déjà montré. Les treillis S et T satisfaisant à la condition (β), les couples (u, p) et (v, q) possèdent aussi la propriété b. Le lemme 4 montre alors que le couple (y, x) possède la propriété b. Le treillis S × T satisfait donc à la condition (β).

Un contre-exemple montre que, même pour des treillis S et T satisfaisant tous deux à la condition de chaîne ascendante, les conditions (F), (B), (β) ne conservent pas au produit cardinal. Prenons pour S le treillis représenté par le diagramme ci-contre et pour T le treillis obtenu à partir du treillis B4,

Fig. 18

(T, chapitre II, § 4), en supprimant l'élément b. Les treillis S et T satisfont à toutes les conditions étudiées. Le produit cardinal S × T ne satisfait pourtant pas à (β), ni donc à (B), ni à (F). Prenons les éléments $x = (p, q)$, $y = (u, v)$ de S × T avec p et u comme indiqué sur le diagramme et $q = a_1$, $v = c_1$. Le couple (x, y) ne possède pas la propriété b : la chaîne $\{(u, d) < \dots < (p_n, a_n) < (p_{n-1}, a_n) < \dots < (p, a_1)\}$ est maximale entre (u, d) et (p, a_1) alors que la chaîne $\{(u, c_1) < \dots \leqslant (p_n, b_1) < (p_{n-1}, b_1) \leqslant \dots < (p, b_1)\}$ n'est pas maximale entre (u, c_1) et (p, b_1) puisqu'on peut y intercaler l'élément (u, b_1). Le couple (y, x) possède la propriété b car, puisque $u \wedge p = u$, ceci équivaut à dire que le couple (v, q) possède cette propriété. La condition (β) est donc en défaut.

d) Signalons que la réciproque de la question envisagée ci-dessus est vraie en toute généralité : si le produit cardinal de deux treillis S et T satisfait à une des conditions étudiées, les treillis S et T y satisfont. Il est facile de le vérifier pour chacune des conditions.

e) Notons encore quelques résultats.

THÉORÈME 7. — *Si S est un treillis satisfaisant à la condition de chaîne descendante et T un treillis conditionnellement complet quelconque et si ces treillis satisfont à la condition (B), il en est de même de leur produit cardinal.*

Ceci résulte immédiatement du lemme 4.

THÉORÈME 8. — *Si S est un treillis satisfaisant à la condition de chaîne descendante et T un treillis conditionnellement complet quelconque et si ces treillis satisfont à la condition (F), il en est de même de leur produit cardinal.*

C'est une conséquence du lemme suivant, analogue au lemme 4.

LEMME 5. — *Soient S et T deux treillis conditionnellement complets et $x = (p, q)$, $y = (u, v)$ deux éléments de $S \times T$. Supposons que les couples d'éléments (p, u) de S et (q, v) de T possèdent la propriété f. Supposons également que l'un des treillis S et T au moins satisfasse à la condition de chaîne descendante. Alors, le couple d'éléments (x, y) de $S \times T$ possède la propriété f.*

La démonstration du lemme 5 est analogue à celle du lemme 4.

On a pu remarquer que, dans les contre-exemples relatifs au théorème 5, on a utilisé un treillis de longueur finie et une chaîne seulement à propos de la condition (S). En fait, on n'aurait pas pu faire de même à propos des conditions (M), (J) et (J_1) en vertu des résultats suivants.

THÉORÈME 9. — *Si deux treillis quelconques S et T satisfont à la condition (B), le produit cardinal $S \times T$ satisfait à la condition (M).*

C'est une conséquence immédiate du lemme 3.

THÉORÈME 10. — *Si deux treillis quelconques S et T satisfont à la condition (F), le produit cardinal $S \times T$ satisfait aux conditions (J) et (J_1).*

C'est une conséquence du lemme suivant, analogue au lemme 3.

LEMME 6. — *Soient $x = (p, q)$ et $y = (u, v)$ deux éléments du produit cardinal $S \times T$ de deux treillis S et T. Si une chaîne maximale $\{(x_\iota, y_\iota)\}$ du produit cardinal $[x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$ est obtenue sous la forme $x_\iota = z_\iota \wedge x$, $y_\iota = z_\iota \wedge y$ à partir d'une chaîne $\{z_\iota\}$ entre $x \wedge y$* et *$x \vee y$, si, dans le treillis S, le couple (p, u) possède la propriété f et si, dans le treillis T, le couple (q, v) possède la propriété f, la chaîne $\{x_\iota \vee y_\iota\}$ est maximale entre $x \wedge y$* et *$x \vee y$.*

La démonstration du lemme 6 est analogue à celle du lemme 3.

3. Passage aux treillis homomorphes.

a) $\vee$ — *homomorphisme* : Un treillis $\vee$ — homomorphe d'un treillis semi-modulaire de longueur finie n'est pas nécessairement semi-modulaire (3). En effet, le treillis S figuré par le diagramme ci-contre (qui est même distributif) admet comme treillis $\vee$ — homomorphe le treillis T_2 également figuré (qui est le treillis non modulaire à cinq éléments).

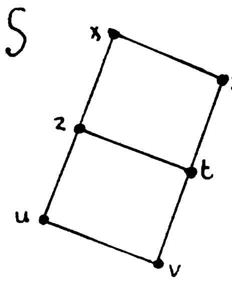


Fig. 19

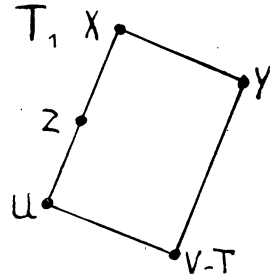


Fig. 20

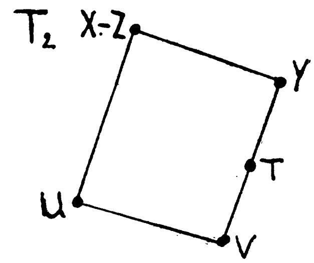


Fig. 21

Aucune des conditions étudiées ne se conserve donc par $\vee$ — homomorphisme dans des circonstances générales intéressantes.

b) $\wedge$ — *homomorphisme* : Un treillis $\wedge$ — homomorphe d'un treillis semi-modulaire de longueur finie n'est pas non plus nécessairement semi-modulaire. En effet, le treillis S précédent admet comme treillis $\wedge$ — homomorphe le treillis T_1 figuré plus haut (qui est encore le treillis non modulaire à cinq éléments).

On ne peut donc espérer aucun résultat intéressant concernant la conservation éventuelle par $\wedge$ — homomorphisme des conditions étudiées.

c) *homomorphisme :* Un treillis homomorphe d'un treillis semi-modulaire de longueur finie est semi-modulaire (ceci est d'ailleurs une conséquence du théorème 11 ci-dessous).

Néanmoins, comme le montrent les contre-exemples suivants, aucune des conditions étudiées ne se conserve par homomorphisme pour un

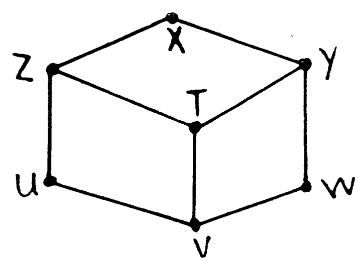


Fig. 22

(3) Contrairement à l'affirmation de G. Birkhoff [1], p. 103 : l'erreur provient du fait que x peut couvrir y dans un treillis S sans que X couvre Y (tout en étant distinct de Y) dans un treillis $\vee$ -homomorphe à S; le fait devient exact dans un treillis homomorphe à S.

treillis quelconque même complet et la plupart d'entre elles ne se conservent pas, même pour un treillis satisfaisant à une condition de chaîne. En effet, le treillis C 9 (T, chapitre II) peut être appliqué sur le treillis C′ représenté page précédente par $e \to X$, $e_{io} \to Y$, $e_{oj} \to Z$, $e_{ij} \to T$, $a_{oj} \to U$, $a_{ij} \to V$, $a_{io} \to W$, et cette application réalise un homomorphisme. De même, le treillis B 13 peut être appliqué sur le treillis T_2 par : $b_j \to X$, $c_k \to Y$, $b \to T$, $a_i \to U$, $a \to V$ et cette application réalise aussi un homomorphisme.

Nous donnerons, cependant, le résultat positif suivant.

THÉORÈME 11. — *Si un treillis S satisfait à la condition de chaîne ascendante et à la condition* (5), *il en est de même de tout treillis homomorphe T.*

Soit, dans le treillis T, trois éléments X, Y, Z tels que l'on ait $X \wedge Y < X < Z < X \vee Y$. Il faut montrer qu'il existe un élément U tel que $Z \wedge Y < U \leqslant Y$ et $(U \vee X) \wedge Z = X$. Posons $A = Z \wedge Y = X \wedge Y$ et $B = X \vee Y = Z \vee Y$. Soit a l'élément de S maximum parmi ceux qui sont appliqués sur A (il existe en vertu de la condition de chaîne ascendante car l'union de deux éléments appliqués sur A est appliquée sur A). Soient x et y des éléments appliqués sur X et Y respectivement et tels que l'on ait $x > a$ et $y > a$ (il en existe car, si x' est appliqué sur X, $x' \vee a$ est appliqué sur $X \vee A = X$). D'après l'hypothèse faite sur a, on a certainement $x \wedge y = a$ car $x \wedge y \geqslant a$ est appliqué sur $X \wedge Y = A$. Soit z appliqué sur Z et tel que l'on ait $z > x$. On a aussi $z \wedge y = a$ car $z \wedge y \geqslant a$ est appliqué sur $Z \wedge Y = A$. Les éléments x, y, z de S sont donc tels que $z \wedge y < x < z < z \vee y$. Le treillis S satisfaisant à la condition (5), il existe un élément u de S tel que l'on ait $a < u \leqslant y$ et $(u \vee x) \wedge z = x$. Soit U l'élément de T sur lequel est appliqué u. On a $Z \wedge Y \leqslant U \leqslant Y$ et $(U \vee X) \wedge Z = X$. Finalement on a $Z \wedge Y \neq U$. En effet, si on avait $Z \wedge Y = U$, on aurait $u \to A$ avec $u > a$, ce qui contredit le choix de a. Le treillis T satisfait donc à la condition (5).

CHAPITRE IV

Une condition suffisante pour l'égalité des longueurs de deux chaînes finies de mêmes extrémités dans un treillis quelconque.

On a vu que, dans un treillis de longueur finie, la condition suivante : (3) x couvre y, et z couvre $t \rightarrow [(x \vee t) \wedge z] \vee y = [(z \vee y) \wedge x] \vee t$ caractérise la semi-modularité.

Envisageons, dans un treillis semi-modulaire de longueur finie, deux chaînes maximales de mêmes extrémités :

$\{a_i\}$ $$a_0 > a_1 > \dots > a_\alpha,$$
$\{b_j\}$ $$b_0 = a_0 > b_1 > \dots > b_\beta = a_\alpha.$$

On a, d'après (3), quels que soient i et j tels que $0 < i \leqslant \alpha$, $0 < j \leqslant \beta$, les égalités

$$[(a_{i-1} \vee b_j) \wedge b_{j-1}] \vee a_i = [(b_{j-1} \vee a_i) \wedge a_{i-1}] \vee b_j \tag{1}$$

Dans un tel treillis, on sait qu'on a $\alpha = \beta$.

On peut, par souci de généralisation, se poser la question suivante : dans un treillis quelconque, étant données deux chaînes $\{a_i\}$ et $\{b_j\}$ finies, maximales, sans répétition, de mêmes extrémités et telles que les égalités (1) soient vérifiées, peut-on conclure à l'égalité des longueurs des deux chaînes?

La réponse est affirmative et sera obtenue ici comme cas particulier d'un résultat plus général.

J'étudie en fait le problème dual de façon à faire apparaître la forme ordinaire des intercalaires de Zassenhaus.

Soient, dans un treillis quelconque, deux chaines $\{a_i\}$ et $\{b_j\}$ finies, de mêmes extrémités, pas nécessairement maximales :

$\{a_i\}$ $$a_0 \geqslant a_1 \geqslant \dots \geqslant a_\alpha,$$
$\{b_j\}$ $$b_0 = a_0 \geqslant b_1 \geqslant \dots \geqslant b_\beta = a_\alpha.$$

Construisons, à l'aide des intercalaires de Zassenhaus $a_{ij} = a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j)$ pour tout i tel que $0 < i \leqslant \alpha$ et tout j tel que $0 \leqslant j \leqslant \beta$, $b_{ji} = b_j \vee (b_{j-1} \wedge a_i)$ pour tout j tel que $0 < j \leqslant \beta$ et tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant \alpha$, la subdivision $\{a_{ij}\}$ de la chaîne $\{a_i\}$ par rapport à la chaîne $\{b_j\}$ et la subdivision $\{b_{ji}\}$ de la chaîne $\{b_j\}$ par rapport à la chaîne $\{a_i\}$:

$\{a_{ij}\}$ $$a_{10} = a_0 \geqslant a_{11} \geqslant a_{12} \geqslant \dots \geqslant a_{1\beta} = a_{20} = a_1 \geqslant a_{21} \geqslant \dots \geqslant a_{2\beta} = a_{30} = a_2 \geqslant \dots \geqslant a_{\alpha\beta} = a_\alpha,$$

$\{b_{ji}\}$ $$b_{10} = b_0 \geqslant b_{11} \geqslant b_{12} \geqslant \dots \geqslant b_{1\alpha} = b_{20} = b_1 \geqslant b_{21} \geqslant \dots \geqslant b_{2\alpha} = b_{30} = b_2 \geqslant \dots \geqslant b_{\beta\alpha} = b_\beta.$$

Lemme 1. — *Si l'on a $a_{ij} = a_{i\,j-1}$ pour une valeur de i et une valeur de j $(0 < i \leqslant \alpha,\ 0 < j \leqslant \beta)$, on a aussi $b_{ji} = b_{ji-1}$ si et seulement si*

$$a_{ij} \wedge b_{j-1} = b_{ji} \wedge a_{i-1} \quad (I').$$

Démonstration. — Les conditions successives suivantes sont toutes équivalentes :

$$a_{ij} = a_{i\,j-1} \text{ soit } a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j) = a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_{j-1}).$$
$$a_{i-1} \wedge b_{j-1} \leqslant a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j).$$
$$a_{i-1} \wedge b_{j-1} \leqslant [a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j)] \wedge b_{j-1}.$$
$$a_{i-1} \wedge b_{j-1} = [a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j)] \wedge b_{j-1} = a_{ij} \wedge b_{j-1}.$$

De la même façon, on voit que $b_{ji} = b_{j\,i-1}$ équivaut à $b_{j-1} \wedge a_{i-1} = b_{ji} \wedge a_{i-1}$.

De là, l'affirmation du lemme résulte immédiatement (1).

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du lemme.

Théorème 1. — *Si l'égalité (I') est valable quels que soient i et j $(0 < i \leqslant \alpha,\ 0 < j \leqslant \beta)$, les subdivisions $\{a_{ij}\}$ et $\{b_{ji}\}$ des chaînes $\{a_i\}$ et $\{b_j\}$ simplifiées par suppression des répétitions ont même longueur.*

Avant d'établir les théorèmes que nous avons en vue, établissons quelques lemmes :

Lemme 2. — *Si l'égalité (I') est valable quels que soient i et j $(0 < i \leqslant \alpha,\ 0 < j \leqslant \beta)$, les subdivisions de $\{a_{ij}\}$ par rapport à $\{b_j\}$, de $\{b_j\}$ par rapport à $\{a_{ij}\}$ coïncident avec $\{a_{ij}\}$ et $\{b_{ij}\}$ respectivement, à des répétitions près.*

Démonstration. — Nous représentons par $a_{ij.\,q}$ l'intercalaire $a_{ij} \vee (a_{ij-1} \wedge b_q)$ et par $b_{q.\,ij}$ l'intercalaire $b_q \vee (b_{q-1} \wedge a_{ij})$.

a) Évaluons $a_{ij.\,q}$ $(0 < i \leqslant \alpha,\ 0 < j \leqslant \beta,\ 0 \leqslant q \leqslant \beta)$.

1) On a $a_{ij.\,j} = a_{ij} \vee (a_{ij-1} \wedge b_j)$. Or, on peut écrire $a_{ij-1} \wedge b_j = [a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_{j-1})] \wedge b_j = [a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_{j-1})] \wedge b_j \wedge a_{i-1} = b_j \wedge a_{i-1}$. D'où $a_{ij,\,j} = a_i \vee (a_{i-1} \vee b_j) \vee (b_j \wedge a_{i-1}) = a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j) = a_{ij}$.

2) On a $a_{ij,\,j-1} = a_{ij} \vee (a_{ij-1} \wedge b_{j-1})$. Or, on peut écrire $a_{ij-1} \wedge b_{j-1} = [a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_{j-1})] \wedge b_{j-1} = [a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_{j-1})] \wedge b_{j-1} \wedge a_{i-1} = b_{j-1} \wedge a_{i-1}$. D'où $a_{ij,\,j-1} = a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j) \vee (b_{j-1} \wedge a_{i-1}) = a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_{j-1}) = a_{ij-1}$.

3) On sait que $a_{ij,0} = a_{ij-1}$, $a_{ij,\,\beta} = a_{ij}$.

Il en résulte que, pour $q \leqslant j\text{-}1$, on a $a_{ij,\,j-1} \leqslant a_{ij,q} \leqslant a_{ij,\,0}$, soit $a_{ij-1} < a_{ij,\,q} \leqslant a_{ij-1}$, d'où $a_{ij,q} = a_{ij-1}$. De même, pour $q \geqslant j$, on a $a_{ij,j} \geqslant a_{ij,\,q} \geqslant a_{ij,\beta}$ soit $a_{ij} \geqslant a_{ij,q} \geqslant a_{ij}$, d'où $a_{ij,q} = a_{ij}$.

b) Evaluons $b_{q,ij}$ $(0 < q \leqslant \beta,\ 0 < i \leqslant \alpha,\ 0 \leqslant j \leqslant \beta)$.

(1) On peut, dans l'énoncé du lemme 1, remplacer la condition (I') par la condition $a_{ij} \wedge b_{j-1} \leqslant b_{ji} \wedge a_{i-1}$. En effet, en présence de $a_{ij} = a_{ij-1}$, cette condition entraîne $b_{j-1} \wedge a_{i-1} \leqslant b_{ji} \wedge a_{i-1}$ qui équivaut à $b_{ji} = b_{ji-1}$.

1) On a $b_{q,iq} = b_q \vee (b_{q-1} \wedge a_{iq})$. Or, d'après l'égalité (I'), on a $b_{q-1} \wedge a_{iq} = b_{qi} \wedge a_{i-1} \leqslant b_{qi}$. On a aussi $b_q \leqslant b_{qi}$. Il vient $b_{q,iq} \leqslant b_{qi}$. D'autre part, de $a_i \leqslant a_{iq}$, on déduit $b_{q,iq} \geqslant b_q \vee (b_{q-1} \wedge a_i) = b_{qi}$. Donc, on a $b_{q,iq} = b_{qi}$.

2) On a $b_{q,iq-1} = b_q \vee (b_{q-1} \wedge a_{iq-1})$. Or, d'après $a)$ 2), on a $b_{q-1} \wedge a_{iq-1} = b_{q-1} \wedge a_{i-1}$. D'où $b_{q,iq-1} = b_q \vee (b_{q-1} \wedge a_{i-1}) = b_{qi-1}$.

3) On sait que $b_{q,io} = b_{qi-1}$, $b_{q,i\beta} = b_{qi}$.

Il en résulte que, pour $j \leqslant q$-1, on a $b_{q,iq-1} \leqslant b_{q,ij} \leqslant b_{q,io}$, soit $b_{q,i-1} \leqslant b_{q,ij} \leqslant b_{qi-1}$, d'où $b_{q,ij} = b_{qi-1}$. De même, pour $j \geqslant q$, on a $b_{q,iq} \geqslant b_{q,ij} \geqslant b_{q,i\beta}$, soit $b_{qi} \leqslant b_{q,ij} \leqslant b_{qi}$, d'où $b_{q,ij} = b_{qi}$.

LEMME 3. — *Soit m l'indice courant des éléments de la chaîne* $\{a_{ij}\}$ (*m varie de 0 à* $\alpha\beta$ *et l'élément* a_{ij} *est aussi représenté par* a_m, *ou* $m = j + (i-1)\beta$). *On a* $a_{mq} = a_{mq-1}$ *si et seulement si* $b_{qm} = b_{qm-1}$ ($0 < m \leqslant \alpha\beta$, $0 < q \leqslant \beta$). *Pour les chaînes* $\{a_{ij}\}$ *et* $\{b_j\}$, *sont valables les égalités analogues à* (*I'*) : $a_{mq} \wedge b_{q-1} = b_{qm} \wedge a_{m-1}$, *pour tout m et tout q tels que* $0 < m \leqslant \alpha\beta$, $0 < q \leqslant \beta$.

Démonstration. — D'après l'étude faite dans la démonstration du lemme précédent, si on a $q \neq j$, on a à la fois $a_{mq} = a_{mq-1}$ et $b_{qm} = b_{qm-1}$.

Si $q = j$, on a $a_{mq} = a_{ij}$, $a_{mq-1} = a_{ij-1}$; $b_{qm} = b_{ji}$, $b_{qm-1} = b_{ji-1}$. Mais, compte tenu du fait que $a_{ij} = a_{ij-1}$ équivaut à $b_{ji} = b_{ji-1}$ on a encore $a_{mq} = a_{mq-1} \leftrightarrow b_{qm} = b_{qm-1}$.

Il résulte de là que les égalités analogues à (I') sont certainement valables pour tout couple (m, q) tel que $a_{mq} = a_{mq-1}$.

Le seul cas où il soit possible d'avoir $a_{mq} \neq a_{mq-1}$ est celui où $q = j$. Or, dans ce cas, on peut écrire $b_{ji} \wedge a_{i-1} = a_{ij} \wedge b_{j-1}$ (c'est l'égalité (I') pour les chaînes $\{a_i\}$ et $\{b_j\}$) ; compte tenu du fait que l'on a $a_{ij-1} \leqslant a_{i-1}$, on en déduit $b_{ji} \wedge a_{ij-1} \leqslant a_{ij} \wedge b_{j-1}$; d'autre part, on voit que $a_{ij} \wedge b_{j-1} = b_{ji} \wedge a_{i-1} \leqslant b_{ji}$ et $a_{ij} \wedge b_{j-1} \leqslant a_{ij} \leqslant a_{ij-1}$ d'où l'on tire $a_{ij} \wedge b_{j-1} \leqslant b_{ji} \wedge a_{ij-1}$; finalement, on a $a_{ij} \wedge b_{j-1} = b_{ji} \wedge a_{ij-1}$ et cette égalité n'est autre que l'égalité $a_{mq} \wedge b_{q-1} = b_{qm} \wedge a_{m-1}$ écrite pour $q = j$.

LEMME 4. — *Si l'égalité* (*I'*) *est valable quels que soient i et j* ($0 < i \leqslant \alpha$, $0 < j \leqslant \beta$) *pour les chaînes* $\{a_i\}$ *et* $\{b_j\}$, *les subdivisions de* $\{a_{ij}\}$ *par rapport à* $\{b_{ji}\}$, *de* $\{b_{ji}\}$ *par rapport à* $\{a_{ij}\}$ *coïncident avec* $\{a_{ij}\}$ *et* $\{b_{ji}\}$ *respectivement, à des répétitions près.*

Démonstration. — D'après le lemme précédent, l'égalité analogue à (I') est valable quels que soient m et q ($0 < m \leqslant \alpha\beta$, $0 < q \leqslant \beta$) pour les chaînes $\{a_{ij}\}$ et $\{b_q\}$. D'autre part, d'après le lemme 2, les subdivisions de $\{a_{ij}\}$ par rapport à $\{b_q\}$ et de $\{b_q\}$ par rapport à $\{a_{ij}\}$ coïncident avec $\{a_{ij}\}$ et $\{b_{ji}\}$ respectivement. Il suffit d'appliquer le lemme 2 aux chaînes $\{a_{ij}\}$ et $\{b_q\}$ prises comme chaînes initiales pour obtenir le résultat annoncé.

Lemme 5. — *Soit n l'indice courant des éléments de la chaîne* $\{b_{ji}\}$ *(n varie de 0 à* $\alpha\beta$ *et l'élément* b_{ji} *est aussi représenté par* b_n*, où* $n = i + (j-1)\alpha$*): Si l'égalité (I') est valable quels que soient i et j* $(0 < i \leqslant \alpha,\ 0 < j \leqslant \beta)$ *pour les chaînes* $\{a_i\}$ *et* $\{b_j\}$*, l'égalité analogue est valable quels que soient m et n* $(0 < m, n \leqslant \alpha\beta)$ *pour les chaînes* $\{a_{ij}\}$ *et* $\{b_{ji}\}$.

Démonstration. — Il suffit de raisonner comme dans la démonstration du lemme précédent et finalement d'appliquer le lemme 3.

Les théorèmes suivants sont alors des conséquences immédiates du lemme 5.

Théorème 2. — *Si l'égalité (I') est vérifiée quels que soient i et j* $(0 < i \leqslant \alpha,\ 0 < j \leqslant \beta$ *dans les chaînes* $\{a_i\}$ *et* $\{b_j\}$ *et si ces chaînes sont sans répétition et maximales au sens de l'égalité (I')* (2)*, elles ont même longueur.*

Théorème 3. — *Si l'égalité (I') est vérifiée quels que soient i et j* $(0 < i \leqslant \alpha,\ 0 < j \leqslant \beta)$ *dans les chaînes* $\{a_i\}$ *et* $\{b_j\}$ *et si ces chaînes sont sans répétition et maximales dans le treillis auquel elles appartiennent (ou dans un sous-treillis), elles ont même longueur* (3).

(2) C'est-à-dire qu'on ne peut trouver de subdivisions véritables de ces chaînes telles que l'égalité (I') y reste satisfaite.

(3) Le théorème 3 est d'ailleurs conséquence directe du théorème 1.

CHAPITRE V

Quelques cas d'égalité des longueurs de deux chaînes de sous-hypergroupes partiels d'un hypergroupe partiel inversible. Application à deux chaînes de sous-hypergroupes d'un hypergroupe inversible, à deux chaînes de sous-groupes partiels d'un groupe partiel et, en particulier, à deux chaînes de sous-groupes d'un groupe et à deux chaînes de relations d'équivalence sur un ensemble.

1. Hypergroupes partiels.

Introduisons d'abord la notion d'hypergroupe partiel (1).

a) *Définition :* Un *hypergroupe partiel* H est un système (2) associatif (3) qui possède un sous-ensemble U d'éléments unités scalaires (4) et est tel que chaque élément admette un élément inverse à droite (5) unique et un élément inverse à gauche unique.

On déduit facilement de cette définition, les conséquences suivantes :

1) U est non vide d'après l'existence des éléments inverses.

2) Tout élément $\varepsilon \in$ U est tel que $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$: en effet, d'après l'existence des éléments inverses à droite, il existe un élément α, inverse à droite de ε, tel que $\varepsilon\alpha$ ait un sens; ε étant un élément unité scalaire, on a $\varepsilon\alpha = \alpha$; on en déduit que $\varepsilon\ (\varepsilon\alpha)$ a un sens, donc que $\varepsilon\varepsilon$ a un sens d'après l'associativité; finalement, on a $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$.

3) Tout élément $\alpha \in$ H admet un et un seul élément unité à droite, un et un seul élément unité à gauche : il existe un élément α'' inverse à gauche de α, tel que $\alpha''\alpha \ni \varepsilon$ où $\varepsilon \in$ U; $\varepsilon\varepsilon$ ayant un sens, $(\alpha''\alpha)\ \varepsilon$ a un sens, et $\alpha\varepsilon$ a un sens d'après l'associativité; ε est donc élément unité à droite

---

(1) Il semble que les hypergroupes partiels, en particulier les hypergroupes partiels inversibles définis plus loin, constituent un type remarquable de systèmes à une opération (non nécessairement uniforme, ni partout définie). J'ai déjà eu l'occasion de les utiliser par ailleurs : *Algèbres de relations et hypergroupes partiels*, C. R., 228, 1949, p. 1181.

(2) Suivant la terminologie de J. Kuntzmann [1], j'appelle système (à une opération) un ensemble $\{\alpha, \beta, \ldots\}$ dans lequel certains couples ordonnés d'éléments sont composables, leur produit étant alors un sous-ensemble non vide. Si α et β sont composables, $\alpha\beta$ représente le sous-ensemble produit. Si ce sous-ensemble contient un seul élément γ, on écrira, par abus de langage, $\alpha\beta = \gamma$ (au lieu de $\alpha\beta = \{\gamma\}$).

(3) L'associativité peut s'énoncer ainsi : 1) $(\alpha\beta)\gamma$ a un sens en même temps que $\alpha(\beta\gamma)$, ce qui veut dire, pour $(\alpha\beta)\gamma$ par exemple, que $\alpha\beta$ a un sens, puis que $(\alpha\beta)\gamma$ a un sens. Ceci fait intervenir le produit d'un sous-ensemble et d'un élément; plus généralement, on définit le produit AB de deux sous-ensembles A et B comme la réunion si elle est non vide des produits $\alpha\beta$ ayant un sens quand α décrit A et β décrit B; si cette réunion est vide, on dit que AB n'a pas de sens. 2) Si $(\alpha\beta)\gamma$ et $\alpha(\beta\gamma)$ ont un sens, on a $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

(4) Un élément ε est dit élément unité (ou plus brièvement unité) si $\varepsilon\alpha \ni \alpha$ pour tout α tel que $\varepsilon\alpha$ ait un sens, si $\beta\varepsilon \ni \beta$ pour tout β tel que $\beta\varepsilon$ ait un sens et si ε est composable d'un côté avec au moins un élément. Un élément σ est dit scalaire si $\sigma\alpha$ et $\beta\sigma$ se réduisent à un seul élément quand ils sont définis.

(5) Un élément α' est dit inverse à droite de α si $\alpha\alpha'$ a un sens et si $\alpha\alpha' \wedge$ U est non vide.

de α; si ε' est aussi élément unité à droite de α, $(\alpha\varepsilon)\,\varepsilon'$ a un sens, donc $\varepsilon\varepsilon'$ a un sens, et on a $\varepsilon = \varepsilon\varepsilon' = \varepsilon'$. Démonstration analogue pour les éléments unités à gauche. On voit de plus que $\alpha''\alpha \wedge U$ contient un seul élément qui est l'unité à droite de α. De même, $\alpha\alpha' \wedge U$ contient un seul élément qui est l'unité à gauche de α. Le sous-ensemble U est unique.

4) $\alpha\beta$ a un sens si et seulement si l'unité à droite de α coïncide avec l'unité de gauche de β : si $\alpha\beta$ a un sens et si ε est l'unité à droite de α, $(\alpha\varepsilon)\beta$ a un sens, donc $\varepsilon\beta$ a un sens et ε est l'unité à gauche de β; si ε est à la fois unité à droite de α et unité à gauche de β et si α'' est l'inverse à gauche de α, $\alpha''\alpha \ni \varepsilon$ et $(\alpha''\alpha)\beta$ a un sens, donc $\alpha\beta$ a un sens.

5) $(\alpha\beta)\gamma$ a un sens dès que $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ sont définis : tout élément de $\alpha\beta$ admet pour unité à droite celle de β (en effet, si $\xi \in \alpha\beta$ et si $\xi\varepsilon$ a un sens, $(\alpha\beta)\varepsilon$ a un sens, donc $\beta\varepsilon$ a un sens); donc, si $\xi \in \alpha\beta$, $\xi\gamma$ ayant un sens d'après 4), $(\alpha\beta)\gamma$ a un sens.

b) *Définition :* Un sous-ensemble H′ d'un hypergroupe partiel H est dit sous-hypergroupe partiel s'il est lui-même un hypergroupe partiel vis-à-vis de la même loi de composition. Aux sous-hypergroupes partiels envisagés par la suite, j'imposerai la condition supplémentaire : $H' \supset U$ (sans le spécifier à nouveau).

L'ensemble U′ des unités d'un sous-hypergroupe partiel H′ coïncide nécessairement avec U : en effet, pour tout $\varepsilon \in U \subset H'$, il existe dans U′ une élément unité à droite soit ε' et on a $\varepsilon = \varepsilon\varepsilon' = \varepsilon'$, d'où $U \subset U'$; d'autre part, pour tout $\varepsilon' \in U'$, il existe dans $U \subset H'$ un élément unité à droite soit ε et on a $\varepsilon' = \varepsilon'\varepsilon = \varepsilon$ d'où $U' \supset U$ (6)

H′ doit contenir, en même temps que α et β, tout élément du produit $\alpha\beta$. Il doit contenir, en même temps que α, ses inverses α' et α''.

Réciproquement, si on a $H' \supset U$ et si ces deux conditions sont satisfaites, H′ est un sous-hypergroupe partiel.

c) *Définition* (7) : Un hypergroupe partiel M est dit *inversible* si $\alpha\beta \ni \gamma$ implique $\alpha''\gamma \ni \beta$ et $\gamma\beta' \ni \alpha$, où α'' est l'inverse à gauche de α et β' l'inverse à droite de β. Il est dit *normal* si $\xi \in \alpha\beta$, $\eta \in \beta\gamma$ entraînent $\xi\gamma \wedge \alpha\eta \neq \phi$. Il est dit *résoluble* si $\alpha\beta \wedge \gamma\delta \neq \phi$ entraîne l'existence de φ tel que l'on ait $\alpha \in \gamma\varphi$ et $\delta \in \varphi\beta$.

THÉORÈME 1. — *Dans un hypergroupe partiel inversible M, l'inverse est bilatère (on désignera par $\bar{\alpha}$ l'inverse de α) et les relations $\alpha\beta \ni \gamma$ et $\bar{\beta}\bar{\alpha} \ni \bar{\gamma}$ sont équivalentes.*

---

(6) Si on n'impose pas $H' \supset U$, il n'est pas nécessaire qu'on ait $U' \subset U$. Dans l'exemple de J. KUNTZMANN [1], p. 170, on peut prendre $H' = U' = \{a\}$, alors que l'on a $U = \{e\}$.

(7) Ces définitions sont données dans J. KUNTZMANN [1], p. 165 et p. 162 pour ces systèmes quelconques.

Démonstration : De $\alpha\alpha' \ni \varepsilon$, on déduit $\alpha''\varepsilon \ni \alpha'$ soit $\alpha'' = \alpha''\varepsilon = \alpha'$.

De $\alpha\beta \ni \gamma$, on déduit $\bar{\alpha}\gamma \ni \beta$, puis $\beta\bar{\gamma} \ni \bar{\alpha}$, enfin $\bar{\beta}\bar{\alpha} \ni \bar{\gamma}$. De même, de $\bar{\beta}\bar{\alpha} \ni \bar{\gamma}$, on déduit $\alpha\beta \ni \gamma$.

THÉORÈME 2. — *Dans un hypergroupe partiel, les trois définitions précédentes sont équivalentes* (8).

Démonstration : 1) Un hypergroupe partiel inversible est normal. En effet, on a les implications suivantes : $\alpha\beta \ni \xi$ et $\beta\gamma \ni \eta \rightarrow \eta\bar{\gamma} \ni \beta$ et $\alpha\beta \ni \xi \rightarrow \alpha\,\eta\,\bar{\gamma} \ni \xi \rightarrow$ il existe μ tel que $\alpha\,\eta \ni \mu$ et $\mu\bar{\gamma} \ni \xi \rightarrow \xi\gamma \ni \mu$ et $\alpha\,\eta \ni \mu$.

2) Un hypergroupe partiel inversible est résoluble. En effet, on a successivement : $\mu \in \alpha\beta$ et $\mu \in \gamma\delta \rightarrow \alpha \in \mu\bar{\beta} \subset \gamma\delta\bar{\beta} \rightarrow$ il existe ν tel que $\alpha \in \gamma\nu$ et $\nu \in \delta\,\bar{\beta} \rightarrow \alpha \in \gamma\,\nu$ et $\delta \in \nu\,\beta$.

3) Un hypergroupe partiel résoluble est inversible. De $\gamma \in \alpha\,\beta$, on déduit, compte tenu de $\gamma \in \gamma\,\varepsilon$ où ε est l'unité à droite de γ, qu'il existe φ tel que $\alpha \in \gamma\,\varphi$ et $\varepsilon \in \varphi\,\beta$; on a nécessairement $\varphi = \beta''$, inverse à gauche de β, d'où $\alpha \in \gamma\,\beta''$. De $\gamma \in \alpha\,\beta$, on déduit aussi, compte tenu de $\gamma \in \varepsilon_1\,\gamma$ où ε_1 est l'unité à gauche de γ, qu'il existe φ_1 tel que $\varepsilon_1 \in \alpha\,\varphi_1$ et $\beta \in \varphi_1\,\gamma$; on a nécessairement $\varphi_1 = \alpha'$, inverse à droite de α, d'où $\beta \in \alpha'\,\gamma$. Appliquons alternativement ces deux remarques; il vient successivement : $\alpha \in \gamma\,\beta''$, $\beta'' \in \gamma'\,\alpha$, $\gamma' \in \beta''\,\alpha''$, $\alpha'' \in \beta\,\gamma'$, $\beta \in \alpha''\,\gamma$ d'une part, $\beta \in \alpha'\,\gamma$, $\alpha' \in \beta\,\gamma''$, $\gamma'' \in \beta'\,\alpha'$, $\beta' \in \gamma''\,\alpha$, $\alpha \in \gamma\,\beta'$ d'autre part.

4) Un hypergroupe partiel normal est inversible. De $\alpha\,\beta \ni \gamma$, on déduit, compte tenu de $\alpha''\alpha \ni \varepsilon$ qu'il existe μ tel que $\mu \in \varepsilon\,\beta$ et $\mu \in \alpha''\,\gamma$; on a nécessairement $\mu = \beta$, d'où $\beta \in \alpha''\gamma$. De même, on montre que $\alpha\beta \ni \gamma$ implique $\alpha \in \gamma\,\beta'$.

d) De façon à éclairer un peu la structure des hypergroupes partiels inversibles, mettons en évidence quelques types plus particuliers de ces systèmes.

Nous désignerons par M_1, M' ou M_2 des hypergroupes partiels inversibles dans lesquels on a l'une des conditions supplémentaires :

(IV_1) Si $\varepsilon \in U$ et si $\varepsilon' \in U$, il existe au moins un élément $\alpha \in M_1$ tel que $\varepsilon\,\alpha$ et $\alpha\,\varepsilon'$ aient un sens.

(IV') Si $\varepsilon \in U$, $\varepsilon' \in U$ et s'il existe $\alpha \in M'$ tel que $\varepsilon\,\alpha$ et $\alpha\,\varepsilon'$ aient un sens, il existe au moins un élément scalaire $\sigma \in M'$ tel que $\varepsilon\,\sigma$ et $\sigma\,\varepsilon'$ aient un sens.

(IV_2) Si $\varepsilon \in U$ et si $\varepsilon' \in U$, il existe au moins un élément scalaire $\sigma \in M_2$ tel que $\varepsilon\,\sigma$ et $\sigma\,\varepsilon'$ aient un sens.

Définition : On dit qu'un système S est la *juxtaposition* des systèmes S_ι ($\iota \in I$) si l'ensemble des éléments de S est exactement l'ensemble des éléments de tous les S_ι et si deux éléments d'un même S_ι sont composables

(8) Le théorème 2 est démontré pour un hypergroupe dans J. KUNTZMANN [1], pp. 191-192.

dans S comme ils l'étaient dans S_ι, deux éléments appartenant à des S_ι distincts n'étant jamais composables.

THÉORÈME 3. — *Tout système M (hypergroupe partiel inversible) est la juxtaposition de systèmes M_1 et réciproquement.*

Démonstration : Considérons parmi les éléments de M, la relation $\alpha \mathcal{R} \beta$ s'il existe un élément γ tel que $\alpha \gamma \beta$ ait un sens. $\mathcal{R}$ est réflexive : $\alpha \mathcal{R} \alpha$ pour tout α (on prend $\gamma = \bar{\alpha}$). $\mathcal{R}$ est symétrique : $\alpha \mathcal{R} \beta \rightarrow \beta \mathcal{R} \alpha$ (si $\alpha \gamma \beta$ a un sens, on prend l'inverse d'un élément quelconque de $\alpha \gamma \beta$). $\mathcal{R}$ est transitive $\alpha \mathcal{R} \beta$, $\beta \mathcal{R} \delta \rightarrow \alpha \mathcal{R} \delta$ (si $\alpha \gamma \beta$ et $\beta \gamma' \delta$ ont un sens, on prend un élément quelconque de $\gamma \beta \gamma'$). $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et réalise une partition de M. Les différentes classes de cette partition sont des systèmes M_1 et on a la décomposition cherchée.

La réciproque est évidente.

COROLLAIRE 1. — *Tout système M' est la juxtaposition de systèmes M_2 et réciproquement.*

Imposons à un hypergroupe partiel inversible (9) la condition supplémentaire

(U) La loi de composition est uniforme (autrement dit, tous les éléments sont scalaires).

Nous obtenons le *groupe partiel,* système U satisfaisant aux trois premiers axiomes des groupoïdes de Brandt (10).

Imposons à un groupe partiel la condition (IV_1) ou (IV_2) : nous obtenons le *groupoïde de Brandt.*

COROLLAIRE 2. — *Tout groupe partiel est la juxtaposition de groupoïdes de Brandt et réciproquement.*

Restreignons maintenant l'hypergroupe partiel inversible dans une autre direction en lui imposant la condition supplémentaire (11) :

(P) La loi de composition est parfaite (tout produit $\alpha \beta$ a un sens).

D'après l'unicité des éléments unités, il en résulte que le sous-ensemble U contient un seul élément (unité bilatère et scalaire). On voit immédiatement que le système ainsi obtenu est l'*hypergroupe inversible* (12).

THÉORÈME 4. — *Le produit direct d'un groupoïde de Brandt B et d'un hypergroupe inversible P est un système M_2. Réciproquement, tout système M_2 est le produit direct d'un groupoïde de Brandt et d'un hypergroupe inver-*

---

(9) Pour obtenir le groupe partiel, il suffit d'ailleurs d'imposer (U) à l'hypergroupe partiel le plus général : l'inversibilité est conséquence de (U).

(10) *Cf.* H. BRANDT [1], p. 360, ou P. DUBREIL [1], p. 30.

(11) Cette condition (P) imposée à l'hypergroupe partiel le plus général donne l'hypergroupe le plus général (J. KUNTZMANN [1], p. 165).

(12) J. KUNTZMANN [1], p. 165. L'auteur dit « inversable » auquel il est préféré ici « inversible » dont le sens courant répond mieux à la notion qualifiée.

sible. On peut même imposer au groupoïde de Brandt d'être d'ordre 1; la représentation du système M_2 sous cette forme est alors unique (13).

Démonstration : Soit un groupoïde de Brandt B d'élément générique α ($\overline{\alpha}$, inverse de α), d'unités ε_i et un hypergroupe inversible P d'élément générique x ($\overline{x}$, inverse de x), d'unité e. L'ensemble produit, ensemble des (α, x), muni de l'opération produit est un hypergroupe inversible M_2 dont les unités sont les (ε_i, e) et où l'inverse de (α, x) est $(\overline{\alpha}, \overline{x})$.

Envisageons maintenant un système M_2. Remarquons d'abord que l'ensemble des éléments de M_2 admettant un quelconque élément unité ε comme unité à droite et à gauche est un hypergroupe inversible P si on le munit de la multiplication existant dans M_2 : ε est l'élément unité et $\overline{\alpha}$ est l'inverse de α pour tout $\alpha \in P$. Choisissons alors, pour toute unité ε_i, un élément scalaire σ_i admettant ε comme unité à gauche et ε_i comme unité à droite. L'ensemble des éléments de la forme $\overline{\sigma_i}\, \sigma_j$ constitue un groupoïde de Brandt d'ordre 1, B′, par rapport à la multiplication dans M_2 : les unités sont celles de M_2, $\overline{\sigma_j}\, \sigma_i$ est l'inverse de $\overline{\sigma_i}\, \sigma_j$. Tout élément ξ de M_2 s'écrit, et d'une façon unique, sous la forme $\overline{\sigma_i}\, \alpha\, \sigma_j$, où $\alpha \in P$; en effet, si ξ admet pour unités à gauche et à droite ε_i et ε_j respectivement, on a $\xi = \overline{\sigma_i}\, (\sigma_i\, \xi\, \overline{\sigma_j})\, \sigma_j$ et $\sigma_i\, \xi\, \overline{\sigma_j} \in P$; d'autre part, on a $\overline{\sigma_i}\, \alpha \sigma_j = \overline{\sigma_{i'}}\, \alpha' \sigma_{j'} \rightarrow \varepsilon_i = \varepsilon_{i'}$ et $\varepsilon_j = \varepsilon_{j'} \rightarrow \sigma_i = \sigma_{i'}$ et $\sigma_j = \sigma_{j'}$, et, en multipliant à gauche par σ_i, à droite par $\overline{\sigma_j}$, $\alpha = \alpha'$. M_2 est alors isomorphe à $B' \times P$, ensemble des couples $(\overline{\sigma_i} \sigma_j, \alpha)$ avec la multiplication produit de la multiplication dans B′ et de la multiplication dans P : la correspondance biunivoque est définie par l'application de $\overline{\sigma_i}\, \alpha \sigma_j$ sur $(\overline{\sigma_i}\, \sigma_j, \alpha)$ et l'opération est bien respectée.

La représentation de M_2 sous cette forme est unique car, dans un produit direct $B' \times P$, P est isomorphe à l'ensemble des éléments admettant une unité quelconque comme unité à gauche et à droite, et B′ est isomorphe à l'ensemble des couples de ses unités (avec $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)\ (\varepsilon_h, \varepsilon_k) = (\varepsilon_i, \varepsilon_k)$ si $j = h$) ou à l'ensemble des couples des unités de $B' \times P$ (avec la loi analogue).

Désignons par $\{X\}$ un ensemble d'axiomes caractérisant les systèmes X où l'on prend successivement pour systèmes X les hypergroupes partiels inversibles M, les systèmes M′, les systèmes M_1, les systèmes M_2, les groupes partiels U, les groupoïdes de Brandt B, les hypergroupes inversibles P, les groupes G, les groupoïdes de Brandt B′ d'ordre 1 et le système E à un élément ε avec la loi de composition $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$.

(13) Ceci généralise le fait qu'un groupoïde de Brandt est d'une manière unique le produit direct d'un groupoïde de Brandt d'ordre 1 et d'un groupe. *Cf.* H. Brandt [1], p. 363.

On a, entre ces ensembles d'axiomes, les implications suivantes :

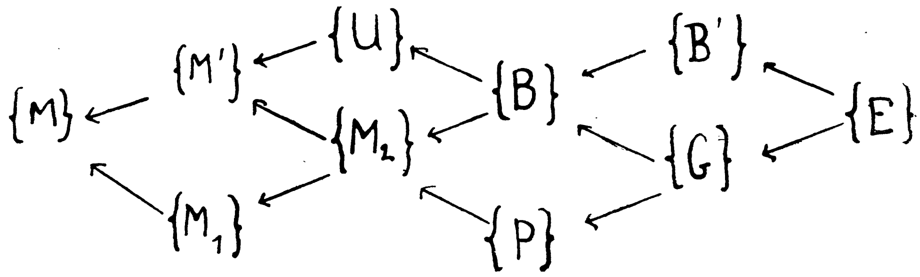


FIG. 23

Notons de plus qu'on a toutes les équivalences logiques telles que les suivantes :
$\{M_1\}$ et $\{U\} \leftrightarrow \{B\}$, $\{M_2\}$ et $\{U\} \leftrightarrow \{B\}$

e) Donnons quelques exemples concrets d'hypergroupes partiels inversibles.

1) Soit U′ un sous-groupe partiel d'un groupe partiel $U = \{\alpha, \beta, ...\}$. Les complexes $U'\alpha U'$ déterminent une partition de U. On les organise en un hypergroupe partiel M en posant $U'\alpha U'$. $U'\beta U' \ni U'\gamma U'$ si $\gamma \in U'\alpha U'\beta U'$. Les unités sont les complexes $U'\varepsilon U'$ où ε est unité de U, l'inverse (bilatère) de $U'\alpha U'$ est $U'\bar{\alpha}U'$. Cet hypergroupe partiel est inversible. Si U est un groupoïde de Brandt, M est un système M_1. Si U est un groupe, on retrouve l'hypergroupe inversible, système des catégories.

Si, au lieu d'un groupe partiel, d'un groupoïde de Brandt ou d'un groupe, on utilise un système M, un système M_1 ou un hypergroupe inversible, les résultats précédents restent valables.

2) Soit $U = \{\alpha, \beta, ...\}$ un groupe partiel et A un groupe d'automorphismes de U. Disons que deux éléments α et β de U sont conjugués s'il existe $a \in A$ tel que $\beta = a\alpha$. Les classes $\mathcal{A}, \mathcal{C}, ...$ de conjugués peuvent être organisées en hypergroupe partiel M en posant $\mathcal{A}\mathcal{C} \ni \mathcal{M}$ s'il existe $\mu \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $\gamma \in \mathcal{C}$, tels que $\mu = \alpha\gamma$. Les unités sont les classes $\mathcal{E}_\varepsilon$ formées par les unités de U; l'inverse (bilatère) de $\mathcal{A}$ est l'ensemble $\bar{\mathcal{A}}$ des éléments inverses des éléments de $\mathcal{A}$. Cet hypergroupe partiel est également inversible. Si U est un groupoïde de Brandt, M est un système M_1. Si U est un groupe, on retrouve l'hypergroupe inversible connu [14].

Là encore, si on utilise un système M, un système M_1, ou un hypergroupe inversible, ces résultats restent valables.

f) *Axiomatique des hypergroupes partiels inversibles :*

1) Voici un système de trois axiomes constitués par sept conditions indépendantes pour la définition d'un hypergroupe partiel inversible.

(14) Les exemples 1) et 2) sont directement inspirés des exemples d'hypergroupes inversibles qu'on trouve dans J. KUNTZMANN [1], p. 167 et 168.

Un hypergroupe partiel inversible M est un ensemble $\{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$ *non vide dans lequel certains couples ordonnés d'éléments sont composables, leur produit étant alors un sous-ensemble non vide de M, les axiomes suivants étant vérifiés :*

(I_d) a - $(\alpha\beta)\,\gamma$ *a un sens dès que* $\alpha\,(\beta\gamma)$ *a un sens.*

b - *Si* $(\alpha\beta)\,\gamma$ *et* $\alpha\,(\beta\gamma)$ *ont un sens, on a* $(\alpha\beta)\,\gamma = \alpha\,(\beta\gamma)$.

(II_d) *M possède au moins un sous-ensemble U avec les propriétés :*

a - *Si* $\alpha\varepsilon$ *a un sens* ($\alpha \in$ M, $\varepsilon \in$ U), $\alpha\varepsilon$ *contient un seul élément.*

b - *Si* $\alpha\varepsilon$ *a un sens* ($\alpha \in$ M, $\varepsilon \in$ U), *on a* $\alpha\varepsilon \ni \alpha$.

c - *Tout* $\alpha \in$ M *est composable avec un* $\varepsilon \in$ U *au moins.*

(III_d) *Pour tout* $\alpha \in$ M, *il existe au moins un* $\bar{\alpha} \in$ M *avec les propriétés :*

a - *Si* $\bar{\alpha}\,\eta \ni \xi$, $\alpha\xi$ *a un sens.*

b - *Si* $\bar{\alpha}\,\eta \ni \xi$ *et si* $\alpha\xi$ *a un sens, on a* $\alpha\xi \ni \eta$.

Démonstration. — Établissons d'abord qu'un système satisfaisant à ces axiomes est un hypergroupe partiel inversible.

1° *Étude d'un élément* $\bar{\alpha}$ *associé à* α *d'après* (III_d). *Unicité.*

Désignons d'une façon générale par ε_α un élément de U (que nous appellerons élément unité à droite de α) associé à α d'après (II_d) *c*. On a $\bar{\alpha}\,\varepsilon_{\bar{\alpha}} = \bar{\alpha}$ d'après (II_d) *a* et (II_d) *b*. On en déduit $\alpha\bar{\alpha} \ni \varepsilon_{\bar{\alpha}}$, d'après ($III_d$) *a* et ($III_d$) *b*.

$\bar{\alpha}$ *joue le rôle d'un élément inverse à droite pour* α.

Soit $\bar{\bar{\alpha}}$ un élément associé à $\bar{\alpha}$ d'après (III_d). On a $\bar{\alpha}\bar{\bar{\alpha}} \ni \varepsilon_{\bar{\bar{\alpha}}}$ par le même raisonnement. On en tire $\alpha\,\varepsilon_{\bar{\alpha}} \ni \bar{\bar{\alpha}}$, d'après ($III_d$) *a* et ($III_d$) *b*. Or, d'après ($II_d$) *a* et ($II_d$) *b*, on a $\alpha\,\varepsilon_{\bar{\alpha}} = \alpha$. On en déduit $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ et $\bar{\alpha}\alpha \ni \varepsilon_\alpha$ (1).

$\bar{\alpha}$ *joue le rôle d'un élément inverse à gauche pour* α.

Montrons qu'*il n'y a aucun élément* β *autre que* $\bar{\alpha}$ *qui satisfasse à* $\alpha\beta \ni \varepsilon$ *ou à* $\beta\alpha \ni \varepsilon$ (ε étant un élément quelconque de U). En effet, on peut écrire $\alpha\beta = \bar{\bar{\alpha}}\beta \ni \varepsilon \rightarrow \bar{\alpha}\,\varepsilon \ni \beta$ (d'après (III_d) *a* et (III_d) *b*) $\rightarrow \bar{\alpha} = \beta$ (d'après (II_d) *a* et (II_d) *b*). De la même façon, on a $\beta\alpha = \bar{\bar{\beta}}\alpha \ni \varepsilon \rightarrow \bar{\beta}\varepsilon \ni \alpha \rightarrow \bar{\beta} = \alpha$; mais d'après (1), on a aussi $\bar{\beta}\beta \ni \varepsilon_\beta$ soit $\alpha\beta \ni \varepsilon_\beta$; on est ramené au cas précédent et on en conclut $\bar{\alpha} = \beta$.

En particulier, *l'élément* $\bar{\alpha}$ *satisfaisant à* (III_d) *a et à* (III_d) *b est unique.*

2° *Propriétés relatives à ces éléments inverses tels que* $\bar{\alpha}$.

(III_d) *a* et (III_d) *b* expriment la propriété : $\bar{\alpha}\,\eta \ni \xi \rightarrow \alpha\,\xi \ni \eta$.

Montrons que *l'implication réciproque est également valable.* On a $\alpha\varepsilon \ni \eta \rightarrow \bar{\bar{\alpha}}\,\xi \ni \eta \rightarrow \bar{\alpha}\,\eta \ni \xi$, d'après la propriété directe. On a donc $\alpha\xi \ni \eta \rightarrow \bar{\alpha}\,\eta \ni \xi$ (2).

Il en résulte l'implication suivante : $\xi\,\eta \ni \mu \rightarrow \bar{\eta}\,\bar{\xi} \ni \bar{\mu}$ (3).

En effet, d'après (2), on a $\xi\eta \ni \mu \rightarrow \bar{\xi}\mu \ni \eta$. Or, d'après (1), on a $\bar{\eta}\eta \ni \varepsilon_{\eta}$. Il en résulte que $\eta(\bar{\xi}\mu)$ a un sens, et, d'après (I_d) *a*, que $(\bar{\eta}\bar{\xi})\mu$ a un sens. De plus, d'après (I_d) *b*, on a $(\bar{\eta}\bar{\xi})\mu \ni \varepsilon_{\eta}$. Or, la seule solution de $\beta\mu \ni \varepsilon$ est $\beta = \bar{\mu}$. D'où, nécessairement, $\bar{\eta}\bar{\xi} \ni \bar{\mu}$.

On déduit encore la propriété : $\xi\alpha \ni \eta \leftrightarrow \eta\bar{\alpha} \ni \xi$ (4).

En effet, on a $\xi\alpha \ni \eta \rightarrow \bar{\alpha}\bar{\xi} \ni \bar{\eta}$. Mais, d'après (1), on a $\eta\bar{\eta} \ni \varepsilon_{\bar{\eta}}$. Donc, $\eta(\bar{\alpha}\bar{\xi})$ a un sens et il en est de même de $(\eta\bar{\alpha})\bar{\xi}$ avec $(\eta\bar{\alpha})\bar{\xi} \ni \varepsilon_{\bar{\eta}}$, d'après (I_d) *a* et (I_d) *b*. De là, on déduit, comme ci-dessus, $\eta\bar{\alpha} \ni \xi$ car $\xi = \bar{\bar{\xi}}$ est l'inverse de $\bar{\xi}$. Enfin, on peut écrire $\eta\bar{\alpha} \ni \xi \rightarrow \xi\bar{\bar{\alpha}} \ni \eta$ soit $\xi\alpha \ni \eta$.

3° *Associativité :* Pour compléter (I_d) *a*, montrons que $\alpha(\beta\gamma)$ *a un sens dès que* $(\alpha\beta)\gamma$ *a un sens.*

Supposons que $(\alpha\beta)\gamma$ ait un sens, c'est-à-dire qu'il existe un élément ξ et un élément η tels que $\alpha\beta \ni \xi$ et $\xi\gamma \ni \eta$. On a, d'après (3), $\bar{\eta} \in \bar{\gamma}\xi$, $\bar{\xi} \in \bar{\beta}\bar{\alpha}$, d'où l'on déduit que $\bar{\gamma}(\bar{\beta}\bar{\alpha})$ a un sens et que $(\bar{\gamma}\bar{\beta})\bar{\alpha}$ a un sens d'après (I_d) *a*. Il existe donc un élément μ et un élément ν tels que $\bar{\gamma}\bar{\beta} \ni \mu$ et $\mu\bar{\alpha} \ni \nu$. Toujours d'après (3) et puisque $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ sont les inverses de α, β, γ, on a $\bar{\mu} \in \beta\gamma$ et $\bar{\nu} \in \alpha\bar{\mu}$, ce qui montre que $\alpha(\beta\gamma)$ a un sens.

4° *Propriétés des éléments de* U.

Pour tout élément $\varepsilon \in \mathrm{U}$, *il existe au moins un élément* $\alpha \in \mathrm{M}$ *tel que* $\alpha\varepsilon$ *ait un sens.* Soit $\varepsilon \in \mathrm{U}$ tel qu'il n'existe aucun élément $\alpha \in \mathrm{M}$ tel que $\alpha\varepsilon$ ait un sens. Soit $\bar{\varepsilon}$ son inverse. $\bar{\varepsilon}$ est composable avec un élément $\varepsilon' \in \mathrm{U}$, et on a $\bar{\varepsilon}\varepsilon' = \bar{\varepsilon}$ d'après (II_d). On a $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}\varepsilon' = (\bar{\varepsilon}\varepsilon')\varepsilon'$. Donc, $(\bar{\varepsilon}\varepsilon')\varepsilon'$ a un sens et, d'après 3°), $\varepsilon'\varepsilon'$ a un sens. D'après (II_d) *a* et (II_d) *b*, on a $\varepsilon'\varepsilon' = \varepsilon'$. De $\bar{\varepsilon}\varepsilon' = \bar{\varepsilon}$, on déduit, d'après (III_d) *a* et (III_d) *b*, $\varepsilon\bar{\varepsilon} \ni \varepsilon'$. Il en résulte $\varepsilon'(\varepsilon\bar{\varepsilon}) \supset \varepsilon'\varepsilon' = \varepsilon'$. Donc $\varepsilon'(\varepsilon\bar{\varepsilon})$ a un sens et finalement, d'après (I_d)*a*, $\varepsilon'\varepsilon$ a un sens contrairement à notre supposition initiale.

Pour tout élément $\varepsilon \in \mathrm{U}$, *on a* $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$ (5). Pour tout $\varepsilon \in \mathrm{U}$, il existe $\alpha \in \mathrm{M}$ tel que $\alpha\varepsilon$ ait un sens d'après 4°. On a $\alpha\varepsilon = \alpha$ d'après (II_d)*a* et (II_d)*b*. D'où $\alpha = \alpha\varepsilon = (\alpha\varepsilon)\varepsilon$ ce qui montre que $(\alpha\varepsilon)\varepsilon$ a un sens et, par conséquent, d'après 3°, $\varepsilon\varepsilon$ a un sens. Finalement, $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$, d'après (II_d)*a* et (II_d)*b*.

Pour tout $\alpha \in \mathrm{M}$, *l'unité à droite* ε_{α} *est unique.* Supposons qu'on ait $\alpha\varepsilon = \alpha$ et $\alpha\varepsilon' = \alpha$ (avec $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathrm{U}$) ; on en déduit $(\alpha\varepsilon)\varepsilon' = \alpha$; donc, $\varepsilon\varepsilon'$ a un sens et $\varepsilon\varepsilon' = \varepsilon$. Or, on a $\varepsilon\varepsilon' = \varepsilon$. Ces deux égalités contredisent l'unicité de l'inverse de ε.

5° *Existence et unicité des éléments unités à gauche.*

De $\alpha\bar{\alpha} \ni \varepsilon_{\bar{\alpha}}$, on déduit $\varepsilon_{\bar{\alpha}}\alpha \ni \alpha$, d'après (4). Supposons que $\varepsilon_{\bar{\alpha}}\alpha$ contienne plus d'un élément : $\varepsilon_{\bar{\alpha}}\alpha = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ avec $\beta \neq \alpha$. Si $\alpha\bar{\beta}$ a un sens, il ne contient pas d'élément de U car β, inverse de $\bar\beta$, est différent de α. Or, $(\varepsilon_{\bar\alpha}\alpha)\bar\beta$ a un sens car $\varepsilon_{\bar\alpha}\alpha \ni \beta$ et $\beta\bar\beta \ni \varepsilon_{\bar\beta}$. Donc, $\alpha\bar\beta$ a effectivement un sens. De plus, $(\varepsilon_{\bar\alpha}\alpha)\bar\beta = \varepsilon_{\bar\alpha}(\alpha\bar\beta)$. Mais, $(\varepsilon_{\bar\alpha}\alpha)\bar\beta \ni \varepsilon_{\bar\beta}$. Par contre, $\varepsilon_{\bar\alpha}(\alpha\bar\beta)$ ne contient aucun élément de U : en effet, $\varepsilon_{\bar\alpha}\varepsilon_{\bar\alpha} = \varepsilon_{\bar\alpha}$ (d'après (5)) entraîne $\overline{\varepsilon_{\bar\alpha}} = \varepsilon_{\bar\alpha}$ et $\varepsilon_{\bar\alpha}\xi$ ne contient aucun élément de U si l'on a $\xi \neq \varepsilon_{\bar\alpha}$; puisque $\alpha\bar\beta$ ne contient pas $\varepsilon_{\bar\alpha}$ (pas plus que n'importe quel élément de U), $\varepsilon_{\bar\alpha}(\alpha\bar\beta)$ ne contient pas $\varepsilon_{\bar\beta}$. Il y a contradiction et on a $\varepsilon_{\bar\alpha}\alpha = \alpha$ (6).

De plus, le seul élément de U composable avec α est $\varepsilon_{\bar\alpha}$: en effet, si $\varepsilon\alpha$ a un sens, $\varepsilon(\varepsilon_{\bar\alpha}\alpha)$ a un sens, ainsi que $\varepsilon\varepsilon_{\bar\alpha}$. Mais, ε n'est composable qu'avec $\varepsilon \in$ U. Donc, on a $\varepsilon_{\bar\alpha} = \varepsilon$.

L'ensemble U vérifie donc les propriétés symétriques de $(\mathrm{II}_d)a$, $(\mathrm{II}_d)b$, $(\mathrm{II}_d)c$.

On a bien retrouvé toutes les conditions définissant l'hypergroupe partiel inversible.

Nous montrons maintenant que les sept conditions utilisées sont indépendantes :

Les exemples suivant vérifient toutes les conditions précédentes sauf une et ne sont pas des hypergroupes partiels inversibles.

(E1)

—	e	a
e	e	.
a	a	e

(E2)

—	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	b
b	b	a	e

(E3)

—	e	a
e	$\{e,a\}$	$\{e,a\}$
a	$\{e,a\}$	$\{e,a\}$

(E4)

—	e	a
e	e	a
a	e	a

(E5)

—	e	a
e	e	.
a	.	.

(E6)

—	e	a
e	e	.
a	a	.

1° (E 1) ne vérifie pas $(\mathrm{I}_d)a$ car $a(aa)$ est défini alors que $(aa)a$ ne l'est pas. Il vérifie $(\mathrm{I}_d)b$. Il vérifie (II_d) lorsqu'on prend $\mathrm{U} = \{e\}$ et (III_d) lorsqu'on prend $\bar e = e$, $\bar a = a$.

2° (E 2) vérifie $(\mathrm{I}_d)a$ mais non $(\mathrm{I}_d)b$ car on a $a(bb) = a \neq e = (ab)b$. Il vérifie (II_d) en prenant $\mathrm{U} = \{e\}$ et III_d en prenant $\bar e = e$, $\bar a = a$, $\bar b = b$.

3° (E 3) vérifie (I_d). Il vérifie $(\mathrm{II}_d)b$ et $(\mathrm{II}_d)c$ en prenant $\mathrm{U} = \{e\}$ mais il ne vérifie pas alors $(\mathrm{II}_d)a$. Il vérifie (III_d) en prenant $\bar e = e$, $\bar a = a$. Ce n'est pas un hypergroupe partiel inversible car il ne possède pas d'éléments scalaires, donc pas d'unités scalaires.

4° (E 4) vérifie (I_d). Il vérifie $(\mathrm{II}_d)a$ et $(\mathrm{II}_d)c$ en prenant $\mathrm{U} = \{e\}$ mais il ne vérifie pas $(\mathrm{II}_d)b$ car on n'a pas $ae \ni a$. Il vérifie (III_d) en prenant $\bar e = e$, $\bar a = a$. Ce n'est pas un hypergroupe partiel inversible car ni e ni a ne peuvent être éléments unités.

5° (E 5) vérifie (I_d). Il vérifie $(II_d)a$ et $(II_d)b$ si on prend $U = \{e\}$, mais il ne vérifie pas $(II_d)c$ car a n'est pas composable. Il vérifie (III_d) si on prend $\bar{e} = e$, $\bar{a} = a$.

6° (E 6) vérifie (I_d) et (II_d) en prenant $U = \{e\}$. Si on prend $\bar{e} = e$, $\bar{a} = a$, il vérifie $(III_d)b$ mais non $(III_d)a$ puisque $\bar{a}e = ae \ni a$ et aa n'a pas de sens. Ce n'est pas un hypergroupe partiel inversible : en effet, aa n'a pas de sens, donc a ne peut être élément unité; on a nécessairement $U = \{e\}$ si l'on veut organiser (E 6) en hypergroupe partiel inversible; mais alors, a ne peut avoir d'inverse.

7° En considérant toujours (E 6) avec $U = \{e\}$ mais en prenant $\bar{e} = \bar{a} = e$, on satisfait à $(III_d)a$ mais non à $(III_d)b$ puisqu'on a $\bar{a}e = ee \ni e$ et qu'on n'a pas $ae \ni e$ (15).

2) On déduit de là un système de trois axiomes constitués par quatre conditions indépendantes pour la définition d'un hypergroupe inversible (16).

Un hypergroupe inversible P est un ensemble $\{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$ *dans lequel est définie (partout) une opération non nécessairement uniforme, les axiomes suivants étant vérifiés :*

(I) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

(II_d) *Il existe dans P au moins un élément* ε *avec les propriétés :*

a — *Pour tout* $\alpha \in P$, $\alpha\varepsilon$ *contient un seul élément.*

b — *Pour tout* $\alpha \in P$, *on a* $\alpha\varepsilon \ni \alpha$.

(III_d) *Pour tout* $\alpha \in P$, *il existe au moins un* $\bar{\alpha} \in P$ *avec la propriété :*

$\bar{\alpha}\eta \ni \xi$ *entraîne* $\alpha\xi \ni \eta$.

Démonstration. — Ces axiomes définissent bien un hypergroupe inversible. En effet, l'opération étant partout définie, les axiomes du 1) sont satisfaits. P est donc un hypergroupe partiel inversible et, par conséquent, un hypergroupe inversible.

Les quatre conditions imposées sont indépendantes comme le montrent les exemples (E 2), (E 3), (E 4) et l'exemple suivant :

(E7)

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	a	$\{e,a,b\}$
b	b	$\{e,a,b\}$	$\{a,b\}$

(E 7) vérifie (I) et (II_d) avec $\varepsilon = e$, mais il ne vérifie pas (III_d) : en effet, on ne peut prendre ni $\bar{a} = e$ car on a $ee \ni e$ et on n'a pas $ae \ni e$, ni $\bar{a} = a$ car on a $ab \ni e$ et on n'a pas $ae \ni b$, ni $\bar{a} = b$ car on a $bb \ni a$ et on n'a pas $aa \ni b$ (15).

3) On déduit aussi un système de trois axiomes constitués par six

(15) Un autre contre-exemple (du même type) est fourni par le multigroupe des classes aH dans un groupe G par rapport à un sous-groupe H non invariant.

(16) On trouvera un autre système d'axiomes dans J. KUNTZMANN [1], p. 192.

conditions indépendantes pour la définition d'un groupe partiel [17].

Un groupe partiel C est un ensemble $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ *dans lequel certains couples ordonnés d'éléments sont composables, leur produit étant alors un élément de C, les axiomes suivants étant vérifiés :*

(I_d) a — $(\alpha\beta)\gamma$ *a un sens dès que* $\alpha(\beta\gamma)$ *a un sens.*

b — *Si* $(\alpha\beta)\gamma$ *et* $\alpha(\beta\gamma)$ *ont un sens, on a* $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

(II_d) *C possède au moins un sous-ensemble U avec les propriétés :*

a — *Si* $\alpha\varepsilon$ *a un sens* $(\alpha \in C,\ \varepsilon \in U)$, *on a* $\alpha\varepsilon = \alpha$.

b — *Tout* $\alpha \in C$ *est composable avec un* $\varepsilon \in U$ *au moins.*

(III_d) *Pour tout* $\alpha \in C$, *il existe au moins un* $\bar{\alpha} \in C$ *avec les propriétés :*

a — *Si* $\bar{\alpha}\eta = \xi$, $\alpha\xi$ *a un sens.*

b — *Si* $\bar{\alpha}\eta = \xi$ *et si* $\alpha\xi$ *a un sens, on a* $\alpha\xi = \eta$.

Démonstration. — Ces axiomes définissent bien un groupe partiel. En effet, les axiomes du 1) sont satisfaits. C'est donc un hypergroupe partiel inversible, donc un groupe partiel.

Les six conditions imposées sont indépendantes comme le montrent les exemples (E1), (E2), (E4), (E5) et (E6) (ce dernier pris deux fois, comme plus haut).

2. Treillis des sous-hypergroupes partiels d'un hypergroupe inversible.

Envisageons le treillis T des sous-hypergroupes partiels d'un hypergroupe partiel inversible M (ces sous-hypergroupes partiels sont évidemment inversibles).

a) Dans ce treillis, *l'intersection* $A \wedge B$ de deux éléments A et B est l'ensemble des éléments de M communs à A et B (c'est un sous-hypergroupe partiel), *la réunion* $A \vee B$ est le sous-hypergroupe partiel engendré par les éléments de A et les éléments de B (on voit immédiatement que $A \vee B$ est l'ensemble des éléments de M appartenant aux produits d'un nombre fini d'éléments de A et B). T est un treillis complet car on peut y définir l'intersection d'un nombre quelconque d'éléments et il existe un élément universel, M. L'élément zéro est U.

A et B étant deux sous-hypergroupes partiels de M, nous désignerons par AB l'ensemble, en général différent de $A \vee B$, des éléments de M qui appartiennent à un produit $\alpha\beta$ ou $\alpha \in A$ et $\beta \in B$; de même, nous désignerons par ABC l'ensemble des éléments de M qui appartiennent à un produit $\alpha\beta\gamma$ ou $\alpha \in A$, $\beta \in B$, $\gamma \in C$ (les ensembles tels que AB, ABC ne sont pas en général des éléments du treillis T). *A et B sont dits permutables* si $AB = BA$ (en utilisant les propriétés des éléments inverses, on voit aussitôt qu'il suffit d'avoir pour cela $AB \subset BA$ par exemple). *A est dit presque permutable avec B si* $BAB \subset ABA$. *A et B sont dits presque permutables* si $BAB = ABA$. Si A et B sont permutables, on a $A \vee B = AB$.

(17) On trouvera un autre système d'axiomes dans une note aux *Comptes rendus*, t. 226, 1948, p. 616.

Si A est presque permutable avec B, on a $A \vee B = ABA$. Remarquons encore que tout sous-hypergroupe partiel contenant U, l'on a $A \subset AB$, $B \subset AB$, $A \subset ABA$, $B \subset ABA$.

Considérons, dans le treillis T, deux chaînes de longueur finie, de mêmes extrémités :

$\{A_i\}$ $$A_0 \geqslant A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots \geqslant A_\alpha.$$

$\{B_j\}$ $$B_0 = A_0 \geqslant B_1 \geqslant B_2 \geqslant \ldots \geqslant B_\beta = A_\alpha.$$

Nous allons leur appliquer les résultats du chapitre IV.

Construisons les intercalaires de Zassenhaus A_{ij} et B_{ji} et les subdivisions :

$$\{A_{ij}\}\quad A_{10} = A_0 \geqslant A_{11} \geqslant A_{12} \geqslant \ldots \geqslant A_{1\beta} = A_{20} = A_1 \geqslant A_{21} \geqslant \ldots \geqslant A_{2\beta} = A_{30} = A_2 \geqslant \ldots \geqslant A_{\alpha\beta} = A_\alpha,$$

$$\{B_{ji}\}\quad B_{10} = B_0 \geqslant B_{11} \geqslant B_{12} \geqslant \ldots \geqslant B_{1\alpha} = B_{20} = B_1 \geqslant B_{21} \geqslant \ldots \geqslant B_{2\alpha} = B_{30} = B_2 \geqslant \ldots \geqslant B_{\beta\alpha} = B_\beta.$$

b) LEMME 1. — L'égalité

$$A_{ij} \wedge B_{j-1} = B_{ji} \wedge A_{i-1} \quad (\mathrm{I}')$$

a lieu si les conditions

$$A_{ij-1} \wedge B_j \text{ est presque permutable avec } A_i$$
$$B_{j-1} \wedge A_i \text{ est presque permutable avec } B_j \quad (\mathrm{II}')$$

sont remplies.

Démonstration : En effet, si $\xi \in A_{ij} \wedge B_{j-1} = [A_i \vee (A_{i-1} \wedge B_j)] \wedge B_{j-1}$, on a $\xi \in B_{j-1}$ et, d'après (II′), il existe α, β, β' tels que $\xi \in \beta\,\alpha\,\beta'$ avec $\alpha \in A_i$, $\beta \in A_{i-1} \wedge B_j$, $\beta' \in A_{i-1} \wedge B_j$. Parmi les quatre éléments $\xi, \alpha, \beta, \beta'$ tels que $\xi \in \beta\alpha\beta'$ les trois éléments ξ, β, β' appartiennent à B_{j-1}. On en déduit aisément que le quatrième α appartient aussi à B_{j-1} car un sous-hypergroupe partiel est unitaire[18] en raison de l'existence et de la propriété des éléments inverses. Il résulte de là $\xi \in B_j \vee (B_{j-1} \wedge A_i)$. D'autre part, on a manifestement $\xi \in A_{i-1}$. D'où $\xi \in [B_j \vee (B_{j-1} \wedge A_i)] \wedge A_{i-1}$, et $A_{ij} \wedge B_{j-1} \in B_{ji} \wedge A_{i-1}$.

L'inclusion réciproque s'établit de la même manière.

THÉORÈME 5. — *Si les conditions* (II′) *ont lieu quels que soient i et j* ($0 < i \leqslant \alpha, 0 < j \leqslant \beta$), *les subdivisions* $\{A_{ij}\}$ *et* $\{B_{ji}\}$ *des chaînes* $\{A_i\}$ *et* $\{B_i\}$ *simplifiées par suppression des répétitions ont même longueur.*

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du théorème 1, chapitre IV.

Pour obtenir maintenant un analogue du théorème 2, il faut d'abord renforcer le lemme 3 :

LEMME 2. — *Soit m l'indice courant des éléments de la chaîne* $\{A_{ij}\}$ ($0 \leqslant m \leqslant \alpha\beta$). *Si les conditions* (II′) *ont lieu pour tout couple* (*i, j*) ($i = 1, \ldots \alpha$; $j = 1, \ldots \beta$) *dans les chaînes* $\{A_i\}$ *et* $\{B_j\}$, *elles ont lieu*

(18) C'est-à-dire que, si l'on a $\alpha \in \beta\,\gamma$ et si, par exemple, α et γ appartiennent à un sous-hypergroupe partiel, β lui appartient également. En effet, $\alpha \in \beta\gamma \rightarrow \beta \in \alpha\bar{\gamma}$ et $\bar{\gamma}$ appartient au sous-hypergroupe partiel en même temps que γ.

pour tout couple (m, j) $(m = 1, \ldots \alpha\beta;\ j = 1, \ldots \beta)$ *dans les chaînes* $\{A_{ij}\}$ *et* $\{B_j\}$.

Démonstration : 1) Montrons que $A_{ij-1} \wedge B_q$ est presque permutable avec A_{ij} $(i = 1, \ldots \alpha;\ j, q = 1, \ldots \beta)$.

1^er^ cas : $q \leqslant j\text{-}1$. On a alors (lemme 2, chapitre IV) $A_{ij} \vee (A_{ij-1} \wedge B_q) = A_{ij-1} = A_i \vee (A_{i-1} \wedge B_{j-1})$. D'après la première des conditions (II′) appliquée à i et $j\text{-}1 \geqslant q \geqslant 1$, ceci a pour valeur $(A_{i-1} \wedge B_{j-1}).A_i.(A_{i-1} \wedge B_{j-1})$. Or, d'une part, on a $A_i \subset A_{ij}$; d'autre part, on a $A_{i-1} \wedge B_{j-1} \subset A_i \vee (A_{i-1} \wedge B_{j-1}) = A_{ij-1}$ et $A_{i-1} \wedge B_{j-1} \subset B_{j-1} \subset B_q$ d'où $A_{i-1} \wedge B_{j-1} \subset A_{ij-1} \wedge B_q$. Il en résulte que l'on a $A_{ij} \vee (A_{ij-1} \wedge B_q) \subset (A_{ij-1} \wedge B_q).A_{ij}.(A_{ij-1} \wedge B_q)$. En particulier $A_{ij}.(A_{ij-1} \wedge B_q).A_{ij} \subset (A_{ij-1} \wedge B_q).A_{ij}.(A_{ij-1} \wedge B_q)$.

2^me^ cas : $q \geqslant j$. On a alors (lemme 2, chapitre IV) $A_{ij} \vee (A_{ij-1} \wedge B_q = A_{ij}$. Il en résulte immédiatement

$$A_{ij}.(A_{ij} \wedge B_q).A_{ij} \subset A_{ij} \subset A_{ij-1} \wedge B_q).A_{ij}.(A_{ij-1} \wedge B_q).$$

2) Montrons que $B_{q-1} \wedge A_{ij}$ est presque permutable avec A_{ij-1} $(i = 1, \ldots \alpha;\ j, q = 1, \ldots \beta)$.

1^er^ cas : $j \leqslant q\text{-}1$. On a (lemme 2, chapitre IV) $B_q \vee (B_{q-1} \wedge A_{ij}) = B_{qi-1} = B_q \vee (B_{q-1} \wedge A_{i-1})$. D'après la deuxième des conditions (II′) appliquée à $q \geqslant j + 1 > 1$ et $i - 1$ (si $i - 1$ est égal à 0, l'égalité est triviale car les deux membres sont B_{q-1}), ceci a pour valeur $(B_{q-1} \wedge A_{i-1}).B_q.(B_{q-1} \wedge A_{i-1})$. Or, en utilisant un calcul fait au lemme 2, chapitre IV, partie *a*), 2) de la démonstration, on a $B_{q-1} \wedge A_{i-1} = B_{q-1} \wedge A_{iq-1} \subset B_{q-1} \wedge A_{ij}$. Il en résulte $B_q \vee (B_{q-1} \wedge A_{ij}) \subset (B_{q-1} \wedge A_{ij}).B_q.(B_{q-1} \wedge A_{ij})$. En particulier, $B_q.(B_{q-1} \wedge A_{ij}).B_q \subset (B_{q-1} \wedge A_{ij}).B_q.(B_{q-1} \wedge A_{ij})$.

2^me^ cas : $j \geqslant q$. On a (lemme 2, chapitre IV) $B_q \vee (B_{q-1} \wedge A_{ij}) = B_{qi} = B_q \vee (B_{q-1} \wedge A_i)$. D'après la deuxième des conditions (II′) appliquée à q et i, ceci a pour valeur $(B_{q-1} \wedge A_i).B_q.(B_{q-1} \wedge A_i)$. Or, on a $B_{q-1} \wedge A_i \subset B_{q-1} \wedge A_{ij}$. On en déduit $B_q \vee (B_{q-1} \wedge A_{ij}) \subset (B_{q-1} \wedge A_{ij}).B_q.(B_{q-1} \wedge A_{ij})$ et en particulier $B_q.(B_{q-1} \wedge A_{ij}).B_q \subset (B_{q-1} \wedge A_{ij}).B_q.(B_{q-1} \wedge A_{ij})$.

En utilisant le lemme 2 du chapitre IV, et ce lemme 2, on voit que le lemme 5 et le théorème 2 du chapitre IV restent valables. Ce dernier théorème devient :

THÉORÈME 6. — *Si les conditions* (II′) *sont satisfaites quels que soient* i *et* j $(0 < i \leqslant \alpha, 0 < j \leqslant \beta)$ *dans les chaînes* $\{A_i\}$ *et* $\{B_j\}$ *et si ces chaînes sont sans répétition et maximales au sens de l'égalité* (II′), *elles ont même longueur.*

Le théorème 3 du chapitre IV est valable directement :

THÉORÈME 7. — *Si les conditions* (II′) *sont satisfaites quels que soient* i *et* j $(0 < i \leqslant \alpha, 0 < j \leqslant \beta)$ *dans les chaînes* $\{A_i\}$ *et* $\{B_j\}$ *et si ces chaînes sont sans répétition et maximales dans le treillis* T (*ou dans un sous-treillis*), *elles ont même longueur.*

c) Lemme 3. — **L'égalité**

$$A_{ij} \wedge B_{j-1} = B_{ji} \wedge A_{i-1} \quad \text{(I')}$$

a lieu si les conditions

$$\begin{array}{l} A_{i-1} \wedge B_j \text{ et } A_i \text{ sont presque permutables} \\ B_{j-1} \wedge A_i \text{ et } B_j \text{ sont presque permutabels} \quad \text{(III')} \end{array}$$

sont remplies.

Il suffit de remarquer que ces conditions sont plus fortes que les conditions (II').

Lemme 4. — *Si les conditions* (III') *ont lieu pour tout couple* (i, j) $(i = 1, \ldots \alpha;\ j = 1, \ldots \beta)$ *dans les chaînes* $\{A_i\}$ *et* $\{B_j\}$, *elles ont lieu pour tout couple* (m, j) $(m = 1, \ldots \alpha\beta;\ j = 1, \ldots \beta)$ *dans les chaînes* $\{A_{ij}\}$ *et* $\{B_j\}$.

La démonstration est tout à fait analogue à celle du lemme 2.

Théorème 8. — *Si les conditions* (III') *sont satisfaites quels que soient* i *et* j $(0 < i \leqslant \alpha, 0 < j \leqslant \beta)$ *dans les chaînes* $\{A_i\}$ *et* $\{B_j\}$ *et si ces chaînes sont sans répétition et maximales au sens de l'égalité* (III'), *elles ont même longueur.*

d) Lemme 5. — *L'égalité* (I') *est encore valable si les conditions*

$$\begin{array}{l} A_i \text{ et } A_{i-1} \wedge B_j \text{ sont permutables} \\ B_j \text{ et } B_{j-1} \wedge A_i \text{ sont permutables} \quad \text{(IV')} \end{array}$$

sont remplies.

Il suffit encore de remarquer que ces conditions renforcent les conditions (III').

Lemme 6. — *Si les conditions* (IV') *ont lieu pour tout couple* (i, j) $(i = 1, \ldots \alpha;\ j = 1, \ldots \beta)$ *dans les chaînes* $\{A_i\}$ *et* $\{B_j\}$, *elles ont lieu pour tout couple* (m, j) $(m = 1, \ldots \alpha\beta;\ j = 1, \ldots \beta)$ *dans les chaînes* $\{A_{ij}\}$ *et* $\{B_j\}$.

La démonstration est encore analogue à celle du lemme 2.

Théorème 9. — *Si les conditions* (IV') *sont satisfaites quels que soient* i *et* j $(0 < i \leqslant \alpha, 0 < j \leqslant \beta)$ *dans les chaînes* $\{A_i\}$ *et* $\{B_j\}$ *et si ces chaînes sont sans répétition et maximales au sens de l'égalité* (IV'), *elles ont même longueur.*

e) Lemme 7. — *L'égalité* (I') *est encore valable si la condition*

$$A_i \text{ et } B_j \text{ sont permutables} \quad \text{(V')}$$

est remplie.

Démonstration : En effet, on a alors $\mathrm{A}_{ij} = \mathrm{A}_i \vee (\mathrm{A}_{i-1} \wedge \mathrm{B}_j) = \mathrm{A}_i . (A_{i-1} \wedge \mathrm{B}_j)$ car tout élément ξ de $\mathrm{A}_{ij} \subset \mathrm{A}_i \vee \mathrm{B}_j$ est tel que $\xi \in \alpha\beta$ où $\alpha \in \mathrm{A}_i$ et $\beta \in \mathrm{B}_j$; et, de $\xi \in \mathrm{A}_{i-1}$, on déduit $\beta \in \mathrm{A}_{i-1}$. De plus, $\mathrm{A}_i . (\mathrm{A}_{i-1} \wedge \mathrm{B}_j) \wedge \mathrm{B}_{j-1}$

$= (A_i \wedge B_{j-1}) . (A_{i-1} \wedge B_j)$ car tout élément η de $A_i.(A_{i-1} \wedge B_j) \wedge B_{j-1}$ est tel que $\eta \in \alpha\beta$ où $\alpha \in A_i$ et $\beta \in A_{i-1} \wedge B_j$; et de $\eta \in B_{j-1}$, on déduit $\alpha \in B_{j-1}$. De là, (I') résulte facilement (19).

LEMME 8. — *Si les conditions* (V') *ont lieu pour tout couple* (i, j) $(i = 1, \dots \alpha;\ j = 1, \dots \beta)$ *dans les chaînes* $\{A_i\}$ *et* $\{B_j\}$, *elles ont lieu pour tout couple* (m, j) $(m = 1, \dots \alpha\beta;\ j = 1, \dots \beta)$ *dans les chaînes* $\{A_{ij}\}$ *et* $\{B_j\}$.

Démonstration : Pour démontrer ce lemme, on distingue les cas $q \leqslant j$ et $q > j$. Si $q \leqslant j$, on a $B_q \supset B_j$ d'où $B_q \supset B_j \wedge A_{i-1}$ et B_q est permutable avec $B_j \wedge A_{i-1}$. B_q étant permutable avec A_i, on en déduit qu'il est permutable avec $A_{ij} = A_i \vee (B_j \wedge A_{i-1})$. Si $q > j$, on a $B_q \subset B_j$. Du fait que B_q est permutable avec A_{i-1}, on déduit que B_q est encore permutable avec $B_j \wedge A_{i-1}$, donc encore avec A_{ij} (20).

THÉORÈME 10. — *Si les conditions* (V') *sont satisfaites quels que soient i et j* $(0 < i \leqslant \alpha,\ 0 < j \leqslant \beta)$ *dans les chaînes* $\{A_i\}$ *et* $\{B_j\}$ *et si ces chaînes sont sans répétition et maximales au sens de l'égalité* (V'), *elles ont même longueur.*

3. CAS PARTICULIERS.

a) Puisqu'un hypergroupe inversible est un hypergroupe partiel inversible, les théorèmes 5 à 10 sont valables dans le treillis des sous-hypergroupes d'un hypergroupe inversible.

b) Puisqu'un groupe partiel est un hypergroupe partiel inversible, les théorèmes 5 à 10 sont valables dans le treillis des sous-groupes partiels d'un groupe partiel.

c) En particulier, ces théorèmes sont valables pour deux chaînes de sous-groupes d'un groupe (21).

d) Moyennant une interprétation très simple des relations d'équivalence, ces théorèmes fournissent des résultats intéressants concernant les chaînes de relations d'équivalence sur un ensemble.

Soient un ensemble $E = \{x, y, z, \dots\}$ et une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E. Considérons la partie $C_{\mathcal{R}}$ de l'ensemble $E \times E$ définie par la rela-

---

(19) On peut aussi remarquer que la condition (V') est plus forte que les conditions (IV'). On voit qu'on ne peut pas affaiblir la condition (V') en la remplaçant par la condition : A_i et B_j sont presque permutables.

On peut utiliser, au lieu des égalités (I'), les égalités duales (I). On obtient le dual du théorème 5 avec les conditions (V'). De plus, on voit que les égalités (I) ont lieu aussi si A_i et B_j sont presque permutables ce qui conduit à un résultat plus fort avec ces conditions et à un résultat analogue au théorème 7. Le dual du lemme 8 ne s'étendant pas avec cette dernière condition, le théorème 10 ne s'étend pas.

(20) Cette démonstration se déduit aisément de celle donnée par O. ORE [**1**], p. 167, dans le cas des groupes.

(21) Les théorèmes 9 et 10 et les cas particuliers correspondants des théorèmes 5 et 7 pour les groupes figurent dans O. ORE [**1**], pp. 166 à 168.

tion $\mathcal{R}$, c'est-à-dire telle que $(x, y) \in \mathrm{C}\mathcal{R}$ si $x \equiv y\ (\mathcal{R})$. On sait que la loi de composition partielle $(x, y).(z, t) = (x, t)$ si $y = z$ fait de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ un groupe partiel (22). D'autre part, la partie $\mathrm{C}\mathcal{R}$ constitue un sous-groupe partiel de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$. Réciproquement, tout sous-groupe partiel de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ définit une relation d'équivalence sur E (23). En effet, il contient tous les éléments de la forme (x, x), il contient (x, z) dès qu'il contient (x, y) et (y, z), il contient (x, y) s'il contient (y, x), d'où la réflexité, la transitivité et la symétrie de la relation $\mathcal{R}$ correspondante.

La correspondance biunivoque ainsi définie entre les relations d'équivalence sur E et les sous-groupes partiels de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ respecte l'inclusion : $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}' \leftrightarrow \mathrm{C}\mathcal{R} \subset \mathrm{C}\mathcal{R}'$. Elle réalise donc un isomorphisme du treillis des relations d'équivalence sur E et du treillis des sous-groupes partiels de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ (muni de la loi de composition envisagée). Toute propriété de l'un des treillis se traduit par une propriété de l'autre.

Il résulte de là qu'à l'intersection (à l'union) de deux relations d'équivalence correspond l'intersection (l'union) des sous-groupes partiels correspondants. D'autre part, à la notion d'*associabilité* (24) des relations d'équivalence, correspond celle de permutabilité des sous-groupes partiels. De même, je dis que *l'équivalence $\mathcal{R}$ est presque associable à l'équivalence $\mathcal{R}'$* si l'existence de x, y, z, t tels que $x \equiv y\ (\mathcal{R}')$, $y \equiv z\ (\mathcal{R})$, $z \equiv t\ (\mathcal{R}')$ implique l'existence de u, v tels que $x \equiv u\ (\mathcal{R})$, $u \equiv v\ (\mathcal{R}')$, $v \equiv t\ (\mathcal{R})$ (25) et je dis que *les équivalences $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont presque associables* si, de plus, $\mathcal{R}'$ est presque associable à $\mathcal{R}$; ces notions correspondent alors aux faits que le sous-groupe partiel $\mathrm{C}\mathcal{R}$ est presque permutable avec le sous-groupe partiel $\mathrm{C}\mathcal{R}'$ et que $\mathrm{C}\mathcal{R}$ et $\mathrm{C}\mathcal{R}'$ sont presque permutables.

Les théorèmes 5 à 10 (26) sont alors valables dans le treillis des relations d'équivalence $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ... sur un ensemble; les conditions (II'), (III'), (IV'), (V') se traduisent par les suivantes :

— $\mathcal{A}_{i-1} \wedge \mathcal{B}_j$ *est presque associable à* $\mathcal{A}_i$

$\mathcal{B}_{j-1} \wedge \mathcal{A}_i$ *est presque associable à* $\mathcal{B}_j$ (II')

---

(22) $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ est même un groupoïde de Brandt d'ordre 1; mais, $\mathrm{C}\mathcal{R}$ n'est pas un sous-groupoïde de Brandt. Pour cet usage, la notion de groupe partiel est plus souple que celle de groupoïde de Brandt.

(23) Si l'on n'impose pas aux sous-groupes partiels de contenir le sous-ensemble des éléments unités, on obtient une image des relations d'équivalence *dans E* (c'est-à-dire sur une partie de E). Dans un groupe partiel, à la différence de ce qui se passe dans un hypergroupe partiel général, les unités d'un sous-groupe partiel à ce sens élargi doivent être prises parmi les unités du groupe partiel (car la relation $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$ caractérise les éléments unités, ce qui n'est pas vrai dans le cas général; *cf.* note 6).

(24) P. Dubreil [1], p. 17.

(25) Cette notion a été introduite antérieurement par O. Ore [2], p. 581. Elle a été généralisée à des relations binaires quelconques et utilisée par P. Dubreil, *Relations binaires et applications*, C.R., 230, 1950, p. 1028.

(26) Les théorèmes 9 et 10 et les cas particuliers correspondants des théorèmes 5 et 7 pour les relations d'équivalence figurent dans P. Dubreil et M.-L. Dubreil-Jacotin [2], pp. 90 à 95.

— $\mathcal{A}_{i-1} \wedge \mathcal{B}_j$ et $\mathcal{A}_i$ *sont presque associables*
$\mathcal{B}_{j-1} \wedge \mathcal{A}_i$ et $\mathcal{B}_j$ *sont presque associables* (III′)

— $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{A}_{i-1} \wedge \mathcal{B}_j$ *sont associables*
$\mathcal{B}_j$ et $\mathcal{B}_{j-1} \wedge \mathcal{A}_i$ *sont associables* (IV′)

— $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{B}_j$ *sont associables* (V′)

BIBLIOGRAPHIE

G. BIRKHOFF [1], Lattice Theory, Colloquium, 1949.

H. BRANDT [1], Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs, Math. Ann., 96, 1926, pp. 360-366.

P. DUBREIL [1], Algèbre, tome I, Gauthier-Villars, 1946.

P. DUBREIL et M.-L. DUBREIL-JACOTIN [2], Théorie algébrique des relations d'équivalence, Journal de math., 9e série, t. 18, 1939, pp. 63-95.

J. KUNTZMANN [1], Contribution à l'étude des systèmes multiformes, Ann. Fac. Sciences de l'Université de Toulouse, 1939, pp. 155-195.

O. ORE [1], Structures and group theory, I, Duke math. Journal, 3, 1937, pp. 149-174.

O. ORE [2], Theory of equivalence relations, Duke math. Journal, 9, 1942, pp. 573-628.

R. CROISOT [1], Une interprétation des relations d'équivalence dans un ensemble, C.R., 226, 1948, p. 616.

R. CROISOT [2], Condition suffisante pour l'égalité des longueurs de deux chaînes de mêmes extrémités dans une structure. Application aux relations d'équivalence et aux sous-groupes, C.R., 226, 1948, p. 767.

R. CROISOT [3], Hypergroupes partiels, C.R., 228, 1949, p. 1090.

R. CROISOT [4], Axiomatique des treillis modulaires, C.R., 231, 1950, p. 95.

R. CROISOT [5], Diverses caractérisations des treillis semi-modulaires, modulaires et distributifs, C.R., 231, 1950, p. 1399

R. CROISOT [6], Sous-treillis, produits cardinaux et treillis homomorphes de treillis semi-modulaires, C.R., 232, 1951, p. 27.