

RENÉ CAZENAVE

Sur une nouvelle expression intégrale de la fonction de Legendre de seconde espèce $Q_n(x)$ d'ordre n positif pour $-1 < x < +1$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 17 (1953), p. 139-141

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1953_4_17__139_0

© Université Paul Sabatier, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur une nouvelle expression intégrale de la fonction de Legendre de seconde espèce $Q_n(x)$ d'ordre n positif pour $-1 < x < +1$.

par René CAZENAVE

Pour x réel compris entre -1 et $+1$, Hobson définit la fonction de Legendre de seconde espèce $Q_n(x)$ d'ordre n positif quelconque par

$$(1) \quad 2 Q_n(\cos \theta) = \int_0^{\infty} \frac{d\psi}{(\cos \theta + i \sin \theta \operatorname{Ch} \psi)^{n+1}} + \int_0^{\infty} \frac{d\psi}{(\cos \theta - i \sin \theta \operatorname{Ch} \psi)^{n+1}}$$

si $x = \cos \theta$ avec $0 < \theta < \pi$.

Posons

$$(2) \quad \cos \theta + i \sin \theta \operatorname{Ch} \psi = \rho e^{i\varphi},$$

où, par conséquent,

$$(3) \quad \rho = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \operatorname{Ch}^2 \psi}$$

et

$$(4) \quad \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \theta \operatorname{Ch} \psi.$$

La relation (2) équivalant à

$$(5) \quad \cos \theta = \rho \cos \varphi,$$

$$(6) \quad \sin \theta \operatorname{Ch} \psi = \rho \sin \varphi,$$

la relation (1) devient

$$(7) \quad Q_n(\cos \theta) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(n+1)\varphi}{\rho^{n+1}} d\psi.$$

1° Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $\rho = \operatorname{Ch} \psi$ d'après (3) et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ d'après l'une des relations (4), (5) et (6). Dès lors, (7) s'écrit

$$Q_n(0) = \cos(n+1) \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\psi}{\operatorname{Ch}^{n+1} \psi}$$

ou, avec la transformation de Gudermann $\operatorname{Ch} \psi = \frac{1}{\cos t}$,

$$Q_n(0) = \cos(n+1) \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^n t dt,$$

c'est-à-dire

$$(8) \quad Q_n(0) = \frac{\cos(n+1) \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)},$$

ce qui donne, pour n entier pair ou impair,

$$Q_{2m}(0) = 0, \quad Q_{2m+1}(0) = (-1)^m \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2m+1)}$$

2° Pour $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, il résulte de (5) et (6) que φ est dans celui des intervalles $(0, \frac{\pi}{2})$ et $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ qui contient θ .

De (4) se déduisent les relations

$$\text{Ch } \psi = \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } \theta}, \quad \text{Sh } \psi = \varepsilon \frac{\sqrt{\text{tg}^2 \varphi - \text{tg}^2 \theta}}{\text{tg } \theta}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ du signe de $\text{tg } \theta$,

d'où, par différentiation de la première relation, et compte tenu de la seconde,

$$(9) \quad d\psi = \varepsilon \frac{d\varphi}{\text{Cos}^2 \varphi \sqrt{\text{tg}^2 \varphi - \text{tg}^2 \theta}}$$

Comme $\rho = \frac{\text{Cos } \theta}{\text{Cos } \varphi}$ d'après (5), en écrivant

$$\text{Cos } \theta \text{ Cos } \varphi \sqrt{\text{tg}^2 \varphi - \text{tg}^2 \theta} = \sqrt{\frac{\text{Cos } 2\theta - \text{Cos } 2\varphi}{2}}$$

et en remplaçant $d\psi$ par son expression (9), la relation (7) devient la formule

$$(10) \quad Q_n(\text{Cos } \theta) = \frac{\varepsilon \sqrt{2}}{\text{Cos}^{n+1} \theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^n \varphi \text{Cos } (n+1) \varphi}{\sqrt{\text{Cos } 2\theta - \text{Cos } 2\varphi}} d\varphi,$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ du signe de $\frac{\pi}{2} - \theta$, qui exprime $Q_n(\text{Cos } \theta)$ par une intégrale analogue à l'intégrale de Dirichlet-Mehler

$$P_n(\text{Cos } \theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin } (n+\frac{1}{2}) \varphi}{\sqrt{\text{Cos } \theta - \text{Cos } \varphi}} d\varphi$$

pour la fonction de Legendre de première espèce $P_n(\text{Cos } \theta)$, et qui, comme l'expression (1), est valable pour tout n réel positif.

Pour n entier positif, la substitution de $\pi - \theta$ à θ , qui conserve ρ d'après (3) mais remplace φ par $\pi - \varphi$ en vertu de (5) et (6), conduit, sur (7) ou (10), à l'identité connue

$$(11) \quad Q_n(-\text{Cos } \theta) = (-1)^{n+1} Q_n(\text{Cos } \theta).$$

La formule (10) fournit aisément les expressions classiques

$$Q_0(\text{Cos } \theta) = \text{Log cot } \frac{\theta}{2},$$

$$Q_1(\cos \theta) = \cos \theta \operatorname{Log} \cot \frac{\theta}{2} - 1,$$

$$Q_2(\cos \theta) = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \operatorname{Log} \cot \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} \cos \theta, \dots, \text{etc....}$$

qu'il suffit d'établir pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, en raison de l'identité (11).

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

E. W. HOBSON. — The Theory of spherical and ellipsoïdals Harmonics, University Press, Cambridge, 1931.

René LAGRANGE. — Polynomes et Fonctions de Legendre, fascicule XCVII du *Mémorial des Sciences Mathématiques*, Gauthier-Villars, 1939.