ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

M. MENDES

Sur une équation aux dérivées partielles du troisième ordre

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 17 (1953), p. 97-137
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1953_4_17__97_0>

SUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TROISIÈME ORDRE

par M. MENDES

Résumé. — Etude de l'équation

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + d(y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + g(x, y, z)\, u = 0.$$

On définit, dans une première partie, les invariants d et $H = ad - g$, et l'on démontre l'équivalence des équations possédant les mêmes invariants. La considération de la quantité H permet d'ordonner la discussion de l'équation.

La seconde partie est consacrée à des formes particulières de l'équation proposée et, en particulier, à la recherche des conditions qui permettent de ramener, après multiplication par un facteur convenable, l'équation générale à l'une de ces formes simples.

La troisième partie traite de la détermination des intégrales suivant des conditions données à l'avance.

Nous étudions dans ce mémoire l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + d(y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + g(x, y, z)\, u = 0,$$

où l'on a mis en évidence les variables dont dépendent les coefficients a, d, g, et qui offre, parmi les équations linéaires du troisième ordre, quelques propriétés intéressantes.

Une partie des résultats qui suivent a déjà paru dans les Comptes Rendus (t. 225, p. 619, 1947).

Première Partie.

Étude de l'équation au moyen de son invariant.

1. Nous appellerons *invariant* de cette équation la quantité

$$H = ad - g.$$

Cette définition se justifie par les trois faits suivants :

a) Si l'on prend pour nouvelle fonction inconnue U définie par

$$u = \lambda(x)\, U,$$

on obtient l'équation

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + \left(a + \frac{\lambda'}{\lambda}\right) \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} + d \frac{\partial U}{\partial x} + \left(g + d \frac{\lambda'}{\lambda}\right) U = 0, \qquad \left(\lambda' = \frac{d\lambda}{dx}\right)$$

de même forme que la proposée et de même invariant.

Notons en passant le changement de fonction défini par

$$u = e^{-\int_{x_0}^{x} a\,dx}\, U, \tag{2}$$

qui réduit l'équation à la forme simple

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + d\,\frac{\partial u}{\partial x} - Hu = 0.$$

b) Si l'on prend pour nouvelles variables x', y', z' définies par

$$x = \varphi(x'), \qquad y = \psi(y'), \qquad z = \chi(z'),$$

on obtient l'équation

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x'\, \partial y'\, \partial z'} + a\,\varphi'(x')\,\frac{\partial^2 u}{\partial y'\, \partial z'} + d\,\psi'(y')\,\chi'(z')\,\frac{\partial u}{\partial x'} + g\,\varphi'(x')\,\psi'(y')\,\chi'(z')\,u = 0,$$

de même forme que la proposée et admettant l'invariant

$$H' = \varphi'(x')\,\psi'(y')\,\chi'(z')\,H.$$

c) Enfin le changement de variables

$$y = z', \qquad z = y'$$

ne change pas l'équation, donc ne modifie pas l'invariant.

Remarquons que le coefficient d jouit de propriétés analogues et peut être considéré comme un second invariant de l'équation.

2. La propriété indiquée au paragraphe 1 *a*) admet une réciproque.

Considérons une équation

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a_1\,\frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} + d\,\frac{\partial U}{\partial x} + g_1\,U = 0,$$

de même forme que (1) et ayant les mêmes invariants. On peut passer de l'une à l'autre par la transformation

$$u = \lambda(x)\,U,$$

où λ est défini par la relation

$$a + \frac{\lambda'}{\lambda} = a_1.$$

Toutes les équations de la forme (1) ayant les mêmes invariants se ramènent donc l'une à l'autre.

Si l'on considère comme équivalentes de telles équations, on peut dire que *toutes les équations de la forme (1) ayant les mêmes invariants sont équivalentes.*

Comme application, considérons l'équation adjointe de (1)

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x\, \partial y\, \partial z} - a\,\frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} + d\,\frac{\partial v}{\partial x} - g\,v = 0;$$

elle a pour invariants $-H$ et d.

Donc, si l'on considère l'ensemble des équations de la forme (1) d'invariants H et d, l'ensemble des équations de même forme d'invariants $-H$ et d constitue l'ensemble des équations adjointes des premières. Toutes les équations du premier ensemble peuvent se ramener à une équation unique, toutes celles du second ensemble à une autre équation, adjointe de la première.

L'équation (1), écrite sous la forme

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a\, \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + d\, \frac{\partial u}{\partial x} + (ad - \mathrm{H})\, u = 0,$$

ou

$$a = \frac{\mathrm{H}u - d\, \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}}{\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + du}$$

donne les deux relations

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathrm{H}u - d\, \dfrac{\partial u}{x} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}}{\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + du}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{H}u - d\, \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}}{\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + du}\right) = 0.$$

Ce système ne dépend pas de a.

Donc *les intégrales de toutes les équations de la forme (1) ayant les mêmes invariants sont solutions d'un même système d'équations aux dérivées partielles.*

3. Plus généralement, effectuons le changement de variables et de fonction inconnue défini par les relations

$$\xi = \xi\,(x, y, z), \qquad \eta = \eta\,(x, y, z), \qquad \zeta = \zeta\,(x, y, z), \qquad u = \lambda\,(x, y, z)\, \mathrm{U},$$

et cherchons si l'équation obtenue peut avoir la même forme que l'équation (1).

Dans l'équation transformée, les coefficients de $\dfrac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial \xi^3}$, $\dfrac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial \eta^3}$, $\dfrac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial \zeta^3}$ sont respectivement

$$\lambda\, \frac{\partial \xi}{\partial x}\, \frac{\partial \xi}{\partial y}\, \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \lambda\, \frac{\partial \eta}{\partial x}\, \frac{\partial \eta}{\partial y}\, \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad \lambda\, \frac{\partial \zeta}{\partial x}\, \frac{\partial \zeta}{\partial y}\, \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Ces trois quantités devant être nulles et λ n'étant pas identiquement nul, on peut prendre par exemple

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

avec :
soit

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

soit

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

les autres hypothèses possibles se ramenant à celles-là.

a) Dans le premier cas, les coefficients de

$$\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^2\, \partial \eta}, \quad \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^2\, \partial \zeta}, \quad \frac{\partial^3 U}{\partial \eta^2\, \partial \xi} \quad \frac{\partial^3 U}{\partial \eta^2\, \partial \zeta}, \quad \frac{\partial^3 U}{\partial \zeta^2\, \partial \xi}, \quad \frac{\partial^3 U}{\partial \zeta^2\, \partial \eta},$$

étant respectivement le produit par λ de

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial z}$$

et de quantités analogues, leur annulation donne les relations

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0.$$

Ces quatre relations sont vérifiées par la seule hypothèse $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$, mais qui n'est pas à retenir, car ξ, η, ζ seraient tous trois indépendants de x. On est ainsi amené à envisager la seule combinaison

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0,$$

qui donne

$$\xi = \xi(z), \qquad \eta = \eta(y), \qquad \zeta = \zeta(x).$$

Nous poserons plutôt

$$\xi = \xi(x), \qquad \eta = \eta(y), \qquad \zeta = \zeta(z).$$

Le coefficient de $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$ est

$$\lambda\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial^2 \xi}{\partial z\, \partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial y}\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}$$
$$+ a\lambda\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial z},$$

celui de $\frac{\partial^2 U}{\partial \eta\, \partial \zeta}$ est

$$\lambda\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z\, \partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial^2 \eta}{\partial z\, \partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}\right)$$
$$+ \frac{\partial \lambda}{\partial x}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)$$
$$+ a\lambda\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right),$$

et l'on a des expressions analogues pour les autres dérivées du second ordre de U. L'annulation de ces coefficients, sauf de celui de $\frac{\partial^2 U}{\partial \eta\, \partial \zeta}$, donne

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{d\xi}{dx}\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{d\xi}{dx}\frac{d\eta}{dy} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0.$$

λ est donc fonction de x seulement.

La transformation est donc le produit des deux transformations *a*) et *b*) du numéro 1.

b) Dans le second cas, on a

$$\xi = \xi (y, z), \qquad \eta = \eta (z, x), \qquad \zeta = \zeta (x, y).$$

L'annulation des coefficients de $\dfrac{\partial^3 U}{\partial \xi^2 \partial \eta}$, ..., $\dfrac{\partial^3 U}{\partial \zeta^2 \partial \eta}$ donne

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial z} = 0.$$

Soit

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = 0.$$

On pourra prendre :

soit

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0,$$

ce qui nous ramène à l'hypothèse déjà étudiée où chacune des fonctions ξ, η, ζ ne dépend que d'une des variables x, y, z;

soit

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = 0,$$

ce qui donne

$$\xi = \xi (y), \qquad \eta = \eta (x), \qquad \zeta = \zeta (x, y),$$

hypothèse à rejeter.

En définitive, nous voyons que *seuls les changements de variables définis par*

$$u = \lambda (x)\, U$$

et

$$\xi = \xi (x), \qquad \eta = \eta (y), \qquad \zeta = \zeta (z),$$

et leur produit conservent la forme de l'équation (1).

4. La considération de l'invariant H permet d'ordonner la discussion de l'équation (1).

Définissons de nouvelles fonctions s, t, v, w par les relations

$$s = \frac{\partial u}{\partial x} + a\, u, \quad \mathrm{H}t = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + du, \quad \mathrm{H}v = \frac{\partial u}{\partial x} + a\, u, \quad w = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + du,$$

t et v n'étant évidemment définis que pour H non identiquement nul.

Si nous représentons par $\mathcal{F}(u)$ le premier membre de l'équation (1) considéré comme un polynome en $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\dfrac{\partial}{\partial z}$, les seconds membres des relations précédentes, qui sont les dérivées seconde par rapport à $\dfrac{\partial}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial}{\partial z}$ ou première par rapport à $\dfrac{\partial}{\partial x}$ de $\mathcal{F}(u)$, peuvent s'écrire symboliquement $\mathcal{F}''_{yz}(u)$ et $\mathcal{F}'_x(u)$ [1], et l'on a

$$s = \mathcal{F}''_{yz}(u), \qquad Ht = \mathcal{F}'_x(u), \qquad Hv = \mathcal{F}''_{yz}(u), \qquad w = \mathcal{F}'_x(u).$$

1^er Cas : $H = 0$. — L'équation proposée s'écrit

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + d \frac{\partial u}{\partial x} + a\, d\, u = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 s}{\partial y\, \partial z} + ds = 0$$

ou

$$\frac{\partial w}{\partial x} + a\, w = 0.$$

La résolution de (1) se ramène donc à celle de l'un des systèmes

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 s}{\partial y\, \partial z} + ds = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + a\, u = s, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial x} + a\, w = 0, \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + du = w. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, le changement de fonction défini par (2) nous ramène à intégrer

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} + d\, U = \varphi\,(y, z),$$

(φ, fonction arbitraire).

La difficulté du problème réside donc dans l'intégration d'une équation de Moutard avec ou sans second membre en y et z.

On voit immédiatement que, si u est une solution de (1), il en est de même de s et w.

2^me Cas : $H = X(x)$. — *a*) L'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z}(Xv) + dXv - X\, u = 0,$$

ou, X n'étant pas identiquement nul,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} + d\, v - u = 0,$$

d'où

$$u = \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} + dv,$$

1. Voir J. Le Roux. Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes (Thèse, 1895).

et, par dérivation,

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + d\,\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + d\,\frac{\partial v}{\partial x} - (\mathrm{X}v - a\,u) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + d\,\frac{\partial v}{\partial x} - \mathrm{X}v + a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + dv\right) = 0,$$

ou

$$\mathcal{F}(v) = 0.$$

v est donc solution de (1) en même temps que u.

b) L'équation (1) peut également s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial w}{\partial x} + a\,w - \mathrm{X}u = 0.$$

On en déduit par dérivation

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + a\,\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} - \mathrm{X}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + a\,\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} - \mathrm{X}\,(w - d\,u) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + a\,\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} - \mathrm{X}w + d\left(\frac{\partial w}{\partial x} + a\,w\right) = 0,$$

ou

$$\mathcal{F}(w) = 0.$$

w est donc solution de (1) en même temps que u.

Du rapprochement de ces résultats nous déduisons que v est lié à u comme u l'est à w. Si donc nous partons d'une solution u de l'équation (1), nous pouvons en déduire une nouvelle solution v, puis, si nous appliquons à v la transformation qui fait passer de u à w, nous retrouvons la solution u d'où nous sommes partis.

De même, nous pourrons d'une solution u de (1) passer à une autre solution w et obtenir à nouveau u en appliquant à w la transformation qui nous a fait passer de u à v.

La connaissance d'une intégrale u_0 de (1) nous permettra donc, en réitérant un certain nombre de fois soit la première, soit la seconde de ces transformations, d'en déduire de nouvelles intégrales que nous appellerons

$u_1, u_2, \ldots$, et $u_{-1}, u_{-2}, \ldots$, et ces intégrales formeront une suite linéaire

$$\ldots\ u_{-2}\ u_{-1}\ u_0\ u_1\ u_2\ \ldots,$$

vérifiant à la fois les relations

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathrm{H}u_i = \dfrac{\partial u_{i-1}}{\partial x} + a\, u_{i-1}, \\ u_i = \dfrac{\partial^2 u_{i+1}}{\partial y\, \partial z} + d\, u_{i+1}. \end{cases}$$

En général, on obtiendra ainsi, à partir de u_0, une infinité d'intégrales nouvelles. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, il faudrait qu'une de ces intégrales soit égale à ku_0, k étant une constante.

Bornons-nous au cas simple $u_{-1} = ku_0$, ou, en suprimant les indices,

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + (d - k)\, u = 0.$$

On en déduit par dérivation

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + (d - k)\, \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

d'où

$$a\, \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + k\, \frac{\partial u}{\partial x} + (a\, d - \mathrm{X})\, u = 0,$$

ou

$$(5)\qquad k\, \frac{\partial u}{\partial x} + (k\, a - \mathrm{X})\, u = 0.$$

L'intégrale u d'où l'on est parti devrait donc être solution commune à (4) et (5). L'équation (5) a une intégrale de la forme $\varphi(x)\, \psi(y, z)$, ψ étant une fonction arbitraire; on en déduit immédiatement, en portant dans l'équation (4), que ψ vérifie cette équation.

En définitive, pour obtenir une intégrale u de (1) vérifiant $w = ku$, on prend une intégrale en y, z de l'équation de Moutard (4) et on la mulplie par une intégrale en x de l'équation du premier ordre (5).

Nous obtenons ainsi pour l'équation proposée une intégrale de la forme

$$(6)\qquad u = u_1(x)\, u_2(y, z).$$

Cherchons tous les cas où l'équation admet une intégrale de cette forme. On voit immédiatement que l'on doit avoir

$$\frac{u'_1}{u_1} + a = \frac{\mathrm{H}u_2}{\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y\, \partial z} + du_2}.$$

Donc H doit être de la forme X (x) Y (y, z).

H étant de cette forme, il existe une infinité d'intégrales de (1) de la forme (6), u_1 et u_2 étant donnés par les équations

$$\frac{u'_1}{u_1} = \frac{X}{k} - a$$

et

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y \, \partial z} + (d - kY) \, u_2 = 0,$$

où k est une constante quelconque.

Le cas $H = O$ se traite en supposant nulle l'une des fonctions X, Y, et en prenant arbitraire l'autre.

3me cas : $H = H(y, z)$. — D'après les résultats établis dans le cas général, H ne dépendant pas de x, s et t sont intégrales de (1) en même temps que u et l'on a

$$Hu = \frac{\partial^2 s}{\partial y \, \partial z} + ds, \qquad u = \frac{\partial t}{\partial x} + a \, t.$$

s est donc lié à u comme u l'est à t. On en déduit, comme précédemment, la possibilité de former, à partir d'une intégrale u_0 de (1), une suite, en général infinie des deux côtés, d'intégrales nouvelles

$$\ldots \; u_{-2} \; u_{-1} \; u_0 \; u_1 \; u_2 \; \ldots$$

vérifiant les relations

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} Hu_i &= \frac{\partial^2 u_{i-1}}{\partial y \, \partial z} + du_{i-1}, \\ u_i &= \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x} + a \, u_{i+1}. \end{aligned} \right.$$

4me cas : $H = C^{te}$. — On a, à un coefficient numérique près,

$$s = v, \qquad t = w.$$

Des résultats précédents, on déduit que, si u_0 est une intégrale de (1), s, t, v, w l'étant aussi, on peut former une suite, en général infinie dans les deux sens,

$$\ldots \; u_{-2} \; u_{-1} \; u_0 \; u_1 \; u_2 \; \ldots$$

vérifiant les deux groupes de relations (3) et (7) qui, ici, coïncident.

5me Cas : Cas général. a) La relation

$$s = \frac{\partial u}{\partial x} + a \, u$$

donne par dérivation

$$\frac{\partial^2 s}{\partial y \, \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \, \partial y \, \partial z} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial z},$$

ou

$$\frac{\partial^2 s}{\partial y \, \partial z} + d \frac{\partial u}{\partial x} + (a \, d - H) \, u = 0,$$

c'est-à-dire
$$\frac{\partial^2 s}{\partial y\, \partial z} + ds - Hu = 0.$$
On en tire
$$\frac{\partial^3 s}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + d\frac{\partial s}{\partial x} - H\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} u = 0.$$
Or
$$u = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial y\, \partial z} + ds\right),$$
d'où
$$\frac{\partial u}{\partial x} = s - \frac{a}{H}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial y\, \partial z} + ds\right).$$
On a donc
$$\frac{\partial^3 s}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + d\frac{\partial s}{\partial x} - Hs + a\left(\frac{\partial^2 s}{\partial y\, \partial z} + ds\right) - \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial y\, \partial z} + ds\right) = 0,$$
ou
$$\frac{\partial^3 s}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + \left(a - \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 s}{\partial y\, \partial z} + d\frac{\partial s}{\partial x} + \left(g - \frac{d}{H}\frac{\partial H}{\partial x}\right) s = 0,$$
équation de la forme
$$\frac{\partial^3 s}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a_1(x, y, z)\frac{\partial^2 s}{\partial y\, \partial z} + d\frac{\partial s}{\partial x} + g_1(x, y, z)\, s = 0,$$
les coefficients vérifiant
$$H_1 = a_1 d - g_1 = H.$$

Si $\dfrac{1}{H}\dfrac{\partial H}{\partial x}$ ne dépend que de x, c'est-à-dire si l'on a
$$H = X(x)\, Y(y, z),$$
l'équation en s est de même forme exactement que l'équation donnée en u, le coefficient de $\dfrac{\partial^2 s}{\partial y\, \partial z}$ ne dépendant alors que de x.

H et d apparaissent donc encore, dans tous les cas, comme des invariants relativement au changement de fonction qui consiste à prendre s comme nouvelle fonction inconnue.

Supposons H de la forme précédente. Posons successivement
$$s_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + a\, u, \quad s_2 = \frac{\partial s_1}{\partial x} + a\, s_1, \ \ldots\ldots\ldots, \quad s_n = \frac{\partial s_{n-1}}{\partial x} + a\, s_{n-1}, \ \ldots\ldots$$
s_1, s_2, ... sont solutions des équations
$$\frac{\partial^3 s_1}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a_1\frac{\partial^2 s_1}{\partial y\, \partial z} + d\frac{\partial s_1}{\partial x} + g_1 s_1 = 0,$$
$$\frac{\partial^3 s_2}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a_2\frac{\partial^2 s_2}{\partial y\, \partial z} + d\frac{\partial s_2}{\partial x} + g_2 s_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a, avec
$$X' = \frac{dX}{dx},$$

$$\left\{\begin{aligned} a_1 &= a - \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x} = a - \frac{X'}{X}, \\ a_2 &= a_1 - \frac{X'}{X} = a - 2\frac{X'}{X}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= a - n\frac{X'}{X}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

et, de même,
$$g_n = g - n\frac{X'}{X}.$$

s_n sera donc solution de l'équation
$$\frac{\partial^3 s_n}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \left(a - n\frac{X'}{X}\right)\frac{\partial^2 s_n}{\partial y\,\partial z} + d\frac{\partial s_n}{\partial x} + \left(g - n\frac{X'}{X}\right)s_n = 0.$$

La relation générale
$$\frac{\partial^2 s_i}{\partial y\,\partial z} + d\,s_i = H\,s_{i-1}$$
montre que s_{i-1} est une fonction linéaire et homogène de s_i et de sa dérivée seconde par rapport à y et z. On en déduit de proche en proche que *u est une fonction linéaire et homogène de s_n et de ses dérivées par rapport à y et z jusqu'à l'ordre $2n$.*

b) L'équation (1), écrite sous la forme
$$\frac{\partial}{\partial x}(Ht) + a\,Ht - Hu = 0,$$
donne
$$u = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x}(Ht) + at$$
et, par dérivation,
$$\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z}(Ht) + a\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}(Ht) - \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}(Hu) = 0.$$

En développant les dérivées et remplaçant u par sa valeur, il vient, toutes réductions faites,
$$\begin{aligned} &H\frac{\partial^3 t}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \left(\frac{\partial H}{\partial x} + a\,H\right)\frac{\partial^2 t}{\partial y\,\partial z} + d\,H\frac{\partial t}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial z} - \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial z}\right)\frac{\partial t}{\partial y} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y}\right)\frac{\partial t}{\partial z} + \left[\frac{\partial^3 H}{\partial x\,\partial y\,\partial z} - \frac{1}{H}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial^2 H}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial x}\right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{2}{H^2}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial z} - H^2 + d\left(\frac{\partial H}{\partial x} + a\,H\right)\right]t = 0. \end{aligned}$$

Cette équation se simplifie si l'on a

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial z} - \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial z} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial z}\right) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \varphi(y, z)\, H, \qquad \frac{\partial H}{\partial z} = \psi(y, z)\, H.$$

On en déduit facilement que H est de la forme

$$H = X(x)\, Y(y, z).$$

L'équation en t devient alors

$$\frac{\partial^3 t}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \left(a + \frac{X'}{X}\right)\frac{\partial^2 t}{\partial y\,\partial z} + d\frac{\partial t}{\partial x} + \left(g + d\,\frac{X'}{X}\right) t = 0,$$

équation de même forme que (1) et de mêmes invariants.

Deuxième Partie.

Formes particulières de l'équation.

5. Cherchons si, après multiplication par un facteur $\mu(x, y, z)$ à déterminer, l'équation donnée peut prendre la forme simple

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y\, \partial z} = 0,$$

Φ et Ψ étant des fonctions linéaires de u et de ses dérivées jusqu'au second ordre.

Posons

$$\Phi \equiv \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma \frac{\partial u}{\partial y} + \delta \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon u,$$

$$\Psi \equiv \qquad \beta' \frac{\partial u}{\partial x} \qquad + \varepsilon' u,$$

α, β, γ, δ, ε, β', ε' étant des fonctions de x, y, z et les termes manquants dans Ψ étant manifestement nuls.

On devra avoir identiquement

$$\mu \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + d \frac{\partial u}{\partial x} + g u \right) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y\, \partial z},$$

ce qui donne les conditions

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu = \alpha - \beta', & \mu d = \varepsilon + \dfrac{\partial \beta}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 \beta'}{\partial y\, \partial z}, \\ \mu a = \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} - \varepsilon', & \mu g = \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 \varepsilon'}{\partial y\, \partial z}, \\ \multicolumn{2}{l}{0 = \beta = \gamma - \dfrac{\partial \beta'}{\partial z} = \delta - \dfrac{\partial \beta'}{\partial y} = \dfrac{\partial \gamma}{\partial x} - \dfrac{\partial \varepsilon'}{\partial z} = \dfrac{\partial \delta}{\partial x} - \dfrac{\partial \varepsilon'}{\partial y}.} \end{array} \right.$$

On tire de là

$$\gamma = \frac{\partial \beta'}{\partial z},$$

d'où

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial^2 \beta'}{\partial x\, \partial z},$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \beta'}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial \varepsilon'}{\partial z} = 0,$$

d'où, ρ étant une fonction de x et y seulement,

$$\frac{\partial \beta'}{\partial x} - \varepsilon' = \rho(x, y).$$

De même, on a successivement

$$\delta = \frac{\partial \beta'}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \beta'}{\partial x \, \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \beta'}{\partial x \, \partial y} - \frac{\partial \varepsilon'}{\partial y} = 0,$$

et

$$\frac{\partial \beta'}{\partial x} - \varepsilon' = \sigma (x, z).$$

Par comparaison, on voit que ρ et σ coïncident et sont une même fonction de x seul, que nous désignerons par τ (x). On a donc

$$\varepsilon' = \frac{\partial \beta'}{\partial x} - \tau (x)$$

et

$$\frac{\partial^2 \varepsilon'}{\partial y \, \partial z} = \frac{\partial^3 \beta'}{\partial x \, \partial y \, \partial z}.$$

On en déduit

$$\mu \, g = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon - \frac{\partial^2 \beta'}{\partial y \, \partial z} \right) = d \, \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

d'où

$$\mu = \varphi (y, z) \, e^{\frac{1}{d} \int_{x_0}^{x} g dx}.$$

On prend pour limite inférieure de l'intégrale une valeur arbitraire x_0 qui pourrait même être une fonction de y et z, mais cela n'offre pas d'intérêt à cause de l'arbitraire de la fonction φ.

D'autre part, on a

$$\mu \, a = \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta'}{\partial x} + \tau$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} + \tau$$

$$= \frac{\mu \, g}{d} + \tau,$$

ou

$$\frac{\mathrm{H}}{d} \mu = \tau,$$

c'est-à-dire
$$\frac{\varphi(y, z)}{d} e^{\frac{1}{d}\int_{x_0}^{x} g\,dx} = \tau.$$

Posons
$$\varphi(y, z) = \frac{d}{\psi(y, z)}$$

et
$$H\, e^{\frac{1}{d}\int_{x_0}^{x} g\,dx} = K.$$

L'égalité précédente donne alors
$$K = \tau(x)\, \psi(y, z).$$

Nous voyons donc que la décomposition étudiée n'est possible que si une égalité de cette forme est vérifiée.

Cette condition étant supposée remplie, τ est déterminé à un facteur près, et μ est donné par la formule
$$\mu = \frac{\tau d}{H}.$$

Donnons-nous alors β' arbitrairement. Nous aurons
$$\left\{\begin{aligned} &\alpha = \mu + \beta' = \frac{\tau d}{H} + \beta', \\ &\gamma = \frac{\partial \beta'}{\partial z}, \quad \delta = \frac{\partial \beta'}{\partial y}, \\ &\varepsilon = \mu d + \frac{\partial^2 \beta'}{\partial y\, \partial z} = \frac{\tau d^2}{H} + \frac{\partial^2 \beta'}{\partial y\, \partial z}, \\ &\varepsilon' = \frac{\partial \beta'}{\partial x} - \tau. \end{aligned}\right.$$

Si l'on prend, en particulier, $\beta' = 0$, on obtient
$$\alpha = \frac{\tau d}{H}, \quad \gamma = \delta = 0, \quad \varepsilon = \frac{\tau d^2}{H}, \quad \varepsilon' = -\tau,$$

d'où la solution particulière
$$\Phi_1 = \frac{\tau d}{H}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + d u\right) = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + d u\right),$$
$$\Psi_1 = -\tau u.$$

D'une façon générale, on aura, μ étant d'ailleurs bien déterminé (à un facteur près),
$$\Phi = \Phi_1 + \beta' \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial \beta'}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta'}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 \beta'}{\partial y\, \partial z} u,$$
$$\Psi = \Psi_1 + \beta' \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial x} u,$$

c'est-à-dire

$$\Phi = \Phi_1 + \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z} (\beta' u),$$

$$\Psi = \Psi_1 + \frac{\partial}{\partial x} (\beta' u).$$

6. *Examen de quelques cas particuliers.* — Nous venons de voir que la condition de possibilité de cette décomposition était que l'on ait

$$H\, e^{\frac{1}{d}\int_{x_0}^{x} g dx} = \tau(x)\, \psi(y, z).$$

a) Cette condition est vérifiée en particulier si g est de la forme $df(x)$; on en déduit

$$H = d(a - f)$$

et

$$H\, e^{\frac{1}{d}\int_{x_0}^{x} g dx} = d(a - f)\, e^{\int_{x_0}^{x} f dx}.$$

L'équation admet alors une intégrale particulière ne dépendant que de x; désignons-la par $\lambda(x)$. Si l'on pose

$$u = \lambda(x)\, U,$$

l'équation qui donne U prend la forme simple

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + \left(a + \frac{\lambda'}{\lambda}\right) \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} + d\, \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

avec

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -\frac{g}{d} = -f(x),$$

que l'on peut écrire sous la forme décomposée

$$\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z}\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \left(a + \frac{\lambda'}{\lambda}\right) U\right] + \frac{\partial}{\partial x}(d\, U) = 0.$$

b) Si $H = 0$, on a, avec φ fonction arbitraire de y et z,

$$\tau = 0, \quad \mu = \varphi(y, z)\, e^{\int_{x_0}^{x} a dx}.$$

Faisant alors $\beta' = 0$ et remarquant l'égalité

$$\frac{\tau}{H} = \frac{\mu}{d},$$

on obtient

$$\Phi_1 = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + d\, u\right) = \varphi(y, z)\, e^{\int_{x_0}^{x} a dx} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + d\, u\right),$$

$$\Psi_1 = 0,$$

d'où l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi\, e^{\int_{x_0}^{x} a dx}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + d\, u\right)\right] = 0,$$

ou, plus simplement,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{\int_{x_0}^{x} a dx}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + d\, u\right)\right] = 0.$$

La résolution de (1) se ramène à celle de l'équation du second ordre

$$e^{\int_{x_0}^{x} a dx}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + d\, u\right) = \lambda\,(y, z),$$

λ étant une fonction arbitraire de y et z. Nous retombons sur un résultat déjà obtenu.

Remarque : Le calcul précédent n'est valable que si d est différent de zéro. Pour $d = 0$, on a $\mu g = 0$, et, pour que μ soit différent de zéro, il faut avoir $g = 0$; on retombe sur le cas $H = 0$ avec $d = g = 0$. L'équation s'écrit alors

$$\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + a\, u\right) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\, u = \psi\,(x, y) + \chi\,(x, z)\,;$$

u s'obtient immédiatement.

7. Une autre décomposition du premier membre de (1) est possible, faisant intervenir une intégrale v de l'équation adjointe

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x\, \partial y\, \partial z} - a\,\frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} + d\,\frac{\partial v}{\partial x} - g\, v = 0.$$

On peut, d'après M. Bianchi [1], poser, $\mathcal{F}(u)$ représentant toujours le premier membre de (1),

$$3\, v\, \mathcal{F}\,(u) \equiv \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

1. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore (Atti della Reale Academia dei Lincei, 5me série, 1895, p. 89).

avec, λ, μ, ν étant trois fonctions quelconques de x, y, z,

$$\left\{\begin{aligned}
X &= v\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z} + 3\mu\right)\frac{\partial u}{\partial y} - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} + 3\nu\right)\frac{\partial u}{\partial z} + \left(3\,dv + \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + 3\frac{\partial \mu}{\partial y} - 3\frac{\partial \nu}{\partial z}\right)u,\\
Y &= v\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z} + 3\mu\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left[\frac{1}{2}\left(3\,av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + 3\lambda\right]\frac{\partial u}{\partial z} + \left(-\frac{3}{2}a\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x} + 3\frac{\partial \lambda}{\partial z} - 3\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)u,\\
Z &= v\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} + 3\nu\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left[\frac{1}{2}\left(3av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) - 3\lambda\right]\frac{\partial u}{\partial y} + \left(-\frac{3}{2}a\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + 3\frac{\partial \nu}{\partial x} - 3\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)u.
\end{aligned}\right.$$

Malgré la symétrie de ces fonctions X, Y, Z, nous ne nous attacherons pas à cette forme de décomposition, qui fournit, même en faisant $\lambda = \mu = \nu = 0$, des expressions compliquées.

Il est facile de voir que, v représentant encore une intégrale de l'équation adjointe, on a l'identité

$$v\,\mathcal{F}(u) \equiv \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z},$$

avec

$$L = v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + d\,u\right), \qquad M = \left(av - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad N = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - a\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)u.$$

Cherchons si l'un des trois termes de l'identité précédente peut être identiquement nul.

L ne peut être identiquement nul.

M pourra être nul si l'équation adjointe admet une intégrale annulant $av - \dfrac{\partial v}{\partial x}$. On a alors également $N = 0$. On voit immédiatement que l'on doit avoir pour cela $H = 0$, et l'on retombe sur un résultat déjà vu : l'intégration de (1) se ramène à celle de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + d\,u = e^{-\int_{x_0}^{x} a\,dx}\,\varphi(y, z),$$

où φ est arbitraire.

Enfin, cherchons à annuler N, M n'étant pas nul, c'est-à-dire cherchons s'il existe une intégrale commune aux deux équations

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial z} - a\,\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + d\,\frac{\partial v}{\partial x} - g\,v = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - a\,\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Une telle intégrale vérifie

$$d\,\frac{\partial v}{\partial x} - g\,v = 0$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial x} - a\, v = \varphi(x, z),$$

d'où

$$v = -\frac{d\, \varphi(x, z)}{\mathrm{H}}.$$

On a donc

$$\varphi(x, z) = d\, \frac{\varphi \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} - \mathrm{H} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\mathrm{H}^2} + \frac{a\, d\, \varphi}{\mathrm{H}},$$

ou

$$\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\varphi} = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}}{\mathrm{H}} + a - \frac{\mathrm{H}}{d}.$$

On en déduit que $\dfrac{1}{\mathrm{H}} \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} - \dfrac{\mathrm{H}}{d}$ ne doit pas dépendre de y.

Supposons cette condition vérifiée. On a alors, avec $\mathrm{H}_0 = \mathrm{H}(x_0, y, z)$,

$$\log \varphi = \log \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}_0} + \int_{x_0}^{x} \left(a - \frac{\mathrm{H}}{d}\right) d\, x + \log \psi(z)$$

$$= \log \left[\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}_0} \psi(z)\right] + \frac{1}{d} \int_{x_0}^{x} g dx,$$

ou, en ne considérant que des intégrales indéfinies,

$$\log \varphi = \log [\mathrm{H}\, \psi(z)] + \frac{1}{d} \int g dx.$$

Comme nous cherchons seulement une solution particulière v du système précédent, nous pouvons d'ailleurs donner à $\psi(z)$ telle valeur que nous voulons et, en particulier, simplifier la formule précédente en faisant $\psi = 1$.

Nous prendrons donc

$$\varphi(x, z) = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}_0} \psi(z)\, e^{\frac{1}{d} \int_{x_0}^{x} g dx}$$

ou

$$\varphi(x, z) = \mathrm{H}\, \psi(z)\, e^{\frac{1}{d} \int g dx}.$$

En définitive, *supposant que la quantité*

$$\frac{1}{\mathrm{H}} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} - \frac{\mathrm{H}}{d}$$

ne dépende pas de y, *posons*

$$v = -\frac{d}{H_0}\psi(z)\, e^{\frac{1}{d}\int_{x_0}^{x} g dx}.$$

L'équation (1) sera équivalente à

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} = 0,$$

avec

$$L = v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + d\, u\right), \qquad M = \left(a\, v - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z} = -\varphi(x, z)\frac{\partial u}{\partial z}.$$

8. Si l'on a, de plus,

$$\frac{H}{H_0} e^{\frac{1}{d}\int_{x_0}^{x} g dx} = \tau(x)\,\psi_1(z) \qquad \text{ou} \qquad H e^{\frac{1}{d}\int g dx} = \tau(x)\,\psi_1(z),$$

ce qui donne

$$\varphi(x, z) = \tau(x)\,\chi(z),$$

on pourra mettre également l'équation donnée sous la forme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y\, \partial z} = 0.$$

On vérifie que, dans ce cas, on a

$$\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{H}{d} = \frac{\tau'(x)}{\tau(x)} - a,$$

quantité qui est bien indépendante de y.

9. Dans le cas général, l'équation donnée ayant été mise sous la forme

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} = 0,$$

cela implique qu'il existe une fonction $\theta(x, y, z)$ vérifiant les deux relations

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= M = -\varphi(x, z)\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= -L = \frac{d\,\varphi(x, z)}{H}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + d\, u\right). \end{aligned}\right.$$

On en déduit

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + d\, u &= \frac{L}{v} = -\frac{1}{v}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{H}{d\varphi}\frac{\partial \theta}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{M}{\varphi} = -\frac{1}{\varphi}\frac{\partial \theta}{\partial x}. \end{aligned}\right.$$

L'équation donnée, qui peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + d\,u\right) + a\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + g\,u = 0,$$

donne donc

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H}{d\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) - a\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + g\,u = 0,$$

d'où

$$(9)\qquad u = -\frac{1}{g}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H}{d\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) - a\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\right] = \frac{1}{d\,\varphi}\left(\frac{H}{d}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\right)$$

et

$$(10)\qquad \frac{1}{\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{d\varphi}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} + \frac{H}{d^2\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) = 0.$$

Nous arrivons donc au résultat suivant :

Si la quantité $\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{H}{d}$ *ne dépend pas de* y, *on détermine une fonction*

$$\varphi(x, z) = \frac{H}{H_0}\,\psi(z)\,e^{\frac{1}{d}\int_{x_0}^{x} g dx} \qquad \text{ou} \qquad \varphi(x, z) = H\,\psi(z)\,e^{\frac{1}{d}\int g dx},$$

ψ (z) *étant arbitraire.*

La connaissance d'une intégrale θ (x, y, z) *de l'équation (10) fournit une intégrale de l'équation (1) au moyen de (9).*

Réciproquement, de toute intégrale de (1) on déduit une infinité d'intégrales de (10) par l'intermédiaire des équations (8).

10. Il est facile de voir quelle est la forme de H pour que la transformation précédente soit possible. On a une égalité de la forme

$$\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{H}{d} = \psi_1(x, z),$$

ou

$$\frac{1}{H^2}\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{1}{d} = \frac{\psi_1}{H}.$$

Posant

$$\frac{1}{H} = H',$$

on en déduit H', puis

$$H = \frac{\dfrac{\partial \Psi(x, z)}{\partial x}}{-\dfrac{\Psi}{d} + Y(y, z)},$$

où l'on a posé

$$e^{\int_{x_0}^{x} \psi_1 \, dx} = \frac{\partial \Psi(x, z)}{\partial x}, \qquad \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} \psi_1 dx} \cdot dx = \Psi.$$

Si Ψ ne dépend que de x, la décomposition précédente est possible de deux façons, et l'on a

$$v\,\mathcal{F}(u) \equiv \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M_1}{\partial z},$$

avec

$$M_1 = \left(a\,v - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y} = -\varphi_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}.$$

On a donc

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(x, z)\frac{\partial u}{\partial z}\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}\right],$$

d'où

$$\varphi(x, z) = \varphi_1(x, y).$$

Donc φ ne dépend que de x et l'on a

$$v = -\frac{d\,\varphi}{H} = -d\,e^{\frac{1}{d}\int g dx}.$$

La condition pour que cette double décomposition soit possible est qu'on ait une égalité de la forme

$$H\,[Y_1(y, z) - \Psi(x)] = d\,\Psi''(x).$$

Ceci constitue une relation entre les deux invariants H et d.

Prenant

$$\varphi(x) = H\,e^{\frac{1}{d}\int g dx},$$

l'équation (10) se simplifie et donne

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{d}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x\,\partial y} + \frac{H}{d^2}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = 0.$$

Elle ne dépend plus de φ.

11. **Remarque :** Il semblerait que la propriété précédente puisse permettre, à partir d'une intégrale particulière u_0 de (1), d'obtenir de cette équation une infinité d'autres intégrales. En effet, partons d'une solution u_0 de (1) ; on en déduit une intégrale θ_0 de (10) qui, à son tour, par (9) nous donnera une intégrale u_1. Et l'on pourrait continuer l'application de ce procédé.

En réalité, des relations

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial x} = - \varphi(x, z) \frac{\partial u_0}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial y} = \frac{d\varphi(x, z)}{H} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \ \partial z} + d u_0 \right),$$

$$u_1 = \frac{1}{d\varphi} \left(\frac{H}{d} \frac{\partial\theta_0}{\partial y} + \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y \ \partial z} \right),$$

on tire immédiatement $u_1 = u_0$, et l'on n'obtient donc pas de nouvelle intégrale.

TROISIÈME PARTIE.

Problèmes sur la détermination des intégrales.

12. **Problème I.** — *Chercher pour l'équation*

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = \mathrm{F}(x, y, z)$$

une intégrale se réduisant à

$$\begin{aligned} &f_1(y, z) \text{ pour } x = x_0, \\ &f_2(z, x) \text{ pour } y = y_0, \\ &f_3(x, y) \text{ pour } z = z_0, \end{aligned}$$

avec les conditions

$$f_1(y_0, z) = f_2(z, x_0), \qquad f_1(y, z_0) = f_3(x_0, y), \qquad f_2(z_0, x) = f_3(x, y_0),$$
$$f_1(y_0, z_0) = f_2(z_0, x_0) = f_3(x_0, y_0) = u(x_0, y_0, z_0).$$

On obtient immédiatement

$$u = f_1(y, z) + f_2(z, x) + f_3(x, y) - f_1(y, z_0) - f_2(z, x_0) - f_3(x, y_0)$$
$$+ u(x_0, y_0, z_0) + \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \int_{z_0}^{z} \mathrm{F}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

13. **Problème II.** — *Traiter le même problème pour l'équation (1).*

Soit u_0 l'intégrale de

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = 0,$$

vérifiant les conditions initiales données.

Soient ensuite u_1, u_2, ... de nouvelles fonctions s'annulant pour $x = x_0$, quels que soient y et z, pour $y = y_0$, quels que soient z et x, pour $z = z_0$, quels que soient x et y, et vérifiant les équations

$$\frac{\partial^3 u_1}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a \frac{\partial^2 u_0}{\partial y\, \partial z} + d \frac{\partial u_0}{\partial x} + g u_0 = 0,$$

$$\frac{\partial^3 u_2}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a \frac{\partial^2 u_1}{\partial y\, \partial z} + d \frac{\partial u_1}{\partial x} + g\, u_1 = 0,$$

....

$$\frac{\partial^3 u_n}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y\, \partial z} + d \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + g\, u_{n-1} = 0,$$

....

On aura, pour $n > 0$, des formules telles que

$$u_n = - \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \int_{z_0}^{z} \left(a \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y\, \partial z} + d \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + g u_{n-1} \right) dx\, dy\, dz.$$

La série $$u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$$
représente l'intégrale cherchée.

Si l'on suppose
$$|x - x_0| < \alpha, \qquad |y - y_0| < \beta, \qquad |z - z_0| < \gamma.$$
et si, dans ce domaine, on a
$$\left| a \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y\, \partial z} + d \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + g u_{n-1} \right| < \mathrm{M},$$
on aura
$$|u_n| = \left| \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \int_{z_0}^{z} \left(a \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y\, \partial z} + d \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + g u_{n-1} \right) dx\, dy\, dz \right| < \mathrm{M}\, \alpha\beta\gamma,$$
$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| < \mathrm{M}\, \beta\gamma, \quad \left| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right| < \mathrm{M}\, \gamma\alpha, \quad \left| \frac{\partial u_n}{\partial z} \right| < \mathrm{M}\, \alpha\beta, \quad \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial y\, \partial z} \right| < \mathrm{M}\alpha,$$
d'où
$$\left| a \frac{\partial^2 u_n}{\partial y\, \partial z} + d \frac{\partial u_n}{\partial x} + g u_n \right| < \mathrm{M}\, (\mathrm{A}\, \alpha + \mathrm{D}\, \beta\gamma + \mathrm{G}\, \alpha\beta\gamma),$$
A, D, G étant les maxima des modules de a, d, g dans le domaine considéré. On en déduit
$$|u_{n+1}| < \mathrm{M}\, (\mathrm{A}\alpha + \mathrm{D}\beta\gamma + \mathrm{G}\alpha\beta\gamma)\ \alpha\beta\gamma.$$
La convergence de la série qui fournit l'intégrale est donc assurée si l'on a
$$\mathrm{A}\alpha + \mathrm{D}\beta\gamma + \mathrm{G}\alpha\beta\gamma < 1,$$
et l'intégrale obtenue est holomorphe si les coefficients a, d, g le sont, ainsi que les conditions initiales imposées à u.

14. **Problème III.** — *Chercher pour l'équation*
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = \mathrm{F}\,(x, y, z)$$
une intégrale qui prenne, sur une surface donnée, des valeurs données à l'avance ainsi que ses dérivées premières et secondes.

Nous supposerons que les valeurs données sur la surface soient compatibles et que la surface ne soit coupée qu'en un point par une parallèle aux axes.

Menons alors par un point M (x_0, y_0, z_0) des plans parallèles aux plans de coordonnées; ils déterminent avec la surface un tétraèdre à base curviligne PQR, P, Q, R étant les points où les parallèles aux axes issues de M coupent respectivement la surface, et l'on a, les intégrales étant étendues au volume de ce tétraèdre,
$$\int\!\!\int\!\!\int \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}\, dx\, dy\, dz = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{F}\,(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$
ou
$$\int\!\!\int \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}\, dy\, dz = \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{F}\,(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$
la première intégrale étant étendue à la surface limitant le volume.

Si l'on désigne par σ la portion de surface servant de base au tétraèdre, l'intégrale double du premier membre est égale à

$$\iint_{(MQR)} \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}\, dy\, dz + \iint_{(\sigma)} \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}\, dy\, dz.$$

Supposons, pour fixer les idées, que tous les points appartenant au volume du tétraèdre aient des ordonnées y et des cotes z vérifiant les inégalités

$$Y \leqslant y \leqslant y_0, \qquad z \leqslant z_0.$$

D'après l'hypothèse faite sur la surface donnée, Y n'est autre que l'ordonnée de Q.

On a alors

$$\iint_{(MQR)} \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}\, dy\, dz = \int_{Y}^{y_0} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y, z_0)\, dy - \int_{(RQ)} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y, z)\, dy$$
$$= u(x_0, y_0, z_0) - u(x_0, Y, z_0) - \int_{(RQ)} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y, z)\, dy.$$

On a donc

$$u(x_0, y_0\, z_0) - u(x_0, Y, z_0) - \int_{(RQ)} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y, z)\, dy$$
$$+ \iint_{(\sigma)} \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}(x, y, z)\, dy\, dz = \iiint F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Cette relation permet de calculer, grâce aux données, la valeur de $u(x_0, y_0, z_0)$.

15. **Problème IV.** — *Traiter le problème précédent pour l'équation (1).*

Appelons u_0 l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = 0$$

qui vérifie les conditions imposées et formons la suite d'équations

$$\frac{\partial^3 u_i}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a\, \frac{\partial^2 u_{i-1}}{\partial y\, \partial z} + d\, \frac{\partial u_{i-1}}{\partial x} + g u_{i-1} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots),$$

dont nous prendrons les intégrales s'annulant, ainsi que leurs dérivées premières et secondes, sur la surface donnée.

La somme

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

représente l'intégrale cherchée.

On a

$$u_n = - \iiint \left(a\, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y\, \partial z} + d\, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + g u_{n-1} \right) dx\, dy\, dz,$$

l'intégrale étant étendue au tétraèdre défini dans le problème précédent ayant pour sommet le point (x, y, z).

Considérons le domaine défini par la condition que, pour tout point lui appartenant, le tétraèdre correspondant soit tel que les distances de deux quelconques des points contenus à son intérieur soient inférieures à une longueur fixe L, et supposons que pour tout point de ce domaine on ait

$$\left| \frac{\partial^3 u_n}{\partial x\, \partial y\, \partial z} \right| < M$$

et

$$|a| < A, \qquad |d| < D, \qquad |g| < G.$$

On aura également

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial y\, \partial z} \right| < ML, \qquad \left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| < ML^2, \quad |u_n| < ML^3,$$

d'où

$$\left| \frac{\partial^3 u_{n+1}}{\partial x\, \partial y\, \partial z} \right| < ML(A + DL + GL^2),$$

d'où

$$|u_{n+1}| < ML^4 (A + DL + GL^2).$$

La série précédente sera donc convergente si l'on a

$$L (A + DL + GL^2) < 1.$$

Nous aurons à faire l'application de ce théorème dans le cas où u et toutes ses dérivées premières et secondes sont nulles sur la surface; u est alors identiquement nul.

16. **Problème V.** — *Chercher pour l'équation (1) une intégrale qui, sur le cylindre* $y = f(x)$, *se réduise à une fonction donnée* $U(x, z)$.

Appelons C le cylindre donné. Pour un déplacement sur ce cylindre, on a, f' désignant la dérivée de f par rapport à x,

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + f' \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial z} dz,$$

d'où les deux relations

$$\frac{\partial u}{\partial x} + f' \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

La dérivée $\frac{\partial u}{\partial z}$ est donc bien déterminée sur le cylindre et l'on peut se donner arbitrairement l'une des deux autres dérivées partielles. Prenons par exemple, sur C,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = V_1 (x, z).$$

On en déduit

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{f'} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - V_1 \right).$$

On a ensuite, toujours sur C,

$$\left\{\begin{aligned}
&d\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f'\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)dx+\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}dz=\frac{\partial V_1}{\partial x}dx+\frac{\partial V_1}{\partial z}dz,\\
&d\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+f'\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dx+\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}dz=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{f'}\left(\frac{\partial U}{\partial x}-V_1\right)\right]dx+\frac{1}{f'}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}-V_1\right)dz,\\
&d\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}+f'\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}\right)dx+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz=\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}dx+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}dz,
\end{aligned}\right.$$

d'où, d'abord, les valeurs sur le cylindre des dérivées contenant la variable z :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial V_1}{\partial z},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=\frac{1}{f'}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}-V_1\right),\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

puis les relations

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f'\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial V_1}{\partial x},\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+f'\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{f'}\left(\frac{\partial U}{\partial x}-V_1\right)\right],\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+f'\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z},
\end{aligned}\right.$$

dont la dernière se réduit à une identité en vertu des valeurs précédentes et les deux premières fournissent deux des dérivées secondes par rapport à x et y, la troisième étant choisie arbitrairement.

Donnons-nous par exemple, sur le cylindre,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=V_2(x,z),$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{f'}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}-V_2\right),\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{f'}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{f'}\left(\frac{\partial U}{\partial x}-V_1\right)\right]-\frac{1}{f'^2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}-V_2\right).
\end{aligned}$$

La considération des valeurs des différentielles des dérivées secondes sur C donne ensuite les valeurs des dérivées contenant la variable z. On obtient, en particulier,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=\frac{1}{f'}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}-V_2\right).$$

L'équation (1) donne alors

$$\frac{1}{f'}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}-V_2\right)+\frac{a}{f'}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}-V_1\right)+d\,V_1+gU=0,$$

d'où la valeur de $\frac{\partial V_2}{\partial z}$. V_2 ne peut donc pas être prise quelconque, mais est déterminée à une fonction additive de x près.

On a ensuite trois relations, conséquences des valeurs précédentes, et trois relations entre les quatre dérivées $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$, ce qui permet d'en calculer trois en fonction de la quatrième. Soit, par exemple,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = V_3\,(x, z).$$

Mais V_3 ne peut être prise arbitrairement. En effet, l'équation (1), dérivée par rapport à x, donne

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\, \partial y\; \partial z} + a\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\;\partial z} + a'\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\; \partial z} + d\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\,(gu) = 0,$$

ce qui fournira, une fois calculée $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\, \partial y\, \partial z}$ par le même procédé, la dérivée $\frac{\partial V_3}{\partial z}$.

D'une façon générale, supposons que nous connaissions les $T_p = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$ dérivées d'ordre p de l'intégrale de (1) sur le cylindre $y = f\,(x)$, ainsi que les dérivées d'ordres moindres. Soit

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^i\; \partial y^j\; \partial z^k} = \varphi^p_{ijk}\,(x, z).$$

On a d'abord les relations

$$\frac{\partial^{p+1} u}{\partial x^i\; \partial y^j\; \partial z^{k+1}} = \frac{\partial \varphi^p_{ijk}}{\partial z},$$

qui fournissent toutes les dérivées d'ordre $p+1$ contenant z, puis les relations

$$\frac{\partial^{p+1} u}{\partial x^{i+1}\; \partial y^j\; \partial z^k} + f'\,\frac{\partial^{p+1} u}{\partial x^i\;\partial y^{j+1}\;\partial z^k} = \frac{\partial \varphi^p_{ijk}}{\partial x}.$$

Parmi ces T_p dernières relations, celles pour lesquelles on a $k \geqslant 1$ sont des conséquences des précédentes; le nombre de ces dernières est égal à la somme des nombres des dérivées de u par rapport aux deux variables x et y d'ordres $p-1$, $p-2$, ..., 0, c'est-à-dire à

$$p + (p-1) + (p-2) + \ldots\ldots + 1 = \frac{p\,(p+1)}{2}.$$

Il reste donc en fait

$$T_p - \frac{p\,(p+1)}{2} = p + 1$$

relations pour déterminer les $p+2$ dérivées d'ordre $p+1$ par rapport à x et y. Celles-ci s'exprimeront donc toutes en fonction de

$$\frac{\partial^{p+1} u}{\partial x^{p+1}} = V_{p+1}(x, z).$$

Mais on ne peut se donner arbitrairement cette dérivée.

On a, en effet,

$$d\frac{\partial^p u}{\partial x^p} = \left(\frac{\partial^{p+1} u}{\partial x^{p+1}} + f'\frac{\partial^{p+1} u}{\partial x^p \partial y}\right) dx + \frac{\partial^{p+1} u}{\partial x^p \partial z} dz = \frac{\partial V_p}{\partial x} dx + \frac{\partial V_p}{\partial z} dz,$$

d'où

$$\frac{\partial^{p+1} u}{\partial x^p \partial z} = \frac{\partial V_p}{\partial z}$$

et

$$\frac{\partial^{p+1} u}{\partial x^{p+1}} + f'\frac{\partial^{p+1} u}{\partial x^p \partial y} = \frac{\partial V}{\partial x},$$

d'où

$$\frac{\partial^{p+1} u}{\partial x^p \partial y} = \frac{1}{f'}\left(\frac{\partial V_p}{\partial x} - V_{p+1}\right).$$

On en déduit

$$d\frac{\partial^{p+1} u}{\partial x^p \partial y} = \left(\frac{\partial^{p+2} u}{\partial x^{p+1} \partial y} + f'\frac{\partial^{p+2} u}{\partial x^p \partial y^2}\right) dx + \frac{\partial^{p+2} u}{\partial x^p \partial y \partial z} dz$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{f'}\left(\frac{\partial V_p}{\partial x} - V_{p+1}\right)\right] dx + \frac{1}{f'}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_p}{\partial x} - V_{p+1}\right),$$

d'où

$$\frac{\partial^{p+2} u}{\partial x^p \partial y \partial z} = \frac{1}{f'}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_p}{\partial x} - V_{p+1}\right).$$

Mais, d'autre part, l'équation (1), dérivée $p-1$ fois par rapport à x, donne

$$\frac{\partial^{p+2} u}{\partial x^p \partial y \partial z} + \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}}\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right) + d\frac{\partial^p u}{\partial x^p} + \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}}(gu) = 0.$$

Cette relation, où tout le reste est connu, fournit la dérivée $\frac{\partial V_{p+1}}{\partial z}$, donc V_{p+1} par une quadrature, cette fonction n'étant déterminée qu'à une fonction additive de x près.

La donnée des fonctions $U(x, z)$ et $V_1(x, z)$ auxquelles se réduisent u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sur le cylindre $y = f(x)$ permet en définitive de calculer avec un certain arbitraire, relatif aux dérivées $\frac{\partial^i u}{\partial x^i}$, toutes les dérivées partielles de u sur le cylindre. On pourra donc, à partir d'un point déterminé de ce cylindre, obtenir un développement en série fournissant une intégrale satisfaisant aux conditions imposées. La convergence de ce développement va résulter de l'application de la méthode des approximations successives.

17. Pour cela, nous commencerons par traiter le problème précédent pour l'équation

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \, \partial y \, \partial z} = F(x, y, z),$$

c'est-à-dire que nous allons chercher pour cette équation une intégrale telle que, sur le cylindre C, on ait les relations

$$u = U(x, z), \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = V(x, z),$$

U et V étant deux fonctions données de x et z. (On a écrit V pour V_1 mis précédemment.)

Si l'on pose, pour simplifier,

$$\mathfrak{F}(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \int_{z_0}^{z} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

x_0, y_0, z_0 étant des constantes quelconques que nous supposerons dans la suite représenter les coordonnées d'un point de C, et si l'on désigne par φ, ψ, χ, trois fonctions arbitraires de leurs arguments, on voit facilement que l'intégrale générale de l'équation donnée s'écrit

$$u = \varphi(y, z) + \psi(z, x) + \chi(x, y) + \mathfrak{F}(x, y, z).$$

Les conditions imposées se traduisent par les relations

$$\left\{ \begin{aligned} & \varphi(f(x), z) + \psi(z, x) + \chi(x, f(x)) = U(x, z) - \mathfrak{F}(x, f(x), z), \\ & \frac{\partial \psi}{\partial x}(z, x) + \frac{\partial \chi}{\partial x}(x, f(x)) = V(x, z) - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}(x, f(x), z). \end{aligned} \right.$$

Donnons-nous arbitrairement la fonction $\chi(x, y)$. La seconde équation donne alors $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(z, x)$, d'où ψ par une quadrature.

En reportant dans la première équation, il vient

$$\varphi(f(x), z) = U(x, z) - \mathfrak{F}(x, f(x), z) - \psi(z, x) - \chi(x, f(x)).$$

Si l'équation de C peut se mettre également sous la forme $x = g(y)$, on prendra

$$\varphi(y, z) = U(g(y), z) - \mathfrak{F}(g(y), y, z) - \psi(z, g(y)) - \chi(g(y), y).$$

Le problème proposé admet donc une infinité de solutions données par

$$\begin{aligned} u = {} & U(g(y), z) - \mathfrak{F}(g(y), y, z) - \psi(z, g(y)) - \chi(g(y), y) \\ & + \psi(z, x) + \chi(x, y) + \mathfrak{F}(x, y, z). \end{aligned}$$

18. Revenons alors à l'équation (1). Pour démontrer la convergence du développement obtenu, considérons la suite illimitée d'équations

$$\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 u_1}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\, \partial z} + d\frac{\partial u_0}{\partial x} + g u_0 = 0,$$

. . . .

$$\frac{\partial^3 u_n}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y\, \partial z} + d\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + g u_{n-1} = 0,$$

. . . .

Nous prendrons pour la première équation une intégrale satisfaisant aux conditions données, pour les suivantes des intégrales s'annulant, ainsi que leur dérivée première par rapport à x, sur le cylindre C.

Si nous admettons la convergence de la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

on voit qu'elle représente une intégrale de l'équation (1) vérifiant les conditions données.

Posons alors

$$F_n(x, y, z) = -\left(a\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y\, \partial z} + d\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + g u_{n-1}\right),$$

de sorte que les équations précédentes sont de la forme

$$\frac{\partial^3 u_n}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = F_n(x, y, z).$$

(x_0, y_0, z_0) étant un point de C, posons également

$$\mathfrak{F}_n(x, y, z) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} F_n(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Considérons un domaine entourant le point (x_0, y_0, z_0) et tel qu'en tout point à son intérieur on ait $|a|, |d|, |g| < K$.

On a, pour $n > 0$,

$$u_n = [\mathfrak{F}_n(x, y, z) - \mathfrak{F}_n(g(y), y, z)] + [\psi_n(z, x) - \psi_n(z, g(y))] + [\chi_n(x, y) - \chi_n(g(y), y)],$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{F}_n}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial \psi_n}{\partial x}(z, x) + \frac{\partial \chi_n}{\partial x}(x, y)$$

$$= \left[\frac{\partial \mathfrak{F}_n}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial \mathfrak{F}_n}{\partial x}(x, f(x), z)\right] + \left[\frac{\partial \chi_n}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \chi_n}{\partial x}(x, f(x))\right],$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_n}{\partial y\, \partial z}(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \mathfrak{F}_n}{\partial x}(g(y), y, z)\, g'(y) + \frac{\partial \mathfrak{F}_n}{\partial y}(g(y), y, z)\right] - \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial z\, \partial x}(z, g(y))\, g'(y)$$

$$= \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{F}_n}{\partial y\, \partial z}(x, y, z) - \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_n}{\partial y\, \partial z}(g(y), y, z)\right] - g'(y)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \mathfrak{F}_n}{\partial x}(g(y), y, z) + \frac{\partial \psi_n}{\partial x}(z, g(y))\right]$$

$$= \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_n}{\partial y\, \partial z}(x, y, z) - \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_n}{\partial y\, \partial z}(g(y), y, z),$$

ce que l'on peut écrire également

$$u_n = (\mathcal{F}_n + \psi_n + \chi_n)_{(x,y,z)} - (\mathcal{F}_n + \psi_n + \chi_n)_{(g(y),y,z)},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{F}_n + \chi_n)_{(x,y,z)} - \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{F}_n + \chi_n)_{(x,f(x),z)},$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_n}{\partial y\, \partial z}(x,y,z) - \frac{\partial^2 \mathcal{F}_n}{\partial y\, \partial z}(g(y), y, z).$$

Si (f) désigne la valeur d'une fonction f prise en un point du domaine précédent, nous aurons

$$u_n = [x - g(y)]\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_n + \psi_n + \chi_n)}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = [y - f(x)]\left(\frac{\partial^2(\mathcal{F}_n + \psi_n + \chi_n)}{\partial x\, \partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial y\, \partial z} = [x - g(y)]\left(\frac{\partial^3(\mathcal{F}_n + \psi_n + \chi_n)}{\partial x\, \partial y\, \partial z}\right).$$

Supposons qu'à l'intérieur de ce domaine on ait

$$\left|\frac{\partial^3 \mathcal{F}_n}{\partial x\, \partial y\, \partial z}\right| = \left| a\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y\, \partial z} + d\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + g u_{n-1}\right| < \mathrm{M},$$

ou

$$\left|\frac{\partial^3(\mathcal{F}_n + \psi_n + \chi_n)}{\partial x\, \partial y\, \partial z}\right| < \mathrm{M},$$

d'où

$$\left|\frac{\partial^2(\mathcal{F}_n + \psi_n + \chi_n)}{\partial x\, \partial y}\right| < \mathrm{M}\,|z - z_0|, \quad \left|\frac{\partial(\mathcal{F}_n + \psi_n + \chi_n)}{\partial x}\right| < \mathrm{M}|y - y_0||z - z_0|.$$

On en déduira

$$|u_n| < \mathrm{M}\,|x - g(y)|\,|y - y_0|\,|z - z_0|,$$

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| < \mathrm{M}\,|y - f(x)|\,|z - z_0|,$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial y\, \partial z}\right| < \mathrm{M}\,|x - g(y)|,$$

d'où

$$|\mathrm{F}_{n+1}| < \mathrm{M}\,\mathrm{K}\,[|x - g(y)| + |y - f(x)|\,|z - z_0| + |x - g(y)|\,|y - y_0|\,|z - z_0|].$$

Si l'on prend le domaine autour du point (x_0, y_0, z_0) de dimensions suffisamment petites, le produit du crochet du second membre par K sera inférieur à un nombre $\alpha < 1$, et l'on aura

$$|\mathrm{F}_{n+1}| < \mathrm{M}\,\alpha.$$

On en déduit immédiatement la convergence uniforme de la série $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\partial^3 u_p}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$, donc de la série donnant $\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$.

On démontre alors aisément la convergence uniforme de la série fournissant u. On a, en effet, pour deux indices successifs n et $n+1$, les inégalités

$$|u_n| < \mathrm{M}\,|x - g(y)|\,|y - y_0|\,|z - z_0|,$$
$$|u_{n+1}| < \mathrm{M}\,\alpha\,|x - g(y)|\,|y - y_0|\,|z - z_0|,$$

d'où

$$\left|\sum_{p=n}^{\infty} u_p\right| < \mathrm{M}\,(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots.),$$

ce qui démontre la convergence de la série qui donne u.

Même démonstration pour les dérivées d'ordres *un* et *deux*.

Nous avons donc démontré le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Il existe une infinité d'intégrales de l'équation (1) se réduisant, sur un cylindre à génératrices parallèles à l'axe des z, ainsi que leur dérivée première par rapport à x, à des fonctions données de x et z.*

19. Remarquons que la valeur trouvée pour la dérivée $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}$ sur C est fonction de V_1. Au lieu de se donner V_1, on aurait donc pu se donner la fonction de x et z à laquelle doit se réduire cette dérivée seconde sur C; la valeur de $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ s'en serait suivie. On arrive donc à la conclusion suivante :

THÉORÈME. — *Il existe une infinité d'intégrales de l'équation (1) se réduisant, sur un cylindre à génératrices parallèles à l'axe des z, ainsi que leur dérivée seconde par rapport à y et z, à des fonctions données de x et z.*

Ce théorème est d'ailleurs passible d'une démonstration directe tout à fait analogue à la précédente. Indiquons seulement le résultat suivant.

Si l'on cherche pour l'équation

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \mathrm{F}(x, y, z)$$

une intégrale se réduisant sur C à une fonction donnée $\mathrm{U}(x, z)$, la dérivée $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}$ se réduisant à $\mathrm{W}(x, z)$, on a, avec les notations précédentes,

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi(f(x), z) + \psi(z, x) + \chi(x, f(x)) + \mathcal{F}(x, f(x), z) = \mathrm{U}(x, z), \\ &\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial z}(f(x), z) + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y\,\partial z}(x, f(x), z) = \mathrm{W}(x, z), \end{aligned}\right.$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial z}(y, z) = \mathrm{W}(g(y), z) - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y\,\partial z}(g(y), y, z), \\ &\varphi(f(x), z) + \psi(z, x) + \chi(x, f(x)) = \mathrm{U}(x, z) - \mathcal{F}(x, f(x), z). \end{aligned}\right.$$

$\chi(x, y)$ étant choisie arbitrairement, la première de ces relations donne $\varphi(y, z)$, puis la seconde donne $\psi(z, x)$. On obtient ainsi

$$u = \varphi(y, z) + \mathrm{U}(x, z) - \mathcal{F}(x, f(x), z) - \varphi(f(x), z) - \chi(x, f(x)) + \chi(x, y) + \mathcal{F}(x, y, z).$$

20. **Conséquence.** — Il résulte de ce qui précède qu'*il existe une infinité d'intégrales de l'équation (1) qui vérifient, sur le cylindre C, l'une des relations*

$$\mathcal{F}'_x(u) = 0$$

ou

$$\mathcal{F}''_{yz}(u) = 0.$$

21. **Problème VI.** — *Chercher pour l'équation (1) une intégrale qui, sur le cylindre $z = f(y)$, se réduise à une fonction donnée $U(x, y)$.*

La méthode précédente permet de montrer que l'on obtient une infinité d'intégrales de (1) pour lesquelles on se donne arbitrairement, non seulemnt u, mais encore l'une des dérivées $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ou $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, sur le cylindre.

Si l'on pose, sur le cylindre,

$$\frac{\partial^p u}{\partial y^p} = V_p(x, y),$$

V_p vérifie une équation de la forme

$$\frac{\partial V_p}{\partial x} + A_p(x, y)\, V_p + B_p(x, y) = 0.$$

22. **Problème VII.** — *Existe-t-il des solutions particulières de l'équation (1) dépendant d'une constante arbitraire α, $u(x, y, z, \alpha)$, telles que l'intégrale $\int f(\alpha)\, u(x, y, z, \alpha)\, d\alpha$ soit encore une solution de (1), lorsque les limites de l'intégrale sont des fonctions convenables de x, y, z, la fonction $f(\alpha)$ étant arbitraire ?*

Ce problème, que M. Le Roux a résolu pour l'équation linéaire du second ordre, est passible d'une même méthode pour l'équation que nous considérons.

Nous supposerons que seule la limite supérieure de l'intégrale soit fonction de x, y, z, le cas où la limite inférieure le serait également se traitant de façon analogue.

Considérons donc l'intégrale

$$U = \int_{\alpha_0}^{\theta} f(\alpha)\, u(x, y, z, \alpha)\, d\alpha,$$

θ étant une fonction de x, y, z à déterminer de façon que U soit encore intégrale de (1).

Nous voulons avoir

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a\,\frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} + d\,\frac{\partial U}{\partial x} + gU = 0,$$

ou

$$
\begin{aligned}
0 = & \int_{\alpha_0}^{'} f(\alpha)\, \mathfrak{F}(u)\, d\alpha + f(\theta)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + \ldots + \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial\theta} + \ldots \right) + f(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} \\
& + \left[f(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + f'(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial z} \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \ldots + \left[f(\theta)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial^2\theta}{\partial y\, \partial z} + \ldots + a \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial\,\cdot} \right) + 2f'(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial z} \right] \frac{\partial u}{\partial\theta} \\
& + \left[f(\theta)\left(\frac{\partial^3\theta}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + a \frac{\partial^2\theta}{\partial y\, \partial z} + d \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) + f'(\theta)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial^2\theta}{\partial y\, \partial z} + \ldots + a \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) + f''(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial z} \right] u(x, y, z, \theta),
\end{aligned}
$$

les points remplaçant chaque fois dans cette égalité deux termes non écrits qui se déduisent du précédent par permutation circulaire des lettres x, y, z.

L'intégrale du second membre est nulle et il reste une égalité de la forme

$$0 = \mathrm{A} f(\theta) + \mathrm{B} f'(\theta) + \mathrm{C} f''(\theta),$$

qui doit avoir lieu quelle que soit la fonction $f(\theta)$. On doit donc avoir $\mathrm{C} = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial z} u(x, y, z, \theta) = 0.$$

On peut satisfaire à cette égalité de plusieurs manières :

1° Supposons $u(x, y, z, \theta) = 0$, avec $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} \dfrac{\partial\theta}{\partial y} \dfrac{\partial\theta}{\partial z} \neq 0$.

On a alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial\theta} \frac{\partial^2\theta}{\partial y\, \partial z} = 0,$$

....

On en déduit

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} = & \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial\theta} \frac{\partial^2\theta}{\partial z\, \partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial\theta} \\
& + a\left(\frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial\theta} \right),
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{B} = \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

$\mathrm{B} = 0$ donne, en vertu de l'hypothèse $\dfrac{\partial\theta}{\partial y} \dfrac{\partial\theta}{\partial z} \neq 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0,$$

et ensuite

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\, \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta\, \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta\, \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0,$$

d'où

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

et les inégalités analogues.

Posons alors

$$\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial \theta}}{\dfrac{\partial \theta}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial \theta}}{\dfrac{\partial \theta}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial \theta}}{\dfrac{\partial \theta}{\partial z}} = \lambda.$$

On a ensuite

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 = 0.$$

Posons

$$\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial \theta}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}}{\dfrac{\partial \theta}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}}{\dfrac{\partial \theta}{\partial z}} = \mu.$$

Les relations précédentes prennent la forme

$$\mu\frac{\partial \theta}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 = \mu\frac{\partial \theta}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 = \mu\frac{\partial \theta}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 = 0,$$

ou, $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}\ \dfrac{\partial \theta}{\partial y}\ \dfrac{\partial \theta}{\partial z}$ étant $\neq 0$,

$$\mu + \lambda\frac{\partial \theta}{\partial x} = \mu + \lambda\frac{\partial \theta}{\partial y} = \mu + \lambda\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

Laissant de côté le cas où l'on aurait

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial z},$$

(qui conduit d'ailleurs aux mêmes résultats, comme on le constate par la considération de A), on en déduit

$$\lambda = \mu = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial \theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial \theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \theta} = 0.$$

De $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$ on tire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

x, y, z jouant des rôles symétriques dans les calculs, on voit donc qu'en définitive, sur la surface $\theta(x, y, z) = \alpha$, u, ainsi que toutes ses dérivées premières et secondes, sont nulles. La fonction u se réduit donc identiquement à zéro et il en est de même de U.

2° Supposons maintenant que l'on ait

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}\,\frac{\partial \theta}{\partial y}\,\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

Le cas $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$ étant écarté, et, d'autre part, y et z jouant des rôles analogues, l'hypothèse se subdivise en les deux cas suivants :

$$a)\quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \neq 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0;$$

$$b)\quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} \neq 0.$$

a) Dans le premier cas, on a

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y\,\partial z} = 0,$$

et le coefficient B de $f'(\theta)$ se réduit à

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}\,\frac{\partial \theta}{\partial z}\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Son annulation entraîne soit $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$, soit $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

L'hypothèse $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$ donne pour le coefficient A la valeur

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + du\right).$$

Nous arrivons donc à cette conclusion : θ ne dépendant que de x, sur le plan $\theta(x) = \alpha$, l'intégrale u sera solution de

$$\mathcal{F}'_x(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + du = 0.$$

L'hypothèse $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0,$$

d'où

$$A = \frac{\partial \theta}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + du\right).$$

Sur le cylindre $\theta(x, z) = \alpha$, nous devons donc avoir

$$\mathcal{F}'_x(u) = 0.$$

b) Dans le second cas, on a

$$B = \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + a\, u\right).$$

On doit donc avoir soit $\dfrac{\partial \theta}{\partial z} = 0$, soit $\dfrac{\partial u}{\partial x} + a\, u = 0$.

L'hypothèse $\dfrac{\partial \theta}{\partial z} = 0$ donne

$$A = \frac{\partial \theta}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} + a\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

ce qui entraîne la condition : sur le plan $\theta(y) = \alpha$, l'intégrale u doit vérifier

$$\mathcal{F}'_y(u) = 0,$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\, u = \varphi(x),$$

φ étant une fonction de x seul

L'hypothèse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\, u = 0$$

se traduit par la conclusion suivante : sur le cylindre $\theta(y, z) = \alpha$, la fonction u vérifie

$$\mathcal{F}''_{yz}(u) = 0.$$

3° Supposons enfin que l'on ait à la fois

$$u(x, y, z, \theta) = 0$$

et

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

θ ne se réduisant pas à une constante et y et z jouant des rôles analogues, nous avons deux cas à considérer :

$$a) \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \neq 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0;$$

$$b) \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} \neq 0.$$

a) Dans le premier cas, on a

$$B = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Si l'on suppose $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$, on a, en vertu de

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

d'où

$$A = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial z}.$$

L'annulation de ce coefficient donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial z} = 0.$$

Donc, sur le plan $\theta(x) = \alpha$, u vérifie à la fois

$$u = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial z} = 0.$$

Si l'on suppose $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, on a encore

$$A = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial z}.$$

Donc, sur le cylindre $\theta(x, z) = \alpha$, u vérifie

$$u = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial z} = 0.$$

b) Dans le second cas, on a

$$B = \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Si l'on suppose $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$, on a

$$A = \frac{\partial \theta}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \, \partial x} + a \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Donc, sur le plan $\theta(y) = \alpha$, on a

$$u = 0, \qquad \mathcal{F}'_y(u) = 0,$$

ou

$$u = 0, \qquad \mathcal{F}''_{yz}(u) = 0.$$

Si l'on suppose $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, on a

$$A = \frac{\partial \theta}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Ou bien $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$, et alors, sur le plan $\theta(y) = \alpha$, u vérifie

$$u = 0, \; \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

ou bien, sur le cylindre $\theta(y, z) = \alpha$, on a à la fois

$$u = 0, \qquad \mathcal{F}'_z(u) = 0.$$

En définitive, nous voyons que *pour l'existence d'une intégrale U, il faut que la fonction de départ u (x, y, z, α) vérifie, sur certains cylindres à génératrices parallèles aux axes, des relations de l'une des formes*

$$\mathcal{F}'_x(u) = 0, \qquad \mathcal{F}'_y(u) = 0, \qquad \mathcal{F}'_z(u) = 0, \qquad \mathcal{F}''_{yz}(u) = \varphi(x).$$

L'existence de pareilles intégrales résulte des théorèmes qui précèdent.