

P. GAUTIER

**Contribution à l'étude des champs magnétiques de l'optique électronique**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4<sup>e</sup> série*, tome 21 (1957), p. 89-183

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1957\\_4\\_21\\_\\_89\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1957_4_21__89_0)

© Université Paul Sabatier, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Contribution à l'étude des champs magnétiques de l'optique électronique

par P. GAUTIER

---

## INTRODUCTION

Ce travail est d'abord la réalisation d'un souhait : mesurer le champ sur l'axe d'une lentille électronique magnétique réelle par lecture directe du cadran d'un voltmètre.

L'idée de départ est très simple : une bobine minuscule vibrant parallèlement à son axe avec une très petite amplitude, est le siège d'une force électromotrice induite proportionnelle à la dérivée première de l'induction sur l'axe, au point où se trouve la bobine. En substituant à la petite bobine un solénoïde très allongé on obtient une force électromotrice proportionnelle à l'induction à l'une de ses extrémités.

On verra ci-dessous comment le montage expérimental a été mis au point. Tout mon effort s'est porté au début vers la construction de l'appareil de mesure. Son étude approfondie, alors que je ne pensais qu'aux lentilles de révolution, m'a conduit à aborder des problèmes de mesure de champ dans des cas plus étendus : cela m'a suggéré d'autres possibilités d'application de la méthode ou d'autres réalisations (Appendice I). Ces recherches ont peu à peu empiété sur le domaine des lentilles proprement dites : d'où le titre donné à ces pages.

Le premier chapitre pose le problème de la mesure des champs dans les lentilles puissantes, met en lumière les idées directrices qui sont à la base de la méthode de mesure proposée et en indique le principe.

Dans le deuxième chapitre je montre que le flux à travers des bobines exploratrices de dimensions finies peut être proportionnel à l'induction magnétique ou à ses dérivées en un point, avec une très bonne approximation, si les bobinages sont convenablement construits.

Les résultats obtenus sont appliqués à une méthode d'induction de conception nouvelle, décrite au chapitre III.

Au chapitre IV sont donnés les ordres de grandeur des erreurs systématiques dues aux dimensions des bobines exploratrices, à l'amplitude finie des vibrations mécaniques imposées à ces dernières, etc...

On trouvera au chapitre V quelques études sur les lentilles de révolution, qui confirment des résultats obtenus par ailleurs. M'étant volontairement

limité, en effet, aux lentilles non saturées j'ai pu retrouver, avec quelques précisions complémentaires, ce que donnaient soit le calcul, soit les réseaux de résistances. Il y a également dans ce chapitre un début d'étude des lentilles cylindriques non saturées : la mesure du champ permet en particulier de vérifier avec une bonne précision une formule qui peut s'obtenir par un calcul direct rigoureux.

Les conversations que j'ai eu avec M. le Doyen E. DURAND m'ont beaucoup éclairé; son sens de la rigueur m'a été d'un grand secours et je l'en remercie bien respectueusement. J'ai puisé constamment dans son ouvrage d'Electrostatique et Magnétostatique pour beaucoup de calculs.

Tout le personnel de l'atelier du Laboratoire d'Optique Electronique de Toulouse a bien contribué à la réalisation du montage dont la plupart des conceptions mécaniques sont dues à M. Fabre. M. Do a fait tous les dessins qu'on verra plus loin et M. Sirven a assumé une lourde tâche de préparation matérielle rapide. Les bobines exploratrices de la méthode de mesure sont dues à l'habileté manuelle de M. Durrieu.

J'exprime à tous mes remerciements les plus sincères. Mais les plus respectueusement affectueux vont à M. DUPOUY qui m'a demandé d'entreprendre ce travail et à M. FERT; il a eu l'idée de la bobine longue pour la mesure directe de l'induction et il n'a cessé de me guider, de me conseiller dans tous les domaines.

Je les remercie surtout pour les encouragements qu'ils m'ont donnés, en un moment difficile survenu au milieu de cette étude.

---

## CHAPITRE PREMIER.

### GÉNÉRALITÉS SUR LA MÉTHODE DE MESURE

#### 1. — Position et nature du problème.

1. La figure 1 représente la coupe d'une lentille magnétique par un plan médian.

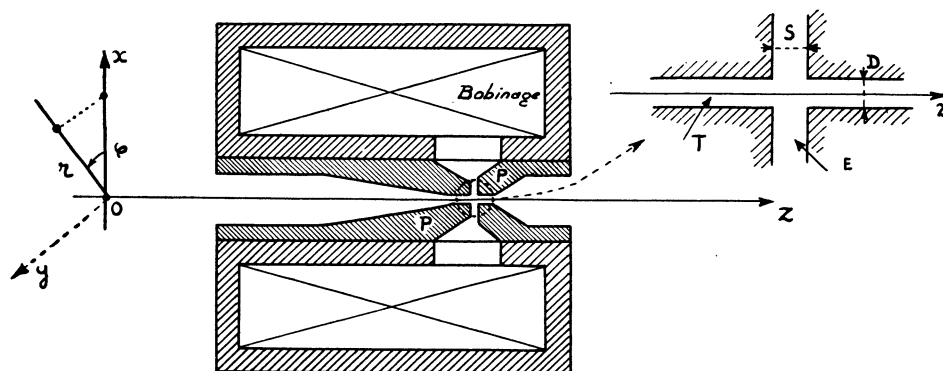


FIG. 1.

Les parties hachurées sont en fer doux. Le champ magnétique qui focalise les électrons est localisé entre les pièces polaires P, dans la région entourée d'un pointillé.

— Dans les *systèmes de révolution*, le trou T a comme section droite un cercle de diamètre D et d'axe Oz : le champ a la symétrie de révolution autour de Oz.

— Dans les *lentilles cylindriques*, la section droite de T est une sorte de fente, parallèle à Oy, et de largeur D petite par rapport à sa longueur : au voisinage de Oz, le champ est indépendant de y.

Les propriétés optiques du premier ordre ainsi que les aberrations chromatiques de ces deux types de lentilles peuvent être calculées si on connaît la répartition de l'induction magnétique B sur l'axe Oz. Pour calculer les aberrations géométriques du troisième ordre, il faut connaître en plus les deux premières dérivées  $B' = dB/dz$  et  $B'' = d^2B/dz^2$ .

D'où le problème : déterminer les trois fonctions B(z), B'(z) et B''(z).

Les méthodes de calcul numérique par itérations successives permettent le calcul de B dans tout l'espace. Mais elles sont longues et, si on ne désire

que le champ sur l'axe, disproportionnées au but à atteindre. En outre, elles n'ont été appliquées jusqu'ici de façon correcte que lorsque la perméabilité du fer peut être considérée comme infinie.

Reste la mesure directe. Il faut alors introduire dans le trou T un corps d'épreuve sur lequel le champ manifestera sa présence par des effets observables (polarisation rotatoire de la lumière, force magnétique, f.é.m. induite, effet Hall, résonance nucléaire, déviation de particules chargées,...). L'emploi d'un modèle agrandi permet d'accéder plus facilement à la région voisine de l'entrefer E, mais il faut construire exprès ce modèle de lentille à grande échelle.

2. — On évite ces inconvénients en effectuant la mesure sur la lentille elle-même, sur un modèle *réel* faisant ou pouvant faire partie d'un instrument d'optique. Mais on rencontre alors des difficultés d'un autre ordre, liées aux dimensions extrêmement réduites du volume dans lequel règne le champ.

Fixons les idées par quelques nombres. J'emprunte l'exemple suivant à Liebmann (1951). Soit une lentille de révolution non saturée (perméabilité du fer pratiquement infinie) dans laquelle la longueur S de l'entrefer est égale à 0,6 fois le diamètre D du trou percé dans les pièces polaires : si R = D/2 désigne le rayon du trou T et B<sub>0</sub> l'induction maximum au centre de l'entrefer, les valeurs maxima des fonctions B' et B'' ont pour ordre de grandeur

$$B'_{\max} \simeq 0,8 \frac{B_0}{R}, \quad B''_{\max} \simeq -2 \frac{B_0}{R^2}.$$

Considérons alors un objectif de microscope électronique courant, pour lequel D = 3 mm : l'induction B<sub>0</sub> peut atteindre 8 000 gauss sans qu'il y ait de saturation sensible du fer. Les valeurs maxima de B' et B'' sont voisines de 3 500 gauss/mm et — 5 000 gauss/mm/mm.

Imaginons que la grandeur mesurée soit le flux à travers une bobine exploratrice d'axe Oz [3]. On veut la fonction B(z), c'est-à-dire le champ en chaque point de l'axe : quelles devront être les dimensions de la bobine à ne pas dépasser pour atteindre une précision fixée d'avance? Cherchons les ordres de grandeur dans les deux cas extrêmes d'une bobine de diamètre infiniment petit (portion de l'axe Oz et de longueur 2 l), et d'une bobine infiniment plate (spire circulaire de surface S = π a<sup>2</sup>) (fig. 2).

La mesure du flux ne permet d'atteindre que les valeurs moyennes

$$\bar{B} = \frac{1}{2l} \int_{z-l}^{z+l} B dz = B(z) + \frac{l^2}{6} B''(z) + \dots,$$

$$\bar{B} = \frac{1}{S} \int_S B_z dS = B(z) - \frac{a^2}{8} B''(z) + \dots$$

Dans l'exemple ci-dessus, les erreurs relatives  $\varepsilon = (\bar{B} - B)/B$  dues aux

dimensions finies des bobines ont pour valeur au centre du champ

$$-\frac{1}{3} \left( \frac{l}{R} \right)^2 \quad \text{et} \quad +\frac{1}{4} \left( \frac{a}{R} \right)^2 .$$

Faisons  $D = 2R = 3 \text{ mm}$ ,  $\varepsilon \leq 1 \%$ . On trouve :

$$l \leq 0,26 \text{ mm}, \quad a \leq 0,3 \text{ mm}.$$

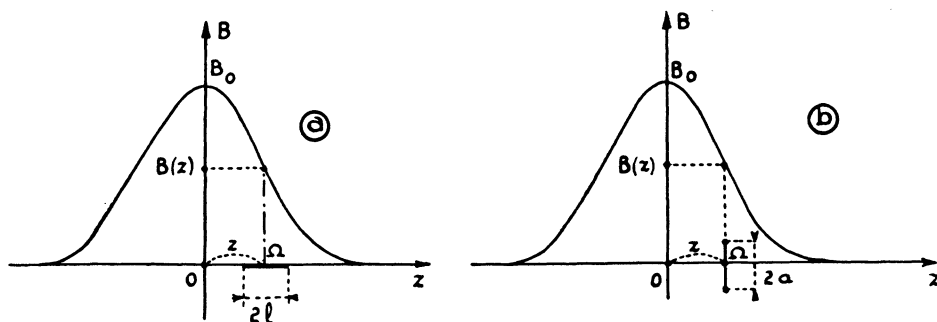


FIG. 2.

3. — Nous proposons une méthode d'induction qui repose sur les deux idées directrices suivantes :

a) Les dimensions finies  $l$  et  $a$  des deux bobines idéales considérées ci-dessus, introduisent dans la mesure du champ en un point des erreurs relatives  $\varepsilon$  de signes contraires.

On conçoit que dans une bobine réelle, qui n'est ni infiniment mince, ni infiniment plate, les effets du diamètre  $2a$  et de la longueur  $2l$  sur l'erreur  $\varepsilon$  puissent s'opposer. En fait, un choix convenable du rapport  $a/l$  (Chapitre II) rend le flux proportionnel à  $B(z)$ , au quatrième ordre près.

On peut alors donner au bobinage un volume suffisant, de l'ordre de quelques  $\text{mm}^3$ , ce qui facilite la construction et augmente *simultanément* la sensibilité et la précision de la mesure en un point.

b) Par hypothèse, le flux  $\Phi$  qui traverse la bobine exploratrice est très petit. Imposons lui une variation *périodique* dans le temps : on obtient une f.é.m. induite alternative  $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$ , facile à amplifier. Son amplitude, directement reliée au champ à mesurer, est d'autant plus grande que la fréquence de variation du flux est plus élevée : d'où une sensibilité accrue et une grande souplesse d'utilisation.

## 2. — La méthode de mesure.

1° *Caractéristiques.* — Nous utilisons la loi de l'induction électromagnétique. Pour obtenir une variation périodique du flux, l'emploi d'une bobine exploratrice *fixe* dans une induction *variable*, la lentille étant alimentée en courant alternatif, ne peut être retenu : l'expérience montre que les courants induits dans les pièces polaires modifient la répartition du champ. Il faut

se placer dans les conditions de l'emploi normal de la lentille et utiliser un circuit induit *mobile* dans une induction *constante*.

Voici les trois caractéristiques originales de la méthode.

a) La f.é.m. alternative est produite en imprimant à la bobine exploratrice une *vibration de petite amplitude parallèle à Oz*.

b) Suivant la forme de cette bobine, on peut mesurer directement l'*induction*  $B(z)$  ou les *dérivées*  $B'(z)$  et  $B''(z)$  avec la même précision.

c) L'amplitude de la force électromotrice est proportionnelle à  $B(z)$ ,  $B'(z)$  ou  $B''(z)$  en un point, au 4<sup>e</sup> ordre près, malgré les *dimensions finies* de la bobine exploratrice.

## 2° Principe.

a) Supposons qu'une bobine exploratrice de surface  $S$ , dont l'axe coïncide avec  $Oz$ , oscille parallèlement à cet axe d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude  $Z$  petite et de pulsation  $\omega$ . Il apparaît dans la bobine une force électromotrice induite de même fréquence.

Si les dimensions de la bobine et l'amplitude de vibration sont très petites devant l'étendue du champ étudié, cette force électromotrice a pour amplitude  $S \omega Z \cdot B'(z)$ . Elle est proportionnelle à la dérivée première  $B' = dB/dz$  de l'induction au point  $\Omega$  de  $Oz$  où se trouve la bobine.

b) Au lieu d'une microbobine, considérons un solénoïde de très petit rayon, dont l'axe coïncide avec  $Oz$ , et qui s'étend de  $-\infty$  jusqu'à un point  $\Omega$  d'abscisse  $z$ . Soient  $S$  la section,  $n$  le nombre de spires par unité de longueur de ce solénoïde.

D'après ce qui précède et dans les mêmes conditions, l'amplitude de la force électromotrice induite a pour valeur

$$n S \omega Z \int_{-\infty}^z B' dz = n S \omega Z \cdot B(z).$$

Elle est proportionnelle à l'induction au point  $\Omega$ .

Voici une démonstration élégante de ce résultat, que nous a indiqué M. DUPUY. On se reportera à la figure 32 du chapitre IV, où le même raisonnement est utilisé pour un but un peu différent. Les dessins (1) et (2) sur cette figure représentent la bobine aux deux extrémités d'une oscillation. A toute la région située à droite de  $PP'$  correspond le même flux : si l'amplitude  $Z$  des vibrations est très petite, la variation de flux correspondant à une demi-période  $\delta t = T/2 = \pi/\omega$  est  $\delta\Phi = 2Z nS B(z)$ .

Elle est la même que si on avait amené, de l'infini jusqu'au point d'abscisse  $z$ , une petite bobine à une seule couche de  $n$  spires par unité de longueur, de

même section que le solénoïde et de longueur  $2Z$ . La force électromotrice sinusoïdale induite pendant une demi-période a donc pour valeur moyenne

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{2ZnSB(z)}{\pi/\omega} = \frac{2}{\pi} \cdot nS\omega Z \cdot B(z),$$

et pour amplitude  $nS\omega ZB(z)$ , valeur calculée ci-dessus.

c) Enfin, si nous associons de part et d'autre du point  $\Omega$  d'abscisse  $z$  deux bobines identiques à celle définie en (a), distantes de  $dz$ , montées en opposition, il existe aux bornes de l'ensemble une différence de potentiel d'amplitude

$$S\omega Z [B'(z + dz) - B'(z)] = S\omega Z \cdot dz \cdot B''(z).$$

*Elle est proportionnelle à la dérivée seconde  $B'' = d^2B/dz^2$  de l'induction au point  $\Omega$ .*

d) Les résultats précédents ne seraient valables en toute rigueur que pour des bobines et une amplitude de vibration infiniment petites. Mais nous avons indiqué ci-dessus et nous montrerons au chapitre suivant qu'il est possible de compenser partiellement l'influence des dimensions finies des bobines. On peut donc les construire assez grandes et le gain de sensibilité qui en résulte permet de réduire l'amplitude des vibrations jusqu'à ce que la valeur finie de celle-ci n'intervienne plus.



## CHAPITRE II.

### CALCUL ET RÉALISATION DES BOBINES EXPLORATRICES

Pour toute mesure de champ magnétique utilisant soit les phénomènes d'induction soit les phénomènes électrodynamiques, la grandeur physique fondamentale est le flux  $\Phi$  à travers une bobine exploratrice, ou bien la dérivée  $\partial\Phi/\partial z$  suivant une certaine direction  $z$ .

Donnons quelques précisions à ce sujet.

— Dans une *méthode d'induction*, on mesure soit  $\Phi$  [3], soit la f.é.m. induite  $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$ .

Dans notre méthode, par exemple, nous imposons aux bobines une vibration de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $Z$  très petite : les harmoniques de la force électromotrice  $\mathcal{E}$  ont des amplitudes négligeables devant celle du terme fondamental qui a pour valeur

$$\mathcal{E}_1 = \omega Z \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (1)$$

— Dans une *méthode électrodynamique*, on mesure la composante  $F_z$  de la force que le champ exerce sur la bobine, parcourue par un courant  $I$  continu ([12], [6, a]) ou alternatif [2, a].

$$F_z = -I \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (2)$$

Dans la première partie de ce chapitre nous allons démontrer que, quelles que soient les symétries du champ à mesurer, il est toujours possible de concevoir des bobinages tels que  $\Phi$  ou  $\partial\Phi/\partial z$  soient proportionnels à  $B$  (ou à ses dérivées) *en un point*, au quatrième ordre près. Ce résultat intéressant, lié au fait que dans le vide l'induction  $\vec{B}$  satisfait à l'équation de Laplace  $\Delta\vec{B} = 0$ , nous fournira des règles pratiques pour la construction des bobines.

Dans la seconde partie, nous traiterons de façon complète le cas des bobines à symétrie de révolution. Elles ont les symétries requises par l'étude générale de la première partie et ce sont les plus faciles à réaliser. En outre, avec elles, le calcul des termes d'ordre supérieur au deuxième dans l'expression du flux n'est pas très compliqué : on peut faire une estimation de l'erreur de mesure due aux dimensions finies du bobinage.

#### A. — ÉTUDE GÉNÉRALE

##### 1. — Expression du flux d'induction $\Phi$ dans une bobine de volume fini. Conditions pour que $\Phi$ soit proportionnel à $B$ en un point.

1° Considérons une bobine, de forme a priori quelconque, occupant un volume  $v$  fini (fig. 3).

Plongeons cette bobine dans un milieu où l'induction magnétique est  $\vec{B}$ , dérivant du potentiel vecteur  $\vec{A}$ . Soit (C) une spire de la bobine; le flux

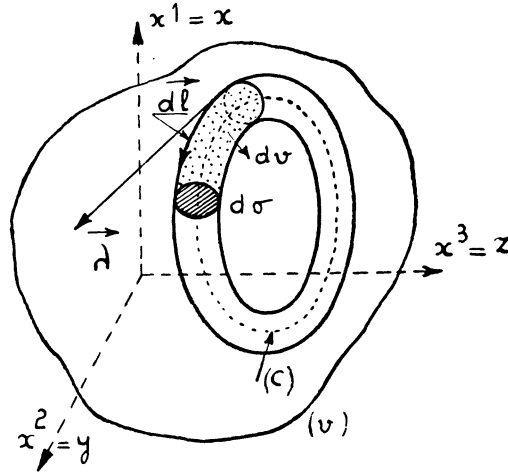


FIG. 3.

à travers cette spire a pour valeur

$$\int_C (\vec{A} \cdot d\vec{l}).$$

Isolons par la pensée tout un tube de spires, de section droite  $d\sigma$ , entourant C. Si  $n^s$ , supposé constant dans tout le volume, est le nombre de spires par unité de surface de la section droite, le flux à travers ce tube est

$$n^s d\sigma \int_C (\vec{A} \cdot d\vec{l}).$$

Pour avoir le flux total à travers la bobine, il faut faire la somme de toutes ces quantités, étendue à tous les tubes (C) en lesquels on peut décomposer le volume ( $v$ ). Or, si l'on désigne par  $\vec{\lambda}$  un vecteur unitaire tangent à  $d\vec{l}$ , on voit sur la figure que

$$d\sigma \cdot d\vec{l} = \vec{\lambda} \cdot d\vec{v}, \quad (3)$$

de sorte que le flux a pour expression générale

$$\Phi = \int_{\text{tous les tubes}} n^s d\sigma \int_C (\vec{A} \cdot d\vec{l}) = n^s \int_v (\vec{\lambda} \cdot \vec{A}) d\vec{v}. \quad (4)$$

2° Nous allons développer  $\Phi$  en série et l'exprimer en fonction de  $\vec{B}$  et de ses dérivées partielles *en un point* O que nous choisissons, arbitrairement à l'intérieur de la bobine, comme origine d'un système de coordonnées cartésiennes  $x, y, z$ .

Substituons dans (4) le développement en série de Taylor <sup>(1)</sup>.

$$A_u = (A_u)_0 + \frac{1}{1!} (x^r \partial_r)_0 A_u + \frac{1}{2!} (x^r x^w \partial_r \partial_w)_0 A_u + \dots \quad (5)$$

On voit apparaître les tenseurs

$$t^{u, v w \dots q} = \int_v \lambda^u x^v x^w \dots x^q. dv. \quad (6)$$

Comme  $\vec{\lambda}$  est tangent aux spires et que  $\text{div } \vec{\lambda} = 0$ , on peut démontrer ([5, a]) que

$$t^{u, v w \dots q} + t^{v, u w \dots q} + \dots + t^{q, v w \dots u} = 0, \quad (7)$$

soit

$$t^u = 0, t^{u, v} = -t^{v, u}, t^{u, v w} = 0, \dots$$

d'où

$$\Phi = n^2 \left[ (\partial_l A_u)_0 t^{u, v} + \frac{1}{3!} (\partial_q \partial_w \partial_v A_u)_0 t^{u, v w q} + \dots \right]. \quad (8)$$

Supposons les spires planes, perpendiculaires à l'axe  $Ox^3 = Oz$  :

$$t^{3, v w \dots q} = 0$$

On tire alors de (7) les égalités suivantes

$$\left. \begin{aligned} t^{u, 3} = t^{u, uu3} = t^{u, uu3} = t^{u, u33} = t^{u, 333} = 0, \quad t^{1,3} = -t^{2,3}, \\ t^{w, uuu} = -3 t^{u, uuw}, \\ t^{u, uww} = -t^{w, wuu}, \\ t^{w, q33} = -t^{q, w33}, \\ 2t^{u, uw3} = -t^{w, 3uu}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Elles permettent de simplifier beaucoup le développement complet de (8) qui est assez long : en effet les produits contractés  $(\partial_r A_u)_0 t^{u, v}$  et  $(\partial_q \partial_w \partial_v A_u)_0 t^{u, v w q}$  comprennent respectivement 2 et 54 termes. Compte tenu de (9) et de  $\partial_4 A_2 = \partial_3 A_1 = B_3$ , on obtient

$$\Phi = n^2 \left\{ t^{2,3} (B_3)_0 + \frac{1}{2} \left[ -t^{1,211} \partial_1^2 + t^{2,122} \partial_2^2 + t^{3,133} \partial_3^2 \right] B_3 + \frac{1}{2} \left[ t^{2,112} \partial_1 \partial_2 + t^{2,113} \partial_1 \partial_3 - t^{1,221} \partial_2 \partial_3 \right] B_3 + \dots \right\}. \quad (10)$$

Pour que  $\Phi$  soit proportionnel à  $B_3 = B_z$  au point 0 au 4<sup>e</sup> ordre près, il faut :

1. que  $t^{2,112} = t^{2,113} = t^{1,223} = 0$ , c'est-à-dire que la bobine soit symétrique par rapport aux plans de coordonnées.

2. que le 2<sup>e</sup> terme de (10) soit nul : c'est possible, puisque  $\vec{B}$  satisfait à l'équation de Laplace, en imposant les conditions générales.

$$\boxed{-t^{1,211} = t^{2,122} = t^{2,133}} \quad (11)$$

(1) On fait usage de la règle de sommation sur les indices muets avec les conventions  $x^u \rightarrow x, y, z; \partial_u \equiv \partial/\partial x^u$ .

Ces deux égalités expriment, comme nous allons le montrer au paragraphe suivant :

- a) que Oz doit être *un axe de symétrie d'ordre 4*,  
 b) qu'il faut respecter *une règle pratique de construction*, lorsque la forme de la bobine a été choisie.

REMARQUES. — a) Si le bobinage ne comporte qu'une seule nappe de spires, on le décompose en bandes de largeur  $ds$  contenant  $nds$  spires (fig. 4) : on a alors  $ds \cdot \vec{dl} = \vec{\lambda} \cdot dS$  et le flux a pour expression

$$\Phi = \int_{\text{Toutes les bandes}} n ds \int_C (\vec{A} \cdot \vec{dl}) = n \int_S (\vec{\lambda} \cdot \vec{A}) dS \quad (12)$$

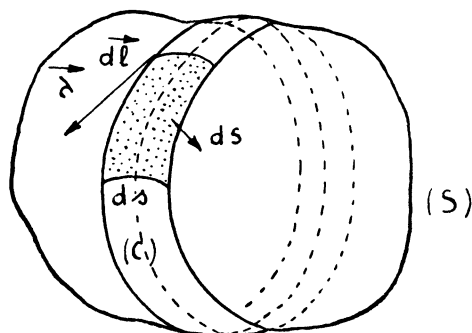


FIG. 4.

Le raisonnement ci-dessus reste valable, à condition de remplacer  $n^2$  par  $n$  (nombre de spires par unité de longueur) et de poser

$$t^{u, v w \dots q} = \int_S \lambda^u x^v x^w \dots x^q \cdot dS, \quad (13)$$

S étant la surface couverte par les spires.

b) Nous avons supposé que  $n$  est assez grand, c'est-à-dire que le fil utilisé est assez fin, à l'échelle du bobinage réalisé, pour que l'hypothèse de continuité qu'impliquent ces calculs soit pratiquement satisfaite. Nous admettrons qu'il en est ainsi dans toute la suite.

## 2. — Interprétation physique du résultat précédent.

### Modes d'utilisation de la bobine correspondante. Exemple.

1° Cherchons la signification des conditions (11). Pour cela introduisons les coordonnées cylindriques  $r, \varphi, z$  ( $\vec{r} = \vec{x} + \vec{y}$ ) et revenons à la définition (6).

L'égalité —  $t^{1211} = t^{2122}$  peut s'écrire

$$\int_V (\vec{\lambda} \cdot \vec{r}) r^2 \sin 2\varphi \cdot dv = 0. \quad (14)$$

Elle signifie que Oz doit être un *axe de symétrie d'ordre 4*.

La deuxième égalité (11), compte tenu de la première, peut se mettre sous la forme

$$\int_v [\vec{\lambda} \times \vec{r}]_z \left( \frac{r^2}{4} - z^2 \right) dv = 0. \quad (15)$$

Elle signifie qu'il faut proportionner de façon convenable les dimensions du bobinage parallèlement et perpendiculairement à l'axe Oz; quand on a choisi la forme de la bobine, elle *fixe une règle de construction*. Nous en donnerons un exemple ci-dessous.

Lorsque la condition (15) est satisfaite.

$$\Phi = k. (B_z)_0 + \text{termes du 4}^\circ \text{ ordre}, \quad (16)$$

la constante  $k$  ayant pour valeur

$$k = -\frac{n^2}{2} \int_v [\vec{\lambda} \times \vec{r}]_z. dv. \quad (17)$$

2° Dans la seconde partie de ce chapitre, nous montrerons que la formule (16) fournit une excellente approximation pour la valeur de  $\Phi$ . Considérons alors une bobine telle qu'il en soit ainsi et voyons comment on peut l'utiliser.

a) *Bobine fixe. Mesure d'une force électromotrice induite.* La bobine étant reliée à un fluxmètre ou à un galvanomètre balistique, inversons le courant dans la bobine excitatrice de l'électroaimant créant le champ : la déviation de l'appareil de mesure est proportionnelle à la composante  $B_z$  de l'induction au point O.

b) *Bobine vibrante. Mesure d'une force électromotrice induite.* Imprimons à la bobine une vibration de très petite amplitude parallèle à une direction donnée  $O\lambda$  : la f.é.m. induite est proportionnelle à la *dérivée première*  $\partial B_z / \partial \lambda$  au point O. On peut ainsi mesurer par exemple la dérivée  $B'(z)$  de l'induction sur l'axe d'une lentille électronique avec une bonne précision, ou bien encore les dérivées  $\partial B_z / \partial x$ ,  $\partial B_z / \partial y$  intéressantes à connaître dans l'étude des champs magnétiques défecteurs (spectrographes de masse, accélérateurs de particules) et des lentilles à focalisation forte.

c) *Bobine parcourue par un courant. Mesure d'une force.* Faisons circuler dans la bobine un courant électrique (continu ou alternatif) : la composante  $F_\lambda$  de la force qu'elle subit suivant une direction  $O\lambda$  est proportionnelle à la *dérivée première*  $\frac{\partial B_z}{\partial \lambda}$  au point O. Les utilisations possibles sont les mêmes que ci-dessus.

3° *Exemple. Bobines de révolution.*  $[\vec{\lambda} \times \vec{r}]_z = -r$ .

On peut effectuer l'intégration sur la variable  $\varphi$ . Désignons par  $\sigma$  la section du bobinage par un demi-plan méridien issu de Oz, et par  $N = n^2 \sigma$  le

nombre total de spires. La constante de proportionnalité  $k$  s'écrit

$$k = \pi N \cdot \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} r^2 d\sigma = N \cdot \bar{S}, \quad (18)$$

en désignant par

$$\bar{S} = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} \pi r^2 d\sigma \quad (19)$$

la valeur moyenne de la surface des spires pour toute la bobine. La condition (15) devient

$$\int_{\sigma} r^2 \left( \frac{r^2}{4} - z^2 \right) d\sigma = 0. \quad (20)$$

Montrons, sur un exemple simple, que cette condition fixe une règle de construction pratique de la bobine. Supposons que le bobinage soit fait dans une gorge à section  $\sigma$  rectangulaire, de longueur  $2l$ , et que son rayon intérieur soit négligeable devant son rayon extérieur  $R$  (fig. 5). On trouve

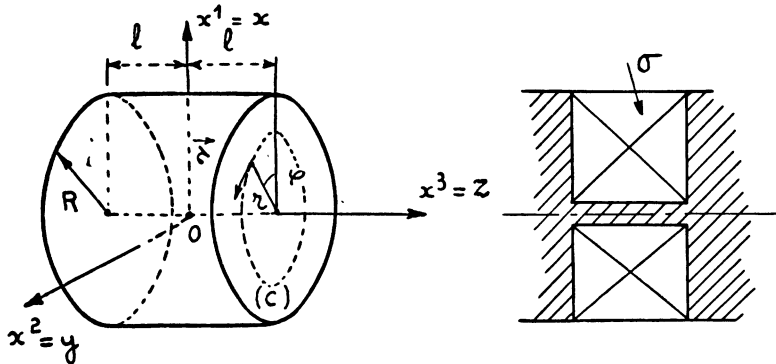


FIG. 5.

aisément d'après (20) qu'il faut proportionner la longueur et le diamètre de façon que

$$\frac{R}{l} = \frac{2\sqrt{5}}{3} = 1,491. \quad (21)$$

Si la bobine est ainsi construite, le flux a pour valeur, d'après (16) et (18)

$$\Phi = \frac{N}{3} \pi R^2 \left( B_z \right)_0. \quad (22)$$

Nous verrons, dans la deuxième partie du chapitre, que cette formule correspond à une très bonne approximation.

### 3. — Cas où la bobine s'étend à l'infini dans une direction. — Mesure de $B_z$ .

1° Quand nous avons indiqué le principe de notre méthode de mesure, au chapitre I, nous avons montré qu'il est théoriquement possible d'obtenir

une f.é.m. alternative proportionnelle à l'induction  $B_z$  en un point  $\Omega$  de l'axe d'une lentille de la façon suivante.

On considère un solénoïde de rayon infiniment petit, confondu avec l'axe  $Oz$ , et s'étendant depuis le point  $\Omega$  jusqu'à  $\pm \infty$  c'est-à-dire pratiquement jusqu'à une région où le champ magnétique de la lentille est négligeable. Si on impose à ce solénoïde une vibration de très petite amplitude parallèle à  $Oz$ , la force électromotrice induite est proportionnelle à l'induction au point  $\Omega$ .

Mais pratiquement une telle bobine longue ne peut être infiniment mince : son épaisseur, obligatoirement finie, introduira donc toujours une erreur sur la mesure, puisqu'il ne peut être question ici de proportionner cette épaisseur à la longueur, théoriquement infinie.

Durandea u a montré [6, a], dans le cas des champs de révolution, qu'on peut cependant rendre la grandeur mesurée proportionnelle à  $B_z$  en un point, au quatrième ordre près, en utilisant non pas un mais deux solénoïdes, connectés en série et convenablement décalés le long de  $Oz$ .

Nous allons reprendre cette étude sous une forme générale, indépendamment des symétries du champ et de la forme des bobines.

2° Considérons une bobine analogue à celle représentée sur la figure 6. Elle peut n'avoir qu'une seule couche de spires; mais on peut aussi admettre qu'elle en ait plusieurs et que sa section  $S$  par un plan perpendiculaire à  $Oz$  ait une valeur finie. Pour la commodité du dessin nous avons représenté une bobine à symétrie de révolution, mais ce n'est pas obligatoire pour la suite : la section  $S$  peut avoir une forme a priori *quelconque*, et la bobine est plongée dans un champ *quelconque*.

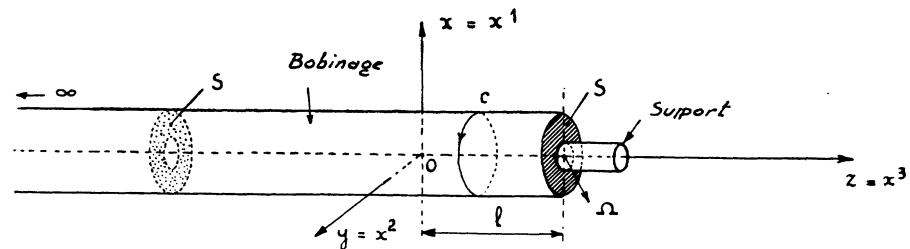


FIG. 6.

Nous supposons que la section  $S$  est indépendante de  $z$ <sup>(2)</sup> et que la grandeur mesurée est proportionnelle à  $\partial\Phi / \partial z$  (sonde vibrante ou méthode

(2) Nous étudierons au chapitre III l'influence d'une petite variation de  $S$  avec  $z$  et nous verrons qu'elle est négligeable dans tous les cas pratiques, si la bobine est bien construite.

électrodynamique). D'après l'expression générale (4) du flux on obtient, en dérivant sous le signe somme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = n^2 \int_v \vec{\lambda} \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} dv = n^2 \int_s dS \int_{\pm\infty}^l \vec{\lambda} \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} dz = n^2 \int_s (\vec{\lambda} \cdot \vec{A})_{z=l} \cdot dS, \quad (23)$$

puisqu'on suppose  $\vec{A} = 0$  à l'infini.

On peut alors recommencer sur (23) un calcul tout à fait analogue à celui du § 1 ci-dessus. On substitue dans cette formule le développement de  $\vec{A}$  en série de Taylor autour du point  $\Omega$ , dans le plan d'abscisse  $z = l$ , parallèle à  $xOy$  : (la sommation ne porte plus que sur les indices 1 et 2).

$$\left( \mathbf{A}_u \right)_{z=l} = \left( \mathbf{A}_u \right)_{\Omega} + \frac{1}{1!} \left( x^r \partial_r \right)_{\Omega} \mathbf{A}_u + \frac{1}{2!} \left( x^v x^w \partial_v \partial_w \right)_{\Omega} \mathbf{A}_u + \dots \quad (24)$$

On pose

$$t^{u,v,w\dots q} = \int_s \lambda^u x^v x^w \dots x^q \cdot dS. \quad (25)$$

Compte tenu de (7), avec  $t^{3,u\dots q} = t^{u,3\dots q} = 0$ , et de  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = n^2 \left\{ t^{2,1} (B_3)_{\Omega} + \frac{1}{2} \left[ -t^{1,211} \partial_1^2 + t^{2,122} \partial_2^2 \right]_{\Omega} B_3 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[ t^{2,112} \partial_1 \partial_2 \right]_{\Omega} B_3 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

On ne peut annuler les termes du second ordre qu'en faisant  $t^{2,112} = 0$  et  $-t^{1,211} = t^{2,122} = 0$  : la première de ces conditions impose une symétrie par rapport aux plans  $zOx$  et  $yOz$ ; mais les deux autres conduisent à une bobine infiniment mince. Cela provient du fait que dans (26) ne figure pas la dérivée partielle  $\partial_3^2 B_3$  : on la fait réapparaître en associant, de part et d'autre d'un même point  $O$ , deux bobines analogues à la précédente, montées en série et convenablement décalées le long de  $Oz$ . Ces deux bobines peuvent être identiques (Durandea); dans notre méthode, des raisons techniques (commodité, difficulté d'imprimer des vibrations longitudinales à une tige trop longue), nous ont conduit à utiliser deux solénoïdes bobinés l'un sur l'autre : ils sont très peu différents, mais non identiques (voir *fig. 8*).

Nous ferons le calcul dans le cas général (*fig. 7*).

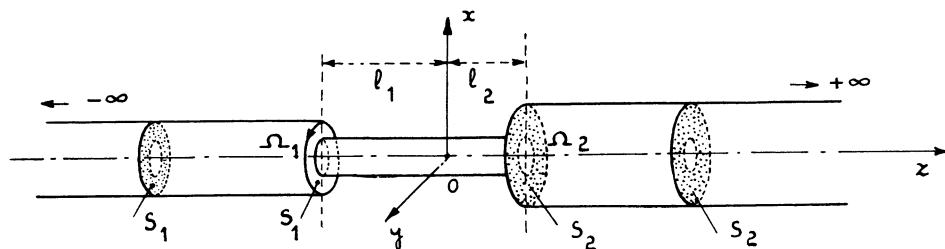


FIG. 7.



Comme ci-dessus (§ 2) nous sommes amenés à poser que  $zOx$  et  $yOz$  sont plans de symétrie ( $t^{2,112} = 0$ ) et que  $Oz$  est un axe de symétrie d'ordre 4 ( $-t^{1,211} = t^{2,122}$ ). Dans ces hypothèses, ajoutons les  $\partial\Phi/\partial z$  relatifs aux deux bobines, après avoir substitué dans (26) les développements

$$\left. \begin{aligned} (B_2)_{\Omega_1} &= (B_3)_0 - l_1 (\partial_3 B_3)_0 + \frac{l_1^2}{2!} (\partial_3^2 B_3)_0 - \frac{l_1^3}{3!} (\partial_3^3 B_3)_0 + \dots \\ (B_3)_{\Omega_1} &= (B_3)_0 + l_2 (\partial_3 B_3)_0 + \frac{l_2^2}{2!} (\partial_3^2 B_3)_0 + \frac{l_2^3}{3!} (\partial_3^3 B_3)_0 + \dots \end{aligned} \right\} (27)$$

On obtient, en désignant par  $t_1^{u, vv \dots q}$  et  $t_2^{u, vv \dots q}$  les grandeurs (25) correspondant aux sections  $S_1$  et  $S_2$  de la figure 7.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= n^2 \left\{ (t_1^{2,11} + t_2^{2,11}) (B_3)_0 + (l_2 t_2^{2,1} - l_1 t_1^{2,1}) (\partial_3 B_3)_0 \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ (t_1^{2,122} + t_2^{2,122}) (\partial_1^2 + \partial_2^2) + (l_1^2 t_1^{2,1} + l_2^2 t_2^{2,1}) \partial_3^2 \right] B_3 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ (l_2 t_2^{2,122} - l_1 t_1^{2,122}) (\partial_1^2 + \partial_2^2) + \frac{1}{3} (l_3^2 t_2^{2,1} - l_1^2 t_1^{2,1}) \partial_3^2 \right] \partial_3 B_3 \\ &\quad \left. + \text{termes du 4}^\circ \text{ ordre} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

a) Si le point O est défini par

$$l_2 t_2^{2,1} - l_1 t_1^{2,1} = 0, \quad (29)$$

le terme du premier ordre (en  $\partial_3 B_3 = \partial B_z / \partial z$ ) est nul. Ainsi la somme des  $\partial\Phi / \partial z$  pour l'ensemble des deux bobines est proportionnelle à l'induction au point O que nous venons de définir, aux termes du 2<sup>e</sup> ordre près, comme c'était le cas pour la bobine unique de la figure 6 [formule (26)].

b) Mais avec deux bobines nous pouvons en outre annuler les termes du 2<sup>e</sup> ordre. En effet, puisque  $\vec{B}$  satisfait à l'équation de Laplace, il suffit d'imposer la condition.

$$t_1^{2,122} + t_2^{2,122} = l_1^2 t_1^{2,1} + l_2^2 t_2^{2,1}. \quad (30)$$

c) Il subsiste alors un terme du troisième ordre égal à

$$\frac{1}{2} \left[ (l_1 t_1^{2,122} - l_2 t_2^{2,122}) - \frac{1}{3} (l_1^3 t_1^{2,1} - l_2^3 t_2^{2,1}) \right] (\partial_3^3 B_3)_0.$$

Il s'annule lorsque les deux bobines sont rigoureusement identiques (Duran-deau), et reste petit si les deux bobinages sont peu différents.

### 3° Cas particuliers. — Exemples.

a) *Bobines identiques.* La condition (29) conduit à  $l_1 = l_2 = l$  : le point O est à égale distance de  $\Omega_1$  et de  $\Omega_2$ . La condition (30) devient  $t^{2,122} = l^2 t^{2,1}$ . Avec les coordonnées cylindriques  $r, \varphi, z$ , et la définition (25), elle s'écrit

$$\int_S \left[ \vec{\lambda} \times \vec{r} \right]_z \left( \frac{r^2}{4} - l^2 \right) dS = 0, \quad (31)$$

Cette expression que l'on comparera à (15), permet de calculer la distance  $2l$  dont il faut décaler les deux bobinages.

Lorsque (31) est satisfaite, on a, avec une bonne approximation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = K \cdot (B_z)_0 + \text{termes du 4}^\circ \text{ ordre,} \quad (32)$$

la constante  $K$  ayant pour valeur

$$K = -n^2 \int_S \left[ \vec{\lambda} \times \vec{r} \right]_z dS. \quad (33)$$

Si les bobinages ont la symétrie de révolution, leurs rayons intérieur et extérieur étant respectivement  $r_i$  et  $r_e$ , (31) s'écrit

$$\int_{r_i}^{r_e} r^2 \left( \frac{r^2}{4} - l^2 \right) dr = 0. \quad (34)$$

Pratiquement les bobines ne sont pas infiniment longues. Soit  $L$  leur longueur commune, finie. Si on remarque que chacune d'elles possède  $N = n^2 (r_e - r_i) L$  spires, on obtient pour la constante de proportionnalité  $K$

$$K = \frac{2\pi N}{L} \cdot \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} r^2 dr = \frac{2N}{L} \cdot \bar{S}, \quad (35)$$

en désignant par

$$\bar{S} = \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \pi r^2 \cdot dr, \quad (36)$$

la valeur moyenne de la surface des spires étendue à l'épaisseur du bobinage.  $N/L$  est le nombre total de spires par unité de longueur.

b) *Bobines à une seule couche.* On peut recommencer les calculs à partir de l'expression (12) de  $\Phi$  (remarque a du § 1). Tous les résultats ci-dessus restent valables à condition de remplacer  $n^2$  par  $n$  et de poser

$$t^{u,v,w\dots q} = \int_C \lambda^u x^v x^w \dots x^q \cdot dl, \quad (37)$$

$C$  désignant la spire terminale de l'une ou de l'autre des deux bobines, à l'extrémité où  $\vec{B} \neq 0$ .

c) *Exemples.* 1. Deux solénoïdes à une seule couche de spires de rayon  $r$  décalés de  $2l$  (Durandau). D'après la remarque ci-dessus la condition (31)

s'écrit avec  $\left[ \vec{\lambda} \times \vec{r} \right]_z = -r, dl = r d\varphi$

$$\int_C \left[ \vec{\lambda} \times \vec{r} \right]_z \left( \frac{r^2}{4} - l^2 \right) dl = -2\pi r^2 \left( \frac{r^2}{4} - l^2 \right) = 0, \quad (38)$$

soit

$$\boxed{2l = r.} \quad (39)$$

Ainsi, quel que soit le champ à mesurer, même s'il n'a pas la symétrie de révolution, il faut décaler les bobinages d'une longueur égale à leur rayon.

2. — Imaginons maintenant que l'on bobine l'un sur l'autre deux solénoïdes I et II de rayons  $r_1 = r$  et  $r_2 = r + \varepsilon$  ( $\varepsilon \ll r$ ). C'est ainsi que sont construites les bobines que nous utilisons dans notre méthode de mesure (fig. 8).

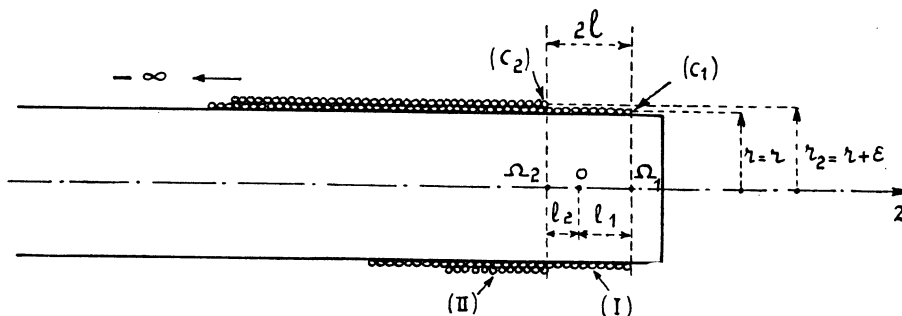


FIG. 8.

D'après (37) on peut calculer les grandeurs  $t_1^{u, v, w \dots q}$  et  $t_2^{u, v, w \dots q}$  relatives aux spires terminales  $C_1$  et  $C_2$  ( $dl_1 = r_1 d\varphi$ ,  $dl_2 = r_2 d\varphi$ ). La condition (29) donne alors

$$\frac{l_1}{l_2} = \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 \sim 1 + 2 \frac{\varepsilon}{r}, \quad (40)$$

compte tenu de quoi on tire de (30)

$$2l = l_1 + l_2 \sim r + \frac{\varepsilon}{2} \quad (41)$$

Ainsi le décalage entre les deux bobinages doit être égal à leur rayon moyen  $(r_1 + r_2)/2$ . Si cette règle de construction est respectée,  $\partial \Phi / \partial z$  est proportionnel à  $B_z$  en un point  $O$  très voisin du milieu de  $\Omega_1 \Omega_2$ .

Il subsiste un terme du 3<sup>e</sup> ordre dont on peut calculer la valeur en utilisant l'expression générale que nous en avons donné plus haut, et en tenant compte de (40) et (41). On obtient

$$-\frac{1}{4} \pi r^4 \cdot \varepsilon \left( \frac{\partial^3 B_z}{\partial z^3} \right)_0,$$

valeur en général tout à fait négligeable, en raison de la petitesse de  $\varepsilon$ . Nous donnerons plus loin une évaluation de l'erreur correspondante dans un cas réel.

Dans les deux exemples envisagés ci-dessus la constante de proportionnalité  $K$  [formule (35)] a pour valeur  $2n\pi r^2$ .

#### 4. — Cas de deux bobines de volume fini, identiques, montées en opposition.

1. Avec deux bobines identiques, infiniment petites, distantes de  $dz$  sur leur axe commun  $Oz$  et vibrant parallèlement à cet axe d'un mouvement sinusoïdal de très petite amplitude, la f.é.m. induite est proportionnelle à la

dérivée seconde  $\partial^2 B_z / \partial z^2$  au point O où se trouve l'ensemble des deux bobines; le flux  $\Phi$  est proportionnel à  $\partial B_z / \partial z$  au même point.

Mais les bobines réelles ont forcément un volume fini; deux bobines identiques ne peuvent être séparées que par une longueur finie. Nous allons chercher, en nous guidant sur les calculs du § 1, quelles sont les conditions à satisfaire pour que la différence  $\Phi_2 - \Phi_1 = \Phi$  des flux d'induction dans les deux bobines soit proportionnelle à  $\partial B_z / \partial z$  en un point, au 4<sup>e</sup> ordre près.

2. Considérons l'ensemble des deux bobines représenté schématiquement sur la figure 9. A priori, la forme de ces deux bobines n'est pas imposée, et elles n'ont pas forcément la symétrie de révolution indiquée.

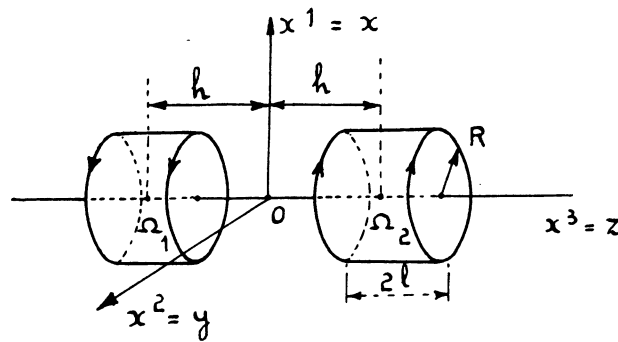


Fig. 9.

Le flux dans chacune de ces bobines est donné par une expression analogue à (10), les valeurs de  $B_z$  et de ses dérivés étant prises aux points  $\Omega_1$  ou  $\Omega_2$ . On voit donc déjà que pour annuler les termes du 2<sup>e</sup> ordre il faudra faire  $t^{2,112} = t^{2,113} = t^{1,222} = 0$  et  $-t^{1,211} = t^{2,122}$ , c'est-à-dire que chacune des deux bobines aura les mêmes éléments de symétrie que la bobine unique considérée au §1 (Plan  $zOx$ ,  $yOz$  et plans perpendiculaires à  $Oz$  en  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ ;  $Oz$  axe de symétrie d'ordre 4). Supposons qu'il en soit ainsi :

$$\Phi_{\Omega_1 \text{ ou } \Omega_2} = n^2 \left\{ t^{2,1} (B_z)_{\Omega_1 \text{ ou } \Omega_2} + \frac{1}{2} \left[ t^{2,22} (\partial_1^2 + \partial_2^2) + t^{2,133} \partial_3^2 \right]_{\Omega_1 \text{ ou } \Omega_2} B_z + \dots \right\}. \quad (42)$$

Substituons dans (42) les développements

$$(B_z)_{\Omega_1 \text{ ou } \Omega_2} = (B_z)_0 \pm h (\partial_3 B_z)_0 + \frac{h^2}{2!} (\partial_3^2 B_z)_0 \pm \frac{h^3}{3!} (\partial_3^3 B_z)_0 + \dots, \quad (43)$$

(Signe + pour  $\Omega_2$  et signe - pour  $\Omega_1$ ), faisons la différence des flux. On obtient

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = 2hn^2 \left\{ t^{2,1} (\partial_3 B_z)_0 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[ t^{2,22} (\partial_1^2 + \partial_2^2) + \left( t^{2,133} + \frac{h^2}{3} t^{2,1} \right) \partial_3^2 \right]_{\Omega_2} \partial_3 B_z \right. \\ \left. + \text{termes du 4<sup>e</sup> ordre} + \dots \right\}. \quad (44) \end{aligned}$$

On voit qu'il est possible d'annuler les termes du 2<sup>e</sup> ordre, puisque  $\vec{B}$  satisfait à l'équation de Laplace, en imposant la condition

$$t^{2,122} = t^{2,133} + \frac{h^2}{3} t^{2,11} . \quad (45)$$

3. Dans les formules ci-dessus, les grandeurs  $t^{n, v w \dots q}$  sont définies par (6), les  $x_u$  ayant comme origine le point  $\Omega_1$  ou  $\Omega_2$ , et l'intégrale étant étendue au volume  $v$  d'une seule des deux bobines. Avec cette définition et en utilisant les coordonnées cylindriques, (45) s'écrit

$$\int_v \left[ \vec{\lambda} \times \vec{r} \right]_z \left( \frac{r^2}{4} - z^2 - \frac{h^2}{3} \right) dv = 0 . \quad (46)$$

Lorsqu'on a choisi la forme des bobines, cette expression fixe une *règle pratique de construction*. Nous en donnons un exemple ci-dessous :

Supposons cette condition (46) satisfaite; on a alors

$$\Phi = 2 h . k \left( \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_0 + \text{termes du 4<sup>e</sup> ordre}, \quad (47)$$

la constante  $k$  étant définie par (17). Nous verrons, dans la deuxième partie de ce chapitre, que cette formule correspond à une très bonne approximation.

Ainsi, l'ensemble des deux bobines permet de mesurer avec précision la *dérivée première*  $\partial B_z / \partial z$  au point O, si on l'utilise avec un fluxmètre ou un galvanomètre balistique. Si on fait vibrer les bobines parallèlement à Oz d'un mouvement sinusoïdal de très petite amplitude, la f.é.m. induite est proportionnelle à la *dérivée seconde*  $\partial^2 B_z / \partial z^2$  au point O : c'est ainsi que nous utilisons les bobines pour mesurer directement  $B''_z(z)$  sur l'axe des lentilles électroniques magnétiques. D'après ce que nous avons dit au début du chapitre, on voit qu'il serait possible, si la sensibilité était suffisante, d'obtenir  $B''_z(z)$  en faisant circuler un courant dans le bobinage et en mesurant la composante  $F_z$  de la force électrodynamique. On peut envisager d'utiliser autrement l'ensemble des deux bobines étudié ci-dessus. Imaginons qu'on le fasse vibrer parallèlement à Ox ou Oy (ou bien qu'on détermine les composantes  $F_x$  ou  $F_y$  de la force électrodynamique) : les grandeurs mesurées sont alors proportionnelles aux dérivées secondes  $\partial^2 B_z / \partial z \partial x$  ou  $\partial^2 B_z / \partial y \partial z$  lesquelles peuvent être intéressantes à connaître dans certains dispositifs particuliers.

4. *Exemple. Bobines de révolution.*  $[\vec{\lambda} \times \vec{r}]_z = -r$ .

La constante  $k$  est donnée par (18) (§ 2) et la condition (46) s'écrit

$$\int_{\sigma} r^2 \left( \frac{r^2}{4} - z^2 - \frac{h^2}{3} \right) d\sigma = 0, \quad (48)$$

$\sigma$  désignant la section de l'un des bobinages par un demi-plan méridien issu de Oz. Cette formule permet un calcul pratique du bobinage. Montrons-le sur l'exemple simple des bobines que nous utilisons dans notre

méthode de mesure. La section  $\sigma$  est un rectangle de largeur  $2l$ ; le rayon intérieur et négligeable devant le rayon extérieur  $R$  (*fig. 9*). On trouve aisément, d'après (48) qu'il faut proportionner les dimensions  $h$ ,  $l$  et  $R$  de façon que

$$\frac{R}{\sqrt{h^2 + l^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{3} = 1,491. \quad (49)$$

Nous avons adopté, pour des raisons de commodité,  $h = 2l$ . On tire alors de (49),  $R/l = 10/3 = 3,33$ .

Si les bobines sont ainsi construites, le flux a pour valeur, d'après (47) et (18)

$$\Phi = 2 h \cdot \frac{N}{3} \pi R^2 \left( \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_0. \quad (50)$$

Nous montrerons, dans la deuxième partie de ce chapitre, que cette formule correspond à une très bonne approximation.

### 5. — Tableau résumant les principaux résultats.

Dans le tableau I ci-dessous, sont indiqués les principaux résultats de l'étude précédente. Nous nous sommes limités aux bobinages à symétrie de révolution. Le cadre représenté à la dernière ligne est étudié à l'Appendice I. Pour chaque type de bobinage, dont un exemple est figuré dans la colonne de gauche, est donnée la condition générale à satisfaire pour que le flux (ou ses dérivées partielles) soit proportionnel à l'une des composantes de l'induction (ou à ses dérivées partielles), en un point et au quatrième ordre près. On donne également la valeur du coefficient de proportionnalité entre ces grandeurs. Le tout est illustré par les exemples correspondant aux bobinages effectivement réalisés pour les méthodes de mesure utilisées au Laboratoire de Toulouse.

La proportionnalité entre le flux et l'induction (ou entre leurs dérivées) n'est pas rigoureuse. Il subsiste une erreur du quatrième ordre, due aux dimensions finies des bobinages, et dont il est bon de connaître l'ordre de grandeur. Nous le calculerons ci-dessous, dans l'étude complète des bobines à symétrie de révolution, que nous allons maintenant aborder.

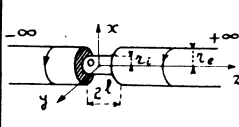
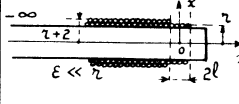
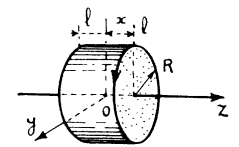
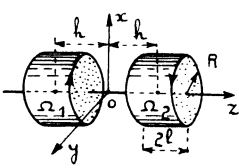
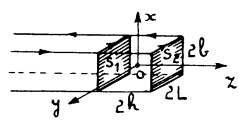
## B. — BOBINES A SYMÉTRIE DE RÉVOLUTION

### 1. — Expression générale du flux — Théorème.

1. Nous allons démontrer le théorème suivant :

« Le flux  $\Phi$  d'une induction magnétique  $\vec{B}$  *quelconque* à travers une bobine à symétrie de révolution s'exprime, en fonction de la composante de  $\vec{B}$  sur l'axe de la bobine, comme si le champ était de révolution autour de cet axe. »

- Tableau 1 -

Type de bobinage	Condition à satisfaire.		Mesure du flux $\Phi$ (Galvanomètre balistique ou Fluxmètre.	Mesure de la f.e.m. induite dans la bobine vibrante ou de la composante $F_x$ de la force électrodynamique		Coefficient de proportionnalité.	
	Cas général.	Exemples	Grandeur proportionnelle à $\Phi$	$0x^u$	Grandeur proportionnelle à $\frac{\partial \Phi}{\partial x^u}$ quand la bobine est mobile suivant $0x^u$	Cas général.	Exemples ci-contre
	$\int_{z_i}^{z_e} z^2 \left( \frac{z^2}{4} - l^2 \right) dz = 0$	Une seule couche de spires, de rayon $z$ $2l = z$	$\int_{-\infty}^{+\infty} B_z dz$	$0z$	$(B_z)_0$	$\frac{2N \bar{S}}{L}$ , avec $\bar{S} = \frac{1}{z_e - z_i} \int_{z_i}^{z_e} \pi z^2 dz$	$2\pi \bar{\pi} z^2$
		$2l \sim z + \frac{\epsilon}{2}$	$\int_{-\infty}^0 B_z dz$	$0z$	$(B_z)_0$		$2\pi \bar{\pi} z^2$
 <p>Rayon intérieur négligeable devant R</p>	$\int_{\sigma} z^2 \left( \frac{z^2}{4} - z^2 \right) d\sigma = 0$ <p><math>\sigma =</math> section du bobinage par un demi-plan méridien issu de <math>0z</math></p>	Cas de la figure ci-contre. $\frac{R}{l} = \frac{2\sqrt{5}}{3} = 1.49$	$(B_z)_0$	$0z$ $0x$ $0y$	$\left( \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_0$ $\left( \frac{\partial B_x}{\partial x} \right)_0$ $\left( \frac{\partial B_z}{\partial y} \right)_0$	$N \bar{S}$ avec $\bar{S} = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} \pi z^2 d\sigma$	$\frac{N}{3} \pi R^2$
	$\int_{\sigma} z^2 \left( \frac{z^2}{4} - z^2 - \frac{h^2}{3} \right) d\sigma = 0$ <p><math>\sigma =</math> demi-section méridienne de l'un des bobinages.                      (Origine en <math>\Omega_1</math> ou <math>\Omega_2</math>)</p>	Cas de la figure $\frac{R}{\sqrt{h^2 + l^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ si $h = 2l$ $\frac{R}{l} = \frac{10}{3} = 3.33$	$\left( \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_0$	$0z$ $0x$ $0y$	$\left( \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} \right)_0$ $\left( \frac{\partial^2 B_z}{\partial z \partial x} \right)_0$ $\left( \frac{\partial^2 B_z}{\partial y \partial z} \right)_0$	$2h N \bar{S}$ avec $\bar{S} = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} \pi z^2 d\sigma$	$2h \frac{N}{3} \pi R^2$
	$\int_S x^2 ds = \int_S y^2 ds = h^2 S$ <p><math>S = S_1 + S_2</math> (voir fig.)</p>	Cas de la figure $l = L = h\sqrt{3}$		$0z$	$(B_x)_0$	$\frac{\mathcal{E}}{V_z} = \frac{F_z}{I} = N 2L (B_x)_0$	

Partons de l'expression (4) démontrée au début du chapitre.

$$\Phi = n^2 \int_v (\vec{\lambda} \cdot \vec{A}). dv. \quad (4)$$

Utilisons un système de coordonnées cylindriques  $r, \varphi, z$ , l'axe Oz coïncidant avec l'axe de révolution de la bobine

$$(\vec{\lambda} \cdot \vec{A}) = A_\varphi(r, \varphi, z), \quad dv = r dr dz d\varphi.$$

Substituons dans (4)

$$\Phi = n^2 \int_\sigma r dr dz \int_0^{2\pi} A_\varphi(r, \varphi, z) d\varphi. \quad (51)$$

$\sigma$  désigne la section du bobinage par un demi-plan méridien issu de Oz :  $d\sigma = dr dz$ .

Nous démontrons dans l'Appendice II que la dernière intégrale est égale à  $2\pi A_\varphi^R(r, z)$ ,  $A_\varphi^R(r, z)$  étant le *potentiel vecteur du champ de révolution autour de Oz* qui aurait même répartition sur cet axe que le champ quelconque donné.

D'où

$$\Phi = n^2 2\pi \int_\sigma r A_\varphi^R(r, z) d\sigma. \quad (52)$$

C'est bien le résultat annoncé, car (52) n'est pas autre chose que le flux du champ de révolution ci-dessus.

2. Substituons dans cette formule le développement classique

$$\begin{aligned} A_\varphi^R(r, z) &= \frac{r}{2} B_z(0, z) - \frac{r^3}{16} \left(\frac{d}{dz}\right)^2 B_z(0, z) + \dots \\ &= \sum_{m=0} \frac{(-1)^{m-1} 2m r^{2m-1}}{(m!)^2 2^{2m}} \left(\frac{d}{dz}\right)^{2(m-1)} B_z(0, z), \end{aligned} \quad (53)$$

dans lequel on remplace  $B_z(0, z)$ ,  $\left(\frac{d}{dz}\right)^2 B_z(0, z)$ , ... par leur développement en série de Taylor

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{2(m-1)} B_z(0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{2(m-1)+n} B_z(0, 0). \quad (54)$$

On obtient

$$\Phi = n^2 2\pi \sum_m \frac{(-1)^{m-1} 2m}{(m!)^2 2^{2m}} \int_\sigma r^{2m} \sum_n \frac{z^n}{n!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{2(m-1)+n} B_z(0, 0) d\sigma. \quad (55)$$

Dans la première partie du chapitre, nous avons montré que la bobine doit posséder un plan de symétrie perpendiculaire à Oz. Dans cette hypothèse, l'intégrale n'est différente de zéro que pour les *valeurs paires* de  $n$ . Il est alors intéressant de faire apparaître les coefficients des dérivées suc-



cessives paires de  $B_z$  à l'origine. Pour cela, posons

$$2(m-1) + n = 2p \quad , \quad \text{soit} \quad \begin{cases} n = 2(p-m+1), \\ m = p+1 - \frac{n}{2} . \end{cases} \quad (56)$$

Nous remarquons que pour chaque valeur de  $p = 0, 1, 2, 3, \dots$  et de  $n = 0, 2, 4, 6, \dots$ ,  $m$  ne peut prendre que les valeurs  $m = 1, 2, 3, \dots, p+1$ . Dans ces conditions, la substitution de (56) dans (55) donne

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_2 + \Phi_4 + \dots = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_{2p} \quad , \quad (57)$$

$$\Phi_{2p} = k_{2p} \left( \frac{d}{dz} \right)^{2p} B_z(o, o) \quad , \quad (58)$$

$$k_{2p} = n^2 2\pi \int_{\sigma} \sum_{m=1}^{p+1} \frac{(-1)^{m-1} 2m}{(m!)^2 2^{2m}} \frac{r^{2m} z^{2(p-m+1)}}{[2(p-m+1)]!} d\sigma. \quad (59)$$

Cette expression fournit la formule (18) donnant le coefficient de  $\Phi_0$  (avec  $p = 0, m = 1$ ), ainsi que la condition (20) pour annuler  $\Phi_2$  (avec  $p = 1; m = 1, m = 2$ ). Mais on peut maintenant calculer les coefficients des termes d'ordre supérieur, en particulier celui du quatrième ordre qui devient prépondérant lorsque  $\Phi_2 = 0$ .

On a alors sensiblement  $\Phi \approx \Phi_0 + \Phi_4$  et l'on peut évaluer l'erreur relative commise sur la mesure du flux et due aux dimensions du bobinage par

$$\varepsilon = \frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_0} \approx \frac{\Phi_4}{\Phi_0}. \quad (60)$$

Nous allons en donner un exemple ci-dessous.

## 2. — Calcul de l'erreur relative due aux dimensions d'une bobine de volume fini — Exemple.

Calculons le coefficient  $k_4$  du terme du 4<sup>e</sup> ordre. Avec  $p = 2; m = 1, 2, 3$ , la formule (59) s'écrit

$$k_4 = \pi n^2 \int_{\sigma} r^2 \left( \frac{z^4}{24} - \frac{r^2 z^2}{16} + \frac{r^4}{192} \right) d\sigma. \quad (61)$$

Prenons comme exemple la bobine qui nous sert à mesurer  $B'(z)$ , et qui est représentée schématiquement sur la figure 5. En remarquant que  $2lRn^2 = N$  est le nombre total de spires de la bobine, on trouve aisément d'après (61)

$$k_4 = N \pi R^2 \left[ \frac{l^4}{360} - \frac{R^2 l^2}{240} + \frac{R^4}{1344} \right]. \quad (62)$$

2. Supposons, comme c'est le cas, que la bobine utilisée satisfasse à la condition (21),  $R/l = 2\sqrt{5}/3$  qui annule le terme du deuxième ordre :

$$k_1 = \frac{N}{3} \pi R^2 \left[ \frac{1}{120} - \frac{1}{36} + \frac{400}{81 \times 448} \right].$$

Comme d'après (22),  $k_0 = \frac{N}{3} \pi R^2$ , on tire de (60)

$$\varepsilon = -0,0084 \cdot l \left[ \frac{B^{(4)}}{B} \right]_0, \quad B^{(4)} = \frac{d^4 B}{dz^4}. \quad (63)$$

Dans la bobine que nous avons construite,  $l = 0,4$  mm. de sorte que (en exprimant les longueurs en millimètres)

$$\varepsilon \cong -2,16 \cdot 10^{-4} \left[ \frac{B^{(4)}}{B} \right]_0. \quad (64)$$

Si pour obtenir directement  $B'(z)$ , on mesure non plus le flux mais la f.é.m. induite dans la bobine vibrante, il faut remplacer dans (63) ou (64),  $B^{(4)}/B$  par  $B^{(5)}/B'$ .

Dans les deux cas, l'erreur  $\varepsilon$  est complètement négligeable devant les autres erreurs expérimentales, comme le montrera l'étude critique de la méthode que nous ferons au chapitre IV.

### 3. — Cas d'une bobine infiniment longue dans une direction — Mesure de $B_z$ .

1. Reportons-nous à la figure 6. La bobine étant utilisée soit comme sonde vibrante soit comme sonde électrodynamique, la grandeur mesurée est proportionnelle à  $\partial \Phi / \partial z$  :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = n^2 \int_S \left( \vec{\lambda} \cdot \vec{A} \right)_{z=l} dS. \quad (23)$$

Dans cette formule (23), démontrée à la première partie du chapitre,  $S$  désigne la section du bobinage par un plan perpendiculaire à  $Oz$ , et  $l$  l'abscisse de la section terminale.

En coordonnées cylindriques  $r, \varphi, z$

$$\left( \vec{\lambda} \cdot \vec{A} \right)_{z=l} = A_\varphi(r, \varphi, l), \quad dS = r dr d\varphi.$$

Tenons compte, comme ci-dessus, du résultat démontré à l'Appendice II :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = n^2 \int_{r_i}^{r_e} r dr \int_0^{2\pi} A_\varphi(r, \varphi, l) d\varphi = 2\pi n^2 \int_{r_i}^{r_e} r A_\varphi^R(r, l) dr. \quad (65)$$

$r_i$  et  $r_e$  désignent les rayons intérieur et extérieur du bobinage.

Si ce dernier ne compte qu'une seule couche de  $n$  spires par unité de longueur, et si  $C$  désigne la spire terminale, d'élément de longueur  $ds$ , il faut remplacer (23) par

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = n \int_C \left( \vec{\lambda} \cdot \vec{A} \right)_{z=l} ds. \quad (23 \text{ bis})$$

En coordonnées cylindriques,  $ds = r d\varphi$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = n r \int_0^{2\pi} A_\varphi(r, \varphi, l) d\varphi = 2\pi n r A_\varphi^R(r, l). \quad (66)$$

2. Nous avons vu que pour faire la mesure directe de  $B_z$ , au 4<sup>e</sup> ordre près, en un point, il faut associer en série de part et d'autre de ce point, deux bobines longues convenablement décalées le long de Oz. Considérons le système des deux solénoïdes que nous utilisons dans notre méthode, et qui est représenté schématiquement sur la figure 8. Les abscisses des spires terminales sont  $+l_1$  et  $-l_2$ , leurs rayons  $r_1$  et  $r_2$ . Substituons dans (66) les développements (53) et (54) pris respectivement pour  $r = r_1$ ,  $l = +l_1$  et  $r = r_2$ ,  $l = -l_2$ . Ajoutons les valeurs correspondantes de  $\partial \Phi / \partial z$ ; on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 2\pi n \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{m-1} 2m}{(m!)^2 2^{2m}} \frac{1}{n!} \left[ r_1^{2m} l_1^n + r_2^{2m} (-l_2)^n \right] \left( \frac{d}{dz} \right)^{2(m-1)+n} B_z(0,0) \\ &= \pi n \left[ (r_1^2 + r_2^2) B + (r_1^2 l_1 - r_2^2 l_2) B' \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{r_1^2 l_1^2 + r_2^2 l_2^2}{2} - \frac{r_1^4 + r_2^4}{8} \right) B'' \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{r_1^2 l_1^3 - r_2^2 l_2^3}{6} - \frac{r_1^4 l_1 - r_2^4 l_2}{8} \right) B''' \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{r_1^6 + r_2^6}{192} + \frac{r_1^2 l_1^4 + r_2^2 l_2^4}{24} - \frac{r_1^4 l_1^2 + r_2^4 l_2^2}{16} \right) \cdot B^{(4)} + \dots \right]. \quad (67) \end{aligned}$$

Avec  $r_1 = r$ ,  $r_2 = r + \varepsilon$  ( $\varepsilon \ll r$ ), on retrouve bien sur (67) les conditions (40) et (41) qui annulent les termes du premier ordre et du deuxième ordre.

3. Si ces conditions sont satisfaites, les coefficients de  $B^{(3)}$  et  $B^{(4)}$  dans le crochet sont respectivement

$$\sim \frac{\varepsilon r^4}{4} \quad \text{et} \quad \sim -\frac{r^6}{64}$$

de sorte que l'erreur relative commise sur la mesure de  $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$  et due aux dimensions du bobinage a pour valeur

$$\varepsilon \cong \frac{\varepsilon r^2}{8} \frac{B'''}{B} - \frac{r^4}{128} \frac{B^{(4)}}{B}. \quad (68)$$

Les sondes que nous avons réalisées sur ce principe ont pour rayon  $r = 1$  mm et  $r = 0,4$  mm. Elles sont bobinées avec du fil de cuivre émaillé de 0,025 mm de diamètre. Posons  $\varepsilon = 0,03$  mm et mesurons toutes les longueurs en mm :

$$\begin{aligned} \varepsilon &\cong \frac{1}{2400} \frac{B'''}{B} - \frac{1}{128} \frac{B^{(4)}}{B}, \quad \text{pour } r = 1 \text{ mm.} \\ \varepsilon &\cong \frac{1}{15000} \frac{B'''}{B} - 2 \cdot 10^{-4} \frac{B^{(4)}}{B}, \quad \text{pour } r = 0,4 \text{ mm.} \end{aligned} \quad (69)$$

Nous verrons plus loin que cette erreur est négligeable dans la plupart des cas pratiques.

#### 4. — Cas de deux petites bobines identiques montées en opposition :

1. Reportons-nous à la figure 9. La grandeur mesurée est proportionnelle soit à la différence  $\Phi_2 - \Phi_1$  des flux dans les deux bobines (méthode balistique, mesure de  $B'_z$ ) soit à la dérivée  $\partial(\Phi_2 - \Phi_1)/\partial z$  (sonde vibrante donnant directement  $B''_z$ ). Calculons l'expression générale de  $\Phi_2 - \Phi_1$ .

Les bobines sont identiques, les abscisses de leurs centres sont  $+h$  et  $-h$  : d'après (57) et (58)

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \sum_{p=0}^{\infty} k_{2p} \left[ \left( \frac{d}{dz} \right)^{2p} B_z(0, h) - \left( \frac{d}{dz} \right)^{2p} B_z(0, -h) \right]. \quad (70)$$

Substituons dans (70) les développements (54) pris pour  $z = \pm h$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \sum_{p=0}^{\infty} k_{2p} \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{h^n}{n!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{2p-n} B_z(0,0). \quad (71)$$

$n = 1, 3, 5, 7, \dots$ , car dans la soustraction tous les termes correspondant à des valeurs paires de  $n$  donnent zéro.

Faisons apparaître dans la série ci-dessus, les coefficients des dérivées impaires de  $B_z$  à l'origine. Pour cela, posons

$$2p + n = 2q + 1, \text{ soit } \begin{cases} n = 2(q - p) + 1, \\ p = q - \frac{n-1}{2}. \end{cases} \quad (72)$$

Nous remarquons que pour chaque valeur de  $q = 0, 1, 2, 3, \dots$ , et de  $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ ,  $p$  ne peut prendre que les valeurs  $p = 0, 1, 2, 3, \dots, q$ . Dans ces conditions, la substitution de (72) dans (71) donne

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \sum_{q=0}^{\infty} k'_{2q+1} \left( \frac{d}{dz} \right)^{2q+1} B_z(0,0), \quad (73)$$

avec

$$k'_{2q+1} = \sum_{p=0}^q 2 \frac{h^{2(q-p)+1}}{[2(q-p)+1]!} k_{2p}. \quad (74)$$

2. La formule (74) jointe à l'expression (59) de  $k_{2p}$  redonne bien la valeur (47) du terme d'ordre zéro ( $q = 0; p = 0$ ) et la condition (48) annulant le terme du 2<sup>e</sup> ordre ( $q = 1; p = 0$ ).

Calculons le coefficient  $k'_s$  du terme du quatrième ordre. Avec  $q = 2; p = 0, 1, 2$ , la formule (74) s'écrit

$$k'_s = 2h \left[ \frac{h^4}{120} k_0 + \frac{h^2}{6} k_2 + k_4 \right], \quad (75)$$

et avec (59)

$$k'_s = \pi n^2 2h \int_r r^2 \left( \frac{h^4}{120} + \frac{h^2 z^2}{12} - \frac{h^2 r^2}{48} + \frac{z^4}{24} - \frac{r^2 z^2}{16} + \frac{r^4}{192} \right) d\sigma. \quad (76)$$

Prenons comme exemple les bobines qui nous servent à mesurer  $B''_z$  et qui sont représentées schématiquement sur la figure 9. En remarquant que  $2lR.n^2 = N$  est le nombre total de spires de chacun des deux bobinages, on trouve aisément d'après (76)

$$k'_3 = \frac{N}{3} \pi R^2 2h \left[ \frac{h^4 + l^4}{120} + \frac{R^4}{448} + \frac{h^2 l^2}{36} - \frac{R^2 (h^2 + l^2)}{80} \right]. \quad (77)$$

3. Supposons, comme c'est le cas, que l'ensemble de ces deux bobines satisfasse à la condition (49),  $R/\sqrt{h^2 + l^2} = 2\sqrt{5}/3$ , qui annule le terme du deuxième ordre; avec la valeur  $h = 2l$  que nous avons adoptée pour des raisons de commodité de construction, cette condition s'écrit  $R/l = 10/3$ , et l'on a

$$k'_3 = \frac{N}{3} \pi R^2 \cdot 2h l \left[ \frac{17}{120} + \frac{10^4}{81 \times 448} + \frac{4}{36} - \frac{500}{9 \times 80} \right].$$

Dans les bobinages que nous avons réalisés,  $l = 0,2$  mm. Comme  $k'_1 = \frac{N}{3} \pi R^2 \cdot 2h$ , l'erreur relative sur la mesure de  $\Phi_2 - \Phi_1$  a pour valeur (les longueurs étant exprimées en mm.)

$$\varepsilon = -0,165 l \left[ \frac{B^{(s)}}{B'} \right]_0 \cong -2,64 \cdot 10^{-4} \left[ \frac{B^{(s)}}{B'} \right]. \quad (78)$$

Si on mesure non le flux mais la force électromotrice induite dans les bobines vibrantes, pour obtenir directement  $B''_z$ , il faut remplacer  $B^{(s)}/B'$  par  $B^{(s)}/B''$  dans (78).

Nous verrons dans une étude critique de la méthode, que l'erreur  $\varepsilon$  est complètement négligeable devant les autres erreurs expérimentales.

### 5. — Résumé des principaux résultats concernant la méthode de la sonde vibrante. Caractéristiques des bobinages réalisés.

Réunissons ci-dessous les résultats de l'étude théorique précédente qui sont directement utilisables dans une application pratique. Prenons comme exemple la méthode que nous avons mise au point au Laboratoire de Toulouse.

1. On peut mesurer un champ *quelconque*, même ne possédant pas la symétrie de révolution (ex. lentilles cylindriques), *en un point* et au quatrième ordre près en utilisant des bobines exploratrices de révolution convenablement construites.

2. Suivant la forme des bobinages on obtient *directement* soit l'induction  $B_z(z)$ , soit ses deux premières dérivées  $B' = dB_z/dz$  et  $B'' = d^2B_z/dz^2$  avec la même précision.

3. Toutes ces grandeurs sont obtenues sous forme de forces électromotrices induites *alternatives* en imprimant aux bobines le long de l'axe une vibration sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $Z$  très petite ( $\approx 0,01$  mm).

4. Voici pour chaque type de bobinage schématisé sur une figure où sont indiquées ses caractéristiques :

— la condition à remplir pour faire la mesure en un point au quatrième ordre près.

— l'amplitude du terme fondamental de la f.é.m. induite lorsque cette condition est remplie.

— l'erreur relative  $\varepsilon$  sur la mesure, due aux dimensions finies de la bobine.

a) *Mesure de B.* — Fil de Cu émaillé, diamètre 0,025 mm.



FIG. 10.

— Deux solénoïdes de 8 cm de long, consistant en deux couches de  $n = 328$  spires par centimètre, bobinées l'une sur l'autre et décalées de

$$2l \simeq r$$

Le support de bobinage est un tube de verre de rayon  $r = 1$  mm ou une tige de quartz de rayon  $r = 0,4$  mm.

— F.é.m.

$$\mathcal{E}_1(z) = 2n\pi r^2 \omega Z \cdot B(z). \quad (79)$$

— Erreur relative due aux dimensions du bobinage.

$$\varepsilon \simeq \frac{1}{2400} \frac{B'''}{B} - \frac{1}{128} \frac{B^{(4)}}{B}, \quad \text{pour } r = 1 \text{ mm.}$$

$$\varepsilon \simeq \frac{1}{15000} \frac{B'''}{B} - 2 \cdot 10^{-4} \frac{B^{(4)}}{B}, \quad \text{pour } r = 0,4 \text{ mm.}$$

Pour évaluer ces erreurs en pourcentage de la grandeur mesurée, il faut soit connaître la fonction  $B(z)$  représentant la répartition de l'induction sur l'axe, soit admettre pour  $B(z)$  une fonction la plus voisine possible de la répartition réelle. Cette évaluation quantitative sera faite au chapitre IV, § 1.

b) *Mesure de B'* — Même fil que ci-dessus. Gorge creusée dans un rondin de plexiglass de 1 millimètre de rayon

$l = 0,4$  mm.  $r_i < 0,2$  mm.  $r_e \gg r_i$  de sorte que  $r_e^n - r_i^n \simeq R^n$ , à partir de la puissance  $n = 3$ .

— On doit avoir  $R = 1,491 l \rightarrow R = 0,6$  mm.

$N = 427$  spires

— F.é.m.

$$\varepsilon_1(z) = \frac{N}{3} \pi R^2 \omega Z \cdot B'(z). \quad (80)$$

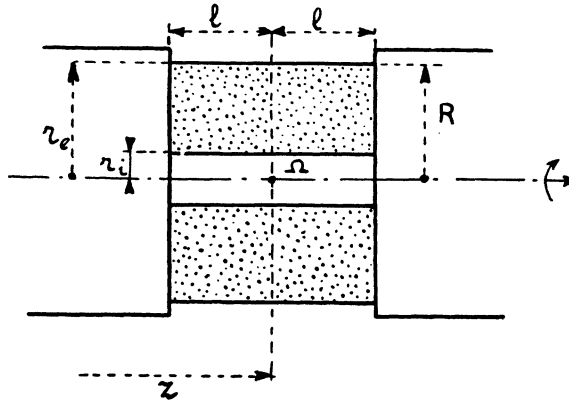


FIG. 11.

— Erreur relative due aux dimensions du bobinage.

$$\varepsilon = -0,0084 \cdot l^2 \frac{B^{(s)}}{B'} \cong -2,16 \cdot 10^{-4} \frac{B^{(s)}}{B'}.$$

L'évaluation quantitative de  $\varepsilon$  sera faite au chapitre IV.

c) *Mesure de B''*. — Même fil que ci-dessus. Gorges creusées dans le même rondin de plexiglass que pour la bobine précédente (mesure de B').

$$l = 0,2 \text{ mm}; \quad h = 2l = 0,4 \text{ mm}; \quad (r_i < 0,2 \text{ mm}).$$

— On doit avoir

$$R = \frac{10}{3} l = 3,33 l \quad \rightarrow \quad R = 0,66 \text{ mm}.$$

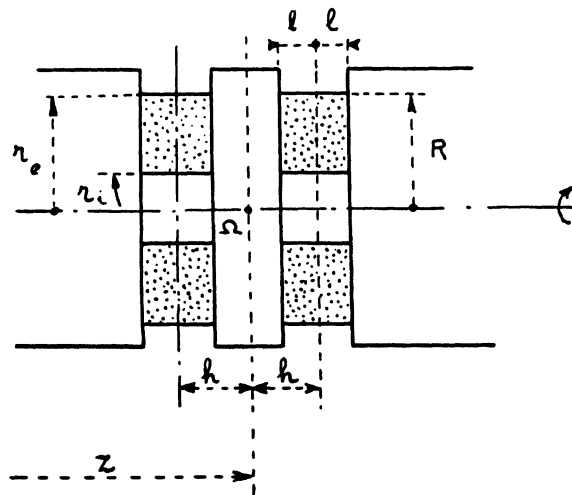


FIG. 12.

$N = 257$  spires pour chaque bobine.

— *F. é. m.*

$$\mathcal{E}_1''(z) = \frac{N}{3} \pi R^2 \omega Z. 2h. B''(z). \quad (21)$$

— Erreur relative due aux dimensions du bobinage

$$\varepsilon = -0,165. l' \frac{B^{(6)}}{B''} \cong -2,64.10^{-4} \frac{B^{(6)}}{B''}.$$

L'évaluation quantitative de  $\varepsilon$  sera faite au chapitre IV.

---



## CHAPITRE III.

### DESCRIPTION DU DISPOSITIF — EMPLOI DE LA MÉTHODE

#### A. — DESCRIPTION DU DISPOSITIF

##### 1. — Construction des bobinages.

La réalisation de bobines très petites est assez délicate et, pour satisfaire au mieux les conditions imposées par la théorie, le bobinage doit être fait avec le plus grand soin.

C'est un travail de patience pour lequel M. Louis Durrieu nous a particulièrement bien aidé : je l'en remercie bien vivement. Grâce à un petit matériel spécialisé qu'il a adapté à ce genre de construction, la réalisation de tels bobinages ne présente plus maintenant de difficulté majeure.

Voici le mode opératoire :

1° Le fil de cuivre émaillé de 2,5/100<sup>e</sup> de mm que nous utilisons est livré par le fabricant en bobines un peu plus grosses que des bobines de fil à coudre; les spires n'y sont pas rangées mais se chevauchent et quelquefois pénètrent légèrement à l'intérieur de la masse de fil sous-jacente : il n'est pas commode d'extraire directement le fil de la bobine avec une tension constante bien déterminée. Or, cela est nécessaire pour faire un bobinage correct. On procède alors ainsi.

On enroule d'abord le fil sur une poulie P, de 10 cm de diamètre (*fig. 13*). Celle-ci peut tourner très librement sur deux paliers fixés au mur, en face de la table de travail. Le nombre de tours que doit faire cette poulie lors de l'enroulement dépend de la longueur de fil dont on aura besoin, déterminée par avance.

La tension du fil  $f$  est réglée au moyen de poids  $p$ , suspendus à la ficelle F qui s'enroule sur l'axe de la poulie. La figure 13 précise les éléments principaux de l'installation.

La bobineuse B est pourvue de mandrins M permettant d'y adapter des tiges T de différents diamètres, et d'un compte tours C. La main gauche de l'opérateur fait tourner la manivelle dans le sens de la flèche; la roue à rochet R empêche le retour en arrière. Le cliquet peut être enlevé pour les cas, assez rares, où il faut débobiner un ou plusieurs tours.

Lorsque le bobinage est fait sur une grande longueur, loin du mandrin M, la tension du fil est suffisante pour faire fléchir la tige T : on maintient cette dernière parallèle à l'axe de la bobineuse au moyen du petit support S pourvu d'un pied très lourd.

L'axe de la bobineuse n'est pas parallèle à celui de la poulie; on incline légèrement l'ensemble pour que les spires soient naturellement jointives, sans se chevaucher; ce que l'on vérifie en visant le point de tangence  $t$  du fil et de la tige avec un microscope binoculaire.

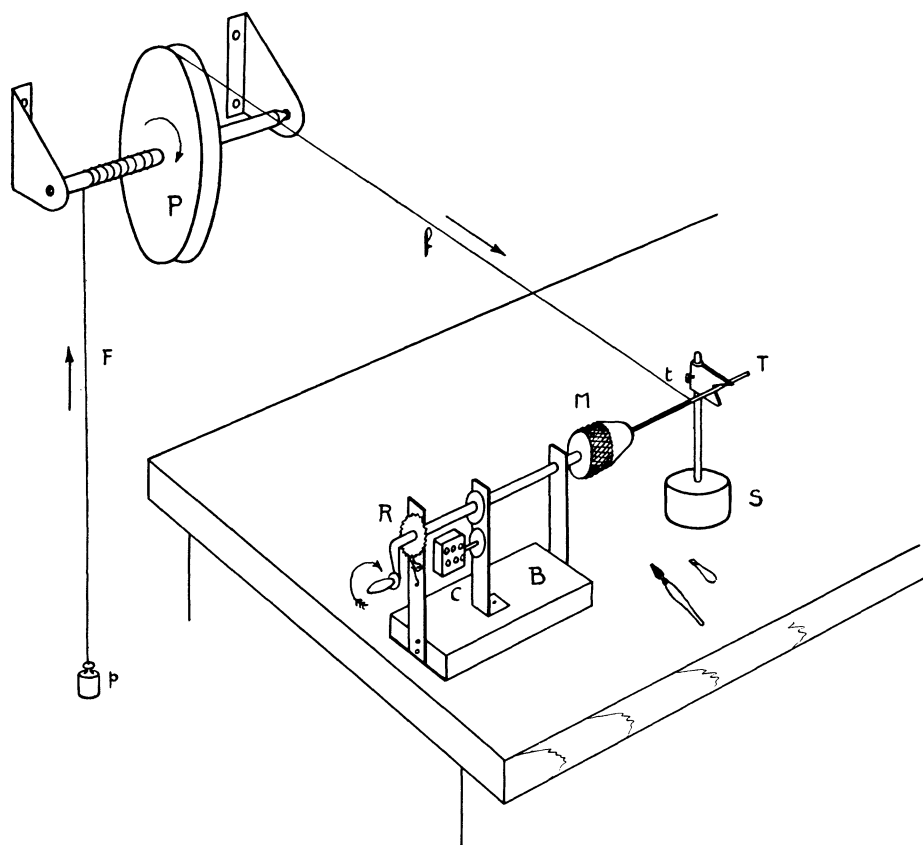


FIG. 13.

Appareil à construire les bobines. Principe.

Ainsi, rien qu'en tournant la manivelle, on réalise un bobinage parfait, lorsque tout est propre. Mais des poussières en suspension dans l'air viennent se coller sur le fil  $f$ , sur la tige  $T$ , ont tendance à se glisser entre les spires. Il faut l'éviter à tout prix, car à cette échelle, il est des poussières plus grosses que le fil : on les enlève avec un pinceau pour aquarelle, à poils fins et très souples, tenu dans la main droite. Et pour réunir deux spires accidentellement écartées, une petite spatule de buis complète utilement le matériel; mais il faut la manœuvrer sous le microscope, avec beaucoup de précautions...

2° Pour la mesure de  $B_z$ , la sonde de 0,4 mm de rayon est bobinée, seule, sur une tige de quartz de section la plus uniforme possible. La sonde de 1 mm de rayon, bobinée sur un tube de verre, porte à l'une de ses extrémités un téton de plexiglass, support des bobines servant à mesurer  $B'_z$  et  $B''_z$ .

Pour la construction de cet ensemble, l'ordre des opérations est le suivant.

On commence par choisir un tube de verre, le plus circulaire possible et dont le diamètre reste invariable sur la plus grande longueur possible. Cela est nécessaire pour satisfaire au principe même de la mesure directe de  $B_z$  : la force électromotrice induite n'est proportionnelle à l'induction à une extrémité du solénoïde, que si le rayon de ce dernier est indépendant de  $z$ . Nous verrons d'ailleurs plus loin que l'influence d'une variation du rayon d'une extrémité à l'autre est très petite : l'erreur relative correspondante sur la mesure de  $B_z$  est complètement négligeable si l'on vérifie au palmer que le diamètre est pratiquement le même sur toute la longueur utile (une dizaine de centimètres). Il faut évidemment aussi que l'axe du tube soit le plus rectiligne possible : on s'en assure en le faisant rouler à la main sur un plan poli (morceau de glace de vitrine), ce qui renseigne en même temps sur les défauts à la symétrie de révolution.

On construit ensuite la longue bobine au moyen de l'appareil décrit ci-dessus. Les trois ou quatre premiers tours sont bobinés sur le mandrin M, pour réserver un morceau de fil qui ira rejoindre des cosses à souder (voir ci-dessous). Encore quelques tours, espacés, sur la tige T, tout près du mandrin, et l'on fixe ce qui sera le départ de la première spire du bobinage proprement dit, à l'aide d'une goutte minuscule de vernis à la gomme laque ne touchant qu'un seul côté du fil (fig. 14).

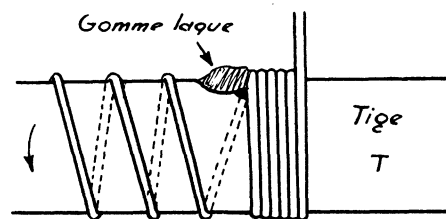


FIG. 14.

Le bobinage à spires jointives est ensuite fait, sur une longueur de 8 à 10 cm, puis on revient en arrière sur cette première couche et l'on s'arrête à une distance du point de départ égale au rayon du tube (plus  $\varepsilon/2$  en principe, — formule (41) — c'est-à-dire plus la longueur minimum réalisable, compte tenu de l'épaisseur du fil).

Cette opération est contrôlée à l'aide d'un microscope qui peut être

déplacé, perpendiculairement à son axe, au moyen d'une vis micrométrique étalonnée.

La fin de la dernière spire est fixée à la gomme laque, comme le début de la première; les premiers tours inutiles sont débobinés, on tend les fils d'entrée et de sortie du bobinage le long d'une génératrice du tube (pour éviter une force électromotrice parasite) et on soude leurs extrémités à de petites cosses fixées sur un support isolant spécial.

La figure 15 précise le montage de l'ensemble, dont on verra une photographie sur la figure 18.

3° On réalise ensuite les bobines  $\beta'$  et ( $\beta''_1, \beta''_2$ ) pour la mesure de  $B'$  et  $B''$ . Leur support est fait au tour, dans un rondin de plexiglass de même diamètre que le tube, en utilisant deux outils, de 0,8 mm et de 0,4 mm de largeur, spécialement taillés pour cela.

On bobine à spires jointives et l'on s'arrête lorsque le diamètre extérieur du bobinage, mesuré avec le microscope à vis micrométrique, atteint la valeur prévue par la théorie. Pour consolider ces bobines une fois terminées, le vide subsistant dans les gorges est comblé à l'arcanson.

Ce dernier matériau est d'ailleurs très utile au cours de tout ce travail, pour fixer les extrémités du fil sur la bobine ou sur la poulie, pour faire tenir la languette de presspahn sur la tige T (fig. 15), etc... : il a l'avantage

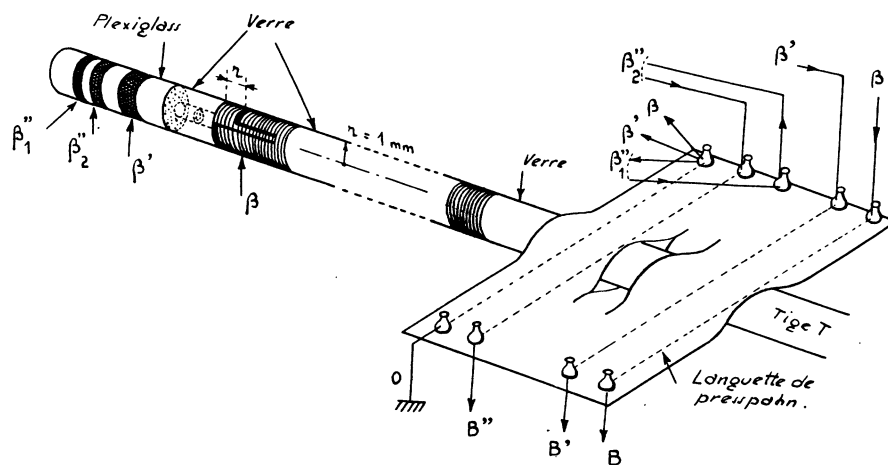


FIG. 15.

de se manipuler facilement, de fondre à température relativement basse, ce qui permet de le mettre ou de l'enlever à l'aide d'un petit fer légèrement chauffé au gaz. En outre, à la température ordinaire, il résiste parfaitement bien aux vibrations, ce qui est indispensable dans notre méthode.

Le téton de plexiglass est ensuite emmanché à l'extrémité du tube de verre (*fig. 15*) et fixé contre ce dernier avec une colle insensible aux vibrations (« colle de haut-parleur » du commerce). Les fils sont tendus dans l'axe du tube, tenus par une goutte d'arcanson, et soudés aux cosses de la languette isolante comme l'indique la *figure 15*.

Enfin, lorsque tout cela est terminé, on passe sur l'ensemble une couche de vernis à la gomme laque qu'on laisse sécher parfaitement. La *figure 16* montre une photographie de la sonde de 0,4 mm. de rayon pour la mesure de  $B$  dans les lentilles très puissantes.

Les bobines sont alors prêtes à être montées sur le système vibrant du dispositif de mesure, que nous allons décrire au paragraphe suivant.

## 2. — Le système vibrant.

Il faut imposer aux bobines le long de leur axe une vibration sinusoïdale de très petite amplitude  $Z$ . La f.é.m. étant proportionnelle au produit  $\omega Z$ , on devra utiliser une fréquence  $f = \omega/2\pi$  élevée pour obtenir une bonne sensibilité. Par exemple, avec la longue bobine décrite ci-dessus ( $n = 328$  spires/cm  $r = 1$  mm) dans une induction de l'ordre de  $1 \text{ Wb/m}^2 = 10\,000$  gauss, une f.é.m. de 10 mV environ correspond à  $f Z \approx 10 \text{ mm/s}$  : si on prend  $Z \approx 0,01$  mm on obtient  $f \approx 1000$  p/s.

Ce sont précisément là les ordres de grandeur courants des amplitudes et fréquences de vibration utilisées dans les hauts parleurs électrodynamiques de moyenne puissance (2 à 4 watts). Aussi avons-nous transformé un de ces appareils pour en faire le système vibrant de notre dispositif (*fig. 17* et *18*). On n'a conservé que l'électro-aimant (14) et la bobine mobile (13). Pour éviter de dissiper une partie de la puissance du générateur sous forme sonore et pouvoir par conséquent gagner en amplitude, la membrane a été remplacée par la lame d'acier (11). Celle-ci doit être soigneusement encastree aux deux bouts afin d'éviter des vibrations parasites. On y arrive en la serrant fortement entre deux lames de laiton, comme l'indiquent les *figures 17* et *18*.

La tige de verre (5) portant les bobines exploratrices est fixée sur la plaque vibrante au moyen du petit bouchon de liège (12). Ce dernier ainsi que la bobine mobile (13) sont collés de part et d'autre de la lame (11); il faut centrer de façon parfaite ces deux pièces (tige 5 et bobine 13) si on veut que l'appareil fonctionne correctement, sans frottements et sans vibrations transversales. C'est sans doute le point le plus délicat du montage de cet ensemble, nécessitant un soin tout particulier. Cependant, après quelques essais systématiques, on obtient un centrage très correct.

(4) est le téton de plexiglass portant les bobines  $\beta'$  et  $\beta''$  (*fig. 15* et *17*). Les fils provenant de ces bobines et du solénoïde  $\beta$  sont soudés à de petites cosses fixées sur la languette de presspahn (10). Ces cosses sont réunies par

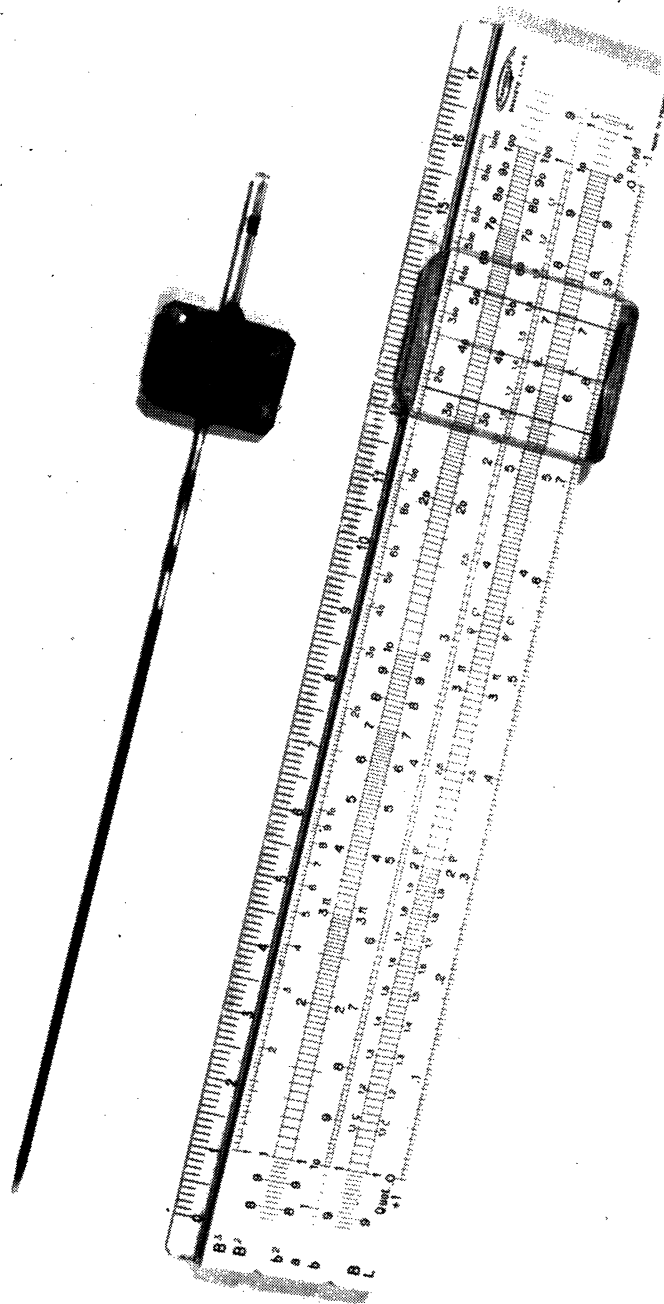


FIG. 16.

un fil blindé aux bornes marquées B, B' et B'' (fig. 18), où l'on connecte successivement le milliovoltmètre de mesure.

L'électro-aimant (14) est fixé sur un support (15) porté par un chariot à glissière. Celui-ci (fig. 18), mû par une vis dont le pas est de 1 mm, permet de déplacer la tige (5) suivant son axe pour explorer le champ. Les déplacements sont mesurés soit au moyen d'un micromètre objectif, fixé sur le chariot mobile et visé par un microscope à long foyer, soit par les tours et fractions de tours de la vis lus sur un tambour gradué en 200 parties.

### 3. — L'ensemble de l'appareil.

Les figures 19 et 20 représentent un schéma et une photographie d'ensemble de l'appareil. Toutes les tensions d'alimentation sont préalablement stabilisées par le stabilisateur S, pour éviter les variations de fréquence et d'amplitude.

Pour cette même raison il est recommandé de mettre en marche l'ensemble des appareils électroniques (générateur, amplificateurs), un bon moment avant de faire une mesure, afin que les différents éléments (lampes, condensateurs...) aient le temps de bien prendre leur température d'équilibre. Le plus longtemps possible est le mieux : une demi-heure à une heure par exemple.

Les vibrations, de fréquence voisine de 1000 p/s, sont entretenues au moyen du générateur B F possédant le stabilisateur électronique supplé-

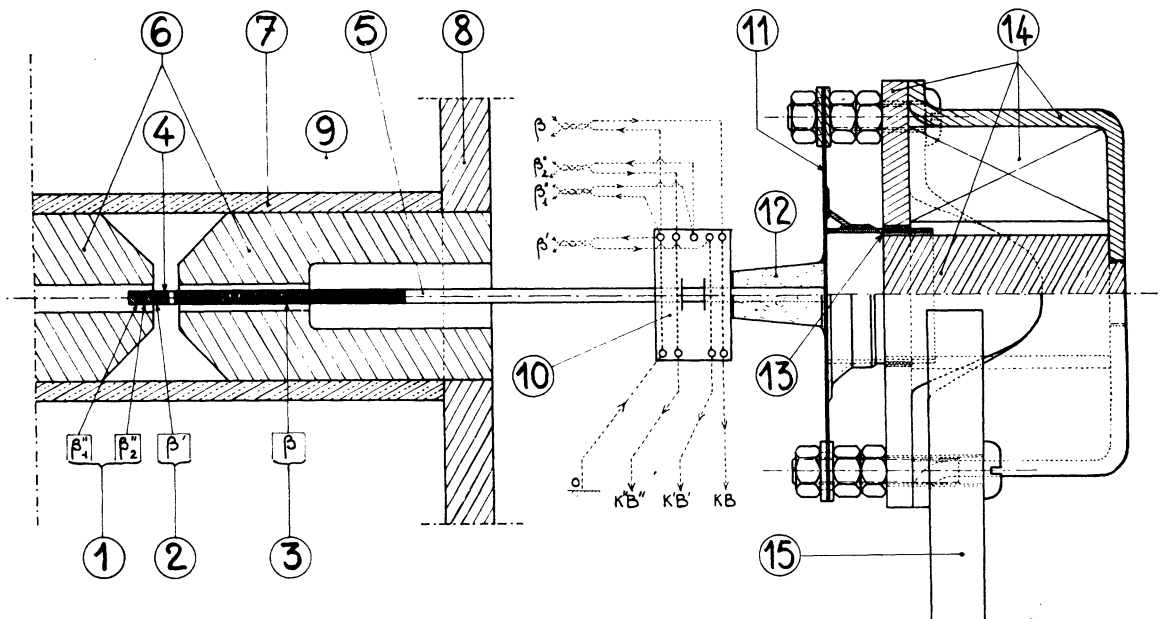


FIG. 17.



FIG. 18.



mentaire  $S_1$ . Ce générateur est relié à la bobine mobile (13) du système vibrant par l'intermédiaire de l'amplificateur de puissance  $A_1$ .

Cet amplificateur a été construit par nos soins sur un modèle classique. La faible puissance demandée et le fait qu'on n'a pas besoin d'une linéarité correcte ni en fréquence ni en amplitude (voir étude critique, chapitre V) simplifient au maximum sa construction : une simple pentode suffit, débitant sur le primaire d'un transformateur dont le secondaire est adapté à l'impédance de la bobine mobile du système vibrant. La tension d'entrée, sur la grille de contrôle de la pentode, est réglée au moyen d'un potentiomètre de 50 000 ohms branché à la sortie du générateur.

La fréquence peut être contrôlée au moyen de courbes de Lissajous, obtenues sur un petit tube à rayons cathodiques T, à partir de la tension issue du générateur et de celle que fournit un diapason auto-entretenu D.

Ce dernier est un simple  $La_3$  d'accordeur (fréquence 435 p/s). Son entretien est obtenu de la manière suivante : tout près de chacune de ses branches, et se faisant face, on a placé les pôles des électro-aimants de deux

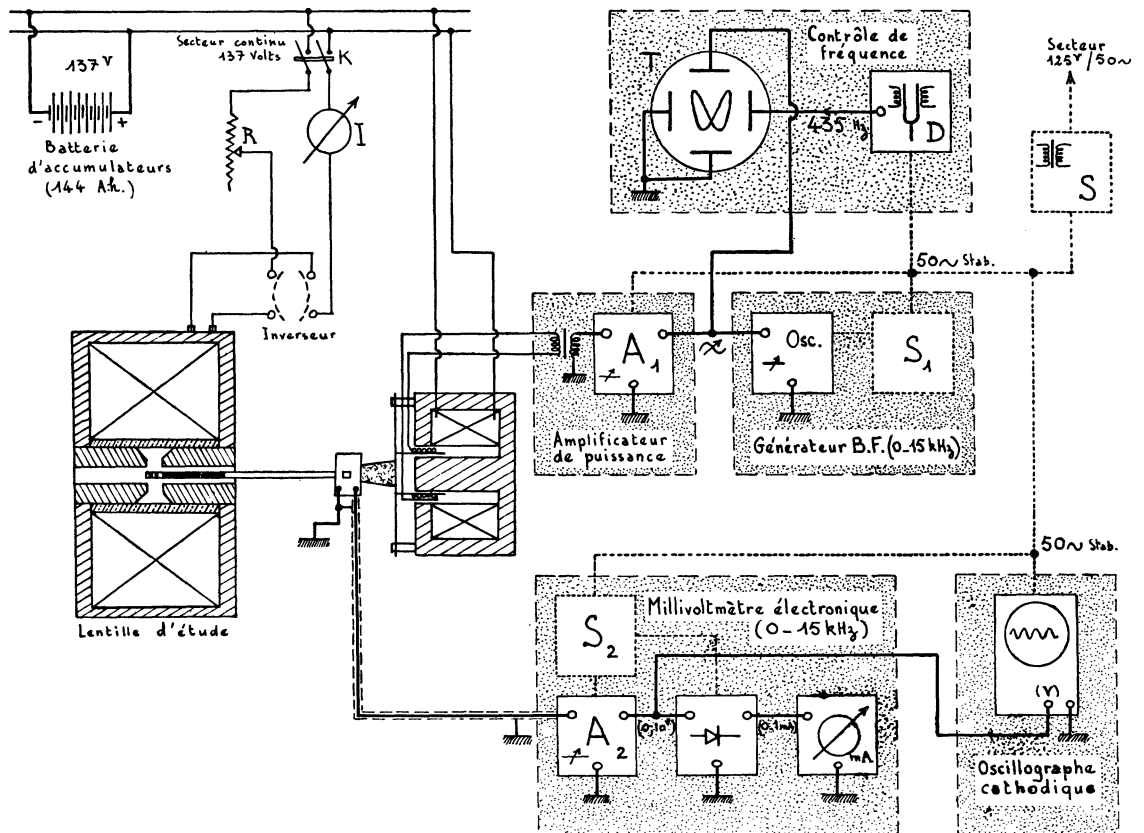


FIG. 19.

écouteurs téléphoniques (voir figure 20 en haut à gauche). L'entrefer est inférieur à 1 mm., et les bobines excitatrices de chacun des écouteurs, sont placées respectivement dans le circuit grille et le circuit plaque d'une lampe de radio : si le sens de connexion des bobinages aux électrodes de la lampe est convenable, l'ensemble constitue un oscillateur électronique qui s'entretient automatiquement sur la fréquence propre du diapason. Ses variations de fréquence ne dépendent que des variations de la température ambiante : elles sont très faibles au cours d'une mesure.

Pour contrôler l'amplitude on mesure, avec un voltmètre électronique, la f.é.m. fournie par un cristal piézo-électrique (sel de seignette) collé sur la lame d'acier (11) à la colle de haut-parleur : un cristal tiré d'une simple tête de « pick-up » du commerce convient très bien.

Remarquons que le contrôle de la tension d'attaque de la bobine mobile du moteur de haut-parleur ne constituerait pas un moyen sérieux pour vérifier la constance de l'amplitude des vibrations : on est en présence, en effet, d'un système électromécanique vibrant dont l'amplitude d'oscillation dépend de plusieurs paramètres tels que la fréquence, le courant magnétisant de l'électro-aimant du haut-parleur, la perméabilité de son fer,... facteurs qui peuvent se modifier accidentellement au cours du temps, sans que change la tension alternative appliquée à la bobine mobile. Par contre la force électro-motrice piézo-électrique délivrée par le cristal de sel de seignette (de l'ordre de quelques volts) est directement liée à la déformation de la lame (11) (*fig. 17 et 18*), donc à l'amplitude des vibrations *mécaniques*.

Avec les bobines décrites ci-dessus, la sensibilité de la méthode est telle que les f.é.m. induites peuvent être mesurées aisément au moyen d'un voltmètre électronique. Celui que nous utilisons permet d'apprécier 1/200° mV. Cette f.é.m. correspond à une induction d'environ 4 gauss pour une fréquence de 1000 p/s, une amplitude  $Z = 0,01$  mm et la bobine de 1 mm de rayon. Cette sensibilité est très suffisante pour étudier les lentilles usuelles.

L'amplificateur  $A_2$  du milliovoltmètre, alimenté à travers un stabilisateur électronique supplémentaire  $S_2$ , possède une sortie accessible. Cette circonstance permet d'y brancher aisément un oscillographe cathodique afin de vérifier la forme de la f.é.m. mesurée.

Enfin, en parallèle sur le milliampèremètre à cadre mobile du voltmètre électronique, nous pouvons placer un potentiomètre millivoltmètre enregistreur (Meci, type « Speedomax »). Le papier de cet enregistreur est déplacé à vitesse constante au moyen d'un moteur synchrone. A l'aide d'un autre moteur synchrone et d'un réducteur de vitesse on peut déplacer très lentement, à vitesse constante, les bobines le long de leur axe : on obtient ainsi directement sur le papier de l'enregistreur, et à une certaine échelle que l'on peut choisir, les graphiques des fonctions  $B(z)$ ,  $|B'(z)|$  et  $|B''(z)|$ .

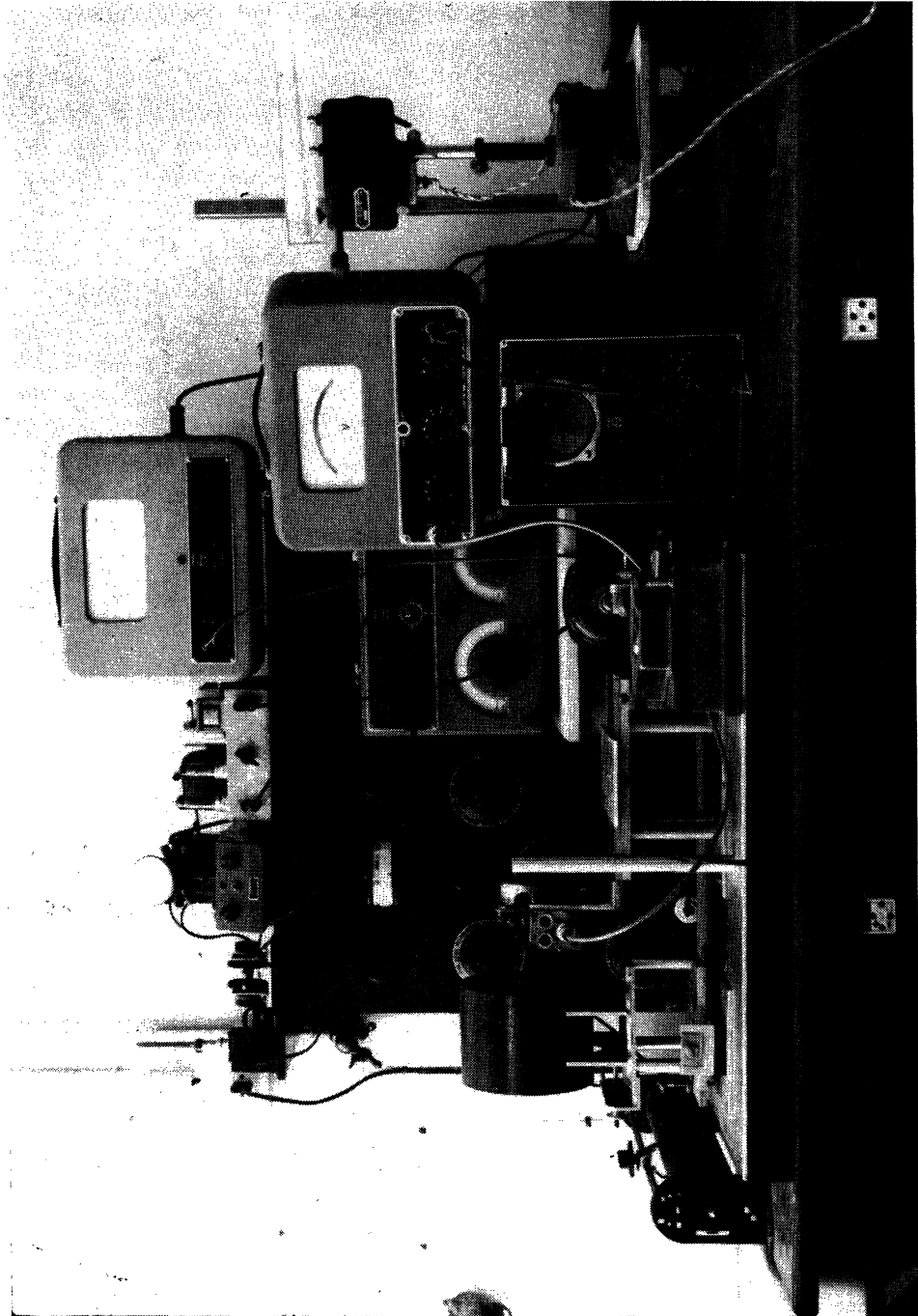


FIG. 20.

## B. — EMPLOI DE LA MÉTHODE

## 1. — Détermination des coefficients de proportionnalité entre les différentes forces électromotrices et B, B', B''.

1° La méthode ci-dessus fournit aisément B, B', B'' sur l'axe de la lentille, en valeurs relatives, par les relations (79), (80) et (81).

$$\xi_1 = K \cdot B = 2 n \pi r^2 \omega Z \cdot B, \quad (79)$$

$$\xi'_1 = K' \cdot B' = \frac{N}{3} \pi R^2 \omega Z \cdot B', \quad (80)$$

$$\xi''_1 = K'' \cdot B'' = \frac{N}{3} \pi R^2 2 h \omega Z \cdot B'' \quad (81)$$

K, K', K'' sont des constantes qu'il faut déterminer si l'on veut obtenir B, B', B'' par exemple en gauss, gauss/mm, gauss/mm/mm. Pour éviter les mesures délicates de  $\omega$  et de Z, intervenant dans ces constantes on procède de la manière suivante.

*Détermination de K.* — Deux méthodes peuvent être utilisées :

a) On mesure l'aire  $\Sigma$ , comprise entre la courbe  $E_1(z)$  construite à une échelle convenable, et l'axe des z :

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1 dz = K \int_{-\infty}^{+\infty} B dz. \quad (82)$$

La dernière intégrale est fournie soit par le théorème d'Ampère si l'on connaît le nombre de spires de la lentille et le courant qui les traverse, soit par une mesure au galvanomètre balistique : le solénoïde  $\beta$  immobile, est disposé de manière que ses extrémités soient de part et d'autre de l'entrefer dans des régions de champ nul (1).

La variation du flux à travers les spires, par inversion du courant dans la lentille a pour valeur

$$\Delta \Phi = 4\pi n r^2 \int_{-\infty}^{+\infty} B dz. \quad (83)$$

b) On mesure directement  $B_0$  au centre du champ, en déterminant au galvanomètre balistique la variation du flux d'induction  $\Delta' \Phi$  à travers la bobine  $\beta'$ , par inversion du courant dans la lentille :

$$\Delta' \Phi = \frac{N}{3} \pi R^2 \cdot 2 B_0 \quad (84)$$

*Détermination de K' et K''.* — Connaissant B, elle se fait d'une manière tout à fait analogue à la première méthode de détermination de K. Pour

(1) Cette condition n'est pas nécessaire. Dans certains cas (lentilles fortement saturées), le champ peut avoir des valeurs non nulles aux extrémités A et A' du solénoïde. On mesure alors l'aire  $\Sigma$ , comprise entre les points A et A' et la variation  $\Delta_1 \Phi$  correspondante.

avoir  $K'$ , on mesure l'aire  $\Sigma'$  comprise entre la courbe  $E'_1(z)$  et l'axe des  $z$ , entre  $-\infty$  et le centre du champ, par exemple :

$$\Sigma' = \int_{-\infty}^0 E'_1 dz = K' \int_{-\infty}^0 B' dz = K' \cdot B_0 \quad (85)$$

On procède exactement de même pour  $K''$ .

2° Nous avons supposé que les deux bobines servant à la mesure de  $B''$  avaient exactement la même surface totale  $S = \frac{N}{3} \pi R^2$ .

En réalité malgré tout le soin qu'on peut apporter à la fabrication du bobinage, il n'en est jamais ainsi : il existe toujours une petite différence de surface qui entraîne dans la mesure une erreur proportionnelle à  $B'$ ,  $B''$ ...

Si l'on recommence le calcul de la f.é.m. induite en posant que les surfaces des deux bobines  $\beta''_1$  et  $\beta''_2$  sont respectivement  $S_1 = S$ ,  $S_2 = S + s$ , avec  $s \ll S$  ( $s > 0$  ou  $< 0$ ), on obtient pour l'amplitude du terme fondamental

$$\begin{aligned} \mathcal{E}''_1 &= \left( S + \frac{s}{2} \right) \omega Z 2h \left[ B'' + \left( \frac{h^2 + l^2}{6} - \frac{3R^2}{40} \right) B^{(4)} + \dots \right] \\ &+ s \omega Z \left[ B' + \left( \frac{l^2}{6} - \frac{3R^2}{40} - \frac{h^2}{2} \right) B''' + \dots \right]. \end{aligned} \quad (86)$$

a) Dans un champ symétrique la correction est immédiate : les dérivées paires et impaires de  $B$  sont respectivement des fonctions paires et impaires de  $z$ . On peut alors, numériquement ou graphiquement séparer les résultats en une partie symétrique

$$\begin{aligned} \mathcal{E}''_{1,s}(z) &= \frac{1}{2} \left[ E''_1(z) + E''_1(-z) \right] \\ &= \left( S + \frac{s}{2} \right) \omega Z 2h \left[ B'' + \left( \frac{h^2 + l^2}{6} - \frac{3R^2}{40} \right) B^{(4)} + \dots \right] \\ &= E''_{1,s}(-z), \end{aligned} \quad (87)$$

qui correspond à une mesure correcte avec deux surfaces rigoureusement égales, et en une partie antisymétrique

$$\begin{aligned} \mathcal{E}''_{1,\Delta}(z) &= \frac{1}{2} \left[ \mathcal{E}''_1(z) - \mathcal{E}''_1(-z) \right] \\ &= s \omega Z [B' + \dots] = -\mathcal{E}''_{1,\Delta}(-z), \end{aligned} \quad (88)$$

qui permet de déterminer la valeur et le signe du terme correctif  $s$ , lorsque  $B'$  et  $B''$  sont connus.

b) Dans un champ dissymétrique, on peut utiliser une méthode semblable, mais en effectuant une autre série de mesures, avec la même fréquence et la même amplitude de vibration, après retournement de la lentille. On peut également mesurer l'aire

$$\Sigma'' = \int_{-\infty}^0 \mathcal{E}''_1 dz, \quad \text{ou} \quad \int_0^{\infty} \mathcal{E}''_1 dz,$$

l'origine O étant prise au point où B' s'annule ( $B = B_{\max} = B_0$ ).

On a alors

$$|\Sigma''| = s \omega Z. B_0,$$

ce qui permet d'effectuer la correction quand  $B_0$ , B' et le signe de  $s$  sont connus.

## 2. — Remarque sur l'utilisation du galvanomètre balistique.

Pour les mesures de variation du flux précisées ci-dessus, on utilise le montage suivant : (fig. 21).

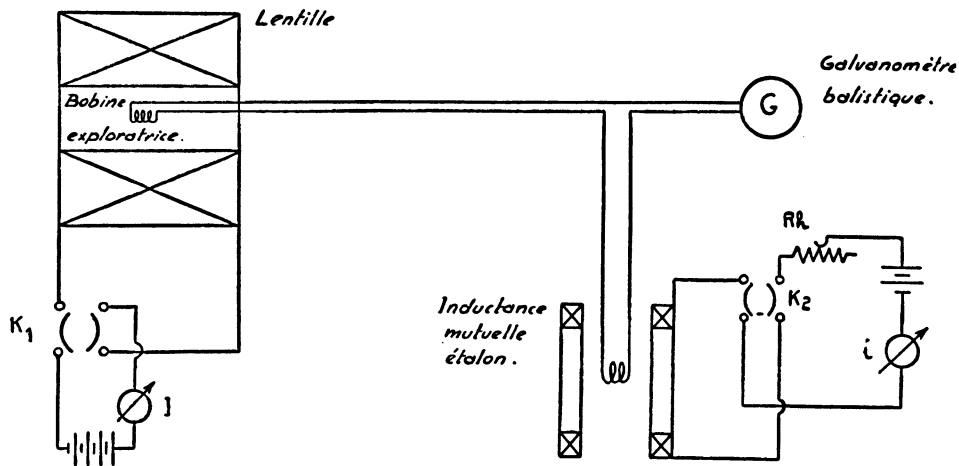


FIG. 21.

On place en série avec la bobine exploratrice le cadre mobile d'un galvanomètre balistique sensible et le secondaire d'une inductance mutuelle étalon. (Coefficient d'induction mutuelle  $M = 0,0272$  Hy.) On règle le courant  $i$  dans le primaire jusqu'à ce que les manœuvres des inverseurs  $K_1$  et  $K_2$  conduisent à la même élongation maximum du balistique : on a alors

$$\Delta\Phi = 2 Mi.$$

En utilisant deux inverseurs à manœuvre simultanée, on pourrait utiliser la méthode proposée par M. G. Dupouy [4] : chercher à opposer (à 95 % par exemple) les deux variations de flux, dans la bobine exploratrice et dans le secondaire de l'inductance; noter les deux valeurs  $i_1$  et  $i_2$  du courant primaire telles que la manœuvre simultanée de  $K_1$  et  $K_2$  donne deux petites déviations du balistique, sensiblement symétriques par rapport au zéro. Le courant pour lequel la compensation des flux est réalisée a pour intensité

$$i = \frac{i_1 + i_2}{2}.$$

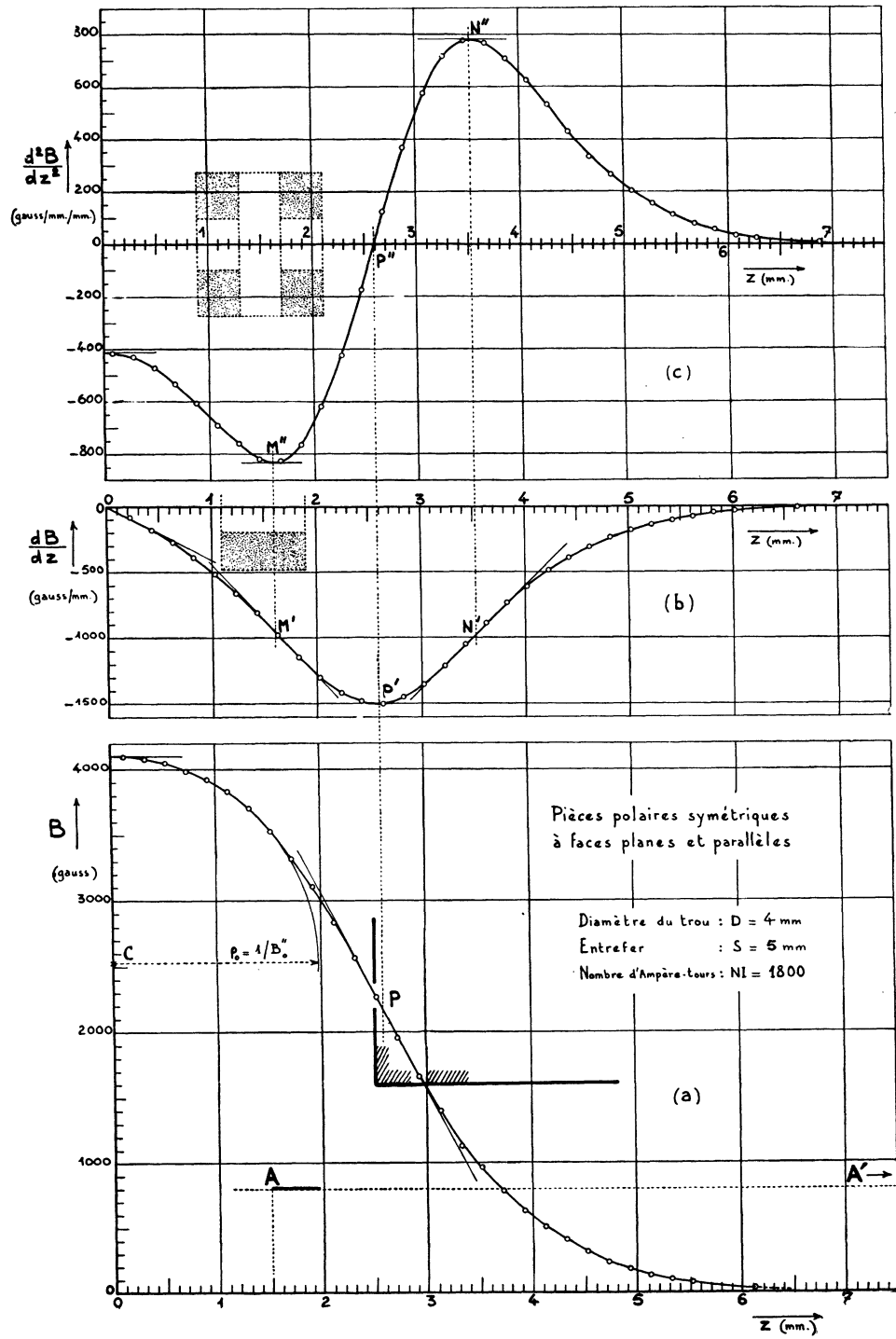
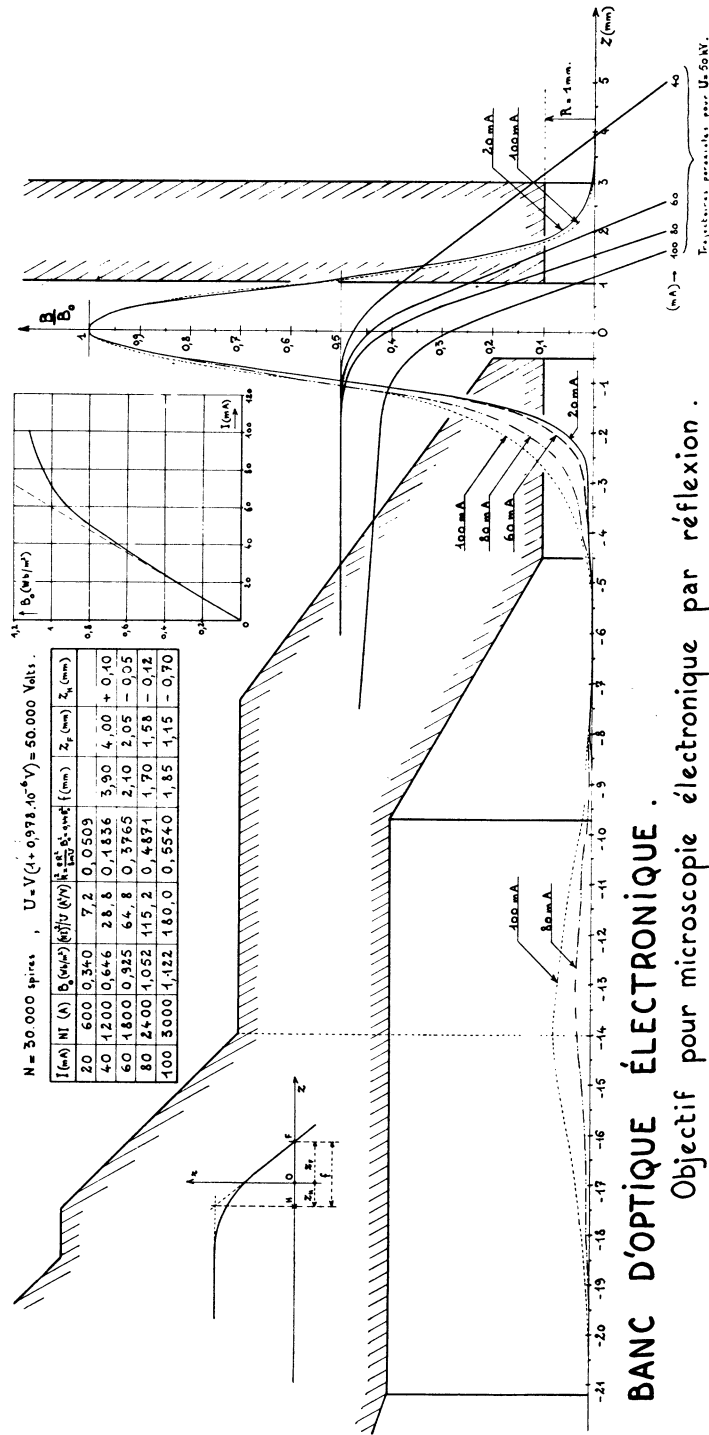


FIG. 22.





## 3. — Exemples de mesure.

1° La figure 22 montre les résultats d'une série de mesures effectuées sur une lentille symétrique non saturée, pour servir de test à la méthode. Les dimensions des pièces polaires et des bobines exploratrices sont préci-

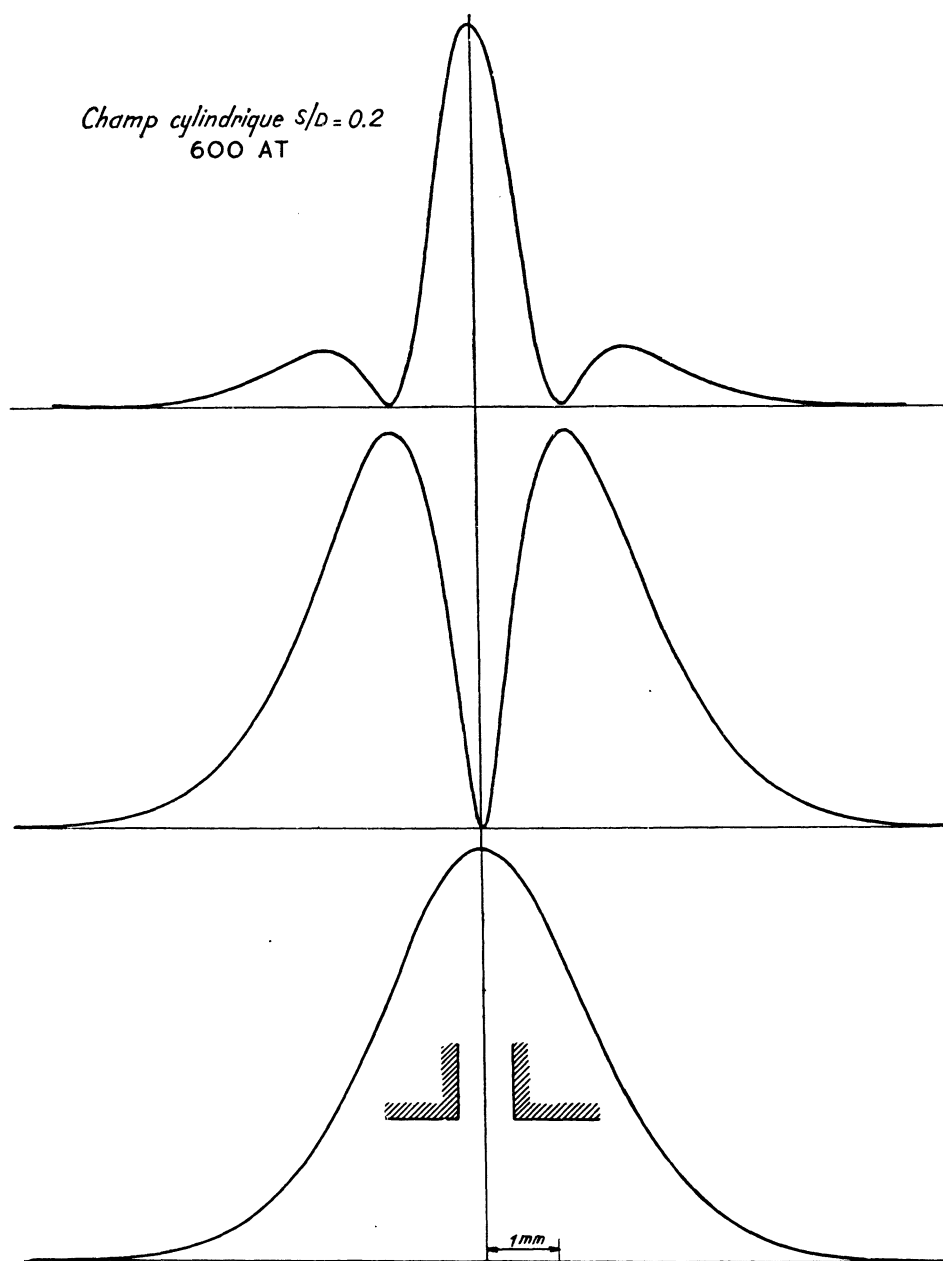


FIG. 24.

sées à l'échelle des  $z$ . On n'a dessiné que la moitié des courbes, puisque la lentille est symétrique.

La connaissance directe de  $B'$  et  $B''$  permet de préciser la position des points d'inflexion  $P$ ,  $M'$ ,  $N'$  et la pente en ces points. En outre la connaissance de  $B''$  permet de préciser la pente à l'origine de  $B'(z)$ , et de déterminer avec précision le rayon de courbure à l'origine de  $B(z)$ .

2° Sur la figure 23 on voit les courbes de champ obtenues pour différentes intensités de courant dans un objectif de microscope électronique par réflexion. Ces mesures, effectuées avec la sonde de 0,4 mm. de rayon, font partie d'une étude complète de l'objectif que nous décrirons dans le chapitre V. Notons simplement ici l'apparition d'un champ non négligeable dans le trou, pour les fortes intensités, au niveau de l'étranglement de la pièce polaire.

3° La figure 24, enfin, est une photographie d'un enregistrement direct des courbes  $B(z)$ ,  $B'(z)$  et  $B''(z)$  dans une lentille cylindrique symétrique non saturée. On notera la concordance parfaite des zéros de  $B''$  avec les maxima de  $B'$  et les points d'inflexion de  $B$ . Cet enregistrement fait partie d'une étude des lentilles cylindriques dont les principaux résultats sont donnés dans le chapitre V.

---

## CHAPITRE IV.

### ÉTUDE CRITIQUE DE LA MÉTHODE

Nous allons faire ci-dessous un essai d'évaluation des erreurs de mesure dues à différentes causes qu'il n'est pas possible d'éliminer complètement : dimensions finies des bobines, variation du rayon d'une extrémité à l'autre de la sonde pour la mesure de B, décentrage des bobines, amplitude de vibration finie, vibration non sinusoïdale.

On est conduit à des calculs (formules (63), (68), (78) par exemple) qui supposent la connaissance *a priori* de la fonction B(z) et de ses dérivées. Or, c'est précisément ce que l'on veut mesurer. Nous sommes donc forcés d'adopter, pour la répartition de l'induction sur l'axe de la lentille, un modèle mathématique convenable. Il conviendra au mieux s'il satisfait à deux conditions principales :

a) Il devra se rapprocher le plus possible de la répartition réelle de champ. A ce propos, il faut noter que deux fonctions très voisines en tous leurs points peuvent avoir des dérivées, surtout d'ordre assez élevé, très différentes. Comme les dérivées interviennent dans les calculs, il faut que le modèle soit très bien choisi. Même dans ce cas il y aura toujours, entre les dérivées du modèle et celles de la répartition réelle de B, une différence dont nous ne savons rien. Nous admettons intuitivement qu'elle est d'autant plus grande que la fonction choisie pour B(z) est plus grossièrement approchée; et puisqu'il ne s'agit que de calculer des termes correctifs, nous la négligerons si les courbes représentatives de B(z) et de son modèle sont pratiquement confondues.

b) Ce que l'on veut, c'est surtout une limite supérieure de l'erreur. Pour cela, nous nous placerons dans les conditions les plus défavorables pour la mesure : nous choisirons un champ dont l'étendue axiale est la plus réduite possible. Ce cas se rencontre en pratique dans les lentilles de révolution <sup>(1)</sup> lorsque, pour un trou de diamètre donné dans les pièces polaires, l'entrefer tend vers zéro (sans être rigoureusement nul).

L'expérience ainsi que des calculs précis par itérations successives [5, b] montrent qu'une fonction qui satisfait aux conditions ci-dessus est la suivante :

$$B(z) = \frac{B_0}{\text{ch}^2 \left( 1,315 \frac{z}{R} \right)}$$

---

(1) La topographie de l'induction B(z) y est beaucoup moins « étalée » que dans les lentilles cylindriques.

où  $R$  désigne le rayon du trou percé dans les pièces polaires. Nous adopterons la formule (89) pour le champ, dans tout ce chapitre.

### 1. — Influence des dimensions finies des bobinages.

1° Reprenons les expressions donnant l'erreur relative que les dimensions des bobines introduisent dans la mesure de  $B$ ,  $B'$  et  $B''$  :

$$\text{Mesure de } B \rightarrow \frac{\varepsilon r^3}{8} \frac{B'''}{B} - \frac{r^4}{128} \frac{B^{(4)}}{B}. \quad (68)$$

$r$  est le rayon du solénoïde,  $\varepsilon$  l'épaisseur du fil.  $\left. \begin{array}{l} r = 1 \text{ mm.} \\ \varepsilon = 0,03 \text{ mm.} \end{array} \right\}$

$$\text{Mesure de } B' \rightarrow -0,0084. l^4 \frac{B^{(5)}}{B'}. \quad (63)$$

$l$  est la demi-longueur de la bobine :  $l = 0,4 \text{ mm.}$

$$\text{Mesure de } B'' \rightarrow -0,165. l^4 \frac{B^{(6)}}{B''}. \quad (78)$$

$l$  est la demi-longueur de chacune des deux bobines :  $l = 0,2 \text{ mm.}$

Pour mener plus commodément les calculs, prenons comme nouvelle variable

$$x = 1,315 \frac{z}{R},$$

et considérons la fonction

$$\frac{B}{B_0} = b(x) = \frac{1}{\text{ch}^2 x}. \quad (90)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d^n B_z}{dz^n} &= B_0 \left( \frac{1,315}{R} \right)^n \frac{d^n b}{dx^n}, & \text{d'où} \\ \frac{B'''}{B} &= \left( \frac{1,315}{R} \right)^3 \frac{b'''}{b}, & \frac{B^{(4)}}{B} &= \left( \frac{1,315}{R} \right)^4 \frac{b^{(4)}}{b}, \\ \frac{B^{(5)}}{B'} &= \left( \frac{1,315}{R} \right)^4 \frac{b^{(5)}}{b'}, & \frac{B^{(6)}}{B''} &= \left( \frac{1,315}{R} \right)^4 \frac{b^{(6)}}{b''}. \end{aligned}$$

Dans les seconds membres de ces formules, les dérivées sont prises par rapport à  $x$ . En dérivant successivement (90), on trouve

$$\frac{b''}{b} = 8 \text{ th } x (2 - 3 \text{ th}^2 x), \quad (91)$$

$$\frac{b^{(4)}}{b} = 8 (2 - 15 \text{ th}^2 x + 15 \text{ th}^4 x), \quad (92)$$

$$\frac{b^{(5)}}{b'} = 8 (17 - 60 \text{ th}^2 x + 45 \text{ th}^4 x), \quad (93)$$

$$\frac{b^{(6)}}{b''} = \frac{b^{(5)}}{b'} + 8 \frac{120 \text{ th}^2 x - 300 \text{ th}^4 x + 180 \text{ th}^6 x}{3 \text{ th}^2 x - 1}. \quad (94)$$

Les courbes représentatives de ces fonctions sont tracées sur la figure 25.

2° Comme l'équation différentielle des trajectoires électroniques fait intervenir le carré  $B^2$  de l'induction, ce sont les régions voisines du centre du champ qui ont le plus d'influence sur la courbure de ces trajectoires. Calculons donc l'erreur  $\varepsilon_0$  au centre, lorsque  $R = 2$  mm. ( $1,315^4 \cong 3$ ).

a) *Mesure de B.*

$$[b^{(6)} / b]_0 = 16, \quad \varepsilon_0 = -\frac{1}{128} \cdot 3 \times 16 \left(\frac{r}{R}\right)^4 = -\frac{3}{8} \left(\frac{r}{R}\right)^4.$$

Avec la sonde de 1 mm de rayon on obtient  $\varepsilon_0 \cong -2,3\%$  et seulement  $\varepsilon_0 \cong -0,6\%$  avec la sonde de 0,4 mm de rayon. Il ne faut pas oublier que nous avons considéré un cas limite très défavorable.

En pratique l'entrefer n'est jamais infiniment petit mais le plus souvent du même ordre de grandeur que le diamètre du trou; de sorte que les valeurs de  $\varepsilon_0$  sont environ dix fois plus petites que ci-dessus.

*Remarque :* Si la mesure de B était faite non avec la sonde vibrante mais par une méthode balistique en utilisant la petite bobine qui nous sert à déterminer B', l'erreur serait

$$\varepsilon_0 = -0,0084 \cdot 3 \times 16 \left(\frac{l}{R}\right)^4, \quad \text{soit avec } l = 0,4 \text{ mm,}$$

$\varepsilon_0 = -0,65\%$  c'est-à-dire du même ordre qu'avec la sonde de 0,4 mm de rayon.

b) *Mesure de B'.*

$$[b^{(6)} / b']_0 = 136, \quad \varepsilon_0 = -0,0084 \times 3 \times 136 \left(\frac{l}{R}\right)^4 = -0,55\%.$$

En réalité ce résultat est dénué de sens exactement au centre du champ, où  $B' = 0$ , car alors la sensibilité est insuffisante pour faire des lectures aussi précises. Mais il vaut au voisinage immédiat de ce point; et comme c'est un point d'inflexion, la courbe  $B'(z)$  s'y confond presque avec une droite. Notons en outre (*fig. 25*), que partout ailleurs dans le champ l'erreur est beaucoup plus petite que  $\varepsilon_0$ .

c) *Mesure de B''.*

$$[b^{(6)} / b'']_0 = 136, \quad \varepsilon_0 = -0,165 \times 3 \times 136 \left(\frac{l}{R}\right)^4,$$

soit avec  $l = 0,2$  mm :  $\varepsilon_0 = -0,67\%$ .

Dans une petite région entourant le point où  $B'' = 0$ , l'erreur est beaucoup plus grande que ci-dessus, mais non pas tellement à cause des dimensions des bobines; surtout parce qu'alors la force électromotrice mesurée est quasi nulle.

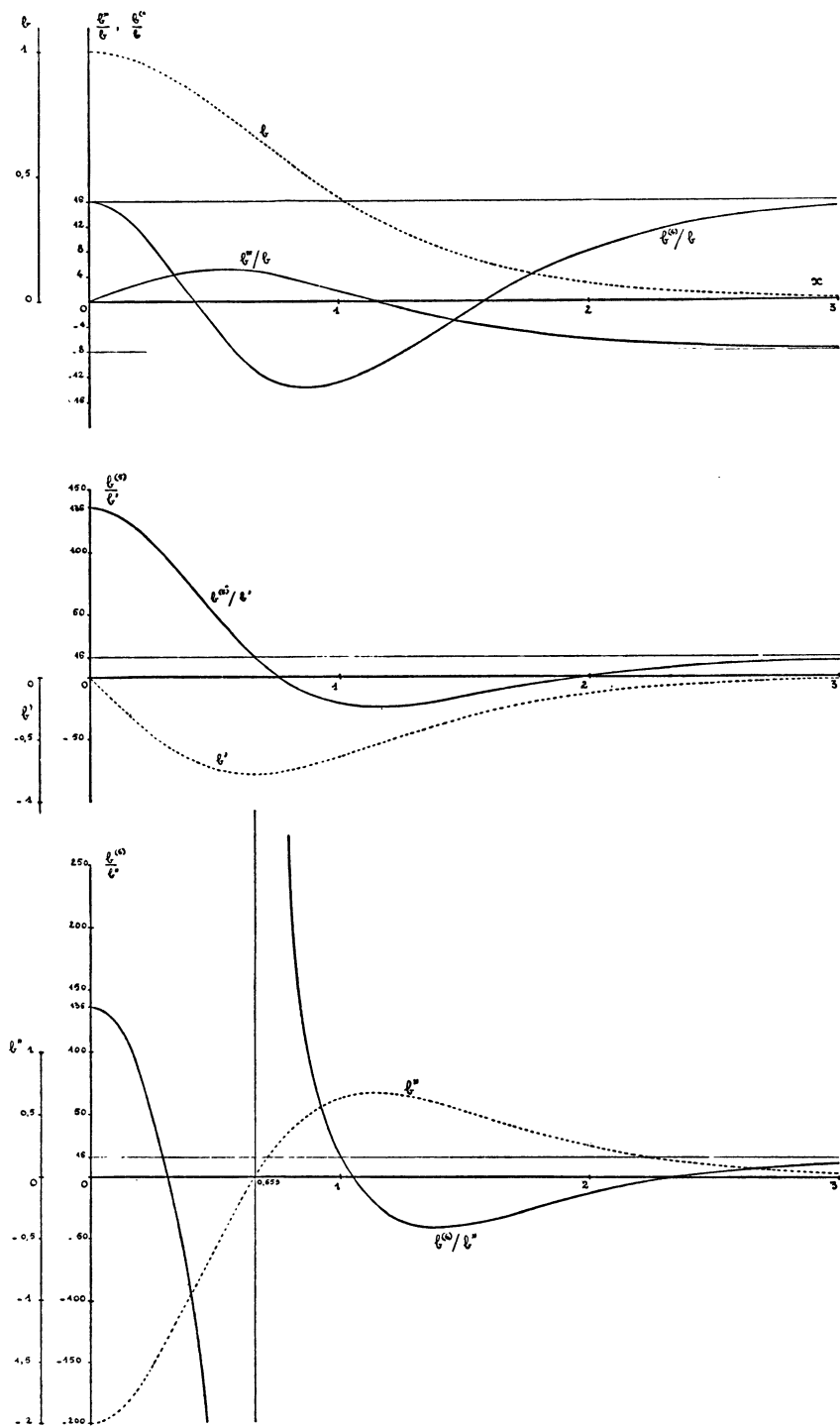


FIG. 25.

Répetons qu'il s'agit là de limites supérieures jamais atteintes dans la pratique, environ dix fois plus grandes que les valeurs courantes. De sorte que l'on peut considérer comme négligeable dans la plupart des cas l'influence des dimensions finies des bobinages.

## 2. — Influence d'une variation du rayon d'un bout à l'autre de la bobine longue.

Nous allons calculer l'erreur au *centre du champ*, due à une variation linéaire (2).

$$r = r_0 (1 + \alpha z)$$

du rayon du solénoïde pour la mesure de B. Soit L la longueur du solénoïde,  $r_0$  et  $r_1$  les rayons aux deux extrémités :

$$\alpha = \frac{r_1 - r_0}{r_0 L}.$$

Avec un tube de rayon  $r_0 = 1$  mm on peut vérifier aisément au palmer que le rayon ne varie pas de plus de  $1/100^e$  de mm sur une longueur L voisine de 10 cm. Dans ces conditions  $\alpha \sim 10^{-4}$  mm<sup>-1</sup>. De sorte que la section droite varie selon la loi

$$S \cong \pi r_0^2 (1 + 2 \alpha z)$$

La f.é.m. induite dans le solénoïde lorsqu'une de ses extrémités est au centre du champ, a pour amplitude

$$\mathcal{E}_1 = n \omega Z \pi r_0^2 \int_{-L}^0 (1 + 2 \alpha z) B' dz,$$

soit en intégrant par parties

$$\mathcal{E}_1 = n \omega Z \pi r_0^2 \left[ B_0 - 2 \alpha \int_{-L}^0 B dz \right]$$

D'où l'erreur relative correspondante ( $L \rightarrow \infty$ )

$$\varepsilon_0 = - \frac{2 \alpha}{B_0} \int_{-\infty}^0 B dz. \quad (95)$$

Avec le modèle adopté ci-dessus et  $R = 2$  mm.

$$\varepsilon_0 = - \frac{2 \alpha R}{1.315} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = - \frac{2 \alpha R}{1.315} \cong 0,3 \text{‰}.$$

C'est une erreur parfaitement négligeable. Seulement ici le modèle mathématique (89) est mal adapté : en effet, d'après la formule (95),  $\varepsilon_0$  est proportionnel à l'aire comprise sous la courbe  $\frac{B}{B_0}(z)$  laquelle est d'autant plus grande que l'entrefer S est plus grand. Nous pouvons faire le calcul dans

(2) Les tubes de verre étant obtenus par étirage, s'il y a une variation du rayon, elle est plutôt continue que localisée, ce qui justifie l'hypothèse ci-dessus.

le cas général. Admettons la lentille de révolution symétrique et non saturée : l'expérience montre que l'on a très sensiblement

$$B_0 = \frac{\mu_0 NI}{S} \operatorname{th} \left( 1,315 \frac{S}{D} \right), \quad \mu_0 = 4 \pi 10^{-7} \text{ Hy/m}, \quad D = 2 R = 4 \text{ mm.}$$

En outre

$$\int_{-\infty}^{\infty} B \, dz = \frac{\mu_0 NI}{2}.$$

D'où

$$|\varepsilon_0| = \frac{\alpha S}{\operatorname{th} \left( 1,315 \frac{S}{D} \right)}. \quad (97)$$

On vérifie bien que cette formule redonne (96) lorsque  $S \rightarrow 0$ .

Pour  $S/D = 1$  on obtient  $\varepsilon_0 \cong 0,46\%$ , et  $\varepsilon_0 \cong 0,81\%$  pour  $S/D = 2$ , valeur que l'on dépasse rarement dans la pratique courante. Ces erreurs sont encore tout à fait négligeables.

### 3. — Décentrage des bobines.

1° Jusqu'ici nous avons supposé que l'axe de révolution des bobines était rigoureusement confondu avec l'axe de la lentille. En réalité, un léger décentrage est toujours inévitable et d'une manière générale les bobines pourront se présenter ainsi (*fig. 26*).

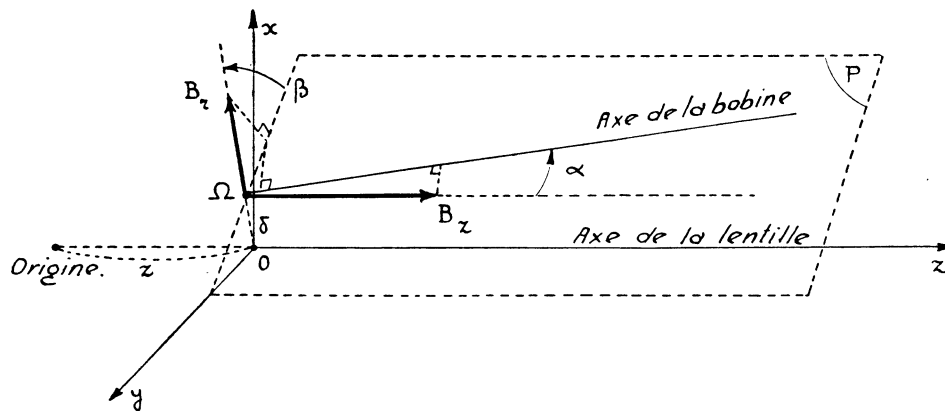


FIG. 26.

La mesure qui devrait être faite au point O, est faite en  $\Omega$  : la distance  $O\Omega = \delta$  définit le décentrage proprement dit. En outre, l'axe de la bobine peut faire un petit angle  $\alpha$  avec le support de  $B_z$ . Ces deux droites définissent un plan P incliné de l'angle  $\beta$  sur  $O\Omega$ .  $\beta$  peut être quelconque, mais  $\delta$  et  $\alpha$  sont très petits; ils sont très fortement exagérés sur la figure, pour la clarté du dessin.



Le théorème démontré au début de la deuxième partie du chapitre II nous permet de calculer très simplement l'erreur qui résulte d'une telle disposition. En effet, d'après ce théorème, la partie principale de l'erreur<sup>(3)</sup> est due au fait que l'on mesure non  $B_z(0, z)$  mais la composante de  $B(\delta, z)$  sur l'axe de la bobine, c'est-à-dire puisque  $\alpha$  est par hypothèse très petit

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) B_z(\delta, z) + \alpha \cos \beta \cdot B_z(\delta, z). \quad (98)$$

Ce résultat nous suggère deux remarques intéressantes :

a) Si le plan P est perpendiculaire à  $O\Omega$ , l'erreur, dans des mesures relatives est uniquement due à  $\delta$  (par exemple, dans une lentille cylindrique, lorsque P est parallèle au plan de symétrie).

b) Et surtout, si  $\delta = 0$  l'inclinaison de l'axe de la bobine sur l'axe de la lentille n'introduit aucune erreur dans les mesures relatives (puisque alors  $B_r \equiv 0$ ). De sorte qu'il faudra particulièrement veiller au centrage correct de l'extrémité de la tige qui porte les bobines : quand cela est réalisé, une légère inclinaison de cette tige sur l'axe de la lentille n'a aucune importance.

Le réglage correspondant est facile à faire dans notre méthode. La lentille à étudier est portée par un trépied à vis calantes permettant un petit mouvement de rotation. En regardant dans le trou des pièces polaires (fig. 27), on aperçoit à l'extrémité de la tige; si elle est bien centrée, l'aspect de l'image observée est celui de deux cercles concentriques.

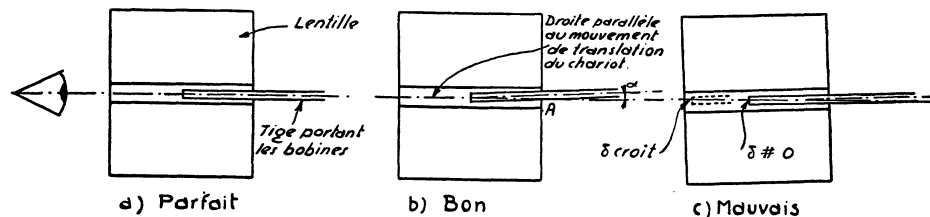


FIG. 27.

On s'arrange pour que cet aspect se conserve lorsqu'on déplace les bobines dans l'entrefer au moyen du chariot à glissière (fig. 18). L'œil étant très sensible à des dissymétries créées dans une figure initialement symétrique, on arrive à déceler facilement des valeurs de  $\delta$  inférieures au  $1/10^{\circ}$  de mm.<sup>(4)</sup>

(3) Les bobines sont corrigées de l'erreur du second ordre due à leurs dimensions finies, et cela est vrai quelle que soit leur position et leur orientation dans le champ.

(4) Pour les évaluer, on place l'extrémité de la tige dans le même plan vertical que l'une des vis calantes du support de lentille. On mesure la rotation qu'il faut imprimer à cette vis pour déceler deux décentrages de sens opposés : connaissant le pas, on en déduit l'ordre de grandeur de  $\delta$ .

Après ce réglage, on constate en général que la tige portant les bobines se présente comme sur la figure 27 b (où l'angle  $\alpha$  est fortement exagéré). Il est en effet pratiquement impossible de rendre son axe rigoureusement parallèle au mouvement de translation du chariot. Il n'y a pas lieu de s'en inquiéter (remarque b), et il faut éviter de rechercher le parallélisme entre le trou des pièces polaires et la tige : la figure 27 c montre clairement pourquoi.

2° En substituant dans l'expression (98) les développements classiques

$$B_z(\delta, z) = B - \frac{\delta^2}{4} B'' + \dots, \quad B_r(\delta, z) = -\frac{\delta}{2} B' + \dots, \quad B = B_z(0, z),$$

on obtient l'erreur relative sur la mesure de B (avec  $\beta = 0$ ).

$$\varepsilon \cong \frac{\delta^2}{4} \frac{B''}{B} + \alpha \frac{\delta}{2} \frac{B'}{B}. \quad (99)$$

on trouve de même, pour les mesures de  $B'$  et  $B''$

$$\varepsilon' \cong \frac{\delta^2}{4} \frac{B'''}{B'} + \alpha \frac{\delta}{2} \frac{B''}{B'}, \quad (100)$$

$$\varepsilon'' \cong \frac{\delta^2}{4} \frac{B^{(4)}}{B''} + \alpha \frac{\delta}{2} \frac{B'''}{B''}. \quad (101)$$

Avec le modèle mathématique adopté ci-dessus (formule 89) :

$$\varepsilon = \frac{(1,315)^2}{4} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \frac{b''}{b} + \frac{1,315 \alpha}{2} \frac{\delta}{R} \frac{b'}{b}, \quad (99\text{bis})$$

$$\varepsilon' = \frac{(1,315)^2}{4} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \frac{b'''}{b'} + \frac{1,315 \alpha}{2} \frac{\delta}{R} \frac{b''}{b'}, \quad (100\text{bis})$$

$$\varepsilon'' = \frac{(1,315)^2}{4} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \frac{b^{(4)}}{b''} + \frac{1,315 \alpha}{2} \frac{\delta}{R} \frac{b'''}{b''}. \quad (101\text{bis})$$

$$\frac{b''}{b} = -1(1 - 3 \operatorname{th}^2 x), \quad \frac{b'}{b} = -2 \operatorname{th} x, \quad (102)$$

$$\frac{b'''}{b'} = -4(2 - 3 \operatorname{th}^2 x), \quad \frac{b''}{b'} = \frac{1 - 3 \operatorname{th}^2 x}{\operatorname{th} x}, \quad (103)$$

$$\frac{b^{(4)}}{b''} = -4 \frac{2 - 15 \operatorname{th}^2 x + 15 \operatorname{th}^4 x}{1 - 3 \operatorname{th}^2 x}, \quad \frac{b'''}{b''} = \frac{-4 \operatorname{th} x (2 - 3 \operatorname{th}^2 x)}{1 - 3 \operatorname{th}^2 x}. \quad (104)$$

Les courbes représentatives de ces fonctions sont tracées sur la figure 28.

Pour évaluer les valeurs de  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$ , il nous faut connaître l'ordre de grandeur de  $\alpha$ . Voici comment on peut en déterminer une limite supérieure : on place l'extrémité de la tige à l'entrée d'une pièce polaire (point A de la figure 27 b) et on centre comme il a été indiqué ci-dessus. La pièce polaire choisie possède sur toute sa longueur un trou de 4 mm de diamètre, de sorte qu'il existe un vide de 1 mm tout autour de la sonde (de 1 mm de rayon). En actionnant la vis du chariot à glissière on constate alors, lorsque le système vibrant a été correctement ajusté, que l'on peut déplacer la tige de

10 cm et plus sans que l'un de ses bords vienne toucher le bord du trou : on a donc  $\alpha < 10^{-2}$  radian. Nous adopterons  $\alpha = 10^{-2}$  et  $\delta = 0,1$  mm (avec  $R = 2$  mm) pour le calcul de l'erreur de décentrage.

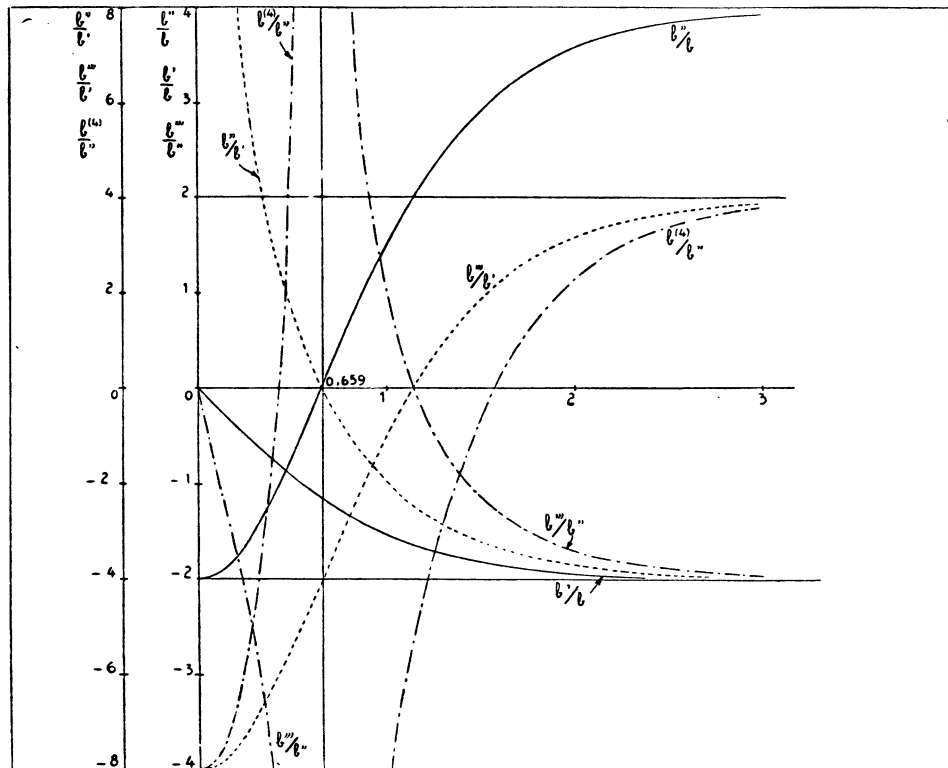


FIG. 28.

a) Dans ces conditions, la formule (99 bis) jointe aux courbes en traits pleins de la figure 28 montre que l'erreur maximum que l'on peut commettre sur la mesure de  $B$  a pour valeur

$$\varepsilon = \frac{(1,315)^2}{4} \left(\frac{0,1}{2}\right)^2 \cdot 4 + \frac{1,315 \cdot 10^{-2}}{2} \cdot \frac{0,1}{2} \cdot 2 \cong 0,5 \text{ \%} .$$

Cela lorsque le champ tend vers zéro, loin du centre, c'est-à-dire en des points où les erreurs de lecture sont bien plus grandes que  $\varepsilon$ . Mais la figure 28 montre que partout ailleurs dans le champ l'erreur maximum est inférieure à 0,5 %. Au centre, en particulier, on obtient  $\varepsilon_0 \cong -0,22 \text{ \%}$ .

b) Pour les mesures de  $B'$  et  $B''$ , aux points où ces grandeurs s'annulent pour changer de signe, les courbes en pointillé et en traite mixtes de la figure 28 montrent que l'erreur relative peut devenir infinie. C'est évident a priori, quelle que soit alors la cause d'une erreur absolue finie, puisque la

grandeur mesurée vaut zéro. Mais on voit que lorsque cette erreur absolue est due à un décentrage l'erreur relative décroît très vite lorsqu'on s'éloigne un peu de ces points singuliers. Calculons-la par exemple pour les maxima de B' et B''.

$$\text{Pour B'} : \varepsilon' = \frac{(1,315)^2}{4} \left(\frac{0,1}{2}\right)^2 (-4) \cong -0,43 \text{ \%}.$$

( $x = 0,659$ ,  $B'' = 0$ )

Pour B'' :

$$\text{au centre : } \varepsilon''_0 = \frac{(1,315)^2}{4} \left(\frac{0,1}{2}\right)^2 (-8) = -0,86 \text{ \%}.$$

$$\text{aux maxima latéraux : } \varepsilon'' = \frac{(1,315)^2}{4} \left(\frac{0,1}{2}\right)^2 (-5,2) = -0,56 \text{ \%}.$$

En résumé, si les réglages préliminaires sont faits avec soin, les erreurs de décentrage sont en général tout à fait négligeables devant les erreurs fortuites de mesure : les valeurs calculées ci-dessus correspondent à un champ beaucoup plus « ramassé » sur l'axe que ceux que l'on rencontre en pratique, et à des valeurs numériques de  $\alpha(10^{-2}$  rad.) et de  $\delta(0,1$  mm.) qui sont des limites supérieures.

#### 4. — Influence d'une amplitude de vibration finie.

Nous avons supposé que l'amplitude des vibrations des bobines était suffisamment petite pour qu'on puisse négliger les harmoniques de la f.é.m. induite devant le terme fondamental. Jusqu'à quelles valeurs de l'amplitude cette hypothèse est-elle légitime ? C'est ce que nous allons voir à présent.

1° Calculons le développement en série de Fourier de la f.é.m. induite dans l'une quelconque des bobines servant à mesurer B, B' ou B''.

Imprimons à la bobine un mouvement sinusoïdal, parallèle à Oz, d'amplitude Z et de pulsation  $\omega$ . A chaque instant sa position est repérée par l'abscisse  $z + Z \cos \omega t$  du point  $\Omega$  (chapitre II) où se fait la mesure. Le flux  $\Phi(z + Z \cos \omega t) = \Phi(t)$  est développable en série de Taylor relativement à  $Z \cos \omega t$ , ou en série de Fourier :

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{n!} \left(\frac{d}{dz}\right)^n \Phi(z) \cos^n \omega t = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p(z) \cos p \omega t. \quad (105)$$

La f.é.m. induite est alors

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p(z) \sin p \omega t. \quad (106)$$

$$\text{avec} \quad \varepsilon_p(z) = p \omega \Phi_p(z) \quad (107)$$

Les coefficients  $\Phi_p$  sont donnés par

$$\Phi_p = \frac{2}{T} \int_0^T \Phi(t) \cos p \omega t. dt. \quad (108)$$

On peut calculer très simplement leur expression générale à l'aide des formules donnant la fonction de Bessel modifiée de première espèce  $I_p(x)$  sous forme d'intégrale définie et de développement en série. En effet, posons  $\theta = \omega t$  et écrivons symboliquement  $x = Z \left( \frac{d}{dz} \right) \Phi(z), \dots, x^n = Z^n \left( \frac{d}{dz} \right)^n \Phi(z)$  : la première égalité (105) peut s'écrire  $\Phi(\theta) = e^{x \cos \theta}$ . Portons dans (108) :

$$\Phi_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos \theta} \cos p \theta. d\theta = 2 I_p(x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (k+p)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k+p}.$$

c'est à dire :

$$\Phi_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k! (p+k)!} \left( \frac{Z}{2} \right)^{p+2k} \left( \frac{d}{dz} \right)^{p+2k} \Phi(z). \quad (109)$$

D'où, en désignant par  $\Phi', \Phi'', \dots, \Phi'''$ , les dérivées de  $\Phi(z)$  :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \omega \left[ Z \Phi' + \frac{Z^3}{8} \Phi'' + \frac{Z^5}{192} \Phi^{(3)} + \dots \right], \\ \mathcal{E}_2 &= 2\omega \left[ \frac{Z^3}{4} \Phi'' + \frac{Z^5}{48} \Phi^{(3)} + \dots \right], \\ \mathcal{E}_3 &= 3\omega \left[ \frac{Z^5}{24} \Phi^{(3)} + \frac{Z^7}{384} \Phi^{(4)} + \dots \right], \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

2° Dans tout ce qui précède, nous avons posé simplement

$$\mathcal{E}_i(t) = \mathcal{E}_i \sin \omega t = \omega Z \Phi'. \sin \omega t. \quad (11)$$

Une approximation meilleure consiste à écrire

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_1 \sin \omega t + \mathcal{E}_2 \sin 2 \omega t, \quad \text{avec } \mathcal{E}_2 \cong \omega \frac{Z^3}{2} \Phi'',$$

et il est clair que si  $\mathcal{E}_2 \ll \mathcal{E}_1$ , la formule (11) est correcte. On pourrait donc croire qu'il est nécessaire de ne pas dépasser des valeurs de  $Z$  telles qu'il en soit ainsi, ce qui revient à prendre intuitivement, pour mesurer l'erreur relative due à l'amplitude, le rapport  $\varepsilon = \mathcal{E}_2 / \mathcal{E}_1 \cong \frac{1}{2} Z (\Phi''/\Phi')$  [7]. En réalité on peut se permettre des amplitudes bien plus grandes que ne le prévoit ce raisonnement, parce que l'erreur est du *second ordre* en  $Z$ , et non du premier. Montrons-le.

Ce qu'on mesure en définitive, c'est le déplacement de l'aiguille d'un milliampèremètre : *cette mesure dépend essentiellement du type de voltmètre électronique utilisé*. Celui qui nous sert est un modèle courant (fig. 29). La bande passante de l'amplificateur (A) est supérieure à 10000 p/s : étant donné le faible taux d'harmoniques mis en jeu et la fréquence utilisée (1000 p : s), le coefficient d'amplification A est pratiquement indépendant de la pulsation; la f.é.m. entre les points  $S_1$  et  $S_2$  est  $A. \mathcal{E}(t)$ . Le système redresseur (R) est par hypothèse parfait, la différence de potentiel entre les

points  $M_1$  et  $M_2$  est égale à la f.é.m. ci-dessus « redressée », c'est-à-dire à la valeur absolue  $A_i \varepsilon(t)$ . C'est elle qui va agir sur le milliampèremètre  $m$ .

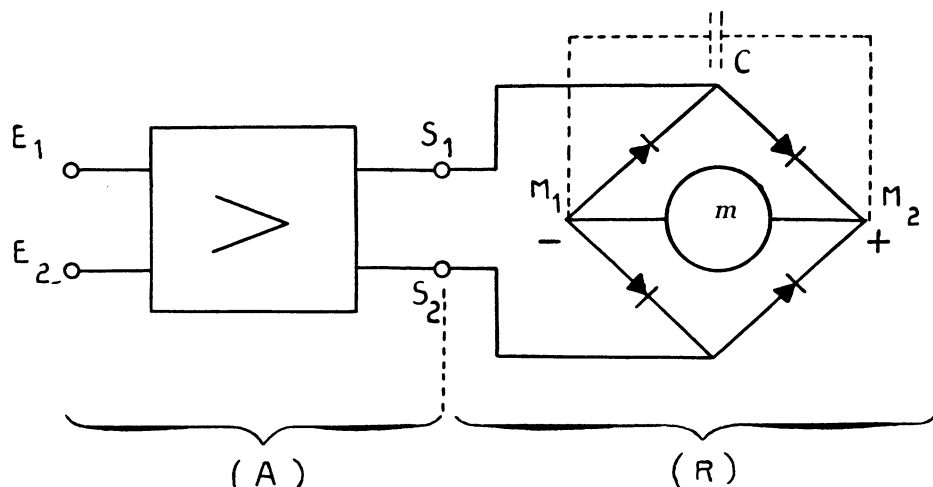


FIG. 29.

Un commutateur permet de brancher entre  $M_1$  et  $M_2$  un condensateur de capacité  $C = 1000 \mu\text{F}$ . Supposons ce condensateur hors circuit; dans ces conditions, en raison de son inertie, le cadre mobile du milliampèremètre dévie exactement comme si on appliquait à ses bornes une différence de potentiel continue  $\varepsilon_0$ , égale à la valeur moyenne de la f.é.m. redressée :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{T} \int_0^T |\varepsilon(t)| dt. \quad (112)$$

Si on trace sur une figure la courbe  $\varepsilon(t)$ , pour des valeurs arbitraires décroissantes des amplitudes  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ , on voit que l'on a en général

$$\int_0^T |\varepsilon(t)| dt = 2 \int_0^{T/2} \varepsilon(t) dt, \quad (113)$$

de sorte que dans l'intégration tous les termes d'ordre pair disparaissent; on obtient

$$\varepsilon_0 = A \cdot \frac{2}{\pi} \sum \frac{\varepsilon_p}{p} = A \cdot \frac{2}{\pi} \left[ \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_3}{3} + \frac{\varepsilon_5}{5} + \dots \right], \quad (114)$$

soit, d'après les formules (110)

$$\varepsilon_0 = A \cdot \frac{4}{T} \left[ Z \Phi' + \frac{Z^3}{6} \Phi''' + \dots \right]. \quad (115)$$

La formule (113) n'est plus valable au voisinage des points où  $\varepsilon_1$  s'annule pour changer de signe. Au paragraphe suivant, nous montrerons que la formule (115) est générale et qu'elle vaut dans la presque totalité du champ

sauf pour les mesures de  $B'(z)$  et  $B''(z)$ , dans de très petites régions entourant les zéros de ces fonctions.

L'erreur relative due à l'amplitude est donc

$$\varepsilon = \frac{Z^3 \Phi'''}{2 \Phi'} \quad (116)$$

3° Dans les mesures de  $B$ ,  $B'$  et  $B''$  on a respectivement, puisque les bobines sont corrigées de l'erreur du deuxième ordre due à leurs dimensions

$$\Phi = k B, \quad \Phi' = k' B', \quad \Phi'' = k'' B'', \quad (k, k', k'' = \text{constantes}),$$

d'où, en utilisant le modèle mathématique (89), les valeurs correspondantes de  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{(1,315)^3}{6} \left(\frac{Z}{R}\right)^3 \frac{b''}{b}, \quad \frac{(1,315)^3}{6} \left(\frac{Z}{R}\right)^3 \frac{b'''}{b'}, \quad \frac{(1,315)^3}{6} \left(\frac{Z}{R}\right)^3 \frac{b^{(4)}}{b''}.$$

Prenons comme induction au centre du champ  $B_0 = 1 \text{ Wb/m}^2$ . On voit sur la figure 25 que  $|b'_{\max}| = 0,8$ ;  $|b''_0| = 2$ ; d'où avec  $R = 2 \text{ mm}$  :  $B'_{\max} = 525 \text{ (Wb/m}^2\text{)/m}$ .

$$B''_0 = 6,6.10^5 \text{ (Wb/m}^2\text{)/m/m}.$$

Avec une fréquence de vibrations de 1000 p/s et les grandeurs caractéristiques des bobines que nous utilisons (chapitre II, B, § 5) les formules (79), (80) et (81) montrent que pour obtenir des forces électromotrices induites de l'ordre de 10mV, très facilement mesurables, il faut utiliser des amplitudes  $\Sigma$  voisines de  $1/100^\circ$  de mm. D'après les courbes de la figure 28, seule la fonction  $b^{(4)}/b''$  devient supérieure à 10, dans un petit domaine autour des zéros de  $b''$  : prenons cette valeur 10 comme limite. Pour  $Z = 1/100^\circ$  de mm,  $R = 2 \text{ mm}$ , on trouve

$$\varepsilon \sim 0,07 \text{ ‰}$$

En général, l'erreur due à l'amplitude des vibrations est complètement négligeable.

#### 4° REMARQUES.

a) On pourrait éliminer les harmoniques de la f.é.m. en utilisant un millivoltmètre accordé sur la pulsation  $\omega$ . Mais on ne supprimerait pas pour autant les erreurs d'amplitude, en raison du terme  $(Z^3/8)\Phi'''$  contenu dans  $\mathcal{E}_1$ . Par contre, la méthode perdrait beaucoup de sa souplesse d'utilisation, qui est une de ses principales qualités, pour un gain de précision illusoire.

b) Branchons le condensateur ( $C = 1\,000 \mu\text{F}$ ) en parallèle sur le milliampèremètre  $m$  de résistance  $\rho = 200 \Omega$ . La constante de temps  $\rho C = 1/5^\circ$  de seconde : le condensateur se charge jusqu'à la valeur *maximum*  $\mathcal{E}_m$  de la f.é.m. redressée, et il n'a pratiquement pas le temps de se décharger qu'il reçoit une nouvelle charge, etc... Le milliampèremètre dévie donc comme si on appliquait à ses bornes une différence de potentiel continue égale à  $\mathcal{E}$

(voltmètre dit « de crête »). Or, la valeur de  $\varepsilon_m$  dépend essentiellement de  $\varepsilon_s$ , comme on le voit tout de suite sur une figure, de sorte que l'erreur devient du premier ordre en  $Z$ . En outre  $\varepsilon_m$  est égale au taux maximum de variation du flux, lié à la forme de la vibration : si celle-ci n'est pas rigoureusement sinusoïdale il en résulte une erreur supplémentaire qui n'existe pas avec le voltmètre électronique « ordinaire », comme nous le montrerons au paragraphe suivant.

c) Il n'est pas théoriquement impossible d'utiliser la seule bobine longue pour la mesure de  $B$ , de  $B'$  et peut-être de  $B''$ , en faisant une sorte d'« analyse harmonique » de la fonction  $B(z)$ . Mais on se heurte au manque de souplesse signalé plus haut. En outre, pour que la sensibilité soit suffisante, il faudrait utiliser des valeurs de  $Z$  supérieures à  $1/10^6$  de mm, ce qui nécessiterait l'emploi d'un système vibrant autre qu'un simple moteur de haut-parleur, en raison des puissances mises en jeu. Alors  $Z$  interviendrait au même titre que les dimensions des bobines dans les calculs du chapitre II, et il faudrait substituer les expressions générales de  $\Phi(z)$  calculées à ce chapitre, dans la formule (109), pour trouver les conditions qui rendraient  $\Phi_p(z)$  proportionnel à  $B$ ,  $B'$  ou  $B''$  en un point, au quatrième ordre près<sup>(5)</sup>. Pour que la méthode soit correcte, il faudrait utiliser une vibration rigoureusement sinusoïdale, et fixer à priori avec précision  $Z$  à telle ou telle valeur, ce qui nous paraît pratiquement très difficile.

d) Sur la figure 30 sont données, à titre d'exemple illustrant l'analyse

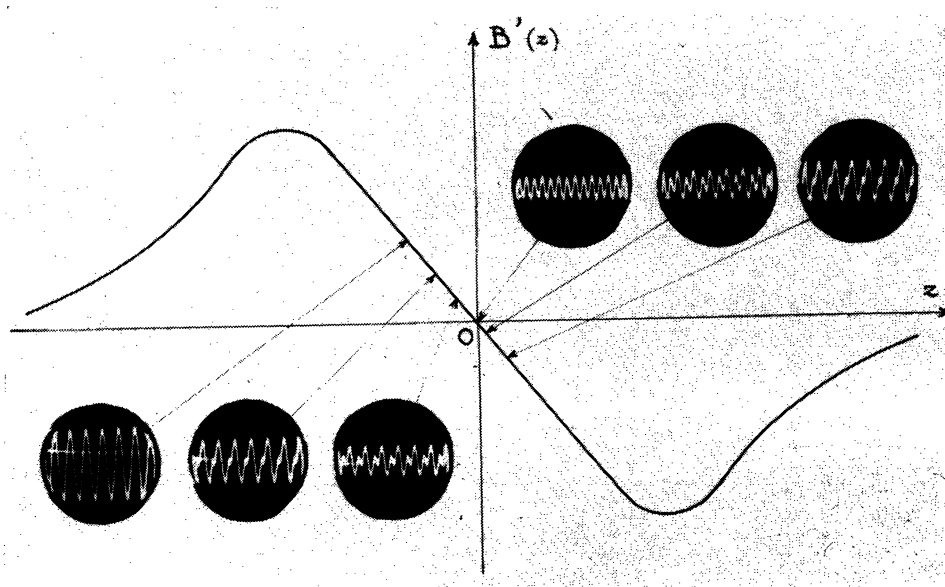


FIG. 30.

(5) Ou au sixième ordre près, en profitant de l'arbitraire  $Z$  supplémentaire.



précédente, les relevés à l'oscillographe cathodique de la f.é.m. induite dans la petite bobine pour la mesure de  $B'$ , correspondant à une série de positions de cette bobine autour du centre du champ. On notera l'accroissement progressif du taux de l'harmonique  $\mathcal{E}_2 \sin 2\omega t$  au fur et à mesure qu'on se rapproche du centre, où  $B = 0$ , ainsi que le doublement de fréquence caractéristique qui se produit exactement en ce point : on a alors  $\mathcal{E}(t) \cong \mathcal{E}_2 \sin 2\omega t$ , avec  $\mathcal{E}_2$  proportionnel à  $B''$ . Bien entendu les amplitudes de vibration ont été choisies beaucoup plus grandes que pour une mesure ordinaire, afin que le phénomène soit nettement visible.

### 5. — Influence d'une vibration non sinusoïdale.

Elle est nulle, dans les conditions que nous allons préciser et qui sont toujours satisfaites pratiquement.

1° La démonstration repose sur cette remarque importante : « Quand on applique à un voltmètre électronique « ordinaire » une f.é.m. d'induction périodique  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t + T)$ , la déviation de l'aiguille est proportionnelle à la somme *arithmétique* des variations de flux comprises dans une période de  $\mathcal{E}(t)$  ».

En effet, substituons l'expression  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$  dans la formule (112) :

$$\mathcal{E}_0 = A \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| dt = A \cdot \frac{1}{T} \int_{\Phi(0)}^{\Phi(T)} |d\Phi|, \quad (117)$$

ce qui traduit bien le résultat énoncé.

2° Posons alors que la vibration de la bobine n'est pas sinusoïdale. A chaque instant, l'abscisse du point  $\Omega$  où se fait la mesure n'est plus  $z + Z \cos \omega t$  mais  $z + \zeta(t)$ , où  $\zeta(t) = \zeta(t + T)$  désigne une fonction périodique à priori quelconque, comprise entre les valeurs  $\pm Z$ . ( $-Z < \zeta(t) < Z$ ).

Le flux à chaque instant est  $\Phi(t) = \Phi[z + \zeta(t)]$ . *Admettons que cette fonction ne possède pas d'autres extrema que ceux qui correspondent aux valeurs  $\Phi(z - Z)$  et  $\Phi(z + Z)$* . Pratiquement, cette hypothèse est toujours vérifiée; nous étudions ci-dessous les cas très particuliers où elle ne l'est pas.

Dans ces conditions, il est évident sur une figure que

$$\int_{\Phi(0)}^{\Phi(T)} |d\Phi| = 2 [\Phi(z + Z) - \Phi(z - Z)],$$

d'où, en développant  $\Phi(z \pm Z)$  en série de Taylor

$$\mathcal{E}_0 = A \cdot \frac{4}{T} \left[ Z \Phi' + \frac{Z^3}{6} \Phi''' + \dots \right],$$

ce qui n'est pas autre chose que la formule (115) démontrée au paragraphe précédent. Il est facile de voir que l'hypothèse soulignée impose à  $\zeta(t)$  d'avoir une variation monotone entre les valeurs extrêmes  $\zeta = \pm Z$ . C'est

toujours le cas; les « distorsions » introduites par l'amplificateur de puissance et le système électro-mécanique ne sont jamais assez grandes pour qu'il en soit autrement. Il en résulte cette conséquence pratique très intéressante : avec un voltmètre électronique ordinaire, la f.é.m. mesurée ne dépend que de la période  $T$  et de « l'amplitude »  $Z$  des vibrations mécaniques; *elle est indépendante de la forme de ces vibrations*. Il n'y a donc pas lieu de se soucier de cette forme au cours d'une mesure, et il suffit de veiller à maintenir constantes la période et l'amplitude.

3° Même avec les conditions imposées ci-dessus à la fonction  $\zeta(t)$ , le flux peut avoir d'autres maxima que les valeurs  $\Phi(z \pm Z)$  lorsque, pour une certaine abscisse  $z_m$  comprise dans l'intervalle  $(z - Z, z + Z)$ , il existe un maximum de  $\Phi(z)$ . C'est le cas par exemple pour les zéros de  $B'(z)$  et  $B''(z)$ , lors des mesures de ces grandeurs.

Cela ne se produit jamais, par contre, pour la mesure de  $B(z)$  avec la bobine longue, parce qu'alors  $\Phi$  et  $z$  varient toujours dans le même sens.

Nous voyons donc que la formule (115) est générale. Elle cesse d'être valable, pour les mesures de  $B'$  et  $B''$ , sur de très petites portions de l'axe, de longueur  $2Z$ , entourant les zéros de ces fonctions. Dans ces régions, la variation du flux a l'allure représentée par la figure 31.

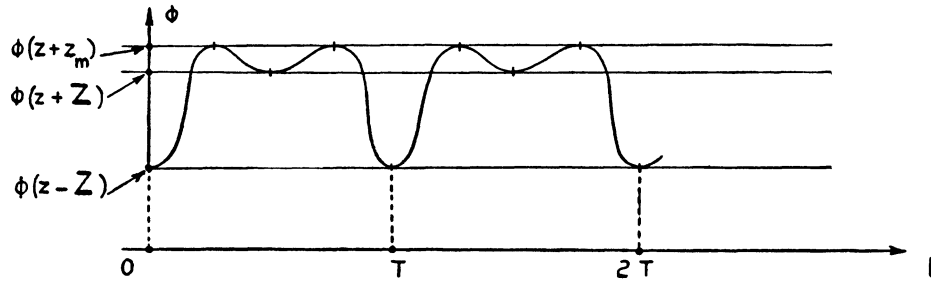


FIG. 31.

D'après cette figure

$$\int_{\Phi(0)}^{\Phi(T)} |d\Phi| = 2 [\Phi(z+z_m) - \Phi(z-Z)] + 2 [\Phi(z+z_m) - \Phi(z+Z)],$$

d'où après développements en série

$$\epsilon_0 = A \cdot \frac{4}{T} \left[ z_m \Phi' - \frac{Z^2 - z_m^2}{2!} \Phi'' + \frac{z_m^3}{3!} \Phi''' - \frac{Z^4 - z_m^4}{4!} \Phi^{(4)} + \dots \right]. \quad (118)$$

L'erreur est alors

$$\epsilon = -\frac{1}{2} \left( \frac{Z^2}{z_m} - z_m \right) \Phi'',$$

c'est-à-dire du premier ordre, avec une amplitude équivalente.

$$Z_{eq} = \frac{Z^2}{z_m} - z_m.$$

Il n'y a pas lieu de l'évaluer, car d'une part les domaines correspondants sont au plus de quelques centièmes de mm, d'autre part la grandeur à mesurer y est si petite que ce sont les erreurs de lecture qui prédominent. Sur la formule (118) nous voyons cependant que s'il n'existe qu'un maximum du flux par période, d'abscisse  $z_m = Z$ , la f.é.m. mesurée est donnée par (115) et que si  $z_m = 0$  c'est-à-dire si la bobine oscille symétriquement de part et d'autre du maximum de  $\Phi(z)$ , cette f.é.m. est proportionnelle à  $\Phi''$ .

4° REMARQUE. — Voici, au sujet de la mesure de B avec la bobine longue, une remarque intéressante.

a) Considérons successivement cette bobine aux deux extrémités d'une oscillation (positions 1 et 2 de la figure 32).

À toute la région située à droite de PP' correspond le même flux. De sorte que la variation du flux est  $\delta\Phi = 2Z.nSB(z)$ . Elle est la même que si on avait amené, de l'infini jusqu'au point d'abscisse  $z$ , une petite bobine à une seule couche de  $n$  spires par unité de longueur, de même section que le solénoïde et de longueur  $2Z$ .

Cette variation s'est effectuée dans un temps  $\delta t = T/2$ . D'où une force électromotrice induite *moyenne* :

$$\overline{|\varepsilon|} = \frac{\delta\Phi}{\delta t} = \frac{2ZnSB}{T/2} = \frac{4}{T} Z.nSB = \frac{4}{T} Z\Phi'.$$

C'est le premier terme de la formule (115), à un coefficient près.

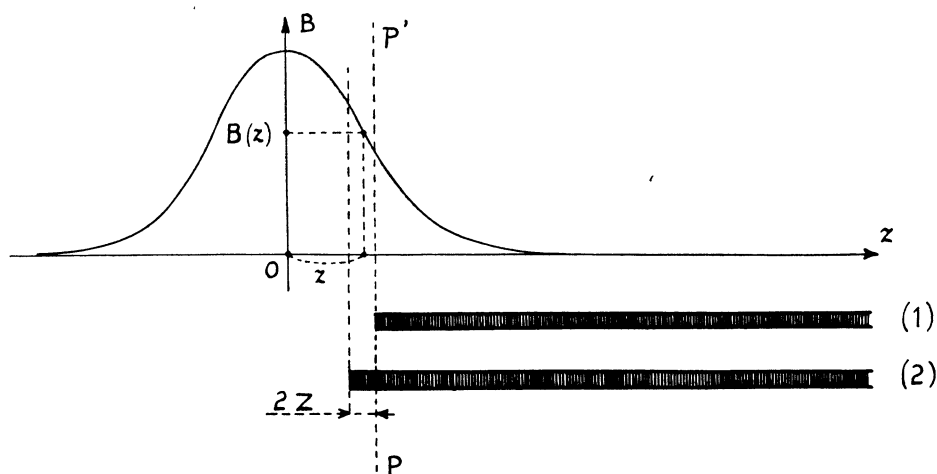


FIG. 32.

b) Si nous pouvions imposer à la petite bobine ci-dessus une oscillation de période  $T$  entre le point d'abscisse  $z$  et une région de champ nul, nous obtiendrions une force électromotrice induite dont la *forme* (observée à l'oscillographe cathodique) pourrait être complètement différente de celle obtenue.

nue avec la bobine longue. Cependant, les indications d'un voltmètre électronique ordinaire seraient identiques tant que la petite bobine ne passerait pas de part et d'autre du maximum de  $B$  <sup>(6)</sup>. *Dans ces conditions* nous pouvons dire qu'en définitive tout se passe comme si on faisait effectivement vibrer la petite bobine entre le point d'abscisse  $z$  et l'infini, ce qui rend sensible à l'intuition la grande sensibilité obtenue.

---

(6) Puisque seule intervient la somme arithmétique des variations du flux.

## CHAPITRE V

### APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DE MESURE

#### Généralités.

Les applications qui suivent ont été faites plus particulièrement sur des lentilles symétriques, de révolution ou cylindriques, dans lesquelles la saturation du fer est, sinon nulle, du moins assez faible pour pouvoir établir une comparaison entre les résultats de la mesure et ceux que donnent soit les réseaux de résistances soit le calcul direct. L'effet d'un début de saturation a deux conséquences principales : l'apparition d'un champ non négligeable dans le trou des pièces polaires, un léger élargissement de la courbe  $B_z(z)$ .

1° Tant que la saturation n'apparaît pas, la relation entre le champ  $H$  et l'induction  $B$  est linéaire :  $B = \mu H$ . La perméabilité  $\mu$  est très sensiblement une *constante* de valeur très élevée devant la perméabilité  $\mu_0$  du vide. Les résultats sont pratiquement les mêmes pour  $\mu \rightarrow \infty$  : on peut admettre avec une bonne approximation que les faces des pièces polaires et l'intérieur du trou sont des équipotentielles magnétiques. A une distance de l'axe égale au rayon du trou, le potentiel dans l'entrefer varie d'une manière quasi-linéaire, comme pour deux cylindres coaxiaux [1]. Il en résulte que la répartition du champ sur l'axe ne doit dépendre que de la largeur  $S$  de l'entrefer et de  $D$ , diamètre du trou pour les lentilles de révolution ou largeur de la fente pour les lentilles cylindriques. L'expérience montre en effet que *la forme* de la courbe  $B(z)$  dépend très peu des faces polaires en regard et du nombre d'ampères-tours magnétisants  $NI$ , tant que  $NI$  et  $S$  sont tels que les hypothèses ci-dessus soient satisfaites.

2° Or, entre les pièces polaires, supposées à faces planes et parallèles, le champ loin de l'axe est sensiblement égal à  $NI/S$  : lorsque ce champ dépassera un certain seuil  $H_s$ , la quasi linéarité entre  $B$  et  $H$  cessera d'exister ; la perméabilité  $\mu$  décroîtra rapidement, les équipotentielles magnétiques « pénétreront » à l'intérieur des pièces polaires [11], et il en résultera en particulier un élargissement de la courbe  $B(z)$ . L'expérience montre que pour des pièces polaires en fer doux,  $H_s$  est voisin de 1 000 ampères-tours par millimètre.

3° En outre, le flux dans les pièces polaires croît quand on se déplace de l'entrefer vers les flasques de la lentille, comme le montrent la mesure directe (Mulvey, Durand) ou les calculs de relaxation pour  $\mu = \infty$ , (E. Durand) [5, c]. De sorte que la saturation apparaîtra plutôt d'abord vers les flasques : il y a donc lieu d'offrir à cet endroit une section plus grande au flux, ce qu'on obtient avec des noyaux polaires de forme tronconique et des flasques assez épais [6, b].

## A. — LENTILLES DE RÉVOLUTION

## 1. — Comparaison des résultats de la mesure avec ceux fournis par les réseaux de résistances ou un calcul approché.

1° Nous avons mesuré les répartitions  $B$ ,  $B'$  et  $B''$  du champ sur l'axe et de ses dérivées dans une série de lentilles correspondant aux valeurs suivantes de  $S/D$  : 0,2; 0,6; 1 et 2, afin de comparer nos résultats avec ceux obtenus par Liebmann au moyen d'un réseau à résistances. Les pièces polaires choisies, d'un diamètre extérieur de 25,4 mm (1 pouce anglais) étaient en fer doux, avec leurs faces en regard planes et parallèles, et percées sur toute leur longueur (6 cm) d'un trou de 4 mm de diamètre. L'entrefer le plus petit avait donc pour valeur  $0,2 \times 4 = 0,8$  mm. Le nombre d'ampères-tours magnétisants était  $NI = 600$ , de sorte que le champ le plus grand entre les pièces polaires,  $H = 600/0,8 = 750$  ampères-tours/mm, avait une valeur inférieure à  $H_s = 1\ 000$  AT/mm.

2° En ce qui concerne les *répartitions* de champ, les résultats de la mesure sont pratiquement ceux obtenus par Liebmann : Nous renvoyons à sa publication [10].

En ce qui concerne les *valeurs absolues* du champ, les résultats de la mesure concordent avec ceux de Liebmann tant que l'entrefer n'est pas trop petit. Cet auteur trouve en particulier que le champ maximum sur l'axe au centre de l'entrefer est le plus grand possible pour  $S/D \rightarrow 0$ .

Il déduit de ces mesures la valeur de fonction de  $S/D$  d'un coefficient  $\beta = k^2 V/(NI)^2$ , qui permet de calculer le paramètre d'excitation  $k^2 = e B_0^2 R^2/8 m V$ , ( $R = D/2$ ), de la lentille en fonction du nombre d'ampères-tours  $NI$  et de la tension d'accélération  $V$ . Ce coefficient serait maximum pour  $S/D = 0$ . Cela tient aux hypothèses mêmes qui sont à la base des mesures faites sur le réseau de résistances. On suppose entre autres choses que les pièces polaires sont indéfinies dans tous les sens lorsqu'on s'éloigne de l'entrefer.

3° Un exemple de nos résultats de mesure de  $B_0$  en fonction de  $S/D$  est résumé par la figure 33. On voit que pour cette lentille  $B_0$  passe par un maximum au voisinage de  $S/D = 0,35$  pour  $NI = 600$  A puis décroît rapidement lorsque  $S/D$  diminue. Au voisinage de  $S/D = 0,2$  et au-dessous on constate l'apparition d'un champ non négligeable dans le trou des pièces polaires, loin de l'entrefer. Ces deux effets s'interprètent simplement, *même dans l'hypothèse d'une perméabilité infinie*, par la présence d'entrefers parasites au raccordement entre les pièces polaires et les flasques [5, d]. Mieux la lentille sera réalisée de ce côté là, plus le maximum de  $B_0$  se déplacera vers les petites valeurs de  $S/D$ .

Nous avons fait d'autres déterminations, pour des pièces polaires percées de trous de diamètres différents ( $D = 3, 4, 5, 6$  mm.) et pour des excitations croissantes ( $NI = 600, 1\ 200, 2\ 400, 4\ 800$  AT). Les résultats ont

en gros la même allure que ci-dessus. La décroissance rapide de  $B_0$  vers les petits entrefers est encore aggravée par l'apparition de la saturation, laquelle entraîne en même temps un léger élargissement de la courbe  $B_0(z)$ , comme nous l'avons signalé plus haut.

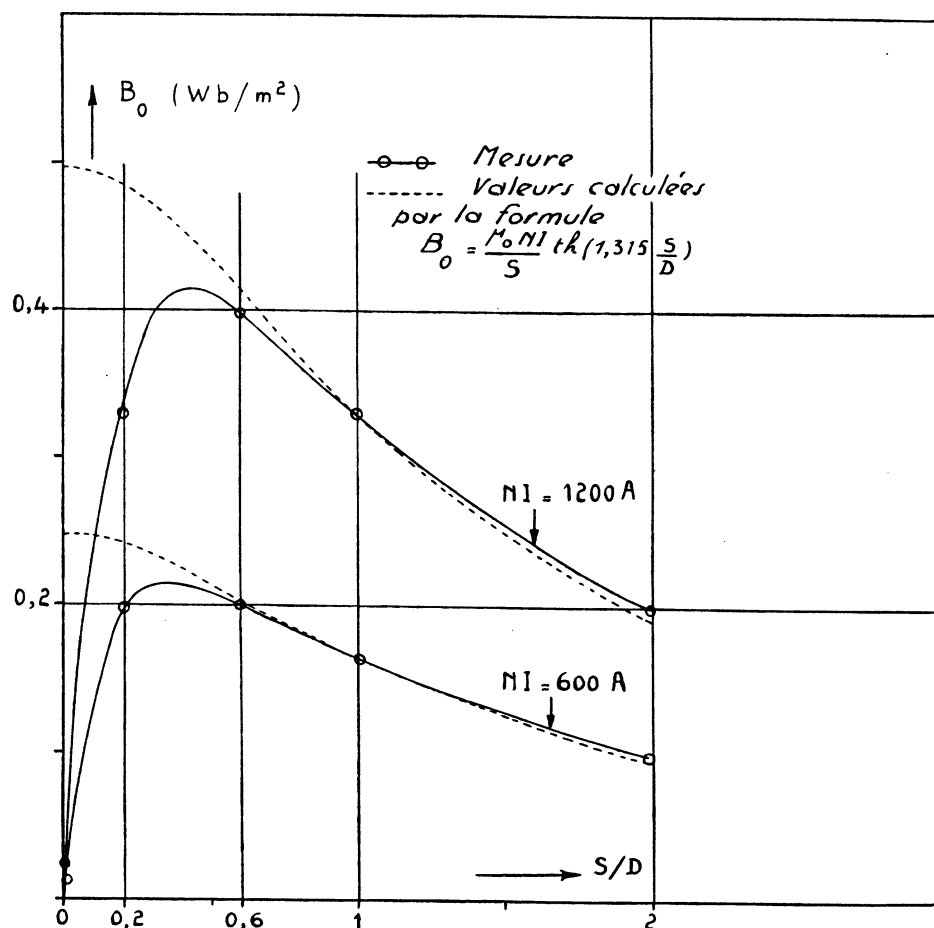


FIG. 33.

Sur la figure 33 sont indiqués en pointillés les valeurs de  $B_0$  calculées par la formule de Bertram :

$$B_0 = \frac{\mu_0 NI}{S} \text{th}\left(1,315 \frac{S}{D}\right), \quad (119)$$

en assimilant la lentille à deux cylindres circulaires équipotentiels coaxiaux de diamètre  $D$ , séparés par un intervalle  $S$ , c'est-à-dire en ne tenant compte que du trou percé dans les pièces polaires et non des faces en regard. On constate que l'accord est bon pour toutes les valeurs de  $S/D$  telles que la décroissance de  $B_0$  mentionnée ci-dessus n'intervienne pas.

L'accord est également assez bon, mais moins que ci-dessus, entre les topographies mesurées et celles déduites de la formule de Bertram

$$\frac{B}{B_0} = \frac{1}{1 + (1-A^2) \operatorname{sh}^2\left(1,315 \frac{z}{R}\right)}, \quad A = \operatorname{th}\left(1,315 \frac{S}{D}\right). \quad (120)$$

En particulier la « demi-largeur » «  $a$  » de la courbe réelle  $B(z)$  est toujours plus grande que celle déduite de la formule

$$a/R = \frac{1}{1,315} \operatorname{arg sh} \left[ \operatorname{ch} \left( 1,315 \frac{S}{D} \right) \right], \quad (121)$$

comme le montre la figure 34. Mais on voit que les deux courbes, théorique et expérimentale, ont exactement la même forme.

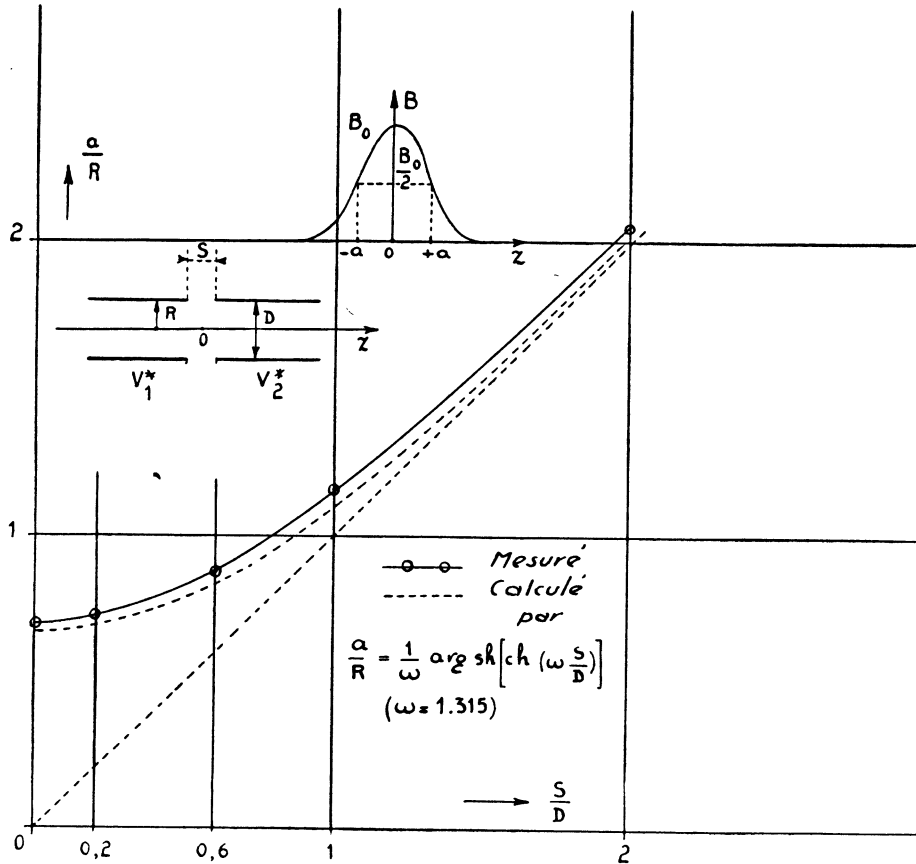


FIG. 34.

Une telle comparaison, sans rien préjuger de sa valeur théorique, a du moins l'avantage de nous faire mieux saisir l'origine d'un résultat expérimental qui peut paraître étonnant de prime abord : tant que la lentille



*n'est pas saturée*, le champ sur l'axe ne dépend sensiblement que de S et de D : il est pratiquement indépendant de la forme des pièces polaires en regard [6, c]. Cela signifie qu'en première approximation les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

- a) l'intérieur du trou est une équipotentielle magnétique;
- b) la variation du potentiel entre les pièces polaires à une distance  $R = D/2$  de l'axe est sensiblement linéaire.

4° Le coefficient  $B = k^2V/(NI)^2$ , calculé d'après nos mesures, passe par un maximum pour  $S/D \simeq 0,4$  lorsque  $NI = 600$  AT. Ce maximum est d'autant plus élevé pour une même excitation que le diamètre du trou est plus grand : on a en effet  $\beta = \frac{e}{8m} \left( \frac{B_0 R}{NI} \right)^2$  et  $B_0$  décroît moins vite que  $1/R$ . Pour  $D = 4$  mm, nous trouvons que ce maximum a pour valeur 0,0105 alors que la valeur obtenue avec un réseau à résistances dans l'hypothèse  $\mu = \infty$  est 0,0156 pour  $S/D = 0$ . En outre, des essais sur des pièces polaires construites avec des aciers différents nous ont montré que ce maximum, ainsi d'ailleurs que le maximum de  $B_0$ , croît avec la perméabilité. Mais il est difficile, sinon inutile, d'essayer d'établir des relations quantitatives si le circuit magnétique de la lentille n'est pas très soigné (entrefers parasites quasi inexistantes, noyaux polaires et flasques épais). Alors, en tout cas, le maximum de  $\beta$  augmente et se déplace vers les petites valeurs de  $S/D$ .

5° En conclusion, lorsque le circuit magnétique de la lentille est largement calculé et bien construit, les résultats que l'on peut déduire de l'hypothèse  $\mu \rightarrow \infty$  sont pratiquement exacts tant que le champ  $H_{pp}$  entre les faces polaires est inférieur (pour le fer doux) à  $H_s \sim 1\,000$  ampères-tours/mm. L'étude qui suit, relative à un objectif de microscope électronique effectivement utilisé, fera mieux comprendre la portée pratique de ces résultats.

## 2. — Étude d'un objectif de microscope électronique par réflexion.

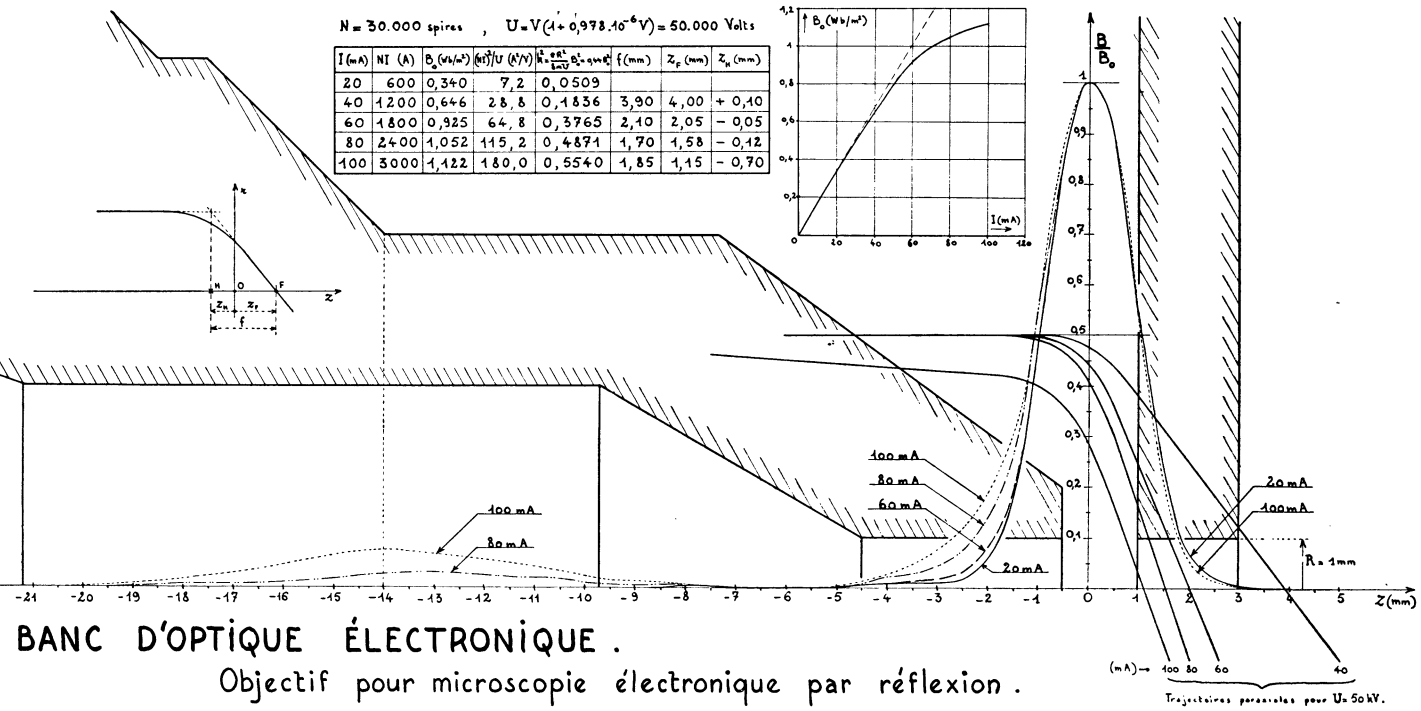
Afin de mettre en évidence la validité des conclusions ci-dessus et leur degré d'approximation, nous donnons ci-dessous l'ensemble des résultats relatifs à l'étude d'un objectif de microscope électronique par réflexion utilisé au Laboratoire de Toulouse. ( $S/D = 0,75$ ,  $D = 2$  mm.)

1° En raison des pertes de vitesse des électrons sur l'objet, il y a lieu de diminuer le plus possible l'aberration chromatique  $C_c$  d'un objectif par réflexion. Or  $C_c$  est sensiblement égal à la distance focale : il faut donc diminuer au maximum cette dernière en tenant compte du fait qu'ici le foyer objet devra se trouver *hors de la lentille*, pour pouvoir y placer le spécimen.

L'étude d'une première série de pièces polaires avait montré que pour des excitations croissantes, la distance focale ne diminuait pas autant qu'on pouvait l'espérer d'après les résultats de Liebmann. Cela était dû à la

saturation du fer de la partie rétrécie de la pièce polaire inférieure : un champ trop intense était créé dans son voisinage par un épaulement à angle droit de la pièce polaire supérieure. Celui-ci a été abattu et remplacé par une partie conique ce qui a donné de bien meilleurs résultats.

2° La figure 35 montre le profil des pièces polaires utilisées dans la



**BANC D'OPTIQUE ÉLECTRONIQUE.**

Objectif pour microscopie électronique par réflexion.

FIG. 35.

lentille définitive, au voisinage de l'axe. La mesure du champ a été faite au moyen de la sonde de 0,4 mm. de rayon pour les excitations suivantes :

S = 1,5 mm. N = 30.000 spires

I (mA)	20	40	60	80	100
NI (At)	600	1 200	1 800	2 400	3 000
H <sub>pp</sub> = NI/S amp. t/mm	400	800	1 200	1 600	2 000

Les courbes B/B<sub>0</sub> correspondantes sont tracées sur la figure 35 où sont indiquées également les valeurs du champ maximum B<sub>0</sub> sur l'axe.

On notera :

- a) que dans tous les cas le champ est négligeable en dehors de la lentille, dans la région où se trouve l'objet;

- b) que la courbe  $B_0(I)$  s'incurve nettement pour  $I > 50$  mA ;  
 c) que jusqu'à cette valeur de  $I$ , les topographies du champ sont pratiquement confondues et que le champ dans le trou est négligeable.  
 d) qu'à partir de  $I = 80$  mA la courbe représentative de la topographie s'élargit sensiblement et qu'il apparaît dans le trou un champ très étalé dont la valeur maximum, au niveau de l'étranglement est 3 % de  $B_0$  pour 80 mA et 7.7 % de  $B_0$  pour 100 mA ;  
 e) que c'est précisément vers  $I = 50$  mA que le champ  $H_{pp}$  entre les pièces polaires, loin de l'axe, atteint le « seuil »  $H_s = 1000$  amp-t/mm.

3° On trouvera également sur la figure 35 les caractéristiques optiques du premier ordre de cette lentille déduites du tracé des trajectoires paraxiales. Ces dernières ont été obtenues à partir de la topographie  $B(z)$ , au moyen d'une méthode de calcul numérique exposée ailleurs [8, a].

La distance focale ainsi calculée a été comparée avec celle indiquée par les graphiques de Liebmann et avec la distance focale directement mesurée sur le microscope par un procédé classique de focométrie : connaissant la position et les dimensions d'un objet donné (réplique d'un réseau optique de Rowland à 587 traits par mm), on déduit  $f$  de la mesure du grandissement.

Les résultats de cette étude sont donnés dans les tableaux ci-dessous, et réunis dans la figure 36.

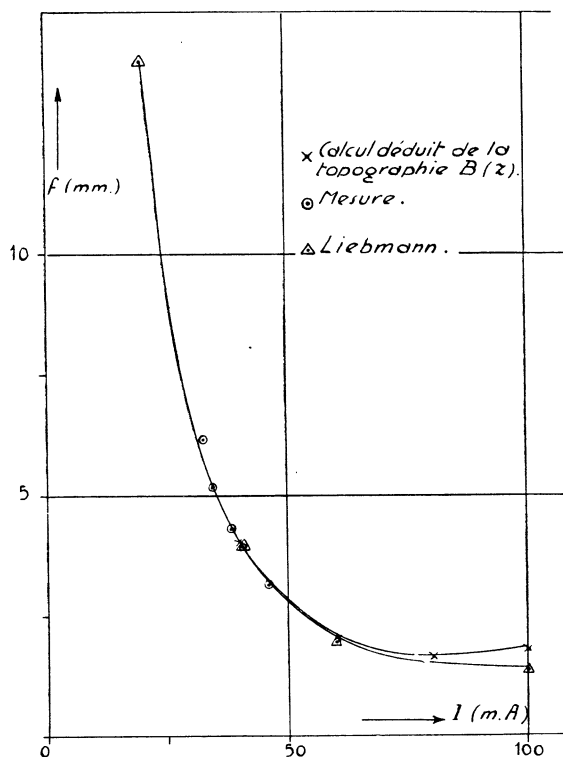


FIG. 36.

I (mA)	20	40	60	80	100
$f$ (mm) déduit de la topographie B (z)		3,90	2,10	1,70	1,85
$f$ (mm) d'après Liebmann	14	3,9	2,0	1,6	1,4

I (mA)	46,2	38,3	34,7	32,3
$f$ (mm) mesuré	3,19	4,36	5,20	6,16

On constate que les résultats de Liebmann sont exacts tant que n'apparaît pas la saturation du fer et qu'il y a une très bonne concordance entre les valeurs de  $f$  directement mesurées et celles obtenues par le calcul des trajectoires. Lorsque la saturation apparaît,  $f$  cesse de diminuer et passe par un minimum. Le champ très étalé, dans le trou, se comporte comme une lentille de faible puissance disposée après l'objectif, et qui a pour effet de diminuer le grandissement total. La distance focale  $f$  s'entend pour l'ensemble du champ, c'est-à-dire pour la somme du champ dans l'entrefer et du champ dans le trou : l'inclinaison de la trajectoire correspondant à  $I = 100$  mA, à l'entrée dans le champ « principal » est due au champ dans le trou.

En résumé, nous voyons que l'exemple étudié ci-dessus d'une lentille effectivement utilisée sur un microscope, et qui a fourni de bonnes images, permet de faire une sorte de synthèse des résultats généraux annoncés au début de ce chapitre, et de montrer leur domaine pratique d'application.

## B. — LENTILLES CYLINDRIQUES

### 1. — Généralités.

Nous avons montré qu'une bobine exploratrice de révolution corrigée de l'erreur du deuxième ordre due à ses dimensions finies l'est aussi bien dans un champ de révolution de même axe que la bobine, que dans un champ quelconque disposé n'importe comment par rapport à elle. Cette possibilité nous permet de mesurer l'induction et ses dérivées dans le plan de symétrie des lentilles cylindriques, avec la même précision que pour les lentilles de révolution. Cela peut d'ailleurs être démontré d'une manière directe dans ce cas particulier [8, b].

L'étude qui suit concerne uniquement les lentilles cylindriques symétriques non saturées. Les pièces polaires ont été obtenues à partir de pièces

polaires pour lentille de révolution (lentille d'étude des champs) de la manière indiquée par la figure 37.

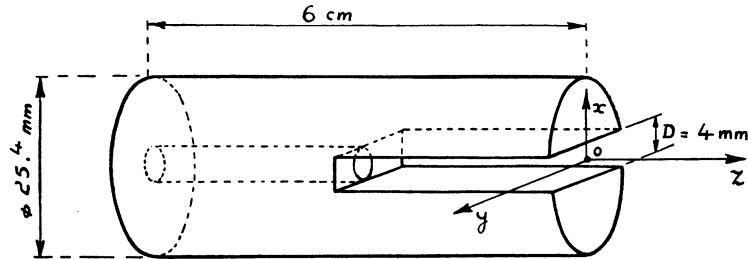


FIG. 37.

La largeur  $D = 4$  mm de la fente est assez petite devant sa longueur 25 mm pour qu'au voisinage de  $Oz$  le champ soit pratiquement indépendant de  $y$ . Deux pièces polaires analogues, placées à l'intérieur d'une bobine excitatrice blindée, séparées par une cale en laiton d'épaisseur  $S$ , leurs axes  $Oy$  étant maintenus bien parallèles au moyen d'une clavette du même métal, constituent une lentille magnétique cylindrique admettant  $yOz$  comme plan de symétrie.

Les possibilités d'utilisation d'une telle lentille en optique électronique sont encore assez mal définies. Il s'agit en effet d'un système astigmatique introduisant une rotation de « l'image » par rapport à l'objet, rotation qui dépend de l'excitation choisie et de l'orientation de l'objet [9]. La mesure du champ et de ses dérivées dans une série de telles lentilles, pour  $S/D = 0,2$ ;  $0,6$ ;  $1$  et  $2$ , et le calcul des trajectoires entrant dans ce champ parallèlement au plan de symétrie nous ont donné un ensemble de résultats (« distances focales », pente de la trajectoire à l'infini) qui pourront être utiles en Optique électronique. Nous attendons d'avoir fait quelques expériences sur ces lentilles, avec des électrons, pour pouvoir étudier en détail leurs propriétés. Probablement que, dans certaines conditions d'utilisation qui restent à préciser, le calcul des grandeurs optiques fondamentales pourra se ramener à un paramètre unique  $L$ , comme pour les lentilles de révolution [6, d]. Cela fera l'objet d'un travail ultérieur. Pour l'instant une des applications possibles nous paraît être l'emploi de la lentille comme analyseur de vitesses, car « l'ombre portée » d'une droite parallèle au plan de symétrie est encore une droite de même orientation [9].

## 2. — Mesure du champ et de ses dérivées dans le plan de symétrie.

Les mesures précises au palmer de l'épaisseur  $S$  des cales de laiton ainsi que celle de la largeur  $D$  de la fente ont donné les résultats :

$$S = 0,83; 2,4; 4; 8 \text{ mm.}; D = 4,13 \text{ mm.}$$

De sorte que les lentilles étudiées correspondaient aux valeurs suivantes de  $S/D$

$$S/D = 0,2; 0,581; 0,969; 1,937$$

a) En ce qui concerne la *topographie* du champ dans le plan de symétrie, on verra un exemple de l'allure des courbes  $B(z)$ ,  $B'(z)$  et  $B''(z)$  sur la figure 24 au chapitre III. Pour une même valeur de  $S/D$  le champ cylindrique est évidemment plus étalé que le champ de révolution, d'autant plus que  $S/D$  est plus petit. La figure 38 établit la comparaison entre les « demi-largeurs » correspondantes de ces deux types de champ.

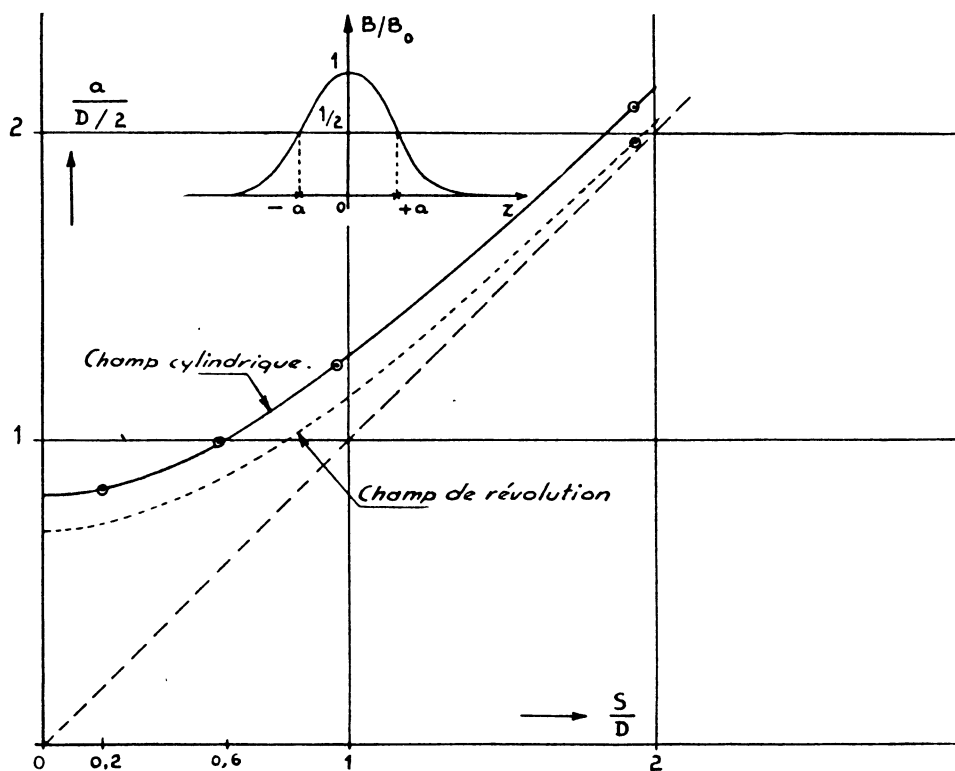


FIG. 38.

b) En ce qui concerne la *valeur absolue* du champ, puisque la courbe  $B(z)$  est plus étalée, il faut évidemment pour obtenir une même valeur de l'induction  $B_0$  au centre de l'entrefer un nombre d'ampères-tours plus important que dans une lentille de révolution correspondant à la même valeur de  $S/D$ . Les résultats de la mesure de  $B_0$  (rapportés au champ  $B_{pp}$  entre les pièces polaires, loin du plan de symétrie) sont donnés sur la figure

39. On constate qu'ils sont très bien représentés par la formule :

$$\frac{B_0}{B_{pp}} = \frac{S}{\sqrt{S^2 + D^2}} \quad (122)$$

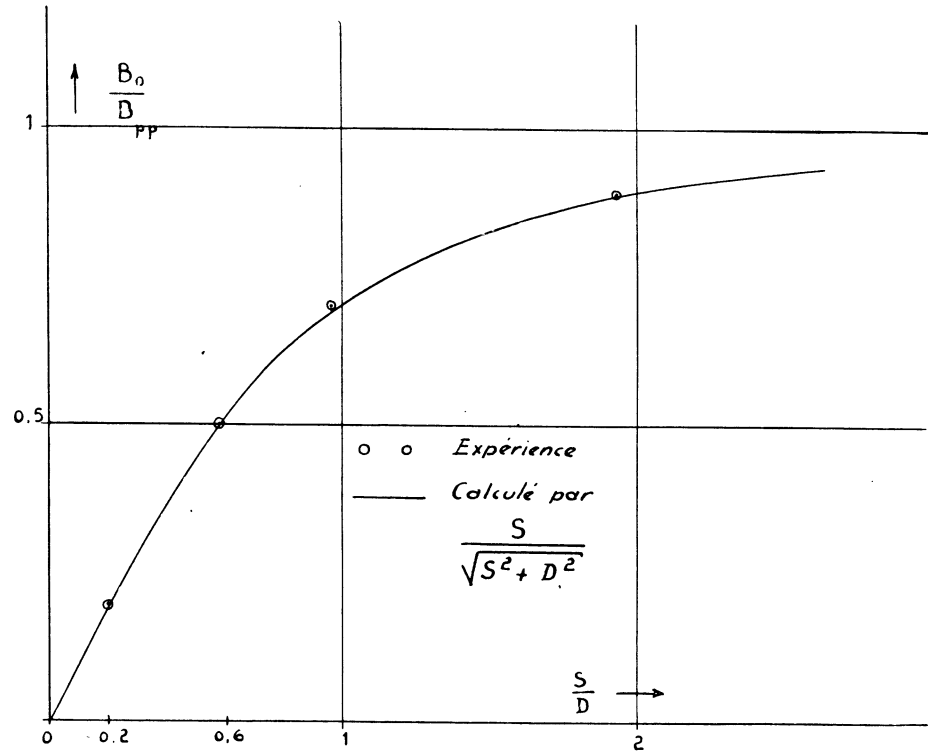


FIG. 39.

Puisque  $B_{pp} = \mu_0 NI/S$

$$B_0 = \frac{\mu_0 NI}{\sqrt{S^2 + D^2}} \quad (123)$$

Cela signifie que le champ maximum dans le plan de symétrie peut se calculer comme si la répartition  $B(z)$  était uniforme et égale à  $B_0$  sur la longueur  $L = \sqrt{S^2 + D^2}$  et nulle partout ailleurs. En réalité  $B_{pp}$  est toujours inférieur à  $\mu_0 NI/S$ , d'une part parce que la perméabilité n'est pas infinie d'autre part à cause des entrefers parasites. C'est le cas en particulier dans la série de lentilles que nous avons étudiée, où le circuit magnétique n'avait pas été étudié d'une façon spéciale. Les points de la figure 39 ont été obtenus en prenant  $B_{pp} = \mu_0 NI/1,11 S$ , de sorte que 90 % de la totalité des ampères-tours sont utilisés dans l'entrefers principal.

On sait que des formules analogues à (122) et (123) sont valables pour les lentilles de révolution à condition de remplacer  $D^2$  par  $0,45 D^2$ , et cela

permet de présenter d'une manière simple les propriétés optiques de ces lentilles au moyen d'un paramètre géométrique unique  $L = \sqrt{S^2 + 0,45 D^2}$ , [6, d]. On peut espérer faire la même chose pour les lentilles cylindriques, mais ce n'est pas certain. En effet, pour les lentilles de révolution, la « demi-largeur » «  $a$  » est reliée à  $L$  par  $2a/L = 0,97$ , valeur sensiblement constante dans tout le domaine pratique de variation de  $S/D$ . Par contre pour les lentilles cylindriques on obtient :

S/D	0,2	0,58	0,97	1,94
$\frac{2a}{L}$	0,843	0,87	0,91	0,97

Ce qui est certain en tout cas, dans les lentilles cylindriques, c'est que pour  $\mu = \infty$  et des pièces polaires très étendues dans tous les sens à partir du centre de l'entrefer, les formules (122) et (123) sont rigoureuses, comme nous allons le montrer.

### 3. — Interprétation théorique de la valeur obtenue pour l'induction au centre de l'entrefer.

1° Les formules (122) et (123) peuvent se déduire d'une manière rigoureuse des lois de la magnétostatique à partir des deux hypothèses suivantes :

a) Les pièces polaires sont supposées assez larges dans tous les sens à partir de l'entrefer : leur profil est celui qu'indique la figure 40.

b) La perméabilité du fer est assez grande pour être considérée comme pratiquement infinie : alors, les faces polaires et l'intérieur de la fente sont des équipotentielles magnétiques et l'on peut utiliser, pour résoudre l'équation de Laplace, les procédés de la représentation conforme (fig. 40).

Nous faisons le calcul dans le cas général de deux fentes d'inégales largeurs  $D_1$  et  $D_2$ ; il n'est pas plus compliqué que pour une lentille symétrique, et nous permettra de préciser un point de détail.

2° On transforme d'abord le demi-plan supérieur  $\zeta$  (fig. 40) en la partie située à gauche du sens du parcours indiqué dans le demi-plan supérieur  $\zeta$  au moyen de la transformation de Schwarz

$$\tilde{\zeta} = A \int \frac{\sqrt{(\zeta + c_1)(\zeta - c_2)}}{\zeta^2 - 1} d\zeta + B, \quad (124)$$

(A, B = constantes)

qu'il est inutile de calculer explicitement, comme nous allons le voir.

Les paramètres  $A$ ,  $c_1$  et  $c_2$  de la transformation s'obtiennent à partir des données géométriques  $S$ ,  $D_1$  et  $D_2$  en évaluant les vecteurs du plan complexe



$\overrightarrow{1'1''}$ ,  $\overrightarrow{3'3''}$  et  $\overrightarrow{4'4''}$ . On obtient

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{iS}{\pi}, \quad \sqrt{(c_1 - 1)(c_2 + 1)} = \frac{D_1}{S}, \\ (i^2 = -1) \quad \sqrt{(c_1 + 1)(c_2 - 1)} &= \frac{D_2}{S}. \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

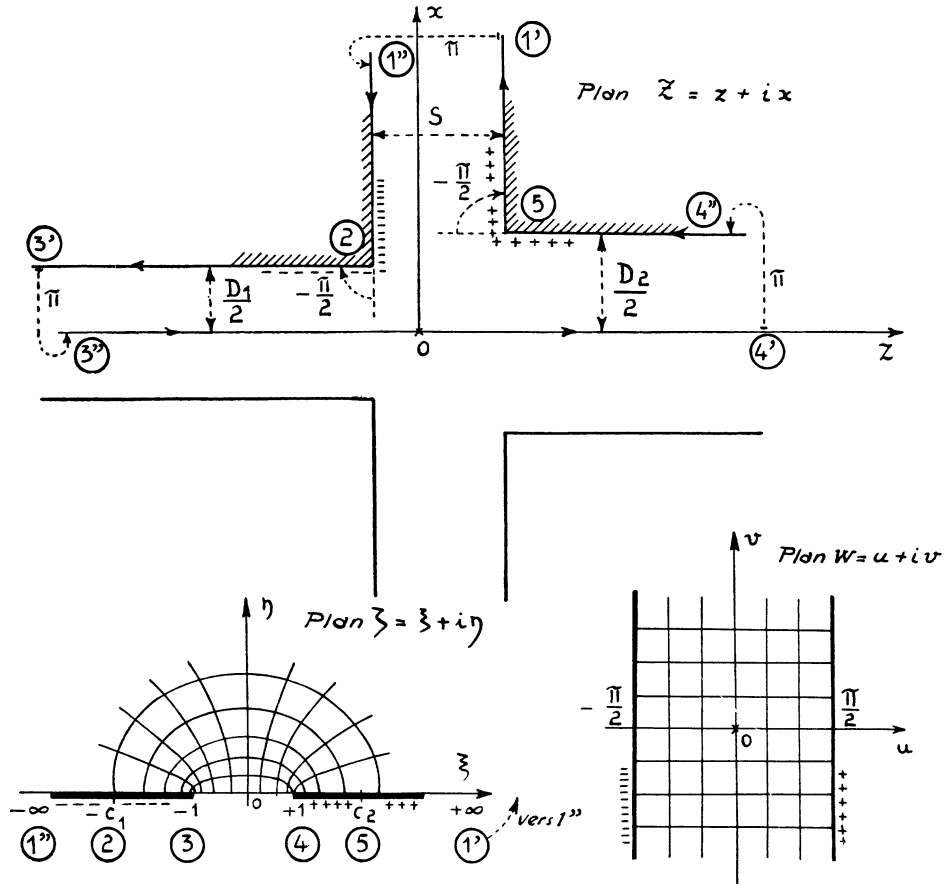


FIG. 40.

— Si l'on veut que les faces polaires soient à des potentiels différents et que l'axe  $Oz$  soit une ligne de force, il faut que les deux portions  $(-\infty, -1)$  et  $(+1, +\infty)$  de l'axe  $O\xi$  soient des équipotentiels à des potentiels différents, séparées par la coupure  $(-1, +1)$  : les équipotentiels et les lignes de force dans le plan  $\zeta$  sont alors constituées par un faisceau de coniques homofocales de foyers  $-1$  et  $+1$  (fig. 40). On l'obtient à partir d'un quadrillage régulier dans le plan  $w = u + iv$ , par la transformation

$$\zeta = \sin w \quad (126)$$

Dans le plan  $w$ , le potentiel varie linéairement entre  $u = +\pi/2$  et  $u = -\pi/2$  ; on assure ainsi la représentation conforme de la totalité des

plans  $w$ ,  $\zeta$  et  $\mathcal{Z}$  l'un sur l'autre; autrement dit, on obtient la lentille représentée sur la figure 40, dans laquelle la différence de potentiel magnétique vaut  $NI = \pi$ .

3° Calculons le champ magnétique complexe  $\mathcal{H} = H_z + i H_r$ . Son conjugué s'obtient immédiatement à partir de (124) et (126) :

$$\mathcal{H}^* = H_z - i H_r = - \left( \frac{dw}{dz} \right) \cdot \left( \frac{d\zeta}{d\mathcal{Z}} \right) = - \frac{1}{A} \sqrt{\frac{1 - \zeta^2}{(\zeta + c_1)(\zeta - c_2)}}. \quad (127)$$

Sur l'axe Oz,  $\mathcal{H}^* = H_z$ ;  $\zeta = \xi$  est compris entre  $-1$  et  $+1$ ; comme  $c_2 > 1$  et que  $A = iS/\pi$ ,  $\pi = NI$ ,

$$H_z = \frac{NI}{S} \sqrt{\frac{1 - \xi^2}{(c_1 + \xi)(c_2 - \xi)}}. \quad (128)$$

Loin de l'axe dans l'entrefer (points 1' et 1''),  $\xi \rightarrow \pm \infty$ , le radical tend vers 1 et le champ a bien pour grandeur  $H_{pp} = NI/S$ . Calculons sa valeur maximum sur l'axe : elle a lieu pour l'une des valeurs  $\xi_m$  de  $\xi$ , solution de l'équation du second degré

$$\xi^2 - 2P\xi + 1 = 0, \quad \xi_m = P \pm \sqrt{P^2 - 1}$$

avec 
$$P = \frac{1 - c_1 c_2}{c_2 - c_1} = - \frac{D_1^2 + D_2^2}{D_2^2 - D_1^2}, \quad \text{d'après (125)}$$

Il est facile de voir que seul le signe (+) convient car il faut que  $\xi_m = 0$  pour  $D_1 = D_2$ . On en déduit dans le cas général  $\xi_m = (D_1 - D_2)/(D_1 + D_2)$ . Substituant cette valeur dans (128) on obtient

$$\left( H_z \right)_{\max} = \frac{NI}{L}, \quad \text{avec } L = \sqrt{S^2 + \left( \frac{D_1 + D_2}{2} \right)^2}. \quad (129)$$

— Lorsque  $D_1 = D_2 = D$ ,  $L = \sqrt{S^2 + D^2}$ , et

$$\left( H_z \right)_{\max} = H_0 = NI/\sqrt{S^2 + D^2} \quad (130)$$

ce qui démontre la formule (123).

— Lorsque  $D_1 \cong D_2$ , on a sensiblement  $L \cong \sqrt{S^2 + D_1 D_2}$ . Mais il est évident *a priori* qu'une formule de ce type serait inexacte dans le cas général, car pour  $D_1$  ou  $D_2 \rightarrow 0$ , on aurait  $L \rightarrow S$ , soit  $\left( H_z \right)_{\max} \rightarrow NI/S$ , ce qui est manifestement faux.

Pour que le champ sur l'axe tende vers cette valeur, il faut que  $D_1$  et  $D_2$  tendent simultanément vers zéro, ce que montre bien la formule (129).

4° Il serait intéressant de poursuivre la comparaison entre la théorie et l'expérience pour les *répartitions* du champ sur l'axe. Il faut alors obtenir de façon explicite la transformation de Schwarz (124). Cela est encore assez simple : l'intégration est possible au moyen de fonctions transcendentes élémentaires (arctg, arcth). Mais il faudra ensuite effectuer, en s'aidant de tables, toute une série de calculs numériques assez longs. (\*)

(\*) La vérification correspondante, faite pendant l'impression de ce travail, a montré que l'accord est très bon. (Voir, P. Gautier et Cl. Latour, C. R. Acad. Sci. 248, 1959. p. 1637.)

## CONCLUSION

— Nous avons montré que la mesure des champs magnétiques, quelles que soient leurs symétries, peut être faite avec une bonne précision autour d'un point, par des méthodes d'induction ou électrodynamiques, à condition de construire convenablement les bobines exploratrices : si certaines règles de construction sont respectées, l'erreur de mesure associée aux dimensions finies de bobines peut n'être que du quatrième ordre, ce qui la rend négligeable devant les autres erreurs expérimentales. Une étude générale permet de déterminer ces règles de construction quel que soit le type de bobine que l'on devra utiliser, et donne le moyen de les calculer.

— Il est intéressant d'utiliser des bobines vibrant avec une très petite amplitude, et de mesurer la force électromotrice induite, *alternative* : la valeur finie de l'amplitude n'intervient pratiquement pas en raison du volume assez important que l'on peut donner aux bobines, ce qui augmente la sensibilité; enfin la vibration n'a pas besoin d'être bien sinusoïdale.

— Nous avons appliqué ces possibilités à une méthode nouvelle pour la mesure de l'induction  $B(z)$  sur l'axe des lentilles magnétiques, et dont voici les avantages principaux :

a) *La réalisation mécanique est simple.* Il n'y a pas de contacts tournants. Une tige portant les bobines exploratrices est fixée au centre d'une plaque vibrante actionnée par un moteur de haut-parleur.

b) *Les mesures sont commodes à effectuer.* La force électromotrice induite étant alternative, on peut aisément l'amplifier. Les valeurs relatives de  $B(z)$  et de ses dérivées s'obtiennent par lecture directe du cadran d'un voltmètre électronique.

Pour explorer le champ, on déplace la tige portant les bobines parallèlement à Oz.

c) *Les mesures sont rapides.* On peut faire l'enregistrement direct des courbes  $B(z)$ ,  $|B'(z)|$ ,  $|B''(z)|$  d'un champ donné en quelques minutes.

d) *La sensibilité est grande et variable dans de larges limites.*

1 mV pour 1 000 gauss est un ordre de grandeur courant de la f.é.m. induite. On la modifie simplement en agissant sur la fréquence et l'amplitude des vibrations, entretenues par un générateur B. F. ordinaire.

e) *L'insensibilité aux trépidations, courants d'air... est pratiquement totale.*

Ce n'est pas le cas pour les méthodes électrodynamiques où les forces mises en jeu, très petites, sont facilement masquées par des forces parasites extérieures.

f) *Les bobines exploratrices sont parcourues par un courant négligeable.*

Le champ de ce courant ne risque pas de modifier localement l'aimantation du fer du système étudié.

g) La précision atteinte, de l'ordre de quelques pour cent à 1 %, est suffisante pour la plupart des applications pratiques. Elle est *la même* sur la mesure des dérivées et sur la mesure de l'induction.

— Quelques études effectuées sur des lentilles de révolution ou cylindriques nous ont montré les possibilités d'application de la méthode. Nous avons pu préciser certains résultats déjà obtenus par le calcul, en établissant une comparaison avec la mesure directe.

Enfin nous avons pu aborder une étude sur les lentilles cylindriques, que nous comptons reprendre plus en détail et plus complètement lorsque nous aurons débrouillé le gros des phénomènes par des expériences d'Optique Electronique effectuées avec ces lentilles.

---

## APPENDICE I

### APPLICATIONS DU MODE DE CALCUL DU CHAPITRE II A D'AUTRES TYPES DE BOBINAGES

#### 1. — Cas d'un cadre allongé. Balance de Cotton et dispositif analogue.

1° Nous avons vu (chapitre II A, paragraphe 2), qu'une bobine de volume fini, convenablement construite, permet de mesurer un champ quelconque *en un point* si on l'utilise avec un fluxmètre. C'est une telle bobine que nous employons pour mesurer la dérivée première  $B'_z(z)$  de l'induction sur l'axe des lentilles magnétiques : pour cela on la fait vibrer *parallèlement* à l'axe  $Oz$  et on mesure la force électromotrice induite. Mais nous avons fait remarquer que si on impose à la bobine une vibration *perpendiculaire* à  $Oz$ , la force électromotrice est proportionnelle aux dérivées  $\partial B_z / \partial x$  ou  $\partial B_z / \partial y$ , qui sont intéressantes à connaître pour l'étude des systèmes magnétiques défecteurs (« prismes », spectrographes de masse, accélérateurs de particules, ...).

Dans ces systèmes, quand on veut que la grandeur mesurée soit directement proportionnelle à  $B$ , on utilise le dispositif connu sous le nom de balance de Cotton ou bien une méthode électrodynamique analogue (Birebent [2, a]). Mais on peut aussi imaginer une méthode d'induction fournissant directement  $B$  sous la forme d'une différence de potentiel *alternative*. Pour cela on fait vibrer, parallèlement à  $Oz$ , un cadre de largeur très petite s'étendant depuis une région de champ nul ( $+\infty$ ) jusqu'en  $\Omega$  (figure 41).

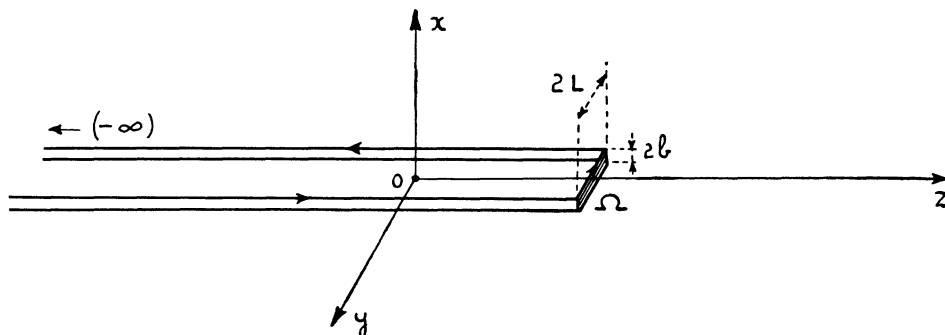


FIG. 41.

La *f. é. m. induite* est proportionnelle à  $B_z$  au point  $\Omega$ . Pratiquement la largeur  $2L$  du cadre et sa hauteur  $2b$  ne peuvent être infiniment petites. Cependant, le résultat ci-dessus reste correct si le champ est sensiblement uniforme autour de  $\Omega$ . C'est dans ces conditions qu'on utilise généralement la balance de Cotton, pour mesurer le champ dans l'entrefer d'un électroaimant. Par contre, dans un champ prenant des valeurs très différentes en

des points très voisins de  $\Omega$ , les dimensions finies  $2L$  et  $2b$  de l'extrémité du cadre introduisent une erreur dans la mesure.

Nous allons montrer que, parce que  $\vec{B}$  satisfait à l'équation de Laplace, il est possible de mesurer l'induction *en un point*, au quatrième ordre près, en associant de part et d'autre de ce point deux cadres identiques montés en série. Le calcul nous fournira une règle pratique de construction.

2° Considérons la disposition de la figure 42, On réalise d'abord le bobinage (1). On complète ensuite le support ( $\Sigma$ ) en fixant à une extrémité le parallélépipède isolant ( $\sigma$ ), de longueur  $2h$ , et on bobine sur l'ensemble le cadre (2). Les demi-largeurs  $L$  des rectangles  $A_1B_1C_1D_1$  et  $A_2B_2C_2D_2$  diffèrent en réalité de l'épaisseur du fil : on peut les supposer égales sans erreur appréciable.

Imprimons à ces bobinages une vitesse de translation  $\vec{v}$  : la force électromotrice induite dans chaque spire est

$$\mathcal{E} = \int_C \vec{B} \cdot [d\vec{l} \times \vec{v}]. \quad (\text{I. 1})$$

Si on fait circuler dans les cadres immobiles un courant électrique  $I$ , la force électrodynamique qui s'exerce sur chaque spire est

$$\vec{F} = I \int_C [d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (\text{I. 2})$$

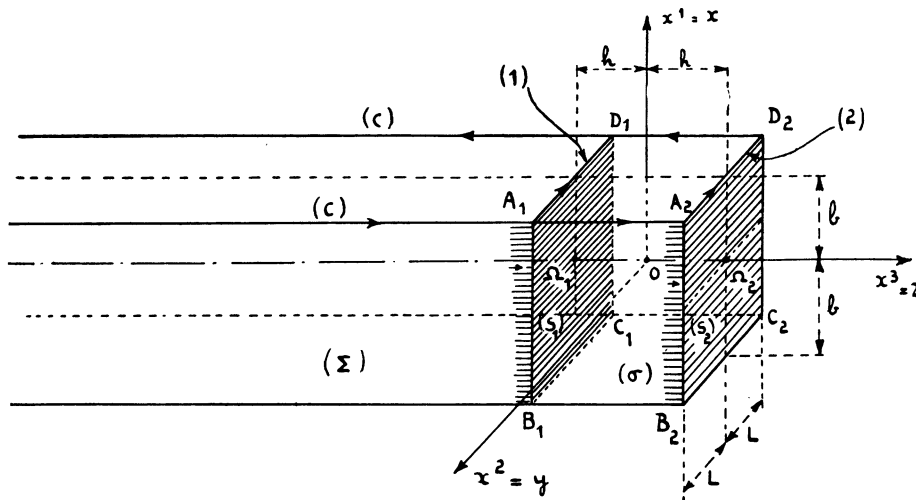


FIG. 42.

Posons que la vitesse  $\vec{v}_z$  est parallèle à  $Oz$ , ou que l'on mesure la composante  $F_z$  de la force : les côtés de (C) parallèles à  $Oz$  n'interviennent pas. D'où en valeur absolue

$$\frac{\mathcal{E}}{v_z} = \frac{F_z}{I} = \int_{-L}^{+L} B_x dy. \quad (\text{I. 3})$$

Soit  $n$  le nombre de spires par unité de longueur parallèle à  $Ox$ . On a pour l'ensemble du bobinage

$$\frac{\xi}{v_z} = \frac{F_z}{I} = n \int_S B_1 ds, \quad (B_1 = B_x). \quad (\text{I. 4})$$

L'intégrale est étendue à la surface  $S$  des deux rectangles  $A_1B_1C_1D_1$  et  $A_2B_2C_2D_2$ .

Développons  $B_1$  en série de Taylor autour du point  $O$

$$B_1 = (B_1)_0 + (x^u \partial_u)_0 B_1 + \frac{1}{2!} (x^u x^r \partial_u \partial_r)_0 B_1 + \dots \quad (\text{I. 5})$$

Substituons dans (I, 4)

$$\frac{\xi}{v_z} = \frac{F_z}{I} = n \left\{ S (B_1)_0 + (\partial_u B_1)_0 t^u + \frac{1}{2} (\partial_u \partial_r B_1)_0 t^{ur} + \dots \right\}, \quad (\text{I. 6})$$

$$S = S_1 + S_2 = 8 Lb, \quad t^{ur\dots q} = \int_S x^u x^r \dots x^q \cdot dS. \quad (\text{I. 7})$$

Les deux cadres sont identiques et le point  $O$  est équidistant de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (*fig. 42*), de sorte que la figure formée par les rectangles  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $A_2B_2C_2D_2$  est symétrique par rapport aux plans de coordonnées :  $t^u = 0$ ,  $t^{ur} = 0$  si  $u \neq v$ . D'où

$$\frac{\xi}{v_z} = \frac{F_z}{I} = n \left\{ S (B_1)_0 + \frac{1}{2} \left[ t^{11} \partial_1^2 + t^{22} \partial_2^2 + t^{33} \partial_3^2 \right]_0 B_1 + \dots \right\} \quad (\text{I. 8})$$

Ici encore on peut annuler le terme du deuxième ordre, puisque  $\vec{B}$  satisfait à l'équation de Laplace, en imposant les conditions

$$t^{11} = t^{22} = t^{33}. \quad (\text{I. 9})$$

Ces composantes du tenseur  $t^{ur}$  sont immédiatement calculables : (I, 9) est équivalente à

$$b = L = h \sqrt{3} \quad (\text{I. 10})$$

Si cette règle de construction est respectée, on a, avec une très bonne approximation

$$\frac{\xi}{v_z} = \frac{F_z}{I} = 2 n \cdot 4 L^2 \cdot (B_1)_0 \quad (\text{I. 11})$$

**2. — Cas d'une bobine longue de section carrée.  
Projet d'appareil permettant la mesure des trois composantes  
d'un champ quelconque en un point.**

1° Imaginons que l'on bobine, sur le cadre ci-dessus, de section carrée, deux solénoïdes à une seule couche de spires convenablement décalés, analo-

gues à ceux qui nous servent pour la mesure de  $B_z$  dans les lentilles : la f.é.m. induite sera alors proportionnelle à  $B_z$  en un point au quatrième ordre près, si l'on satisfait à une certaine condition que nous allons rechercher. Le cadre ci-dessus sert à mesurer  $B_1$  : il suffit de le faire tourner de  $90^\circ$  autour de  $Ox^3 = Oz$  pour qu'il serve à mesurer  $B_2$ . On voit donc qu'il est possible de réaliser des bobines exploratrices permettant de mesurer en un point les trois composantes d'un champ magnétique quelconque.

Cela présente de l'intérêt pour la connaissance du champ dans les systèmes quadrupolaires astigmatiques, ou lentilles à « focalisation forte ». Un appareil basé sur ce principe fera l'objet d'une prochaine étude au Laboratoire de Toulouse (\*).

2° Calculons le décalage  $2l$  qu'il faudra prévoir entre les deux solénoïdes pour que la mesure soit faite au 4<sup>e</sup> ordre près. D'après les calculs du chapitre II la condition à satisfaire est

$$t_1^{2,122} + t_2^{2,122} = l_1^2 t_1^{2,1} + l_2^2 t_2^{2,1}, \quad \text{avec} \quad t^{u,vw\dots q} = \int_C \dot{\gamma}^u x^v x^w \dots x^q \cdot dl,$$

C désignant la spire terminale de l'une ou l'autre des deux bobines à l'extrémité où  $\vec{B} \neq 0$ .

Dans les systèmes pour l'étude desquels l'appareil est prévu, on dispose de beaucoup plus de place que dans les lentilles : le côté  $2L$  du carré peut être choisi assez grand (quelques millimètres) de sorte que l'épaisseur  $\varepsilon$  du fil peut être négligée devant  $L$  et l'on peut poser  $t_1^{u,vw\dots q} = t_2^{u,vw\dots q} = t^{u,vw\dots q}$ . La condition à satisfaire s'écrit alors  $t^{2,122} = l^2 t^{2,1}$ . Ces composantes du tenseur  $t^{u,vw\dots q}$  sont immédiates à calculer en coordonnées cartésiennes pour un carré de côté  $2L$ . On trouve

$$t^{2,122} = \frac{4L^4}{3}, \quad t^{2,1} = 4L^2, \quad (I, 12)$$

de sorte que le décalage entre les solénoïdes devra être égal à

$$2l = 2L/\sqrt{3} \quad (I, 13)$$

Nous obtenons la même valeur que pour le décalage  $2h$  entre les deux cadres considérés ci-dessus. Le coefficient de proportionnalité entre la force électromotrice induite et la composante correspondante du champ est également la même pour les deux cadres et pour les deux solénoïdes. En effet, on a ici, d'après la formule (28)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2n t^{2,1} (B_3)_0 = 2n \cdot 4L^2 \cdot (B_3)_0, \quad (I, 14)$$

ce qui est la même chose que (I, 11), où  $B_3$  remplace  $B_1$ .

(\*) Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Toulouse pour obtenir le grade de Docteur de Spécialité (3<sup>e</sup> cycle, Physique Electronique), par Cl. Latour. Soutenue le 24 avril 1959.



## APPENDICE II

### SUR LES SYMÉTRIES DES CHAMPS

Les propositions qui suivent sont établies en prenant pour exemple les champs magnétiques. Mais elles sont valables également pour les champs électriques, plus généralement pour tout champ de vecteurs satisfaisant à l'équation de Laplace dans un certain domaine. De sorte qu'en ce qui concerne les champs physiques, le domaine de validité est en dehors des sources, dans le vide (ou dans l'air).

1. — Relation entre un champ quelconque  $\vec{B}(r, \varphi, z)$   
et le champ de révolution  $\vec{B}^R(r, z)$  tel que  $B_z^R(o, z) \equiv B_z(o, z)$ .

Nous allons démontrer le théorème suivant, qui nous a servi au chapitre II.

« A partir d'un champ *quelconque*  $\vec{B}(r, \varphi, z)$  donné en coordonnées cylindriques, il est possible d'obtenir l'une quelconque des grandeurs caractéristiques du champ de révolution  $\vec{B}^R(r, z)$  tel que  $B_z^R(o, z) \equiv B_z(o, z)$ , en prenant la *valeur moyenne* par rapport à  $\varphi$  de la grandeur correspondante du champ  $\vec{B}$ . »

1° On sait que si on utilise les coordonnées cylindriques toutes les grandeurs (induction  $\vec{B}$ , potentiels vecteur et scalaire  $A$  et  $V$ ) caractéristiques d'un champ donné *dans le vide* peuvent se déduire d'une fonction unique  $U(r, \varphi, z)$ , par les formules, [5, e] :

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial r}, & B_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial z}, & B_z &= \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\ A_z &= -\frac{\partial U}{\partial r}, & A_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, & \mu_0 V^* &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 1})$$

La fonction  $U$  est partout finie et continue ainsi que ses dérivées et prend ainsi que ses dérivées la même valeur pour  $\varphi = 0$  et  $\varphi = 2\pi$ . C'est une solution de l'équation de Laplace.

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (\text{II. 2})$$

Nous allons montrer que le champ de révolution  $\vec{B}^R(r, z)$  tel que  $B_z^R(o, z) \equiv B_z(o, z)$ , dérive de la fonction :

$$U^R(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r, \varphi, z) d\varphi. \quad (\text{II. 3})$$

2° En effet, compte tenu des hypothèses concernant la fonction U, on peut prendre le laplacien des deux membres de (II, 3) et appliquer les formules (II, 1) à  $U^R$  en dérivant sous le signe somme.

a) Prenons le laplacien de (II, 3). Posons

$$\Delta^R = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (\text{II. 4})$$

et utilisons la formule (II, 2)

$$\Delta^R U^R = \int_0^{2\pi} \Delta^R U d\varphi = -\frac{1}{2\pi r^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} d\varphi = -\frac{1}{2\pi r^2} \left| \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right|_0^{2\pi} = 0 \quad (\text{II. 5})$$

$U^R$  satisfait donc à l'équation de Laplace des systèmes de révolution

$$\Delta^R U^R = 0$$

b) Appliquons les formules (II, 1) à  $U^R$ . Soient  $\vec{B}^R$ ,  $\vec{A}^R$ ,  $V^{*R}$ , les grandeurs déduites de cette fonction; on trouve

$$\left. \begin{aligned} B_{\varphi}^R(r, z) &\equiv 0, & A_r^R(r, z) &\equiv 0 \\ B_r^R(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_r(r, \varphi, z) d\varphi, \\ B_z^R(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_z(r, \varphi, z) d\varphi, \\ A_{\varphi}^R(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{\varphi}(r, \varphi, z) d\varphi, \\ V^{*R}(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(r, \varphi, z) d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 6})$$

Ainsi la formule (II, 3) s'applique également à  $\vec{B}^R$ ,  $\vec{A}^R$  et  $V^{*R}$ . Comme  $U^R$  satisfait à l'équation de Laplace, ces grandeurs sont caractéristiques d'un « champ ».

c) Ce champ a la symétrie de révolution autour de Oz. Il est tel que

$$\left. \begin{aligned} U^R(o, z) &\equiv U(o, z), & B_z^R(o, z) &\equiv B_z(o, z), & V^{*R}(o, z) &\equiv V^*(o, z), \\ B_{\varphi}^R(o, z) &\equiv 0, & A_{\varphi}^R(o, z) &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 7})$$

3° REMARQUE : Il est intéressant de noter que dans les formules (II, 6), seuls  $B_z$  et  $V^*$  satisfont à l'équation de Laplace. En effet, pour un vecteur  $\vec{\psi}$ , l'équation de Laplace.

$$\Delta \vec{\psi} = \text{grad}(\text{div} \vec{\psi}) - \text{rot rot} \vec{\psi} = 0, \quad (\text{II. 8})$$

est équivalente, en coordonnées cylindriques, aux trois équations

$$\left. \begin{aligned} (\Delta \vec{\psi})_r &= \Delta(\psi_r) - \frac{1}{r^2} \left( \psi_r + 2 \frac{\partial \psi_{\varphi}}{\partial \varphi} \right) = 0, & (a) \\ (\Delta \vec{\psi})_{\varphi} &= \Delta(\psi_{\varphi}) - \frac{1}{r^2} \left( \psi_{\varphi} - 2 \frac{\partial \psi_r}{\partial \varphi} \right) = 0, & (b) \\ (\Delta \vec{\psi})_z &= \Delta(\psi_z) = 0. & (c) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 9})$$

La formule (II, 3) s'applique à  $B_r$  et  $A_\varphi$  bien que ces fonctions ne satisfassent pas à l'équation de Laplace, mais aux équations plus compliquées (II, 9, a) et (II, 9, b) (1).

D'une manière générale, si  $\vec{\psi}(r, \varphi, z)$  est un champ de vecteurs satisfaisant à (II, 8), la formule

$$\vec{\psi}^R(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{\psi}(r, \varphi, z) d\varphi. \quad (\text{II. 3bis})$$

fournit le champ de vecteurs tel que

$$\psi_z^R(\mathbf{o}, z) \equiv \psi_z(\mathbf{o}, z); \quad \psi_r^R(\mathbf{o}, z) \equiv \mathbf{o}, \quad \psi_\varphi^R(\mathbf{o}, z) \equiv \mathbf{o}. \quad (\text{II. 7bis})$$

Ce champ satisfait à  $\Delta^R \vec{\psi}^R = \mathbf{0}$ , soit

$$\left. \begin{aligned} (\Delta^R \vec{\psi}^R)_r &= \left( \Delta^R - \frac{1}{r^2} \right) \psi_r^R = 0, & (\Delta^R \vec{\psi}^R)_\varphi &= \left( \Delta^R - \frac{1}{r^2} \right) \psi_\varphi^R = 0, \\ (\Delta^R \vec{\psi}^R)_z &= \Delta^R (\psi_z^R) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II 5bis})$$

La démonstration est identique à ci-dessus (2°, a). On applique l'opérateur  $\Delta^R$  aux trois composantes de  $\vec{\psi}^R$  défini par (II, 3 bis), en dérivant sous le signe somme; on tient compte de (II, 9) et de ce que, par hypothèse, toutes les composantes de  $\vec{\psi}$  ainsi que leurs dérivées reprennent la même valeur que pour  $\varphi = 0$ , et  $\varphi = 2\pi$ .

4° Autre démonstration : Comme  $\varphi$  a une variation finie, on peut rechercher pour  $U(r, \varphi, z)$  un développement en série de Fourier relativement à la variable  $\varphi$ , les coefficients étant des fonctions de  $r$  et de  $z$  :

$$U(r, \varphi, z) = a_0(r, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n(r, z) \cos n\varphi + b_n(r, z) \sin n\varphi \right\}. \quad (\text{II. 10})$$

Puisque par hypothèse  $U$  reprend la même valeur pour  $\varphi = 0$  et  $\varphi = 2\pi$ , les nombres  $n$  sont des nombres entiers. Prenons le lablacien de (II, 10); écrivons qu'il est identiquement nul : on obtient

$$\Delta^R a_0 = 0, \quad \left( \Delta^R - \frac{n^2}{r^2} \right) a_n = 0, \quad \left( \Delta^R - \frac{n^2}{r^2} \right) b_n = 0. \quad (\text{II. 11})$$

Mais on sait que

$$a_0(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r, \varphi, z) d\varphi = U^R(r, z).$$

Nous retrouvons bien le résultat ci-dessus.

5. Exemple : Nous allons vérifier la formule (II.3) en l'appliquant au cas particulier d'un champ cylindrique présentant un plan de symétrie  $yOz$ .

(1) Or, c'est précisément  $A_\varphi$  que nous utilisons au chapitre II, B.

Représentons le potentiel sur l'axe Oz d'une lentille cylindrique ou de révolution par

$$V^*(0, z) = f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{-iuz} du$$

On sait que dans une lentille cylindrique ayant yOz pour plan de symétrie et dans une lentille de révolution d'axe Oz les potentiels dans tout l'espace  $V^{*C}(x, z)$  et  $V^{*R}(r, z)$  sont donnés par [5, f] :

$V^{*C}(x, z)$	$V^{*R}(r, z)$
$\frac{1}{2} \left\{ f(z + ix) + f(z - ix) \right\}$	$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(z + ir \cos \varphi) d\varphi$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{ch}(ux) g(u) e^{-iuz} du$	$\int_{-\infty}^{+\infty} I_0(ur) g(u) e^{-iuz} du$
$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{2n} f(z)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left( \frac{r}{2} \right)^{2n} \left( \frac{d}{dz} \right)^{2n} f(z)$

En appliquant la formule (II, 3) à  $V^{*C}(r \cos \varphi, z)$ , compte tenu des conditions de symétrie et de

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \text{ch}(ur \cos \varphi) d\varphi = I_0(ur), \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^{2n} \varphi d\varphi = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2},$$

on retrouve aisément les expressions de  $V^{*R}$  ci-dessus.

**2. — Généralisation — Décomposition d'un champ quelconque en une série de champs ayant des symétries particulières autour de Oz.**

D'après la formule (II, 10), le théorème démontré au paragraphe précédent constitue en quelque sorte une interprétation physique du premier terme  $a_0(r, z)$  du développement en série de Fourier de la fonction  $U(r, \varphi, z)$  :  $a_0$  est la fonction génératrice d'un champ de révolution (axe de symétrie Oz d'ordre infini) ayant la même répartition  $B_z(o, z)$  que le champ donné. On peut se demander ce que représente physiquement le reste de la série. Nous allons montrer qu'il correspond à la superposition d'une série de champs admettant Oz comme axe d'antisymétrie d'odres 2,4,8, 16... dont la composante sur Oz est identiquement nulle.

**1° Définitions :**

a) Nous dirons que Oz est un *axe de symétrie d'ordre m* ( $S_m$ ) pour le champ si

$$U = U^{S_m}(r, \varphi, z) = U^{S_m} \left( r, \varphi + \frac{2\pi}{m}, z \right) \tag{II. 12}$$

Substituant dans (II. 10) on obtient les conditions

$$n = lm \quad \text{avec} \quad l = 1, 2, 3, 4, \dots, \tag{II. 13}$$

et l'on peut montrer que si  $r = 0$ ,  $\vec{B} \equiv \vec{B}_z$ .

b) Nous dirons que Oz est un *axe d'antisymétrie d'ordre m'* ( $A_{m'}$ ) pour le champ si

$$U = U^{A_{m'}}(r, \varphi, z) = - U^{A_{m'}}\left(r, \varphi + \frac{2\pi}{m'}, z\right). \tag{II. 14}$$

Substituant dans (II. 10) on obtient les conditions

$$a_0(r, z) \equiv 0, n = km' + \frac{m'}{2}, \quad \text{avec } k = 0, 1, 2, 3, \dots, \tag{II. 15}$$

d'où il résulte, puisque  $n$  est entier, qu'un axe d'antisymétrie est obligatoirement *d'ordre pair*, ce qui est évident a priori. On peut en outre montrer que si  $r = 0$ ,  $B_z \equiv 0$ .

c) Les exemples les plus courants en optique électronique de ceux deux types de symétrie sont les suivants :

- Cas (a) : Lentilles de révolution. ....  $m = \infty$
- Lentilles cylindriques } .....
- Stigmatteur à trou elliptique } .....
- }  $m = 2$
- Cas (b) : Champs défecteurs. . . . .  $m' = 2$
- Groupes quadrupolaires } .....
- (« lentilles » à focalisation forte) } .....
- }  $m' = 4$

Bien entendu ces systèmes peuvent en outre avoir un ou plusieurs plans de symétrie et leur champ peut être indépendant de l'une des coordonnées,  $y$  par exemple (Lentilles cylindriques, champs défecteurs).

2° *Théorème* : Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant qui exprime le résultat annoncé ci-dessus.

« Un champ  $\vec{B}(r, \varphi, z)$  ayant un axe Oz de symétrie d'ordre  $m$  peut être considéré comme la superposition d'un champ  $\vec{B}^R$  de révolution autour de Oz tel que  $B_z^R(o, z) \equiv B_z(o, z)$ , et d'une série de champs  $\vec{B}^{A_{m'}}$ , admettant Oz comme axe d'antisymétrie d'ordres  $m' = 2m, 4m, 8m, \dots$  et tels que  $B^{A_{m'}}(o, z) \equiv 0$ . »

Le champ quelconque sans symétrie particulière, correspond à  $m = 1$ .

a) Il suffit de montrer que le champ dérive d'une fonction U de la forme

$$U^{S_m} = U^R + U^{A_{2m}} + U^{A_{4m}} + \dots = U^R + \sum_{j=1}^{\infty} U^{A_{2^j m}} \tag{II. 16}$$

Or, d'après (II. 10) et les remarques du (1°) on a

— Pour  $U^{S_m}$ ,  $n = lm$ , avec  $l = 1, 2, 3, 4, \dots$ , d'où

$$U^{S_m} = U^R + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ a_{lm} \cos m\varphi + b_{lm} \sin lm\varphi \right\}. \tag{II. 17}$$

— Pour  $U^{A_{2^j m}} n = km' + m'/2$ , avec  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , soit  
 $n = 2^{j-1} (2k + 1)m$ , avec  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , d'où

$$U^{A_{2^j m}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ a_{2^{j-1} (2k+1)m} \cos \left[ 2^{j-1} (2k+1)m \right] \varphi \dots \dots \dots \right. \\ \left. \dots \dots \dots + b_{2^{j-1} (2k+1)m} \sin \left[ 2^{j-1} (2k+1)m \right] \varphi \right\}. \quad (\text{II. 18})$$

b) Si maintenant nous calculons la somme

$$\sum_{j=1}^{\infty} U^{A_{2^j m}} = \sum_{kj} \left\{ \dots \dots \dots \right\},$$

il faut donner à  $j$  et à  $k$  toutes les valeurs possibles :

$$j = 1, 2, 3, \dots ; \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Or, on peut aisément montrer que si l'on fait cela, l'expression

$$l = 2^{j-1} (2k + 1)$$

fournit l'ensemble des nombres entiers, zéro excepté, sans répétition. D'où d'après (II. 18)

$$\sum_{j=1}^{\infty} U^{A_{2^j m}} = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ a_{lm} \cos lm \varphi + b_{lm} \sin lm \varphi \right\},$$

de sorte que (II. 16) et (II. 17) sont identiques, ce qui démontre le théorème.

## BIBLIOGRAPHIE

### I. — Ouvrages généraux.

- DUPOUY (G.). — *Eléments d'optique électronique*, A. Colin, Paris, 1952.  
DURAND (E.). — *Electrostatique et Magnetostatique*, Masson, Paris, 1953.  
ZWORYKIN (V. K.), MORTON (G. A.), RAMBERG (E. G.), HILLIER (J.), and WANCE (A. W.). *Electron Optics and the Electron Microscope* Wiley, New-York, 1945.

### II. — Articles sur la mesure des champs magnétiques.

#### MÉTHODES UTILISANT UN GALVANOMÈTRE BALISTIQUE OU UN FLUXMÈTRE.

- KLEMPERER (O.). — *Phil. Mag.*, 20, 545 (1935).  
SIMPSON (J. A.). — *Rev. Sci. Instr.*, 11, 430 (1940).  
MARTON (L.). — *Phys. Rev.*, 55, 672 (1939); *Proc. Inst. Radio Engrs. N.Y.*; 32, 546 (1944).  
DOSSE (J.). — *Z. Phys.*, 117, 437 (1941).

#### ELIMINATION DES ERREURS DUES AUX DIMENSIONS DES BOBINES.

- SANDOR (J.). — *Arch. Elektrotechn.*, 35, 217 et 529 (1941) (extrapolation après mesure de  $B_z$ , avec des bobines de diamètres décroissants).  
BROWN (W. F.) et SWEER (J. H.). — *Rev. Sci. Instr.*, 16, 276 (1945), (« flux ball » : bobine exploratrice sphérique diamètre 3 pouces).  
WILLIAMSON (K. I.). — *Journ. Sci. Instr.*, 24, 242 (1947), (« flux ball », diamètre 1/4 de pouce).

#### MÉTHODES D'INDUCTION AVEC MESURE D'UNE F.É.M. ALTERNATIVE. — BOBINE TOURNANTE.

- KOHAUT (A.). — *Z. techn. Phys.*, 18, 198 (1937).  
COLE (R. H.). — *Rev. Sci. Instr.*, 9, 215 (1938).  
SEPTIER (A.). — *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 243, 132 (1956).

#### BOBINE OSCILLANT AUTOUR D'UN DIAMÈTRE.

- KLEMPERER (O.) et MILLER (H.). — *Journ. Sci. Instr.*, 16, 121 (1939).  
GODDARD (L. S.) et KLEMPERER (O.). — *Proc. Phys. Soc.*, London, 56, 378 (1944).

#### MÉTHODES ÉLECTRODYNAMIQUES : MESURE D'UNE FORCE OU D'UN COUPLE.

- DUPOUY (G.). — *Ann. Phys.*, Paris, 14, 549 (1931) (« Gaussmètre »).  
VAN MENTS (M.) et LE POOLE (J. B.). — *Appl. Sci. Res.*, B 1, 3.  
DURANDEAU (P.). — *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 236, p. 366 (1953).  
BIREBENT. — *C.R. Acad. Sc. Paris*  
(force alternative), t. 230, p. 1135 (1952).  
(couple alternatif), t. 240, p. 1064 (1955).

### III. — Publications citées dans le texte.

- [1] BERTRAM (S.). — *Journ. Appl. Phys.*, t. 12, p. 496-502, 1942.  
P.I.R.E., t. 28, p. 418-420, 1940.  
[2] BIREBENT. — a) *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 234, p. 1135-36, 10 mars 1952.  
b) *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 240, p. 1064-65, 7 mars 1955.  
[3] DOSSE (J.). — *Z. Phys.*, t. 117, 437, 1941.  
[4] DUPOUY (G.). — *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 203, p. 987, 16 novembre 1936.  
[5] DURAND (E.). — a) *Electrostatique et Magnetostatique*, Masson, Paris, 1953, p. 575.

- b) *Colloque international du C.N.R.S. : « Les techniques récentes en Microscopie électronique et corpusculaire »*, avril, 1955, p. 238-242.
  - c) *Annales de Physique*, 12<sup>e</sup> série, t. 10., p. 883-907, 1955, fig. 30.
  - d) *Colloque « Les techniques récentes en Microscopie électronique et corpusculaire »*, avril 1955, p. 247 et suivantes.
  - c) *Electrostatique et Magnetostatique*, p. 485.
  - f) *Electrostatique et Magnetostatique*, p. 367, 383 et 384.
- [6] DURANDEAU (P.). — a) *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 236, p. 366-368, 26 janvier 1953.  
b) *Journ. Phys. Rad.*, t. 17, p. 18 A, 1956.  
c) *Journ. Phys. Rad.*, fig. 8 (t. 17, p. 18 A, 1956).  
d) *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 242, p. 1710, mars 1956.
- [7] FERT (Ch.) et GAUTIER (P.). — *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 233, p. 148.
- [8] GAUTIER (P.). — a) *Journ. Phys. Rad.*, t. 14, p. 254, 1953.  
b) *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 240, p. 2294, 13 juin 1955.
- [9] LAUDET (M.). — *Journ. Phys. Rad.*, t. 16, p. 118, 1955.
- [10] LIEBMANN (G.) et GRAD (E. M.). — *Proc. Phys. Soc.*, B, vol. LXIV, p. 956, 1951.
- [11] LIEBMANN (G.). — *Proc. Phys. Soc.*, B, vol. LXVI, p. 448, 1953, fig. 5.
- [12] VAN MENTS et LE POOLE (J. B.). — *Appl. Sc. Res.*, vol. B 1, 1947.
- [13] MULVEY (T.). — *Proc. Phys. Soc.*, B, vol. LXVI, 1953, p. 448.
-