Annales de la faculté des sciences de Toulouse

MICHEL POMMIEZ

# Sur les restes successifs des séries de Taylor

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série*, tome 24 (1960), p. 77-165

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1960_4_24__77_0>

# Sur les restes successifs des séries de Taylor

## *INTRODUCTION*

Les propriétés des dérivées successives des fonctions analytiques ont été étudiées par de nombreux auteurs, notamment par Gontcharoff, qui a obtenu dans sa thèse (*cf.* [12]) des résultats du type suivant: si chaque dérivée $f^{(n)}$ d'une fonction $f$ holomorphe dans le disque-unité s'annule en un point $z_n$ tel que

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \; n \, |z_n| < \frac{1}{2e}$$

$f$ se réduit à une constante. Le plus grand des nombres par lesquels on peut remplacer $\frac{1}{2e}$ est la constante de Gontcharoff G. Le même auteur a étudié également le problème de la construction de fonctions $f$ telles que $f^{(n)}(z_n) = c_n$ pour tout $n$, $(z_n)$ et $(c_n)$ étant deux suites données; la méthode utilisée consiste à développer $f$ en série de polynômes d'interpolation. Citons encore J. M. Whittaker qui a défini et étudié la constante W, borne supérieure des nombres $t$ tels que la seule fonction entière de type exponentiel inférieur ou égal à $t$, qui s'annule ainsi que chacune de ses dérivées dans le disque-unité, soit l'application identiquement nulle. Les valeurs exactes de G et W sont inconnues; l'encadrement le plus précis de W a été donné par S. S. Macintyre (*cf.* [16]). Un lien étroit semble d'ailleurs exister entre ces deux constantes, et il est très probable qu'elles sont égales.

Nous nous proposons dans ce travail d'étudier par des méthodes variées, des problèmes analogues concernant les restes successifs des séries entières ou, plus précisément, les fonctions :

$$f_{(n)}(z) = a_n + a_{n+1} z + \ldots + a_{n+p} z^p + \ldots$$

associées à une fonction $f = f_{(o)}$ supposée holomorphe au voisinage de l'origine. Si les sommes partielles des séries entières ont fait l'objet de nombreux travaux, il semble par contre que les fonctions $f_{(n)}$ n'aient pas été étudiées jusqu'ici d'une façon systématique. Une étude analogue pourrait d'ailleurs être faite dans le cas des restes successifs de séries autres que les séries entières, en particulier dans le cas des séries de Dirichlet et des séries de Newton. Notons que $z^n \, f_{(n)}(z)$ représente le terme complémentaire du développement limité de $f$ à l'ordre $n - 1$, au voisinage de l'origine. On pourrait donc étendre la définition des $f_{(n)}$ au cas des fonctions indéfiniment dérivables d'une variable réelle et même au cas des fonctions possédant au voisinage de l'origine un développement limité d'ordre quelconque; mais l'étude des fonctions $f_{(n)}$ exigerait alors la mise en œuvre de nouvelles méthodes.

Au chapitre premier, après avoir donné quelques propriétés générales des fonctions $f_{(n)}$, on définit la suite des polynômes $\Pi_n$ associés à une suite quelconque de points $z_n$ par les conditions :

$$L_k(\Pi_n) = 0 \quad \text{si} \quad k \neq n, \quad L_n(\Pi_n) = 1,$$

où $L_k$ désigne l'application $f \to f_{(k)}(z_k)$.

On établit ensuite diverses majorations des polynômes $\Pi_n$ correspondant à des suites $(z_n)$ telles que $|z_n| \leqslant h(n)$, où $h$ est une fonction non décroissante de $n$; si les points $z_n$ sont suffisamment groupés ces polynômes possèdent des propriétés voisines de celles des polynômes $z^n$. On peut alors étendre à un ensemble assez général de séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, \Pi_n(z)$$

— que nous appellerons séries (S) — quelques-unes des propriétés des séries entières : existence d'un cercle de convergence, théorème d'Abel, de Fatou-Riesz, de Jentzsch, ultraconvergence de certaines séries lacunaires...

Le chapitre II est consacré à l'étude des $f_{(n)}$ relatives aux fonctions holomorphes dans le disque-unité $\Omega$. Si l'on désigne par $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel complexe des fonctions holomorphes dans $\Omega$, on démontre, à l'aide des résultats du premier chapitre, que toute suite $(\Pi_n)$ associée à une suite $(z_n)$ telle que $|z_n| \leqslant 0{,}536$, est une base de $\mathscr{F}$; de plus, tout élément $f$ de $\mathscr{F}$ a pour coordonnées les nombres $f_{(n)}(z_n)$. Il en résulte que, si $|z_n| \leqslant 0{,}536$, un élément $f$ de $\mathscr{F}$ est entièrement déterminé par la donnée des nombres $f_{(n)}(z_n)$. La borne supérieure de l'ensemble des nombres par lesquels on peut remplacer 0,536 dans l'énoncé précédent est la constante C; on obtient pour cette constante l'encadrement : $0{,}536 < C < 0{,}5617$. La première de ces inégalités peut d'ailleurs être établie par une méthode directe qui conduit aussi, dans le cas des dérivées successives, à l'inégalité $G > 0{,}718$. Enfin, le développement de $f$ en série (S) permet de démontrer que le comportement asymptotique de la suite $f_{(n)}(z_n)$ dépend très simplement du rayon d'holomorphie à l'origine de $f$.

Le cas des fonctions entières est étudié au chapitre III. On démontre d'abord, à l'aide d'un théorème de Picard, que toutes les $f_{(n)}$, sauf peut-être un nombre fini d'entre elles, possèdent une infinité de zéros. On étudie ensuite, dans le cas des suites $(z_n)$ telles que $|z_n| \leqslant n^{1/\rho}$, des problèmes analogues à ceux du chapitre II; on définit ainsi une constante $T(\rho)$ qui semble liée par une relation simple à la constante C. Pour les fonctions entières d'ordre 1 et de type inférieur ou égal à 0,536, on établit une égalité qui prouve que les nombres $|f_{(n)}(z_n)|$, où $|z_n| \leqslant n$, ne peuvent pas être trop petits. Une égalité analogue est obtenue pour les dérivées successives des fonctions entières d'ordre 1 et de type inférieur à 0,7259.

La méthode utilisée au chapitre IV permet d'obtenir de nouvelles propriétés des fonctions $f_{(n)}$. On démontre d'abord plus simplement et en apportant quelques précisions, un théorème général de Boas sur le développement des fonctions holomorphes en séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(z),$$

où les $g_n(z)$ sont en un certain sens « presque égales » à $z^n$. L'intégrale de Cauchy (ou la représentation généralisée de Pólya pour les fonctions entières) permet de ramener le problème du développement de $f$ en série (S), à celui du développement de $\frac{1}{1-vz}$ (ou de fonctions aussi simples que $e^{vz}$) en série de fonctions $g_n(v)$. On retrouve ainsi plusieurs des résultats précédents. L'application du théorème général à la suite $\mathscr{A}(g_n)$, où $\mathscr{A}$ est un automorphisme convenablement choisi de l'espace de fonctions considéré, permet d'obtenir le développement de $f$ en série (S) pour de nouvelles distributions des points $z_n$ (cas où les points $z_n$ sont situés dans un ou deux disques de centres quelconques, cas où $z_n^2 \sim n^2$ ...). On parvient ainsi à déterminer exactement la valeur d'une constante T* relative aux suites $z_n \sim (-1)^n n$ . La même méthode permet enfin d'étudier aisément l'univalence des fonctions $f_{(n)}$ dans le cas où $f \in \mathscr{F}$ et aussi dans le cas où $f$ est entière d'ordre fini.

# CHAPITRE PREMIER

## *DÉFINITION DES FONCTIONS $f_{(n)}$; ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE POLYNOMES D'INTERPOLATION*

On désignera par $\Omega$ (R) le disque ouvert $|z| < R$, par $\overline{\Omega}$ (R) le disque fermé $|z| \leqslant R$, et par $\Omega^*$ (R) le cercle $|z| = R$; on posera plus simplement : $\Omega(1) = \Omega$, $\overline{\Omega}(1) = \overline{\Omega}$, $\Omega^*(1) = \Omega^*$.

On désignera par $\mathscr{F}$ (R) l'espace vectoriel complexe des fonctions $f$ holomorphes dans $\Omega$ (R); on posera $\mathscr{F}(1) = \mathscr{F}$. Enfin, on appellera $\mathscr{F}_D$ l'espace vectoriel complexe des fonctions holomorphes dans un domaine D du plan complexe.

### I. — *GENERALITES.*

1° *Définition des fonctions $f_{(n)}$ :*

Soit une série entière quelconque $\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$ dont le rayon de convergence R est $\neq 0$ et qui a pour somme $f(z)$. *Nous désignerons par $f_{(n)}$ l'application :*

$$z \to \sum_{p=0}^{\infty} a_{n+p} z^p$$

On a évidemment $f = f_{(0)}$ et les $f_{(n)} \in \mathscr{F}$ (R). Si $f$ prolongée est holomorphe dans un domaine D contenant $\Omega$ (R), il en est de même des $f_{(n)}$ qui sont définies dans D par l'égalité :

$$f_{(n)}(z) = \frac{f(z) - S_{n-1}(z)}{z^n}, \quad \text{où} \quad S_{n-1}(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}.$$

Notons que $f_{(n)}(z)$ est le quotient par $z^n$ du reste de rang $n$ de la série $\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$.

Nous verrons que ces fonctions $f_{(n)}$ possèdent des propriétés qui rappellent celles des dérivées successives $f^{(n)}$. Toutefois, leur définition fait jouer à l'origine un rôle particulier; elles ne sont pas comme les dérivées successives, invariantes dans toute translation du plan complexe.

2° *Expressions diverses de $f_{(n)}(z)$.*

*a*) Soit $f$ un élément quelconque de $\mathscr{F}$ (R) et $z$ un point quelconque de $\Omega$ (R.)

Soit $\gamma$ une courbe simple, fermée, rectifiable, intérieure à $\Omega(\mathrm{R})$ et entourant les points 0 et $z$. On vérifie de suite l'égalité :

$$(1-1-1) \qquad f_{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(u)\,du}{u^n(u-z)}$$

*b*) D'après l'expression donnée par Lagrange au reste de rang $n$ d'une série entière, on a encore :

$$(1-1-2) \qquad f_{(n)}(z) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(tz)\,dt$$

*pour tout $n \geqslant 1$ et tout $z$ appartenant à l'étoile d'holomorphie (relative à l'origine) de $f$.*

*c*) Supposons plus particulièrement *les coefficients $a_p$ réels*. On a alors, d'après la formule de Taylor :

$$(1-1-3) \qquad f_{(n)}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\theta x) \quad \text{pour} \quad -\mathrm{R} < x < \mathrm{R}, \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1.$$

3° *Comportement de $|f_{(n)}(z)|$ quand $n \to +\infty$ ($z$ étant fixé).*

a) *Cas des fonctions $f \in \mathscr{F}$.*

$$\text{On a} \quad f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p, \quad \text{où} \quad \overline{\lim_{p\to+\infty}}\, |a_p|^{1/p} \leqslant 1.$$

Soit $z \in \Omega$; imposons à $\varepsilon > 0$ la condition $(1+\varepsilon)|z| < 1$. On a, à partir d'un certain rang $n_0(\varepsilon)$ : $|a_p| \leqslant (1+\varepsilon)^p$, d'où l'inégalité $|f_{(n)}(z)| \leqslant (1+\varepsilon)^n\,[1-(1+\varepsilon)\,|z|]^{-1}$ qui entraîne

$$\mathrm{L} = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, |f_{(n)}(z)|^{1/n} \leqslant 1.$$

*Supposons que* $\mathrm{L} < \lambda < 1$; on a alors, à partir d'un certain rang $|f_{(n)}(z)| < \lambda^n$. Mais $|a_n| = |f_{(n)}(z) - z f_{(n+1)}(z)| < \lambda^n + \lambda^{n+1} < 2\lambda^n$, d'où $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, |a_n|^{1/n} \leqslant \lambda$.

Par suite, *si $f$ possède au moins un point singulier sur $\Omega^*$, on a :*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, |f_{(n)}(z)|^{1/n} = 1 \quad \text{pour tout} \quad z \in \Omega.$$

*Supposons plus généralement que $f \in \mathscr{F}_{\mathrm{D}}$, avec $\mathrm{D} \supset \Omega$, et qu'elle possède au moins un point singulier sur $\Omega^*$.* Soit $z$ fixé dans D et tel que $|z| \geqslant 1$. Quel que soit $\lambda > 1$, il existe une constante $\mathrm{A}(\lambda)$ telle que $|a_p| \leqslant \mathrm{A}(\lambda)\,\lambda^p$ pour tout $p \geqslant 0$.

On en déduit que :

$$|f_{(n)}(z)| = \left|\frac{f(z) - S_{n-1}(z)}{z^n}\right| \leqslant |f(z)| + \frac{A(\lambda)}{|z|^n}\left[1 + \lambda|z| + \ldots + \lambda^{n-1}|z|^{n-1}\right]$$

$$< |f(z)| + \lambda^n \frac{A(\lambda)}{\lambda|z| - 1}$$

Il en résulte l'inégalité : $L = \overline{\lim_{n\to+\infty}} |f_{(n)}(z)|^{1/n} \leqslant 1.$

Enfin, on établit comme précédemment que L ne peut être $< 1$, d'où le résultat suivant :

(1 — 1 — 4) *Si $f \in \mathscr{F}_D$, avec $D \supset \Omega$, et possède au moins un point singulier sur $\Omega^*$, on a, pour tout $z \in D$ :*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |f_{(n)}(z)|^{1/n} = 1.$$

Cette égalité peut encore s'écrire, en désignant par $r_n(z)$ le reste de rang $n$ de la série $\sum_{p=o}^{\infty} a_p z^p$ :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |r_n(z)|^{1/n} = |z|.$$

b) *Cas des fonctions entières d'ordre $\rho$ fini et non nul.*

Soit $f$ une fonction entière du type $\tau$ de l'ordre $\rho$, et soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ son développement en série entière. On sait que $\overline{\lim_{n\to+\infty}} n|a_n|^{\rho/n} = \rho e \tau$

Nous allons établir plus généralement l'égalité :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} n|f_{(n)}(z)|^{\rho/n} = e\rho\tau,$$

qui se réduit à la précédente pour $z = 0$. Soit $z$ fixé, de module R, et soit $\tau'$ un nombre quelconque $> \tau$. On a, à partir d'un certain rang :

$$|a_n| \leqslant \left[\frac{e\rho\tau'}{n}\right]^{n/\rho},$$

d'où :

$$|f_{(n)}(z)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{e\rho\,\tau'}{n+k}\right]^{\frac{n+k}{\rho}} R^k \leqslant \left[\frac{e\rho\,\tau'}{n}\right]^{\frac{n}{\rho}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[R(e\rho\,\tau')^{1/\rho}]^k}{k^{k/\rho}} = A\left[\frac{e\rho\,\tau'}{n}\right]^{n/\rho}$$

où A est indépendant de $n$. Il en résulte que :

$$L = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\; n\,|f_{(n)}(z)|^{\rho/n} \leqslant e\rho\tau$$

Si L était $< e\rho\tau$ on pourrait trouver $\lambda$ tel que $L < \lambda < e\rho\tau$, et on aurait à partir d'un certain rang :

$$|f_{(n)}(z)| \leqslant \left[\frac{\lambda}{n}\right]^{n/\rho}.$$

D'où :

$$|a_n| = |f_{(n)}(z) - zf_{(n+1)}(z)| \leqslant \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{n/\rho} + R\left[\frac{\lambda}{n+1}\right]^{\frac{n+1}{\rho}} \leqslant \left[\frac{\lambda}{n}\right]^{n/\rho} \left[1 + R\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{1/\rho}\right]$$

$$\leqslant 2\left[\frac{\lambda}{n}\right]^{n/\rho}$$

à partir d'un certain rang. On aurait donc :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\; n\,|a_n|^{\rho/n} \leqslant \lambda < e\rho\tau\;,$$

et $f$ ne serait pas du type $\tau$ de l'ordre $\rho$. On a donc le résultat suivant :

(1 — 1 — 5) *Si $f$ est entière, du type $\tau$ de l'ordre $\rho$ (supposé fini et $\neq 0$) on a :*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\; n\,|f_{(n)}(z)|^{\rho/n} = e\rho\tau.$$

Dans le cas particulier où $\rho = 1$, on a plus simplement :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\; |n!f_{(n)}(z)|^{1/n} = \tau.$$

*Supposons enfin que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} z^n \quad \text{avec} \quad \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \to \tau > 0;$$

$f$ est alors du type $\tau$ de l'ordre 1. On peut écrire :

$$\frac{n!f_{(n)}(z)}{\alpha_n} = 1 + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\frac{z}{n+1} + \dots + \frac{\alpha_{n+p}}{\alpha_n}\frac{z^p}{(n+1)\dots(n+p)} + \dots$$

On voit de suite que la série précédente, où $n$ est considéré comme un paramètre, est uniformément convergente sur l'ensemble N des entiers $\geqslant 0$. Il en résulte que sa somme $\to 1$ quand $n \to +\infty$; *par suite dans le cas particulier considéré :*

$$|n!f_{(n)}(z)|^{1/n} \to \tau \quad \text{si} \quad n \to +\infty$$

4° *Propriétés de l'application :* $f \to f_{(1)}$

*a*) Soit $f$ un élément quelconque de $\mathscr{F}$ (R) et désignons par $\phi$ l'application : $f \to f_{(1)}$; $\phi$ est une application linéaire, non biunivoque, de $\mathscr{F}$(R) sur $\mathscr{F}$(R). Munissons $\mathscr{F}$ (R) de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact inclus dans $\Omega$ (R) ([1]). Soit alors une suite convergente $(f_n)$ d'éléments de $\mathscr{F}$ (R); sa limite $F \in \mathscr{F}$ (R).
Si $z \neq 0$, il est évident que $(f_n)_{(1)}(z) \to F_{(1)}(z)$ quand $n \to +\infty$.
Comme la suite $(f_n)_{(1)}(z)$ converge uniformément sur tout cercle $|z| = R' < R$, et que $(f_n)_{(1)} \in \mathscr{F}$ (R), elle converge uniformément sur tout disque $|z| \leqslant R' < R$, vers une fonction holomorphe qui ne peut être que $F_{(1)}$.. On a donc aussi

$$(f_n)_{(1)}(0) \to F_{(1)}(0) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty \quad \text{et par suite :}$$

(1 — 1 — 6) *Si une suite quelconque* $(f_n)$ *d'éléments de* $\mathscr{F}$ (R) *converge vers* F, *alors* $(f_n)_{(1)}$ *converge vers* $F_{(1)}$.

b) *En général,* $\phi$ *n'est pas permutable avec la dérivation.*
En effet, pour que $[\phi(f)]' = \phi(f')$, il faut et il suffit que $f(z) = Az + B$, où A et B sont des constantes.

*c*) Soit $f \in \mathscr{F}$ (R); posons $g(z) = f(\lambda z)$, où $\lambda$ est une constante quelconque. On vérifie immédiatement que :

$$(1-1-7) \qquad g_{(n)}(z) = \lambda^n f_{(n)}(\lambda z) \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0$$

*d*) Soit une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ (où $u_n \in \mathscr{F}$ (R))

---

([1]) Pour chaque nombre $\rho$ strictement compris entre 0 et R, on peut définir sur $\mathscr{F}$ (R) une topologie $\mathscr{C}_\rho$ en prenant pour distance de deux éléments $f$ et $g$ de $\mathscr{F}$ (R) :

$$d(f,g) = \sup_{|z| \leqslant \rho} |f(z) - g(z)|.$$

On dit que $\mathscr{F}$ (R) est muni de la topologie de la convergence uniforme quand on prend pour ouverts de $\mathscr{F}$ (R) des réunions quelconques d'ensembles ouverts dans les topologies $\mathscr{C}_\rho$ ($\rho < R$). On vérifie sans difficulté que $f_n \to f$ si et seulement si la suite $(f_n)$ converge vers $f$, uniformément sur tout compact inclus dans $\Omega$(R).

uniformément convergente sur tout disque $|z| \leqslant R' < R$. Sa somme $f(z)$ est telle que $f \in \mathcal{F}(R)$. En appliquant (1 — 1 — 6) à la somme des $n$ premiers termes de la série précédente, on obtient l'égalité :

$$f_{(1)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n)_{(1)}(z),$$

où la série est uniformément convergente sur tout disque $|z| \leqslant R' < R$. Plus généralement on a, pour tout $p \geqslant 0$ :

$$(1-1-8) \qquad f_{(p)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n)_{(p)}(z)$$

*où la série converge uniformément sur tout disque* $|z| \leqslant R' < R$.

5° *Propriétés de l'application inverse (définie à une constante additive près).*

Soit $f$ une fonction holomorphe (ou même simplement définie) dans un domaine D contenant l'origine. Nous poserons, par analogie avec la notation

$$\int_{zo}^{z} f(u)\, du$$

$$(1-1-9) \qquad \underset{zo}{\overset{z}{\mathrm{I}}} f(u)\,\delta u = zf(z) - z_0 f(z_0),$$

*où $z$ et $z_0$ sont deux points quelconques de* D.

Désignons par $\underset{z_0}{\mathrm{I}} f(u)\,\delta u$ l'application : $z \to zf(z) - z_0 f(z_0)$.

On a évidemment :

$$\left[\underset{zo}{\mathrm{I}} f(u)\,\delta u\right]_{(1)} = f$$

Soit une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ (où chaque fonction $u_n$ est définie sur une partie K du plan complexe) qui converge en tout point de K vers $f(z)$.
Si $z_0 \in K$, il est clair que :

$$\underset{zo}{\overset{z}{\mathrm{I}}}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(s)\right]\delta s = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\underset{zo}{\overset{z}{\mathrm{I}}} u_n(s)\,\delta s\right]$$

Plus généralement, si $z_0$, $z_1$, .... $z_p$ appartiennent à K, on a :

$$(1-1-10) \qquad \overset{z}{\underset{z_0}{\mathrm{I}}} \delta s_1 \left[ \overset{s_1}{\underset{z_1}{\mathrm{I}}} \delta s_2 \left[ \dots \overset{s_p}{\underset{z_p}{\mathrm{I}}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s_{p+1}) \delta s_{p+1} \right] \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \overset{z}{\underset{z_0}{\mathrm{I}}} \delta s_1 \left[ \overset{s_1}{\underset{z_1}{\mathrm{I}}} \delta s_2 \left[ \dots \overset{s_p}{\underset{z_p}{\mathrm{I}}} u_n(s_{p+1}) \delta s_{p+1} \right] \right] \right]$$

De plus, si la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ converge uniformément sur toute partie bornée de K, il en est de même de la série qui figure au deuxième membre de l'égalité (1—1— 10).

## II. — *DÉFINITION DES POLYNOMES* $\Pi_n(z)$ *ET RELATIONS VÉRIFIÉES PAR CES POLYNOMES.*

1° *Définition.*

Désignons par $\mathscr{F}_{\mathrm{D}}$ l'espace vectoriel complexe des fonctions $f$, holomorphes dans un domaine D, borné ou non, du plan complexe C. On suppose que $0 \in \mathrm{D}$. Soit $(z_n)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ une suite de points de D. Appelons $\mathrm{L}_n$ l'application : $f \to f_{(n)}(z_n)$; $\mathrm{L}_n$ est un élément du dual $\mathscr{F}_{\mathrm{D}}^*$ de $\mathscr{F}_{\mathrm{D}}$. Cherchons une suite $(\Pi_n)$ de polynômes telle que :

$$\mathrm{L}_k(\Pi_n) = 0 \quad \text{si} \quad k \neq n; \quad \mathrm{L}_n(\Pi_n) = 1$$

Pour que $(\Pi_n)$ satisfasse à ces conditions, il faut et il suffit que, pour tout $n \geqslant 0$ on ait les égalités :

$$(1-2-1) \begin{cases} (\Pi_n)_{(n)}(z) = 1 \\ (\Pi_n)_{(n-k)}(z) = z(\Pi_n)_{(n-k+1)}(z) - z_{n-k}(\Pi_n)_{(n-k+1)}(z_{n-k}) \end{cases}$$

$$\text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

Il en résulte l'existence et l'unicité de la suite $(\Pi_n)$; de plus le degré de $\Pi_n$ est égal à $n$. La définition et les propriétés de ces polynômes présentent des analogies avec celles des polynômes de Gontcharoff (*cf.* [12] p. 5). D'après (1 — 1 — 9) on peut écrire :

$$(1-2-2) \qquad \Pi_n(z) = \overset{z}{\underset{z_0}{\mathrm{I}}} \delta s_1 \ \overset{s_1}{\underset{z_1}{\mathrm{I}}} \delta s_2 \dots \overset{s_{n-1}}{\underset{z_{n-1}}{\mathrm{I}}} \delta s_n$$

Comme $\Pi_n$ dépend de $z_0$, $z_1$,..., $z_{n-1}$ nous poserons :

$\Pi_n(z) = \mathrm{P}_n\ (z, z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$; d'après (1 — 2 — 2) on a :

$$(1-2-3) \qquad \mathrm{P}_n\ (z, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) = \overset{z}{\underset{z_0}{\mathrm{I}}}\ \mathrm{P}_{n-1}\ (s, z_1, \dots, z_{n-1})\ \delta s$$

Cette relation permet de calculer aisément les premiers termes de la suite $(\Pi_n)$. On a :

$\Pi_0(z) = 1$; $\Pi_1(z) = z - z_0$; $\Pi_2(z) = z^2 - zz_1 - z_0^2 + z_0 z_1$;

$\Pi_3(z) = z^3 - z^2 z_2 - (z_1^2 - z_1 z_2) z - (z_0^3 - z_0^2 z_2 - z_1^2 z_0 + z_0 z_1 z_2)$;

$$\Pi_4(z) = z^4 - z^3 z_3 - (z_2^2 - z_2 z_3) z^2 - (z_1^3 - z_1^2 z_3 - z_2^2 z_1 + z_1 z_2 z_3) z$$
$$- (z_0^4 - z_0^3 z_3 - z_0^2 z_2^2 + z_0^2 z_2 z_3 - z_0 z_1^3 + z_0 z_1^2 z_3 + z_0 z_2^2 z_1 - z_0 z_1 z_2 z_3) \textit{ etc...}$$

La relation (1 — 2 — 3) permet également de vérifier que $P_n$ est sur $C^{n+1}$, un polynôme homogène de degré $n$.

2° *Cas particuliers :*

1). $z_n = a$. On a :

$\Pi_1(z) = z - a$; $\Pi_2(z) = z^2 - az$. Supposons que $\Pi_{n-1}(z) = z^{n-1} - az^{n-2}$.

La relation (1 – 2 – 3) montre que $\Pi_n(z) = z^n - az^{n-1}$ pour $a = 0$, on retrouve les polynômes $\Pi_n(z) = z^n$.

2). $z_{2n} = a$, $z_{2n+1} = b$. On trouve:

$\Pi_1(z) = z - a$; $\Pi_2(z) = z^2 - bz - a(a-b)$;

$\Pi_3(z) = z^3 - az^2 + b(a-b)z - ab(a-b)$;

$\Pi_4(z) = z^4 - bz^3 - a(a-b)z^2 + ab(a-b)z - a^2 b(a-b)$;

$\Pi_5(z) = z^5 - az^4 + b(a-b)z^3 - ab(a-b)z^2 + ab^2(a-b)z - a^2 b^2(a-b)$ etc..;

On montre, par récurrence, et à l'aide de la relation (1 — 2 — 3) que l'on a :

$$(1-2-4) \begin{cases} \Pi_{2n+1}(z) = \dfrac{z-a}{z^2 - ab}\left[ z^{2n+2} - b^2 z^{2n} - (ab)^n\, b\,(a-b) \right] & \text{pour tout } n \geqslant 0 \\ \Pi_{2n}(z) = \dfrac{z-a}{z^2 - ab}\left[ z^{2n+1} + (a-b) z^{2n} - abz^{2n-1} - (ab)^n (a-b) \right] & \text{pour tout } n \geqslant 1 \end{cases}$$

3° *Expression de $z^n$ en fonction des $\Pi_n(z)$:*

La suite $(\Pi_n)$ forme évidemment une base de l'espace des polynômes à coefficients complexes. $z^n$ s'exprime donc d'une manière unique sous la forme :

$z^n = \sum_{i \in I} \alpha_i \Pi_i(z)$ avec I fini. Il en résulte que:

$z_k^{n-k} = \sum_{i \in I} \alpha_i (\Pi_i)_{(k)}(z_k) = \alpha_k$ si $k \leqslant n$ et $\alpha_k = 0$ si $k > n$

D'où finalement :

$$(1-2-5) \qquad z^n = \sum_{k=0}^{n} z_k^{n-k}\ \Pi_k(z)$$

On en déduit l'expression suivante de $\Pi_n(z)$:

$$(1-2-6) \quad \Pi_n(z) = \begin{vmatrix} z^n & z_{n-1} & \dots\dots & z_k^{n-k} & \dots\dots & z_0^n \\ z^{n-1} & 1 & \dots\dots & z_k^{n-k-1} & \dots\dots & z_0^{n-1} \\ z^{n-2} & 0 & & . & & . \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z^k & 0 & \dots\dots 0 & 1 & \dots\dots & z_0^k \\ . & . & & 0 & & . \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z & 0 & \dots\dots & \dots\dots & 0\ 1 & z_0 \\ 1 & 0 & \dots\dots & 0 & \dots\dots\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

4° *Développement de $\Pi_n(z)$ suivant les puissances croissantes de $z$ :*

On a, pour toute fonction entière $f$ :

$$f(z) = f(0) + zf_{(1)}(0) + \dots + z^n f_{(n)}(z)$$

Prenons $f = \Pi_n$; l'égalité précédente devient :

$$\Pi_n(z) = \Pi_n(0) + z(\Pi_n)_{(1)}(0) + \dots + z^k(\Pi_n)_{(k)}(0) + \dots + z^n.$$

Posons $P_n(0, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) = H_n(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$; $H_n$ est sur $C^n$, un polynôme homogène de degré $n$. L'égalité (1 — 2 — 2) prouve que :

$$(\Pi_n)_{(k)}(z) = \int_{z_k}^{z} \delta s_{k+1} \dots \int_{z_{n-1}}^{s_{n-1}} \delta s_n = P_{n-k}(z, z_k, z_{k+1}, \dots, z_{n-1})$$

D'où: $(\Pi_n)_{(k)}(0) = H_{n-k}(z_k, z_{k+1}, \dots, z_{n-1})$ et l'on a :

$$(1-2-7) \qquad \Pi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k\ H_{n-k}(z_k, z_{k+1}, \dots, z_{n-1})$$

5° *Relations vérifiées par les polynômes* $H_n$.

Remplaçons $z$ par $z_0$ dans l'égalité (1 — 2 — 7); on obtient :

$$(1-2-8) \qquad H_n(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) = -\sum_{k=1}^{n} z_0^k \, H_{n-k}(z_k, z_{k+1}, \dots, z_{n-1}).$$

Cherchons l'*expression de* $H_n$ *en fonction de* $H_{n-2}, H_{n-3}, \dots, H_1$.

On a: $H_{n-1}(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = -\sum_{k=1}^{n-1} z_1^k \quad H_{n-k-1}(z_{k+1}, \dots, z_{n-1})$.

En remplaçant $H_{n-1}(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$dans (1 — 2 — 8) par le développement précédent, on obtient :

$$(1-2-9) \qquad H_n(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) = z_0 \sum_{k=1}^{n-1} (z_1^k - z_0^k) \quad H_{n-k-1}(z_{k+1}, \dots, z_{n-1})$$

En exprimant $H_n$ en fonction de $H_{n-3}, H_{n-4}, \dots, H_1$, on trouve:

$$(1-2-10) \qquad H_n(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) = z_0 \sum_{k=2}^{n-1} [(z_1^k - z_0^k) - (z_1 - z_0) z_2^{k-1}] \, H_{n-k-1}(z_{k+1}, \dots, z_{n-1})$$

## III. — *MAJORATION DES POLYNOMES* $\Pi_n$.

1° *Supposons que pour tout* $n \geqslant 0$, *on ait* $|z_n| \leqslant r$. *Utilisons d'abord la relation* $(1-2-8)$.

On a $|H_1(z_0)| = |-z_0| \leqslant r$, $|H_2(z_0, z_1)| = |z_0(z_1 - z_0)| \leqslant 2r^2$, et ce, quels que soient $z_0$, $z_1$, appartenant au disque $|z| \leqslant r$. Supposons que

$$|H_k(z_0, z_1, \dots, z_{k-1})| \leqslant 2^{k-1} r^k \quad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

et quels que soient $z_0, z_1, \dots, z_{k-1}$ appartenant au disque $|z| \leqslant r$. D'après la relation $(1-2-8)$, on a:

$$|H_n(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_0|^k \quad |H_{n-k}(z_k, \dots, z_{n-1})| \leqslant \sum_{k=1}^{n} r^k \; 2^{n-k-1} \; r^{n-k}, \quad \text{soit:}$$

$$|H_n(z_0, \dots, z_{n-1})| \leqslant \frac{1}{2}(2r)^n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leqslant \frac{1}{2}(2r)^n = 2^{n-1} r^n. \quad \text{On a donc:}$$

$$(1-3-1) \qquad |H_n(z_0, \dots, z_{n-1})| \leqslant 2^{n-1} r^n. \qquad \text{pour tout} \quad n \geqslant 1.$$

2° *a*) En vue d'améliorer la majoration précédente, nous allons utiliser la relation (1 — 2 — 9). Afin d'alléger la démonstration, nous allons d'abord établir le lemme suivant :

(1 — 3 — 2) Si $0 \leqslant x \leqslant 0{,}57$, on a, quels que soient $\theta$ réel et $n \geqslant 1$, l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} x^k \; |\sin k\theta| \leqslant \frac{x}{1-x} \; \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

Posons $S_n(\theta) = x|\sin\theta| + \dots + x^k|\sin k\theta| + \dots + x^n\ |\sin n\theta|$. On a, d'après l'inégalité de Cauchy:

$$S_n^2(\theta) = \left[\sum_{k=1}^{n} (x^{\frac{k}{2}})(x^{\frac{k}{2}}|\sin\ k\theta|\,)\right]^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x^k \sin^2 k\theta\right)$$

Or:

$$\sum_{k=1}^{n} x^k \sin^2 k\theta = \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x^k - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x^k \cos 2k\theta$$

Posons: $A_n(\phi) = x\cos\phi + \dots + x^n \cos n\phi$ . On a:

$$\tfrac{1}{2} + A_n(\phi) = \frac{\frac{1}{2}(1-x^2) - x^{n+1}(\cos(n+1)\phi - x\cos n\phi)}{1-2x\cos\phi + x^2} \geqslant \frac{\frac{1}{2}(1-x^2) - x^{n+1}(1+x)}{1-2x\cos\phi+x^2}$$

Le numérateur du rapport précédent est du signe de $\frac{1}{2}(1-x) - x^{n+1}$ qui est positif pour tout $n \geqslant 2$, si $x \leqslant 0{,}57$. D'où pour $n \geqslant 2$ l'inégalité :

$$\tfrac{1}{2} + A_n(\phi) \geqslant \frac{\frac{1}{2}(1-x) - x^{n+1}}{1+x}\,, \qquad \text{soit encore:} \qquad A_n(\phi) \geqslant -\frac{x+x^{n+1}}{1+x}$$

Il en résulte que :

$$S_n^2(\theta) \leqslant \tfrac{1}{2}\,\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\left[\frac{x-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x+x^{n+1}}{1+x}\right] \leqslant \frac{x^2}{(1-x)^2(1+x)}$$

L'inégalité annoncée est donc établie pour $n \geqslant 2$. Pour $n = 1$, on la vérifie sans aucune difficulté.

b) *Supposons plus généralement que pour tout* $n \geqslant 0$, *on ait* $|z_n| \leqslant h(n)$, *h étant une fonction non décroissante de n.* On va démontrer par récurrence, que pour $1 \leqslant p \leqslant n$, on a l'inégalité :

$$|H_p(z_{n-p}, z_{n-p+1}, \dots, z_{n-1})| \leqslant a^{-p}\ h(n-1)\ h(n-2)\dots h(n-p)$$

où $a$ est une constante strictement comprise entre 0,536 et 0,537. On a d'abord :

$|H_1(z_{n-1})| = |-z_{n-1}| \leqslant h(n-1) \leqslant a^{-1}h(n-1)$ Puis:

$$|H_2(z_{n-2}, z_{n-1})| = |z_{n-2}(z_{n-1} - z_{n-2})| \leqslant 2h(n-1)\ h(n-2) \leqslant a^{-2}\ h(n-1)\,.\,h(n-2).$$

L'inégalité est donc vérifiée pour $p = 1$ et $p = 2$. Supposons-la établie jusqu'au rang p — 2. On a, d'après (1 — 2 — 9) :

$$H_p(z_{n-p}, \dots, z_{n-1}) = z_{n-p}\left[\sum_{k=1}^{p-1} (z_{n-p+1}^k - z_{n-p}^k)\ H_{p-k-1}(z_{n-p+k+1}, \dots, z_{n-1})\right]$$

La dernière expression placée entre crochets est une fonction holomorphe des variables

$$z_{n-p}, z_{n-p+1}, \ldots, z_{n-1}.$$

Son module est donc inférieur ou égal au maximum de son module pour

$$|z_{n-p}| = |z_{n-p+1}| = h(n-p+1) \quad \text{et} \quad |z_k| = h(k) \ (k = n-p+2, \ldots, n-1).$$

Ce maximum est atteint pour :

$$z_{n-p} = h(n-p+1)\, e^{i\alpha}; \qquad z_{n-p+1} = h(n-p+1)\, e^{i\alpha'};$$
$$z_k = \zeta_k \qquad (n-p+2 \leqslant k \leqslant n-1).$$

Il en résulte que :

$$|\mathrm{H}_p(z_{n-p}, \ldots, z_{n-1})| \leqslant h(n-p) \sum_{k=1}^{p-1} [h(n-p+1)]^k \, |e^{ik\alpha'} - e^{ik\alpha}| \, . \, a^{-p+k+1}\, h(n-1) \ldots h(n-p+k+1)$$

Soit encore, en posant $\dfrac{\alpha' - \alpha}{2} = \theta$:

$$|\mathrm{H}_p(z_{n-p}, \ldots, z_{n-1})| \leqslant 2\, h(n-1) \quad h(n-2) \ldots h(n-p) \ \ a^{-p+1} \sum_{k=1}^{p-1} a^k \, |\sin k\theta|$$

D'où, en utilisant le lemme (1 — 3 — 2), l'inégalité :

$$|\mathrm{H}_p(z_{n-p}, \ldots, z_{n-1})| \leqslant a^{-p}\, h(n-1) \ldots h(n-p) \, \frac{2a^2}{(1-a)\sqrt{1+a}}$$

Cette dernière expression est

$$\leqslant a^{-p}\, h(n-1) \ldots h(n-p) \qquad \text{si} \qquad 2a^2 \leqslant (1-a)\sqrt{1+a},$$

ce qui est réalisé si $a$ est $\geqslant 0$ et est inférieur ou égal à la racine positive de l'équation :

$$4x^4 - x^3 + x^2 + x - 1 = 0.$$

Cette racine est comprise entre 0,536 et 0,537. On peut donc énoncer le résultat suivant :

(1 — 3 — 5) *Si pour tout $n \geqslant 0$ on a $|z_n| \leqslant h(n)$, où $h$ est une fonction non décroissante*, on a, quels que soient $p$ et $n$ tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, l'inégalité :

$$|\mathrm{H}_p(z_{n-p}, \ldots, z_{n-1})| \leqslant a^{-p}\, h(n-1) \quad h(n-2) \ldots h(n-p)$$

où $a$, racine positive de l'équation $4x^4 - x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ est un nombre strictement compris entre 0,536 et 0,537

c) *Cas particuliers :*

1) *Si* $|z_n| \leqslant r$ *pour tout* $n \geqslant 0$, on peut prendre $h(n) = r$ et l'on obtient l'inégalité

$$(1-3-4) \qquad |H_p(z_{n-p}, \dots, z_{n-1})| \leqslant \left(\frac{r}{a}\right)^p$$

2) *Si* $|z_n| \leqslant n^\alpha$,où $\alpha$ est une constante positive, on a :

$$(1-3-5) \qquad |H_p(z_{n-p}, \dots, z_{n-1})| \leqslant \left(\frac{1}{a}\right)^p [(n-1)\,(n-2)\dots(n-p)]^\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{a}\right)^p [n(n-1)\dots(n-p+1)]^\alpha$$

3) *Si l'on suppose plus généralement que* $|z_n| \leqslant A(n+n_0)^\alpha$; où A est une constante positive et $n_0$ un entier positif ou nul, on a :

$$(1-3-6) \qquad |H_p(z_{n-p}, \dots, z_{n-1})| \leqslant \left(\frac{A}{a}\right)^p [(n+n_0)\dots(n+n_0-p+1)]^\alpha$$

Nous verrons au cours des chapitres II et III, que *dans les trois inégalités précédentes, on ne peut remplacer a par un nombre supérieur ou égal* à 0,5617.

3° *Majoration de* $|\Pi_n(z)|$

Soit $z$ fixé, quelconque dans $\overline{\Omega}$ (R).

*a*) Si $|z_n| \leqslant r$ pour tout $n \geqslant 0$, on a, d'après (1 — 2 — 7) et (1 — 3 — 4) :

$|\Pi_n(z)| \leqslant R^n \sum_{p=0}^{n} \left(\frac{r}{aR}\right)^p$. Par suite:

$$(1-3-7) \qquad \text{Si} \quad R > \frac{r}{a}, \quad \text{on a} \quad |\Pi_n(z)| \leqslant R^n \left(\frac{aR}{aR-r}\right) \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0$$

$$\text{et si} \quad R \geqslant \frac{r}{a}, \quad \text{on a} \quad |\Pi_n(z)| \leqslant (n+1)R^n$$

b) *Si* $|z_n| \leqslant n^\alpha$ *pour tout* $n \geqslant 0$, on déduit de (1 — 3 — 5) et de (1 — 2—7) l'inégalité :

$$|\Pi_n(z)| \leqslant (n!)^\alpha \left(\frac{1}{a}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!}\right)^\alpha (aR)^k$$

En posant

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k!)^\alpha},$$

on obtient ainsi l'inégalité :

$$(1-3-8) \qquad |\Pi_n(z)| \leqslant (n!)^\alpha \left(\frac{1}{a}\right)^n \phi(a\mathrm{R}) \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0$$

*c*) Si l'on suppose plus généralement que $|z_n| \leqslant \mathrm{A}(n+n_0)^\alpha$, on déduit de (1 — 3 — 6) et de (1 — 2 — 7) l'inégalité

$$|\Pi_n(z)| \leqslant \left(\frac{\mathrm{A}}{a}\right)^n \left[(n+n_0)!\right]^\alpha \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{1}{(n_0+k)!}\right]^\alpha \left(\frac{a\mathrm{R}}{\mathrm{A}}\right)^k, \quad \text{ou plus simplement:}$$

$$(1-3-9) \quad |\Pi_n(z)| \leqslant \left(\frac{\mathrm{A}}{a}\right)^n \left[(n+n_0)!\right]^\alpha \phi\left(\frac{a\mathrm{R}}{\mathrm{A}}\right)$$

4° *Etude de* $|\Pi_n(z)|^{1/n}$ *quand* $n \to +\infty$.

*Supposons que* $|z_n| \leqslant r$ *pour tout* $n \geqslant 0$ et soit $z$ fixé tel que $|z| \geqslant \frac{r}{a}$. On a, d'après (1 — 3 — 7):

$$|\Pi_n(z)| \leqslant (n+1)|z^n|.$$

D'où, en posant
$$\mathrm{L} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} |\Pi_n(z)|^{1/n},$$

l'inégalité $\mathrm{L} \leqslant |z|$. Si L était strictement inférieur à $|z|$, on pourrait trouver $\lambda$ satisfaisant aux inégalités : $\lambda > r$ et $\mathrm{L} < \lambda < |z|$. Il existerait une constante $\mathrm{A}(\lambda)$ telle que

$$|\Pi_n(z)| \leqslant \mathrm{A}(\lambda).\, \lambda^n \qquad \text{pour tout} \qquad n \geqslant 0.$$

On aurait alors, d'après (1 — 2 — 5)

$$|z|^n \leqslant \mathrm{A}(\lambda) \sum_{k=0}^{n} r^{n-k} \lambda^k \leqslant \frac{\lambda\, \mathrm{A}(\lambda)}{\lambda - r} \lambda^n, \quad \text{et} \quad |z| \quad \text{serait} \quad \leqslant \lambda.$$

On a donc :

(1 — 3 — 10) Si $|z_n| \leqslant r$ pour tout n $\geqslant 0$, on a, pour $|z| \geqslant \frac{r}{a}$ l'égalité:

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |\Pi_n(z)|^{1/n} = |z|$$

*REMARQUES.*

1) Il est très probable que dans l'énoncé précédent on puisse remplacer $\frac{r}{a}$ par un nombre plus petit. Toutefois, on ne pourrait le remplacer par $r$, car $\Pi_n(z_0) = 0$

pour tout $n \geqslant 1$ (et $|z_0|$ peut être égal à $r$). Pour $|z| > r$, la deuxième partie de la démonstration de (1 — 3 — 10) demeure valable et l'on a :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |\Pi_n(z)|^{1/n} \geqslant |z| .$$

2) On a, d'après (1 — 2 — 7) et (1 — 3 — 1) l'inégalité :

$$|\Pi_n(z)| \geqslant |z|^n - \sum_{p=1}^{n} 2^{p-1} r^p |z|^{n-p} \geqslant |z|^n \left(\frac{|z| - 3r}{|z| - 2r}\right) \quad \text{si} \quad |z| > 2r$$

Si l'on suppose de plus que $|z| > 3\,r$, le dernier rapport écrit est positif et l'on a :

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} |\Pi_n(z)|^{1/n} \geqslant |z|.$$

En tenant compte de $(1 - 3 - 10)$, on obtient:

$(1 - 3 - 11)$ *Si* $|z_n| \leqslant r$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *on a, pour* $|z| > 3r$:

$$|\Pi_n(z)|^{1/n} \to |z| \text{ quand } n \to +\infty$$

On pourrait améliorer légèrement le résultat précédent (c'est-à-dire remplacer $3r$ par un nombre plus petit) en majorant avec plus de précision $|H_3|$, $|H_4|$, etc...

## IV. — *SÉRIES DE POLYNOMES* $\Pi_n$.

Nous allons voir que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, \Pi_n(z)$, que nous appellerons séries (S), possèdent, si les $|z_n|$ sont assez petits, des propriétés analogues à celles des séries entières.

1° *Supposons que pour tout* $n \geqslant 0$, *on ait*

$$|z_n| \leqslant r < \frac{1}{3} \quad \textit{et que} \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}} |c_n|^{1/n} = 1.$$

Il est clair, d'après (1 — 3 — 11) que *la série* (S) *correspondante converge pour* $|z| < 1$, *et diverge pour* $|z| > 1$. De plus, en vertu de (1 — 3 — 7) la convergence est uniforme sur tout compact inclus dans $\Omega$.

*REMARQUE :*

Il est probable que l'on pourrait remplacer 1/3 par un nombre plus grand. En outre, il existe d'autres cas dans lesquels la série (S) possède un cercle de convergence; il en est ainsi, par exemple, si $|z_n| \leqslant r < a$, avec $|c_n|^{1/n} \to 1$

2° *Généralisation du théorème d'Abel.*

Nous suivrons une méthode utilisée par M. Y. Martin ( [17] p. 357-365) dans le cas des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (z - \lambda_1) \ldots (z - \lambda_n),$$

où les nombres complexes $\lambda_n$ sont tels que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|$ converge.

*Nous supposerons que* $|z_n| \leqslant r < 1/3$ *pour tout* $n \geqslant 0$. Nous allons d'abord établir deux lemmes :

*LEMME a : Soit* $\alpha \in \Omega^*$ *et* D *un secteur circulaire, de centre* $\alpha$, *intérieur à* $\Omega$ *et de rayon* 1 — R, *avec* R > $r/a$. *Nous allons majorer*

$$\left| \frac{\Pi_n(z)}{z^n} - \frac{\Pi_n(\alpha)}{\alpha^n} \right|$$

*pour* $z \in$ D. On a :

$$\frac{\Pi_n(z)}{z^n} - \frac{\Pi_n(\alpha)}{\alpha^n} = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{z^k} - \frac{1}{\alpha^k} \right) \ \mathrm{H}_k(z_{n-k}, \ldots, z_{n-1})$$

d'où l'on déduit l'inégalité :

$$\left| \frac{\Pi_n(z)}{z^n} - \frac{\Pi_n(\alpha)}{\alpha^n} \right| \leqslant |z - \alpha| \left( 1 - \frac{r}{a\,|z|} \right)^{-2}.$$

Il existe donc une constante A, indépendante de $n$ et de $z \in$ D, telle que :

$$\left| \frac{\Pi_n(z)}{z^n} - \frac{\Pi_n(\alpha)}{\alpha^n} \right| \leqslant \mathrm{A} \ \ |z - \alpha|$$

*LEMME b : Si* $z \to \alpha$ *en restant dans* D *et si* $c_n \Pi_n(\alpha) \to 0$, on a :

$$\lim_{z \to \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \ \left[ \Pi_n(z) - \left( \frac{z}{\alpha} \right)^n \Pi_n(\alpha) \ \right] = 0$$

Désignons par $y$ la somme de la série précédente ; en reprenant la démonstration de (1 — 3 — 11) on obtient d'abord l'inégalité :

$$|\Pi_n(\alpha)| \geqslant \frac{1 - 3r}{1 - 2r} > 0;$$

il en résulte que $c_n \to 0$ si $n \to +\infty$. Il existe donc un entier $n_0$ tel que pour tout $n > n_0$, on ait $|c_n| < \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est donné quelconque. On a alors :

$$|y| \leqslant \mathrm{A} \left( \sum_{n=0}^{n_0} |c_n| \right) |z - \alpha| + \mathrm{A}\,|z - \alpha|\,\varepsilon \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |z|^n,$$

ou encore:

$$|y| \leqslant A' \, |z - \alpha| + A\,\varepsilon \; \frac{|z-\alpha|}{1-|z|} \leqslant B\varepsilon$$

pour $z \in D$ et assez voisin de $\alpha$ (où $A'$ et B sont deux constantes indépendantes de $z$). D'où le lemme *b*. On peut maintenant établir le théorème suivant , analogue au théorème d'Abel pour les séries entières.

(1 — 4 — 1) *Soit* $(z_n)$ *une suite quelconque telle que* $|z_n| \leqslant r < 1/3$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *et soit* $(\Pi_n)$ *la suite de polynômes correspondante. Soit enfin une suite* $(c_n)$ *telle que la série* (S) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Pi_n(z)$$

*possède un rayon de convergence égal à* 1. *Si la série* (S) *converge en* $\alpha \in \Omega^*$, *sa somme tend vers*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Pi_n(\alpha)$$

*quand* $z \to \alpha$ *en restant dans* D.

En effet, la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \Pi_n(\alpha)}{\alpha^n} \; z^n$$

converge pour $z = \alpha$; d'après le théorème d'Abel, sa somme tend vers

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Pi_n(\alpha)$$

quand $z \to \alpha$ en restant dans D. Il suffit alors d'utiliser le lemme *b* pour voir qu'il en est de même de la somme de (S).

3° On pourrait encore, à l'aide du lemme *b*, généraliser au cas des séries (S) certains théorèmes dits « Taubériens » relatifs aux séries entières (par exemple le théorème bien connu de Littlewood). Nous établirons plutôt la généralisation suivante du théorème de Fatou-Riesz pour les séries entières :

(1 — 4 — 2) *Soit une série* (S) *correspondant à une suite* $(z_n)$ *telle que* $|z_n| \leqslant r < a$ *pour tout* $n \geqslant 0$. *Nous supposerons que* $c_n \to 0$, *que* (S) *possède un rayon de convergence égal à* 1 (¹), *et que sa somme* $f$ *est holomorphe sur un arc fermé* $\widehat{\alpha\beta}$ *de* $\Omega^*$. *Alors, la série* (S) *converge vers* $f(z)$, *uniformément sur* $\widehat{\alpha\beta}$.

La fonction $f$ étant holomorphe sur $\widehat{\alpha\beta}$, on peut trouver un secteur circulaire O A B de centre 0, contenant $\widehat{\alpha\beta}$ dans son intérieur, et dans lequel $f$ est encore holomorphe. Posons :

$$R_n(z) = f(z) - c_0 - c_1 \Pi_1(z) - \ldots - c_{n-1} \Pi_{n-1}(z)$$

(¹) Ceci est réalisé en particulier si $|c_n|^{1/n} \to 1$.

Soit $\rho$ tel que $\frac{r}{\alpha} < \rho < 1$, et $\varepsilon$ un nombre positif donné, arbitrairement petit. *Si* $\rho \leqslant |z| < 1$, on a:

$$\mathrm{R}_n(z) = c_n \Pi_n(z) + \ldots + c_{n+p} \Pi_{n+p}(z) + \ldots$$

On en déduit immédiatement, à l'aide de (1 — 3 — 7), l'inégalité suivante, valable à partir d'un certain rang $n_0$

$$\left| \frac{\mathrm{R}_n(z)}{z^n} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - |z|}$$

*Supposons maintenant* $|z| > 1$ (*avec* $z \in \mathrm{O\,A\,B}$). On a, à partir d'un certain rang $n_1$:

$$|c_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{r}{a}\right).$$

On peut alors écrire, pour $n > n_1 + 1$:

$$|\mathrm{R}_n(z)| \leqslant |f(z) - c_0 - \ldots - c_{n_1} \Pi_{n_1}(z)| + |c_{n_1+1} \Pi_{n_1+1}(z) + \ldots + c_{n-1} \Pi_{n-1}(z)|$$

Soit encore, d'après (1 — 3 — 7) :

$$|\mathrm{R}_n(z)| \leqslant \mathrm{M} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|z|^n}{|z| - 1},$$

où M est indépendant de $n$ et de $z \in \mathrm{O\,A\,B}$. D'où

$$\left| \frac{\mathrm{R}_n(z)}{z^n} \right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{|z|^n} + \frac{\varepsilon/2}{|z| - 1} \leqslant \frac{\mathrm{M}/n + \varepsilon/2}{|z| - 1}$$

On a donc, à partir d'un certain rang $n_2$ l'inégalité :

$$\left| \frac{\mathrm{R}_n(z)}{z^n} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|z| - 1}$$

Soient $\alpha'$ et $\beta'$ les points d'intersection des rayons O A et O B avec $\Omega^*$. Il suffit maintenant, comme dans une démonstration classique du théorème de Fatou-Riesz (voir par exemple [17] p. 361-363) de majorer convenablement

$$\left| (z - \alpha')(z - \beta') \frac{\mathrm{R}_n(z)}{z^n} \right|$$

sur la frontière de la partie du secteur O A B qui est extérieure au disque $\Omega(\rho)$, pour voir que $R_n(z)$ tend uniformément vers zéro sur $\widehat{\alpha\beta}$. Ce qu'il fallait établir.

Notons que si $z_n = 0$ pour tout $n \geqslant 0$, le théorème précédent se réduit au théorème de Fatou-Riesz.

4° *Généralisation du théorème de Jentzsch sur les zéros des polynômes-sections*

*Soit une suite* $(z_n)$ *telle que* $|z_n| \leqslant r < 1/3$, *pour tout* $n \geqslant 0$, *et soit* $(\Pi_n)$ *la suite des polynômes associés.* Soit $(c_n)$ une suite telle que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \; |c_n|^{1/n} = 1.$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Pi_n(z)$ admet $\Omega$ pour disque de convergence. Posons :

$$S_n(z) = c_0 + c_1 \Pi_1(z) + \ldots + c_n \Pi_n(z).$$

Établissons d'abord les lemmes suivants :

*LEMME a*: Si $|z| > 1$, on a $\overline{\lim_{n\to+\infty}} \; |S_n(z)|^{1/n} = |z|$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $A(\varepsilon)$, indépendante de $n$ telle que :

$$|c_n| \leqslant A(\varepsilon)\ (1+\varepsilon)^n, \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0\,.$$

Utilisant (1 — 3 — 7), il vient :

$$\begin{aligned} |S_n(z)| &\leqslant A(\varepsilon)\ \frac{a|z|}{a|z| - r}\Big[1 + (1+\varepsilon)|z| + \ldots + (1+\varepsilon)^n |z|^n\Big] \\ &\leqslant (n+1)(1+\varepsilon)^n |z|^n\ \frac{a\,A(\varepsilon)|z|}{a|z| - r} \end{aligned}$$

D'où l'inégalité :

$$L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \; |S_n(z)|^{1/n} \leqslant |z|$$

Si l'on avait: $L < \lambda < |z|$ (avec $\lambda > 1$), alors, à partir d'un certain rang $n_0(\lambda)$, on aurait: $|S_n(z)| < \lambda^n$. Mais $c_n \Pi_n(z) = S_n(z) - S_{n-1}(z)$ et l'on aurait:

$$|c_n \Pi_n(z)| < 2\lambda^n$$

Comme $|\Pi_n(z)|^{1/n} \to |z|$ quand $n \to \infty$, $\overline{\lim_{n\to+\infty}} \; |c_n|^{1/n}$ serait $\leqslant \dfrac{\lambda}{|z|} < 1$ contrairement à notre hypothèse.

*LEMME b : Quel que soit* $R > 0$, *il existe une constante* $M(R)$ *telle que l'on ait* $|S_n(z)|^{1/n} \leqslant M(R)$ *pour tout* $n > 0$ *et tout* $z$ *tel que* $|z| \leqslant R$.

En effet, on peut supposer $R > 1$; la propriété à établir résulte alors de la majoration de $|S_n(z)|$ obtenue au cours de la démonstration du lemme *a*.

*THÉORÈME* (1 — 4 — 3) *Avec les hypothèses du début de ce paragraphe, si* $\alpha \in \Omega^*$, *dans tout voisinage* V *de* $\alpha$, *une infinité de* $S_n(z)$ *s'annulent.*

La démonstration de (1 — 4 — 3) est analogue à une démonstration connue du théorème de Jentzsch pour les séries entières (*cf.* [7] p. 19-20). Supposons qu'il existe un voisinage V′ de $\alpha$ dans lequel, à partir d'un certain rang $n_0$ aucune $S_n(z)$ ne s'annule. Soit $\Gamma$ un disque ouvert, de centre $\alpha$ et inclus dans V′. Les fonctions

$$g_n(z) = [S_n(z)]^{1/n}$$

sont holomorphes dans $\Gamma$ (pour $n > n_0$) et $g_n(z) \to 1$ sur $\Gamma \cap \Omega$ (si l'on a choisi convenablement la détermination de $g_n$). Or, d'après le lemme *b*, les $g_n(z)$ sont bornés dans leur ensemble sur $\Gamma$; le théorème de Vitali-Stieltjes montre alors que $g_n(z) \to 1$ en tout point de $\Gamma$, contrairement au lemme *a*.

*REMARQUE :*

On voit aisément que le théorème (1 — 4 — 3) demeure valable si l'on suppose que

$$|z_n| \leqslant r < a \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0 \quad \text{et que} \quad |c_n|^{1/n} \to 1 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

5° *Ultraconvergence de certaines séries* (S).

Soit une suite $(z_n)$ telle que $|z_n| \leqslant r < a$ pour tout $n \geqslant 0$, et soit une suite $(c_n)$ telle que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \, |c_n|^{1/n} = 1.$$

Considérons la série (S) correspondant aux suites $(z_n)$ et $(c_n)$; (S) est convergente au moins pour $|z| < 1$ d'après (1 — 3 — 7). Désignons par $f(z)$ sa somme et par $R_n(z)$ son reste de rang $n$. Supposons que $f$ prolongée soit holomorphe dans un domaine $D \supset \Omega$, et soit K un compact quelconque inclus dans D. Soit $\rho_1$ un nombre quelconque tel que $\frac{r}{a} < \rho_1 < 1$; nous allons d'abord établir le lemme:

(1 — 4 — 4). *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un entier* $n_0(\varepsilon)$ *tel que, pour tout* $n > n_0(\varepsilon)$, *on ait:*

$$\frac{1}{n} \log|R_n(z)| < \log|z| + \varepsilon.$$

*pour tout* $z$ *de* K *satisfaisant à* $|z| \geqslant \rho_1$.

Posons $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ et $\beta = \frac{\alpha}{2}$. On peut supposer $\varepsilon$ assez petit pour que $(1+\alpha)\rho_1 < 1$; soit alors $\rho_2$ tel que:

$$(1+\alpha)^{-1} < \rho_2 < (1+\beta)^{-1}.$$

*Si* $|z| \geqslant \rho_2$, on a: $R_n(z) = f(z) - c_0 - \dots - c_{n-1}\Pi_{n-1}(z)$. Il existe une constante $A(\alpha)$ telle que $|c_n| \leqslant A(\alpha)\ (1+\alpha)^n$ pour tout $n \geqslant 0$. On a aussi, d'après $(1-3-7)$:

$$|\Pi_n(z)| \leqslant |z|^n \left(1 - \frac{r}{a\rho_2}\right)^{-1}$$

quel que soit $n \geqslant 0$.

Enfin, il existe une constante M telle que, pour tout $z \in K$, on ait $|f(z)| < M$. On en déduit de suite l'inégalité :

$$|R_n(z)| \leqslant H(1+\alpha)^n\ |z|^n,$$

où H est indépendant de $z$ et de $n$. Il en résulte que l'inégalité :

$$\frac{1}{n} \log |R_n(z)| < \log |z| + \varepsilon,$$

est bien vérifiée à partir d'une certaine valeur de $n$.

*Si* $\rho_1 \leqslant |z| \leqslant \rho_2$, on a cette fois:

$$R_n(z) = c_n \Pi_n(z) + \dots + c_{n+p}\Pi_{n+p}(z) + \dots$$

On a:

$$|\Pi_n(z)| \leqslant |z|^n \left(1 - \frac{r}{a\rho_1}\right)^{-1} \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0,$$

et

$$|c_n| < (1+\beta)^n$$

à partir d'un certain rang. Il en résulte que l'inégalité

$$\frac{1}{n} \log |R_n(z)| < \log |z| + \varepsilon$$

est vérifiée à partir d'un certain rang. D'où le lemme (1 — 4 — 4).

*APPLICATION:*

Comme dans le cas des séries entières (*cf.* Bourion [7], p. 12) on déduit du lemme précédent le théorème :

(1 — 4 — 5) *Soient* $(m_k)$ *et* $(n_k)$ *deux suites d'entiers tendant vers* $+\infty$ *de manière que*

$$\varliminf_{n \to +\infty} \frac{n_k - m_k}{m_k} > 0.$$

*Supposons que* $c_n = 0$ *pour tout n satisfaisant à* $m_k \leqslant n < n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. *Si la somme* $f$ *de la série* (S) *est holomorphe en* $\alpha \in \Omega^*$, *il existe un voisinage* V *de* $\alpha$ *sur lequel* $\mathrm{R}_{n_k}(z) \to 0$ *uniformément. Il y a donc ultraconvergence au point* $\alpha$.

*REMARQUE :*

Les théorèmes de la partie IV de ce chapitre demeurent valables pour des séries plus générales que les séries (S). Ainsi, les propriétés (1 — 4 — 2) et (1 — 4 — 5) sont encore vérifiées si les $\Pi_n$ sont des polynômes *quelconques* satisfaisant à l'inégalité (1 — 3 — 7); il en est de même de (1 — 4 — 3) si l'on suppose seulement que

$$|\Pi_n(z)|^{1/n} \to |z| ,$$

pour tout $|z| > \mathrm{R}$ (avec $\mathrm{R} < 1$).

## CHAPITRE II

### *CAS DES FONCTIONS HOLOMORPHES DANS LE DISQUE UNITÉ*

### I. — *RECHERCHE DE SUITES* $(\Pi_n)$ *FORMANT DES BASES DE* $\mathscr{F}$.

1° On dit qu'une suite de polynômes $(\Pi_n)$ est une base de $\mathscr{F}$ si pour tout élément $f$ de $\mathscr{F}$, il existe une suite $(c_n)$ (et une seule) de nombres complexes telle que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Pi_n(z),$$

où la série est uniformément convergente sur tout compact $K \subset \Omega$. Remarquons que si $f(z)$ est développable en série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Pi_n(z)$, uniformément convergente sur tout compact $K \subset \Omega$, on a, d'après (1 — 1 — 8) et la définition (1 — 2 — 1) des polynômes $\Pi_n$:

$$c_n = f_{(n)}(z_n).$$

*Pour démontrer qu'une suite* $(\Pi_n)$ *est une base de* $\mathscr{F}$, *il suffira donc d'établir que toute* $f \in \mathscr{F}$ *est développable en série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{(n)}(z_n) \Pi_n(z)$$

*uniformément convergente sur tout compact* $K \subset \Omega$.

Posons:

$$F(z) = R_n(z) = f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_{(k)}(z_k) \Pi_k(z).$$

Il est clair que:

$$F(z_0) = F_{(1)}(z_1) = \ldots = F_{(n-1)}(z_{n-1}) = 0 \quad \text{et que:} \quad F_{(n)}(z) = f_{(n)}(z).$$

Il en résulte que l'on peut écrire (*cf.* 1 — 1 — 9)

$$(2-1-1) \qquad R_n(z) = \mathop{\mathrm{I}}_{z_0}^{z} \delta s_1 \mathop{\mathrm{I}}_{z_1}^{s_1} \delta s_2 \ldots \mathop{\mathrm{I}}_{z_{n-1}}^{s_{n-1}} f_{(n)}(s_n) \delta s_n$$

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, on a: $f_{(n)}(s_n) = \sum_{0=d}^{\infty} a_{n+p} s_n^p$, d'où, en vertu de (1 — 1 — 10)

$$R_n(z) = \mathop{\mathrm{I}}_{z_0}^{z} \delta s_1 \ldots \mathop{\mathrm{I}}_{z_{n-1}}^{s_{n-1}} \left[ \sum_{p=0}^{\infty} a_{n+p} s_n^p \right] \delta s_n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{n+p} \left[ \mathop{\mathrm{I}}_{z_0}^{z} \delta s_1 \mathop{\mathrm{I}}_{z_1}^{s_1} \delta s_2 \ldots \mathop{\mathrm{I}}_{z_{n-1}}^{s_{n-1}} s_n^p \delta s_n \right]$$

et, finalement :

$$(2-1-2) \qquad R_n(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{n+p}\, P_{n+p}(z, z_0, \ldots, z_{n-1}, 0, 0, \ldots, 0)$$

*Pour que* $(\Pi_n)$ *soit une base de* $\mathscr{F}$, *il faut et il suffit que* $R_n(z) \to 0$ *avec* $\frac{1}{n}$, *uniformément sur tout disque* $|z| \leqslant R < 1$. Nous serons pour cela amenés à utiliser les majorations obtenues pour les polynômes $\Pi_n$.

2° *Soit* $(z_n)$ *une suite quelconque de points du cercle* $|z| \leqslant r < a$. [1], et $(\Pi_n)$ la suite de polynômes qui lui est associée. Soit R un nombre quelconque satisfaisant à : $\frac{r}{a} < R < 1$. D'après (1 — 3 — 7) on a, pour $|z| \leqslant R$ :

$$|P_{n+p}(z, z_0, \ldots, z_{n-1}, 0, \ldots, 0)| \leqslant R^{n+p}\left(1 - \frac{r}{aR}\right)^{-1}$$

Imposons à $\varepsilon > 0$ la condition: $(1+\varepsilon)R < 1$; comme $\overline{\lim}_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n} \leqslant 1$, on a $|a_{n+p}| \leqslant (1+\varepsilon)^{n+p}$ pour tout $n > n_0(\varepsilon)$ et tout $p \geqslant 0$. D'où, pour $n > n_0(\varepsilon)$

$$|R_n(z)| \leqslant \left(1 - \frac{r}{aR}\right)^{-1} \sum_{p=o}^{\infty} [(1+\varepsilon)R]^{n+p}$$

et cette dernière expression tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Il en résulte que $R_n(z) \to 0$ uniformément sur tout compact inclus dans $\Omega$ et l'on a le théorème

(2 — 1 — 3). *Toute suite* $(\Pi_n)$ *associée à une suite* $(z_n)$ *telle que* $|z_n| \leqslant r < a$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *est une base de* $\mathscr{F}$. *De plus, toute* $f \in \mathscr{F}$ *a pour coordonnées*

$$f(z_0), f_{(1)}(z_1), \ldots, f_{(n)}(z_n), \ldots$$

Chaque $f \in \mathscr{F}$ est donc développable en série (S) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{(n)}(z_n)\, \Pi_n(z).$$

Si $z_n = 0$ pour tout $n \geqslant 0$, on retrouve le développement de $f$ en série entière. Nous verrons plus loin (*cf.* (2 — 2 —8)) que dans l'énoncé précédent, on ne peut remplacer $a$ par un nombre supérieur ou égal à 0,5617.

---

[1] Rappelons que $a$, défini dans (1 — 3 — 3), est un nombre strictement compris entre 0,536 et 0,537.

(2 — 1 — 4) *GÉNÉRALISATION: si* $(z_n)$ *est une suite de points de* $\Omega$ *telle que* $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} |z_n| < a$, *le théorème précédent demeure valable.*

En effet, il existe $r < a$ et $n_0$ tels que $|z_n| \leqslant r < a$ pour tout $n \geqslant n_0$; posons $F(z) = R_{n_0}(z)$, $\Phi(z) = F_{(n_0)}(z) = f_{(n_0)}(z)$ et $\zeta_p = z_{n_0+p}$. Comme $|\zeta_p| \leqslant r < a$ pour tout $p \geqslant 0$ et que $\Phi \in \mathscr{F}$, on a, d'après (2 – 1 – 3):

$$\Phi(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_{(p)}(\zeta_p) \quad P_p(z, \zeta_0, \ldots, \zeta_{p-1})$$

Remplaçons dans l'égalité :

$$F(z) = \mathrm{I}_{z_0}^{z} \ \delta s_1 \ \ldots \ \mathrm{I}_{z_{n_0-1}}^{s_{n_0-1}} \ \Phi\ (s_{n_0}) \ \delta s_{n_0},$$

$\Phi\ (s_{n_0})$ par le développement en série précédent; on obtient, d'après (1—1—10):

$$F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_{(p)}(\zeta_p) \left[ \mathrm{I}_{z_0}^{z} \ \delta s_1 \ \ldots \ \mathrm{I}_{z_{n_0-1}}^{s_{n_0-1}} \ P_p\ (s_{n_0}, z_{n_0}, \ldots, z_{n_0+p-1})\ \delta s_{n_0} \right]$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_{(p)}(\zeta_p) \quad \Pi_{n_0+p}(z)$$

D'où :

$$f(z) = F(z) + \sum_{k=0}^{n_0-1} f_{(k)}(z_k)\,\Pi_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{(n)}(z_n)\,\Pi_n(z)$$

et la convergence de cette dernière série est évidemment uniforme sur tout disque $|z| \leqslant R < 1$ (*cf.* (1 — 1 — 10)).

*CONSÉQUENCES DU THÉORÈME* (2 — 1 — 4). On a immédiatement :

(2 — 1 — 5) *Si* $f \in \mathscr{F}$ *et si chaque* $f_{(n)}(z)$ *s'annule en au moins un point* $z_n$ *tel que* $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} |z_n| < a$, *on a* $f(z) \equiv 0$. *Si* $f_{(n)}(z_n) = 0$ *seulement pour tout* $n > n_0$, *alors* $f$ *est un polynôme de degré au plus égal à* $n_0$.

Il en résulte la propriété suivante :

(2 — 1 — 6) *Soit* $r$ *quelconque,* $< a$; *si* $f \in \mathscr{F}$ *et n'est pas un polynôme, il y a une infinité de* $f_{(n)}(z)$ *qui ne s'annulent pas dans le disque* $|z| \leqslant r < a$.

Notons qu'étant donnée une partie quelconque I de l'ensemble N des entiers $\geqslant 0$, dont le complémentaire par rapport à N est infini, il existe des $f \in \mathscr{F}$ et non polynômes telles que pour tout $n \in \mathrm{I}$, $f_{(n)}(z)$ s'annule dans un disque donné, quelconque $|z| \leqslant \mathrm{R} < 1$. Tel est par exemple le cas de :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{où} \quad a_n = 0 \quad \text{si} \quad n \in \mathrm{I}, \quad \text{et} \quad a_n = 1 \quad \text{si} \ n \notin \mathrm{I}$$

On peut encore énoncer (2 — 1 — 5) sous la forme suivante :

(2 — 1 — 7) *Soit $f \in \mathscr{F}$ et non $\equiv 0$. Si chaque $f_{(n)}(z)$ s'annule en au moins un point $z_n$ de $\Omega$, on a :*

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \ |z_n| \geqslant a$$

*REMARQUE :*

L'ensemble (augmenté de 0) des zéros de $f_{(n)}(z)$ est identique à l'ensemble des points où $f(z)$ est égal à la somme $\mathrm{S}_{n-1}(z)$ des $n$ premiers termes de son développement en série entière.

3° *Construction de fonctions $f$ telles que* $f_{(n)}(z_n) = c_n$ Soit$(z_n)$ une suite donnée telle que $|z_n| \leqslant r < a$ pour tout $n \geqslant 0$, et $(c_n)$ une suite telle que $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \ |c_n|^{1/n} \leqslant 1$.
*On se propose de trouver $f \in \mathscr{F}$ telle que* $f_{(n)}(z_n) = c_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
La série (S) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Pi_n(z)$$

converge uniformément sur tout compact inclus dans $\Omega$. Sa somme $f(z)$ est telle que $f \in \mathscr{F}$ et d'après (1 — 1 — 8) on a bien

$$f_{(n)}(z_n) = c_n.$$

Cette fonction $f$ est donc une solution du problème considéré et c'est *la seule*, car si $g$ désigne une solution quelconque, on a

$$(f - g)_{(n)}(z_n) = 0 \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0,$$

ce qui, d'après (2 — 1 — 5) entraîne $f = g$. L'espace $\mathscr{F}$ est donc une classe d'unicité pour le problème considéré. Notons cependant qu'il peut exister dans les espaces $\mathscr{F}(s)$ (où $s < 1$) d'autres fonctions $f$ telles que $f_{(n)}(z_n) = c_n$ pour tout $n \geqslant 0$; les fonctions $f_{\mathscr{A}}$ qui seront étudiées au paragraphe suivant en fourniront un exemple.

*Supposons seulement que* $z_n \in \Omega$ et considérons de nouveau la série (S); si elle est uniformément convergente sur tout compact inclus dans $\Omega$, sa somme $f(z)$ fournit encore une solution du problème. On obtient la solution générale en ajoutant à $f$ une solution quelconque du système homogène des équations :

$$f_{(n)}(z_n) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

*REMARQUE :*

Il est en général difficile de résoudre effectivement ce dernier problème. Toutefois, un théorème de Polya (*cf.* [10] p. 31-34) permet dans certains cas d'établir l'existence d'une infinité de solutions linéairement indépendantes. Il en est ainsi dans le cas où :

$$\varliminf_{n \to +\infty} \frac{|z_1|^{n-1} + |z_2|^{n-2} + \ldots + |z_{k-1}|^{n-k+1}}{|z_k|^{n-k}} = 0 \text{ (pour } k = 1, 2, \ldots)$$

Cette condition est réalisée dans le cas particulier simple où la suite $|z_n|$ est strictement croissante et bornée par 1. Le théorème de Pólya permet seulement de dire que les solutions appartiennent à $\mathscr{F}$. On déduit de (2 — 1 — 5) qu'aucune solution (non $\equiv 0$) ne peut appartenir à un espace $\mathscr{F}(s)$ pour lequel $s > 1/a$. Si l'on suppose de plus que $z_n \to \alpha \in \Omega^*$, le théorème (4 — 2 — 2) nous permettra de montrer que toutes les solutions ont au moins un point singulier sur $\Omega^*$.

## II. — *LA CONSTANTE* C.

1° *Définition :*

(2 — 2 — 1) *On appellera* C *la borne supérieure des nombres r tels que les conditions :*

$f \in \mathscr{F}$ *et* $f_{(n)}(z_n) = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *avec* $|z_n| \leqslant r$, *entraînent* $f(z) \equiv 0$

Il résulte de (2—1—5) que $C \geqslant a > 0{,}536$. M. Combes avait déjà établi, dans un article en cours d'impression (*cf.* [9]) l'inégalité $C \geqslant 0{,}5$; sa démonstration utilise certains résultats de la théorie des systèmes infinis d'équations linéaires. L'inégalité $C \geqslant 0{,}5$ aurait été obtenue par notre méthode en utilisant, au lieu de la majoration (1 — 3 — 4), la majoration plus simple (1 — 3 — 1). Il n'est pas évident que C soit strictement inférieur à 1 ; nous établirons au paragraphe suivant l'inégalité $C < 0{,}5617$. Donnons d'abord quelques définitions équivalentes de C :

(2 — 2 — 2) C *est la borne supérieure des nombres r tels que les conditions :* $f \in \mathscr{F}$ *et* $f_{(n)}(z_n) = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *avec* $\varlimsup_{n \to +\infty} |z_n| \leqslant r$ *entraînent* $f(z) \equiv 0$.

En effet, soit $r < C$ et $(z_n)$ une suite quelconque de points de $\Omega$ telle que :

$$\varlimsup_{n \to +\infty} |z_n| \leqslant r;$$

soit $\varepsilon > 0$ et tel que $r + \varepsilon < C$. On a, à partir d'un certain rang $n_0$;

$$|z_n| \leqslant r + \varepsilon < C.$$

Si $f_{(n)}(z_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$, tous les $f_{(n)}(z)$ de rang $n \geqslant n_0$ s'annulent dans le disque $\overline{\Omega}(r + \varepsilon)$, ce qui, d'après (2 — 2 — 1) entraîne

$$f_{(n_0)}(z) \equiv 0;$$

$f(z)$ est donc un polynôme qui, en raison des égalités

$$f_{(n)}(z_n) = 0 \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0,$$

est évidemment identiquement nul.

*D'autre part, si* $r > C$, il est clair d'après (2 — 2 — 1) que les conditions :

$f \in \mathscr{F}$ et $f_{(n)}(z_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$ avec $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} |z_n| \leqslant r$ n'entraînent plus $f(z) \equiv 0$.

On démontrerait d'une manière analogue l'équivalence de (2 — 2 — 1) et de la définition suivante :

(2 — 2 — 3) C *est la borne supérieure des nombres r tels que, pour toute* $f \in \mathscr{F}$ *et non identique à un polynôme, une infinité de* $f_{(n)}(z)$ *ne s'annulent pas dans* $\overline{\Omega}(r)$.

On vérifie sans difficultés la propriété suivante :

(2 — 2 — 4) *La borne inférieure* B *des nombres* $R \geqslant 1$ *tels que les conditions :*

$f \in \mathscr{F}(R)$ *et* $f_{(n)}(z_n) = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *avec* $z_n \in \overline{\Omega}$, *entraînent* $f(z) \equiv 0$ *est égale* à $1/C$.

*Soit* $\sigma = (z_n)$ *une suite quelconque de points de* $\overline{\Omega}$; il lui correspond *une constante* $B(\sigma)$, *borne inférieure des nombres* $R \geqslant 1$ *tels que les conditions :*
$f \in \mathscr{F}(R)$ *et* $f_{(n)}(z_n) = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *entraînent* $f(z) \equiv 0$.
Par exemple, si $z_n = \alpha \in \Omega^*$ pour tout $n \geqslant 0$, on a $B(\sigma) = 1$.
On voit aisément que *si* S *désigne l'ensemble des suites* $\sigma$ *de points de* $\overline{\Omega}$ *on a :*

$$B = \sup_{\sigma \in S} B(\sigma).$$

2° *Encadrement de la constante* C.

Par analogie avec la méthode utilisée par S. S. Macintyre (*cf.* [15] p. 305-311) pour obtenir des majorants de la constante de Whittaker W (1), nous allons étudier les éléments de $\mathscr{F}$ qui sont solutions de l'équation fonctionnelle :

$$(2-2-5) \qquad f_{(1)}(z) \equiv f(ze^{i\phi}),$$

*où* $\phi$ *est un nombre réel quelconque.* Pour que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

soit solution de (2 — 2 — 5), il faut et il suffit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\phi} z^n, \quad \text{avec} \quad \overline{\lim_{n \to +\infty}} |a_n|^{1/n} \leqslant 1,$$

---

(1) W est la borne supérieure des nombres $\tau$ tels que la seule fonction entière de type exponentiel $< \tau$, qui s'annule ainsi que chacune de ses dérivées dans $\overline{\Omega}$, soit l'application identiquement nulle. On sait que : $0{,}7259 \leqslant W < 0{,}7378$.

c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant 0$, on ait :

$$a_{n+1} = a_n e^{in\phi}.$$

Il en résulte que pour $\phi$ donné, la solution de (2 — 2 —5) est, à une constante multiplicative près, la fonction $f_\phi$ définie par l'égalité :

$$(2-2-6) \qquad f_\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{in(n-1)\frac{\phi}{2}}$$

Si l'on calcule $(f_\phi)_{(n)}(z)$, on trouve:

$$(2-2-7) \qquad (f_\phi)_{(n)}(z) = e^{in(n-1)\frac{\phi}{2}} f(ze^{in\phi})$$

Par suite, si $f(z)$ s'annule pour $z = z_0$, $(f_\phi)_{(n)}(z)$ s'annule au point $z_n = z_0 e^{-in\phi}$, et ce, pour tout $n \geqslant 0$. On est donc amené à rechercher des $f_\phi(z)$ qui s'annulent dans $\Omega$. Il est clair que l'on peut se borner à étudier les $f_\phi$ pour lesquelles $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$. On peut alors distinguer deux cas :

a) *Si $\phi/\pi$ est irrationnel*, il est clair d'après (2 — 2 — 7) que $f_\phi$ *admet $\Omega^*$ pour coupure*;

b) *Si $\phi/\pi$ est rationnel*, on peut poser $\phi = \dfrac{p\pi}{q}$, où $\dfrac{p}{q}$ est irréductible.

*Si p est pair*, on voit, d'après (2 — 2 — 7) que

$$(f_\phi)_{(q)} = f_\phi$$

Il en résulte que :

$$f_\phi(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_{q-1} z^{q-1}}{1 - z^q} \quad \text{où} \quad a_n = e^{in(n-1)\phi/2} \qquad (n = 0, 1, \dots, q-1)$$

*Si p est impair*, on voit de même que $(f_\phi)_{(2q)} = -f_\phi$, d'où:

$$f_\phi(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_{2q-1} z^{2q-1}}{1 + z^{2q}}$$

Si $\phi/\pi$ est irrationnel, $\phi$ est la limite d'une suite $\pi r_p$, avec $r_p$ rationnel. On vérifie aisément que si $p \to +\infty$, $f_{\pi r_p}(z)$ converge vers $f_\phi(z)$, uniformément sur tout compact inclus dans $\Omega$. Par suite, si $f_\phi(z_0) = 0$, et si $V(z_0)$ est un voisinage arbitrairement petit de $z_0$, on peut trouver, d'après un théorème classique de Hurwitz, une infinité de $f_{\pi r_p}(z)$ qui s'annulent dans $V(z_0)$. Il en résulte que, pour le problème considéré (recherche d'un majorant de C) on peut se borner à étudier les zéros des fonctions $f_\phi$ du cas *b*).

$$Si \quad \phi = \frac{\pi}{2}, \qquad f_\phi(z) = \frac{1 + z + iz^2 - iz^3}{1 + z^4};$$

cette fonction possède un zéro de module $< 0{,}589$. *On a donc :* $\mathrm{C} < 0{,}589$.

De plus, la résolution des équations

$$f_\phi(z) = 0,$$

qui sont de degré inférieur à 12, a été effectuée à l'Institut de Calcul Numérique de la Faculté des Sciences de Toulouse et a montré que la fonction $f_{\frac{3\pi}{4}}$ possède un zéro de module $< 0{,}5617$.

*On a donc obtenu l'encadrement suivant de* C :

$$(2-2-8) \quad \boxed{0{,}536 < a \leqslant \mathrm{C} < 0{,}5617.}$$

*REMARQUES :*

*a*) Il résulte de $(2-2-8)$ que *dans l'énoncé du théorème* $(2-1-3)$ *on ne peut remplacer a par un nombre* $\geqslant 0{,}5617$; sinon, en choisissant $r$ tel que $\mathrm{C} < r < 0{,}5617$, on aurait pour toute $f \in \mathscr{F}$ et toute suite $(z_n)$ satisfaisant à $|z_n| \leqslant r$ pour tout $n \geqslant 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{(n)}(z_n)\,\Pi_n(z)$$

Par suite, les conditions $f \in \mathscr{F}$ et $f_{(n)}(z_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$, avec $|z_n| \leqslant r$, entraîneraient $f(z) \equiv 0$, et C serait $\geqslant r$.

*b*) On peut espérer améliorer l'encadrement $(2-2-8)$ d'une part en majorant avec plus de précision $|\mathrm{H}_n(z_0, z_1, \dots z_{n-1})|$ (par exemple en faisant usage de l'identité $(1-2-10)$ ), d'autre part en résolvant des équations $f_\phi(z) = 0$ de degré $\geqslant$ 12. On pourrait également obtenir des majorants de C en étudiant les zéros des fonctions $f \in \mathscr{F}$ qui sont telles que la suite $(f_{(n)})$ soit périodique, c'est-à-dire des fonctions :

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_{p-1} z^{p-1}}{1 - z^p},$$

où $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ sont des nombres quelconques, et où $p$ désigne la plus petite période de la suite $(f_{(n)})$. On peut noter que les fonctions $f_\phi$, où $\phi/\pi$ est rationnel, appartiennent à cet ensemble.

c) *Si $\phi/\pi$ est irrationnel,* à chaque zéro $z_0$ de $f_\phi(z)$ correspond *une suite* $z_n = z_0 e^{-in\phi}$ *dense sur le cercle* $|z| = |z_0|$ *et telle que* $f_{(n)}(z_n) = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$.

*Si $\phi/\pi$ est rationnel,* $f_\phi$, qui est une fraction rationnelle dont les pôles sont de module 1, est définie à l'extérieur de $\Omega$. On peut vérifier que si $z_0$ est racine de l'équation $f_\phi(z)=0$, $\dfrac{e^{2i\phi}}{z_0}$ l'est aussi; il en résulte que dans le cas considéré, *les zéros de* $f_\phi(z)$ *sont situés dans la couronne*

$$C \leqslant |z| \leqslant C^{-1}.$$

## III. — *DÉMONSTRATIONS DIRECTES DE L'INÉGALITÉ* $C \geqslant a$ *ET D'UNE INÉGALITÉ ANALOGUE CONCERNANT LES DÉRIVÉES SUCCESSIVES.*

1° *Inégalité* $C \geqslant a$;

Soit $r$ quelconque $< a$ et soit $f$ un élément quelconque de $\mathcal{F}$ dont chaque $f_{(n)}(z)$ s'annule en $z_n \in \bar{\Omega}(r)$; on va démontrer que $f(z)$ est $\equiv 0$.

*Supposons au contraire que* $f(z) \not\equiv 0$; $f$ ne peut être un polynôme car pour tout polynôme A $(z)$ de degré $m$, les égalités

$$A_{(n)}(z_n)=0 \quad \text{pour tout} \quad n \leqslant m \quad \text{impliquent} \quad A(z)\equiv 0.$$

On a donc :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

(où une infinité de $a_n$ sont $\neq 0$). Les égalités $f_{(n)}(z_n)=0$ entraînent les égalités :

$$f(z_0)=0 \qquad \text{et} \qquad f_{(n)}(z_n)-z_n f_{(n+1)}(z_{n+1})=0 \qquad \text{pour tout} \qquad n\geqslant 0$$

On a donc, pour tout $n \geqslant 0$ :

$$-a_n = z_n(z_n - z_{n+1})a_{n+2} + \dots + z_n(z_n^{p-1} - z_{n+1}^{p-1})a_{n+p} + \dots$$

Le deuxième membre de cette égalité est, dans $\Omega$, une fonction holomorphe de $z_n$ et $z_{n+1}$ considérés comme deux variables complexes indépendantes. Le maximum de son module est donc atteint pour

$$|z_n| = |z_{n+1}| = r.$$

Donnons à $z_n$ et $z_{n+1}$ les valeurs correspondant à ce maximum, soit

$$z_n = r\,e^{i\theta}, \qquad z_{n+1} = r\,e^{i\theta'},$$

et posons $\theta - \theta' = 2\,\alpha$. On a :

$$|a_n| \leqslant 2\left[\,|a_{n+2}|\,r^2\,|\sin\alpha| + \dots + |a_{n+p}|\,r^p\,|\sin(p-1)\alpha| + \dots\right]$$

Comme $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} |a_n|^{1/n} \leqslant 1, \quad \dfrac{|a_n|}{\lambda^n} \to 0$ quel que soit $\lambda > 1$; la borne supérieure de $|a_n| \lambda^{-n}$ est donc atteinte pour une valeur $n_0$ de $n$ (valeur qui dépend à priori de $\lambda$), et l'on a :

$$|a_n| \leqslant \lambda^{n-n_0} |a_{n_0}| \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant n_0.$$

Il en résulte que (si $\lambda r < 1$) :

$$|a_{n_0}| \leqslant 2 |a_{n_0}| [(\lambda r)^2 |\sin \alpha| + \ldots + (\lambda r)^p |\sin (p-1)\alpha| + \ldots]$$

Posons $x = \lambda r$; on a, d'après $(1-3-2)$, si $x \leqslant 0{,}57$:

$$|a_{n_0}| \leqslant |a_{n_0}| \frac{2x^2}{(1-x)\sqrt{1+x}}$$

Or

$$\frac{2x^2}{(1-x)\sqrt{1+x}} < 1 \quad \text{si} \quad x < a,$$

et il est clair que l'on pouvait choisir $\lambda$ de manière que $\lambda r < a$; on aboutit donc à une impossibilité et $f(z)$ est $\equiv 0$.

*REMARQUE :*

La démonstration précédente permet de généraliser quelque peu le théorème (2 — 1 — 5). En effet, les égalités

$$f(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad f_{(n)}(z_n) - z_n f_{(n+1)}(z_{n+1}) = 0$$

n'entraînent pas nécessairement

$$f_{(n)}(z_n) = 0 \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0$$

(par exemple dans le cas où l'un des $z_n$ est nul). Cependant, elle ne prouve pas le théorème (2 — 1 — 3) dont (2 — 1 — 5) n'est qu'une conséquence particulière.

2° *Cas des dérivées successives; constante de Gontcharoff.*

Dans sa thèse, Gontcharoff a démontré que si

$f \in \mathscr{F}$ et si $f^{(n)}(z_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$, avec $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, n|z_n| < \dfrac{1}{2e}$,

on a $f(z) \equiv 0$ (*cf.* [12] p. 20). Cette propriété a conduit à la définition :

*DÉFINITION : On appelle constante de Gontcharoff la borne supérieure* G *des nombres c tels que les conditions :*

$$f \in \mathscr{F} \quad et \quad f^{(n)}(z_n) = 0 \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0 \quad avec \quad \overline{\lim_{n \to +\infty}} \; n|z_n| < c \quad (et \quad z_n \in \Omega)$$

*entraînent* $f(z) \equiv 0$.

On sait que : $\log 2 \leqslant G < 0{,}7378$ (*cf.* [4] p. 953).

a) *Démonstration directe de l'inégalité* $G \geqslant \log 2$ :

Soit $f$ un élément quelconque de $\mathscr{F}$ tel que

$$f^{(n)}(z_n) = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad n \geqslant 0 \qquad \text{avec} \qquad \overline{\lim_{n \to +\infty}} \; n|z_n| < c < \log 2$$

On a, à partir d'un certain rang $m_0$: $|z_n| < \dfrac{c}{n}$.

*Supposons* $f(z) \not\equiv 0$; $f$ ne peut évidemment pas être identique à un polynôme. On a donc

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

où les $a_n$ ne sont pas tous nuls à partir d'un certain rang. Les égalités $f^{(n)}(z_n) = 0$ entraînent, pour tout $n \geqslant 0$ :

$$-a_n = (n+1)\frac{a_{n+1}}{1!} z_n + \ldots + (n+1)\ldots(n+p)\frac{a_{n+p}}{p!} z_n^p + \ldots$$

Soit $\lambda$ un nombre quelconque satisfaisant à :

$$1 < \lambda < \frac{\log 2}{c};$$

on a :

$$\frac{|a_n|}{\lambda^n} \to 0 \qquad \text{si} \qquad n \to +\infty.$$

Par suite, on peut trouver une sous-suite infinie $(n_k)$ d'entiers, telle que l'on ait, pour tout $n \geqslant n_k$, et tout $k \geqslant 1$ :

$$|a_n| \leqslant \lambda^{n-n_k} |a_{n_k}|$$

D'où pour $n = n_k \geqslant m_0$:

$$|a_n| \leqslant |a_n| \left[ \frac{n+1}{n} \lambda c + \ldots + \frac{(n+1)\ldots(n+p)}{n^p} \frac{(\lambda c)^p}{p!} + \ldots \right]$$

L'expression entre crochets tend manifestement vers $e^{\lambda c} - 1$ quand $n_k \to +\infty$.

On a donc :

$$1 \leqslant e^{\lambda c} - 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \lambda c \geqslant \log 2,$$

contrairement au choix de $\lambda$. Donc, on a bien $f(z) \equiv 0$ et $G \geqslant \log 2$.

*REMARQUE :*

N. Levinson a utilisé une méthode analogue pour établir l'inégalité $W \geqslant \log 2$, où W désigne la constante de Whittaker (*cf.* [14] p. 181-182).

b) *Démonstration de l'inégalité* $G > 0{,}718$ (1).

En vue d'améliorer l'encadrement de G, nous allons suivre une méthode analogue à celle qui nous a permis de démontrer l'inégalité $C > 0{,}536$.

Soit $f \in \mathscr{F}$ et tel que $f^{(n)}(z_n)=0$ pour tout $n \geqslant 0$, avec $\varlimsup_{n \to +\infty} n|z_n| < c$.

On a, à partir d'un certain rang $m_0$:

$$|z_n| < \frac{c}{n}.$$

*Supposons* $f(z) \not\equiv 0$; les égalités $f^{(n)}(z_n) = 0$ entraînent:

$$f^{(n)}(z_n) - z_n f^{(n+1)}(z_{n+1}) = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad n \geqslant 0,$$

ce qui peut s'écrire :

$$-n!\,a_n = z_n\left[\sum_{p=1}^{\infty} (n+p+1)!\,\frac{a_{n+p+1}}{p!}\left(\frac{z_n^p}{p+1} - z_{n+1}^p\right)\right]$$

Le deuxième membre de l'égalité précédente étant dans $\Omega$ fonction holomorphe de $z_n$ et $z_{n+1}$, le maximum de son module pour

$$|z_n| < \frac{c}{n} \qquad \text{et} \qquad |z_{n+1}| < \frac{c}{n+1}$$

est inférieur ou égal au maximum de son module pour

$$|z_n| \leqslant \frac{c}{n} \qquad \text{et} \qquad |z_{n+1}| \leqslant \frac{c}{n}$$

(1) Après avoir publié ce résultat (*cf.* [21]), nous avons pris connaissance de l'analyse d'un article de Dragilev, (*Math. Reviews*, juin 1961, — nº 4839). Par une méthode non précisée, l'auteur établit l'inégalité $G \geqslant W$.

Donnons à $z_n$ et $z_{n+1}$ les valeurs correspondant à ce dernier maximum, soit

$$z_n = \frac{c}{n} e^{i\theta}, \qquad z_{n+1} = \frac{c}{n} e^{i\theta'} ;$$

on a, pour tout $n \geqslant m_0$:

$$n!\,|a_n| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} (n+p+1)!\, \frac{|a_{n+p+1}|}{p!} \frac{c^{p+1}}{n^{p+1}} \left| \frac{e^{ip\theta}}{p+1} - e^{ip\theta'} \right|$$

Or, quel que soit $\lambda > 1$, il existe une sous-suite infinie $(n_k)$ telle que

$$|a_n| \leqslant \lambda^{n-n_k} |a_{n_k}| \qquad \text{pour tout} \qquad n \geqslant n_k.$$

D'où pour $n = n_k \geqslant m_0$, l'inégalité :

$$1 \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(n+1)\dots(n+p+1)}{n^{p+1}} \frac{(\lambda c)^{p+1}}{p!} \left| \frac{e^{ip\theta}}{p+1} - e^{ip\theta'} \right|$$

On va faire tendre $n = n_k$ vers l'infini; la difficulté est que $\theta$ et $\theta'$ dépendent à priori de $n_k$ et que, par suite chaque terme du deuxième membre ne converge pas nécessairement. Posons :

$$\lambda c = x \qquad \text{et} \qquad \alpha_p(n) = \frac{(n+1)\dots(n+p+1)}{n^{p+1}} ;$$

pour $p$ fixé, $\qquad \alpha_p(n) \to 1 \quad$ si $\quad n \to +\infty$.

On obtient alors, en élevant au carré les deux membres de l'inégalité précédente et en utilisant l'inégalité de Cauchy :

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant \left[ \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p(n) \frac{x^{p+1}}{p!} \left| \frac{e^{ip\theta}}{p+1} - e^{ip\theta'} \right| \right]^2 \\ &\leqslant \left[ \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^2(n) \frac{x^{p+1}}{p!} \right] \left[ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{p+1}}{p!} \left| \frac{e^{ip\theta}}{p+1} - e^{ip\theta'} \right|^2 \right] \end{aligned}$$

On a:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{p+1}}{p!} \left| \frac{e^{ip\theta}}{p+1} - e^{ip\theta'} \right|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{p+1}}{p!} \left[ 1 + \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{2\cos p(\theta - \theta')}{p+1} \right]$$

Or R. P. Boas a rencontré cette dernière série en cherchant un minorant de la constante de Whittaker, et il a établi que sa somme est maximum pour $\theta - \theta' = \pi$ (*cf.* [3] p. 19). On a donc :

$$1 \leqslant \left[ \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^2(n) \frac{x^{p+1}}{p!} \right] \cdot \left[ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{p+1}}{p!} \left( 1 + \frac{(-1)^{p+1}}{p+1} \right)^2 \right]$$

Le deuxième membre de cette inégalité tend, si $n = n_k \to +\infty$, vers:

$$\psi(x) = x\,(e^x - 1)\left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{p+1}}{p!}\left(1 + \frac{(-1)^{p+1}}{p+1}\right)^2\right] \text{ qui est } < 1 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 0{,}718.$$

Par suite, si $c < 0{,}718$, on pouvait choisir $\lambda$ tel que

$$1 < \lambda < \frac{0{,}718}{c},$$

et on aboutit à une contradiction. Donc $f(z)$ est bien $\equiv 0$, et l'on a : $G \geqslant 0{,}718$.

En fait, on pouvait remplacer 0,718 par un nombre un peu plus grand sans que l'inégalité $\psi(x) < 1$ cesse d'être valable; *on a donc l'encadrement :*

$$(2-3-1) \qquad \boxed{0{,}718 < G < 0{,}7378}$$

*REMARQUE :*

R. P. Boas, dans l'article cité ([3]) établit l'inégalité $W > 0{,}718$; sa méthode peut être simplifiée et rendue élémentaire en procédant comme pour la démonstration de l'inégalité $C \geqslant a$.

## IV. — *ÉTUDE DE L'ORDRE DE GRANDEUR DES NOMBRES* $|f_{(n)}(z_n)|$ *QUAND* $n \to +\infty$.

1° Soit une suite $(z_n)$ telle que $|z_n| \leqslant r < 1$ et $f$ une fonction dont le rayon d'holomorphie à l'origine [1] est égal à $R \geqslant 1$. On établit de suite, comme au paragraphe I.3° du premier chapitre, l'inégalité :

$$L = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, |f_{(n)}(z_n)|^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{R}$$

Supposons de plus que $r \leqslant 0{,}536$ (ou même $r < a$); si on avait

$$L < \lambda < \frac{1}{R},$$

il existerait une constante $A(\lambda)$, indépendante de $n$, et telle que :

$$|f_{(n)}(z_n)| \leqslant A(\lambda)\,\lambda^n \qquad \text{pour tout} \qquad n \geqslant 0.$$

D'après le théorème (2 — 1 — 3), $f(z)$ est développable en série (S) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{(n)}(z_n)\,\Pi_n(z);$$

[1] On appelle rayon d'holomorphie à l'origine d'une fonction holomorphe $f$, le rayon de convergence de son développement en série entière à l'origine.

on aurait donc :

$$|f_{(n)}(z_n)\quad \Pi_n(z)| \leqslant A(\lambda)\quad (\lambda\,|z|)^n \left(1-\frac{r}{a\,|z|}\right)^{-1}$$

et $f$ aurait un rayon d'holomorphie $\geqslant \frac{1}{\lambda} > R$, contrairement à l'hypothèse. D'où le théorème :

(2 — 4 — 1) *Si* $|z_n| \leqslant r \leqslant 0{,}536$, *on a, pour toute* $f$ *dont le rayon d'holomorphie à l'origine est égal à* $R \geqslant 1$ :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ |f_{(n)}(z_n)|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$$

*REMARQUES :*

*a*) Le théorème précédent montre que *pour toute* $f \in \mathscr{F}$ *et à rayon d'holomorphie fini, les nombres* $|f_{(n)}(z_n)|$ *ne peuvent pas être trop petits.* (On savait déjà qu'ils ne pouvaient être tous nuls à partir d'un certain rang.)

*b*) L'exemple $f_{\frac{3\pi}{4}}(z)$ [*cf.* la démonstration de l'inégalité (2 — 2 — 8)] montre que *dans l'énoncé* (2 — 4 — 1), *le nombre* 0,536 *ne peut être remplacé par un nombre* $\geqslant$ 0,5617.

*c*) Dans le cas plus particulier où

$$|f_{(n)}(0)|^{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{R},$$

on pourrait donner du théorème (2 — 4 — 1) une démonstration indépendante de (2 — 1 — 3). On en verra le principe au chapitre suivant (*cf.* remarque *d* du § IV. 1°).

2° *Cas où beaucoup de* $f_{(n)}(z)$ *s'annulent au voisinage de l'origine.*

(2 — 4 — 2) *Soit une suite quelconque* $(z_n)$ *telle que*

$$|z_n| \leqslant r < \frac{1}{3} \qquad \text{pour tout} \qquad n \geqslant 0.$$

*Soit une fonction* $f$ *dont le rayon d'holomorphie à l'origine est égal à* 1. *Si*

$$f_{(n)}(z_n) = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad n \neq n_k, \qquad \text{avec} \qquad \frac{n_{k+1}}{n_k} > A > 1,$$

*le cercle* $\Omega^*$ *est une coupure pour* $f$.

En effet, $f(z)$ est développable en une série (S) qui possède, d'après (1 — 3 — 11) et (2 — 4 — 1), un rayon de convergence égal à 1. Soit $\alpha$ quelconque sur $\Omega^*$; si $f$

était holomorphe au point $\alpha$, alors, d'après (1 — 4 — 5) le reste $R_{n_k}(z)$ tendrait uniformément vers zéro, dans un certain voisinage V de $\alpha$, et il en serait évidemment de même de $R_n(z)$.. La série (S) convergerait donc en des points $z$ de module $> 1$, ce qui est impossible.

*REMARQUE :*

*Si l'on suppose plus généralement que :*

$$\varlimsup_{n \to +\infty} |f_{(n)}(z_n)|^{\frac{1}{n}} = L < 1 \qquad (\text{avec} \quad n \neq n_k),$$

*$\Omega^*$ est encore une coupure pour $f$.*

On le voit de suite en écrivant :

$$f(z) = \sum_{\substack{n=0 \\ (n \neq n_k)}}^{\infty} f_{(n)}(z_n) \; \Pi_n(z) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{(n_k)}(z_{n_k}) \; \Pi_{n_k}(z) = S_1 + S_2$$

et en appliquant le théorème (2 — 4 — 2) à $S_2$.

V. — *ÉTUDE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS.*

1° Désignons par $\mathcal{F}_m$ le sous-espace de $\mathcal{F}$ constitué par les fonctions $f$ telles que :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{mk},$$

où $m$ est un entier $> 1$. On a :

(2 — 5 — 1) *Soit $C_m$ la borne supérieure des nombres $r$ tels que les conditions :*

$$f \in \mathcal{F}_m, \quad f_{(mk)}(z_k) = 0 \qquad \textit{pour tout} \qquad k \geqslant 0, \qquad \textit{avec} \qquad |z_k| \leqslant r,$$

*entraînent $f(z) \equiv 0$. On a :*

$$C_m = C^{1/m}$$

En effet, posons

$$F(u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k; \qquad F \in \mathcal{F} \qquad \text{et} \qquad f(z) = F(z^m).$$

On $a$:

$$f_{(mk)}(z) = F_{(k)}(z^m).$$

*Soit* $r < C^{1/m}$ et $(z_k)$ une suite telle que $|z_k| \leqslant r$. Si $f_{(mk)}(z_k) = 0$, on a aussi $F_{(k)}(z_k^m) = 0$ pour tout $k \geqslant 0$, c'est-à-dire, en posant $u_k = z_k^m$ : $F_{(k)}(u_k) = 0$, avec $|u_k| \leqslant r^m < C$. $F(u)$ est donc $\equiv 0$ et $f(z)$ aussi; il en résulte que $C_m \geqslant C^{1/m}$.

*Soit maintenant* $r > C^{1/m}$; on a $r^m > C$, donc il existe $F \in \mathcal{F}$ et telle que

$F_{(k)}(u_k)=0$ pour tout $k \geqslant 0$, avec $|u_k| \leqslant r^m$. Posons $f(z)=F(z^m)$; $f \in \mathscr{F}_m$ et l'on a $f_{(km)}(z_k)=0$ pour tout $k \geqslant 0$, avec $z_k$ égal à l'une des racines $m^{mes}$ de $u_k$, donc avec $|z_k| \leqslant r$. Il en résulte que $C_m \leqslant C^{1/m}$ et l'on a finalement $C_m = C^{1/m}$.
*Remarque* : si $m \to +\infty$, $C_m \to 1$, ce qui nous conduit à considérer l'ensemble $\mathscr{F}^*$ des fonctions $f \in \mathscr{F}$ et telles que:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k}, \quad \text{où} \quad d_k = n_{k+1} - n_k \to +\infty \quad \text{avec } k.$$

On va démontrer la propriété suivante :

(2 — 5 — 2) *Soit* $C^*$ *la borne supérieure des nombres r tels que les conditions :*

$$f \in \mathscr{F}^*, \quad f_{(n_k)}(z_{n_k})=0 \quad \textit{pour tout} \quad k \geqslant 0, \quad \text{avec} \quad |z_{n_k}| \leqslant r,$$

*entraînent* $f(z) \equiv 0$. *On a :* $C^* = 1$.

Soit $r$ quelconque $<1$, et $f$ un élément de $\mathscr{F}^*$ dont chaque $f_{(n_k)}(z)$ s'annule *en* $z_{n_{k_i}} \in \overline{\Omega}(r)$. *Supposons* $f(z) \not\equiv 0$; on peut trouver $\lambda > 1$ et tel que $\lambda r < 1$. Comme $|a_{n_k}| \lambda^{-n_k} \to 0$ si $n_k \to +\infty$, on peut trouver une sous-suite $(n_{k_i})$ telle que, pour tout $n_k \geqslant n_{k_i}$, et tout $i$, on ait:

$$|a_{n_k}| \leqslant \lambda^{n_k - n_{k_i}} \cdot |a_{n_{k_i}}| .$$

Or, quel que soit $k \geqslant 0$, on a:

$$-a_{n_k} = a_{n_{k+1}} \cdot z_{n_k}^{d_k} + a_{n_{k+2}} \cdot z_{n_k}^{d_k + d_{k+1}} + \dots + a_{n_{k+p}} \cdot z_{n_k}^{d_k + \dots + d_{k+p-1}} + \dots$$

D'où pour $k = k_i$ l'inégalité :

$$1 \leqslant (\lambda r)^{d_k} + \dots + (\lambda r)^{d_k + \dots + d_{k+p-1}} + \dots \leqslant \frac{(\lambda r)^{d_k}}{1-\lambda r}$$

qui tend vers zéro si $k_i \to +\infty$. On aboutit à une contradiction; donc

$$f(z) \equiv 0 \quad \text{et} \quad C^* = 1.$$

2° Si $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, *les* $f_{(n)}(z)$ *ne s'annulent plus, à partir d'un certain rang, dans le disque* $|z| \leqslant r < 1/2$. (où $r$ est un nombre quelconque $< 1/2$).

En effet $a_n$ est $\neq 0$ et l'on peut écrire :

$$f_{(n)}(z) = a_n\left[1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} z + \ldots + \frac{a_{n+p}}{a_n} z^p + \ldots\right]$$

Imposons à $\varepsilon > 0$ la condition $(1 + \varepsilon) r < 1/2$. On a, à partir d'un certain rang $n_0(\varepsilon)$ l'inégalité :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 + \varepsilon,$$

d'où, pour $|z| \leqslant r$ :

$$|f_{(n)}(z)| \geqslant |a_n| \left[1 - (1+\varepsilon) r - \ldots - (1+\varepsilon)^p r^p - \ldots\right] = |a_n| \left[\frac{1 - 2(1+\varepsilon) r}{1 - (1+\varepsilon) r}\right] > 0$$

3° *Considérons l'ensemble des fonctions*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \textit{telles que} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1. \quad \text{On supposera donc} \quad a_n \neq 0.$$

Cherchons la limite de :

$$a_n^{-1} f_{(n)}(z) = 1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} z + \ldots + \frac{a_{n+p}}{a_n} z^p + \ldots$$

Soit $r$ quelconque inférieur à 1 et $|z| \leqslant r$. Imposons à $\varepsilon > 0$ la condition :

$$r(1 + \varepsilon) < 1.$$

$$\frac{a_{n+p}}{a_n} z^p \to z^p \quad \text{quand} \quad n \to +\infty \quad \text{et} \quad \left|\frac{a_{n+p}}{a_n} z^p\right| \leqslant [(1+\varepsilon) r]^p$$

dès que $n$ est assez grand pour que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant 1 + \varepsilon,$$

et quel que soit $p \geqslant 0$. Il en résulte que

$$a_n^{-1} f_{(n)}(z) \to \frac{1}{1 - z},$$

uniformément sur tout disque $|z| \leqslant r < 1$, et d'après un théorème de Hurwitz, *les $f_{(n)}(z)$ ne s'annulent plus, à partir d'un certain rang, dans le disque $|z| \leqslant r$.*

*REMARQUE :*

Comme $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, on sait que $z = 1$ est un point singulier pour $f$. Supposons que $f$ soit holomorphe dans un domaine D contenant $\Omega$. $f_{(n)}$ *sera définie dans* D par l'égalité :

$$f_{(n)}(z) = \frac{f(z) - s_{n-1}(z)}{z^n}, \quad \text{où} \quad s_{n-1}(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}.$$

Cherchons comme précédemment la limite de :

$$a_n^{-1} f_{(n)}(z) = \frac{f(z)}{a_n z^n} + 1 - \frac{s_n(z)}{a_n z^n},$$

$z$ appartenant à *un compact* K *inclus dans* D *et extérieur au disque* $|z| \leqslant 1 + \alpha$ (où $\alpha > 0$ est arbitrairement petit). On a, pour tout $z \in K$, $|f(z)| \leqslant M$ d'où :

$$\left|\frac{f(z)}{a_n z^n}\right| \leqslant \frac{M}{|a_n|\,(1+\alpha)^n} \quad \text{qui} \quad \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

On est ramené à trouver la limite de $\dfrac{s_n(z)}{a_n z^n}$.

Imposons à $\varepsilon$ la condition : $0 < \varepsilon < \alpha$. A partir d'un certain rang $n_0$, on a :

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leqslant 1 + \varepsilon$$

Posons:

$$S_n(z) = s_n(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{n_0-1} z^{n_0-1}.$$

On a pour $n > n_0$:

$$\frac{S_n(z)}{a_n z^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{z} + \ldots + \frac{a_{n-k}}{a_n}\frac{1}{z^k} + \ldots + \frac{a_{n_0}}{a_n}\frac{1}{z^{n-n_0}}$$

$$\frac{a_{n-k}}{a_n}\frac{1}{z^k} \to \frac{1}{z^k} \quad \text{si} \quad n \to +\infty \quad \textit{et} \quad \left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\frac{1}{z^k}\right| \leqslant \left(\frac{1+\varepsilon}{1+\alpha}\right)^k,$$

terme général d'une série convergente. Il en résulte que

$$\frac{S_n(z)}{a_n z^n} \to \frac{z}{z-1},$$

uniformément sur K. Comme

$$\frac{1}{a_n z^n}\left[a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n_0-1} z^{n_0-1}\right] \to 0$$

uniformément sur K, on voit que :

$$a_n^{-1} f_{(n)}(z) \to 1 - \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z},$$

uniformément sur K, et par suite, *à partir d'un certain rang, les* $f_{(n)}(z)$ *ne s'annulent plus dans* K.

## CHAPITRE III

### *CAS DES FONCTIONS ENTIÈRES*

On désignera par E l'espace vectoriel complexe des fonctions entières, et par $E(\rho, \tau)$ le sous-espace de E dont les éléments sont les fonctions entières d'ordre inférieur à $\rho$ et les fonctions entières d'ordre $\rho$ et de type strictement inférieur à $\tau$.

### I. — *EXISTENCE DES ZÉROS DES* $f_{(n)}$.

Si $f$ est une fonction entière d'ordre fini *non entier*, elle possède une infinité de zéros; comme toutes les $f_{(n)}$ sont du même ordre que $f$, elles ont aussi une infinité de zéros. Le cas des fonctions entières d'ordre fini et entier pourrait être traité par une méthode élémentaire utilisant le théorème de Hadamard sur la décomposition d'une fonction entière en produit de facteurs primaires de Weierstrass (*cf.* [20]). On peut aussi, comme W. K. Hayman l'a remarqué dans son analyse de la note [20] (*cf.* Mathematical Reviews — juillet 1961 — nº 7 A — analyse nº 5.722) utiliser le théorème de Picard sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes. C'est cette dernière méthode que nous allons adopter.

(3 — 1 — 1) *Si $f$ est une fonction entière quelconque, il existe au plus une fonction $f_{(n)}$ dépourvue de zéros.*

En effet, si $f_{(n)}$ et $f_{(n+p)}$ n'avaient pas de zéros, la fonction méromorphe :

$$g(z) = \frac{f_{(n)}(z)}{z^p f_{(n+p)}(z)} ,$$

aurait trois valeurs exceptionnelles : 0, 1, $\infty$, ce qui est impossible d'après le théorème de Picard.

(3 — 1 — 2) *Si $f$ est une fonction entière quelconque, il existe au plus un nombre fini de $f_{(n)}$ ne possédant qu'un nombre fini de zéros; leurs rangs sont alors consécutifs.*

Cette propriété est évidente pour un polynôme; nous supposerons donc que $f$ n'est pas un polynôme. Soit alors $f_{(n_0)}$ la première fonction $f_{(n)}$ ne possédant qu'un nombre fini de zéros et soit $p$ un entier positif quelconque. Si $f_{(n_0+p)}$ n'a qu'un nombre fini de zéros, le polynôme

$$A_p(z) = a_{n_0} + \dots + a_{n_0+p-1}\, z^{p-1}$$

est identiquement nul, sinon la fonction $g$ définie ci-dessus aurait trois valeurs exceptionnelles : 0, 1, $\infty$; on a donc $f_{(n_0)}(z) = z^p\, f_{(n_0+p)}(z)$ et toutes les $f_{(n)}$

dont le rang $n$ est compris entre $n_0$ et $n_0 + p$ n'ont qu'un nombre fini de zéros. A partir d'une certaine valeur de $p$, on a $A_p(z) \not\equiv 0$ et les $f_{(n_0+p)}$ correspondants possèdent une infinité de zéros. D'où le théorème (3 — 1 — 2).

(3 — 1 — 3) *Soient a et b deux nombres finis quelconques et n un entier positif quelconque; il est impossible que les équations*

$$f(z) = a, \ f_{(n)}(z) = b$$

*soient toutes deux dépourvues de racines.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, la fonction méromorphe :

$$h(z) = \frac{f(z) - a}{f(z) - a - z^n \left(f_{(n)}(z) - b\right)}$$

aurait trois valeurs exceptionnelles : 0, 1, $\infty$. Enfin, en considérant la même fonction $h$, on peut établir le théorème suivant :

(3 — 1 — 4) *Soient a et b deux nombres quelconques (avec $b \neq 0$) et n un entier positif quelconque; l'une au moins des deux équations*

$$f(z) = a, \ f_{(n)}(z) = b$$

*a une infinité de racines.*

$$Si \quad b = 0, \quad a_0 = a, \quad a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0,$$

la démonstration de (3 — 1 — 4) n'est plus valable; on a alors

$$f(z) = a + z^n f_{(n)}(z);$$

si l'équation $f(z) = a$ n'a qu'un nombre fini de racines, il en est de même pour l'équation

$$f_{(n)}(z) = b = 0.$$

*Le théorème* (3 — 1 — 4) *n'est donc plus valable si* $b = 0$.

II. — *RECHERCHE DE BASES* $(\Pi_n)$ *DE* E *OU DE* E $(\rho, \tau)$.

1° Si l'on pose :

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad R_n(z) = f(z) - \sum_{k=o}^{n-1} f_{(k)}(z_k)\,\Pi_k(z),$$

on établit comme au chapitre précédent l'égalité :

$$(3-2-1) \qquad R_n(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{n+p}\, P_{n+p}(z, z_0, \ldots, z_{n-1}, 0, \ldots, 0)$$

Pour qu'une suite $(\Pi_n)$ soit une base de E (ou de E $(\rho, \tau)$ ), il faut et il suffit que pour toute $f$ de E (ou de E $(\rho, \tau)$) le second membre de l'égalité (3 — 2 — 1) tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$, uniformément sur toute partie bornée du plan complexe.

2° *Soit* $(z_n)$ *une suite quelconque, bornée.* Il existe donc $r$ tel que $|z_n| \leqslant r$ pour tout $n \geqslant 0$. On déduit du théorème (2 — 1 — 3) que la suite $(\Pi_n)$ associée à la suite $(z_n)$ est une base de l'espace des fonctions qui sont holomorphes au moins pour $|z| < \mathrm{R}$, avec

$$\mathrm{R} = \frac{r}{0{,}536}$$

On a donc en particulier :

(3 — 2 — 2) *Toute suite* $(\Pi_n)$ *associée à une suite bornée quelconque* $(z_n)$ *est une base de* E.

Il en résulte que :

(3 — 2 — 3) *Si* K *est une partie bornée quelconque du plan complexe, et* $f$ *une fonction entière quelconque, non polynôme, il existe une infinité de* $f_{(n)}(z)$ *qui ne s'annulent pas dans* K.

3° *Soit* $(z_n)$ *une suite quelconque telle que :*

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \; |z_n| \, n^{-1/\rho} \leqslant 1$$

(où $\rho$ est un nombre strictement positif) et soit $(\Pi_n)$ la suite de polynômes associée à $(z_n)$. Posons $|z| = \mathrm{R} \geqslant 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver un entier $n_0(\varepsilon) \geqslant 1$ et tel que pour tout $n \geqslant 0$, on ait:

$$|z_n| \leqslant (1+\varepsilon) \; [n + n_0(\varepsilon)]^{1/\rho}.$$

Alors d'après (1 — 3 — 9) on a :

$$|\mathrm{P}_{n+p}(z, z_0, \ldots, z_{n-1}, 0, \ldots, 0)| \leqslant \left(\frac{\mathrm{A}}{a}\right)^{n+p} [(n_0(\varepsilon) + n + p)! \; ]^{1/\rho} \phi\left(\frac{a\mathrm{R}}{\mathrm{A}}\right)$$

où $\mathrm{A} = 1 + \varepsilon$.

Supposons que

$$0 < (\rho\,\tau)^{1/\rho} < a$$

et soit $f$ un élément quelconque de E $(\rho, \ \tau)$. On a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

et l'on sait que

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \; |\,(n!)^{1/\rho} \, a_n|^{\rho/n} < \rho\,\tau.$$

Imposons à $\varepsilon > 0$ la condition :

$$(1+\varepsilon)(\rho\ \tau)^{1/\rho} < a \qquad \text{et posons} \qquad \omega = \frac{\mathrm{A}}{a}(\rho\,\tau)^{1/\rho} < 1.$$

Il existe un entier $n_1(\varepsilon)$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1(\varepsilon)$ et tout $p \geqslant 0$, on ait :

$$|a_{n+p}| \leqslant \frac{\left(\dfrac{a\omega}{\mathrm{A}}\right)^{n+p}}{[(n+p)\,!]^{1/\rho}}$$

On obtient alors, en majorant le second membre de (3 — 2 — 1) l'inégalité :

$$|\mathrm{R}_n(z)| \leqslant \omega^n \,\phi\left(\frac{a\mathrm{R}}{\mathrm{A}}\right)\sum_{p=0}^{\infty} \omega^p\,[(n+p+1)\dots(n+p+n_0(\varepsilon))]^{1/\rho} \qquad (\text{où } n \geqslant n_1(\varepsilon))$$

dont le second membre tend vers zéro quand $n \to +\infty$. $\mathrm{R}_n(z)$ tend donc uniformément vers zéro sur toute partie bornée du plan complexe et l'on a :

(3 — 2 — 4) *Soit une suite quelconque $(z_n)$ telle que*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ |z_n|\, n^{-1/\rho} \leqslant 1;$$

*la suite des polynômes $\Pi_n$ associés à $(z_n)$ est une base de* $\mathrm{E}(\rho;\ a^\rho \rho^{-1})$.

On sait que $a > 0{,}536$; nous verrons au paragraphe suivant que dans l'énoncé précédent, on ne peut remplacer $a$ par un nombre $\geqslant 0{,}5617$.

(3 — 2 — 5) *Supposons plus généralement que*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ |z_n|\, n^{-1/\rho} \leqslant \lambda$$

*la suite des polynômes $\Pi_n$ associés à $(z_n)$ est alors une base de* $\mathrm{E}\left(\rho;\ \left(\dfrac{a}{\lambda}\right)^\rho \rho^{-1}\right)$

Il suffit pour le voir d'appliquer le théorème (3—2—4) à la suite $\left(\dfrac{z_n}{\lambda}\right)$ et à la fonction $g(z) = f(\lambda z)$, $f$ étant un élément quelconque de $\mathrm{E}\left(\rho;\left(\dfrac{a}{\lambda}\right)^\rho \rho^{-1}\right)$.

*REMARQUE :*

Dans ce paragraphe II, nous nous sommes contentés d'étudier les suites $(\Pi_n)$ associées à des suites $(z_n)$ telles que

$$|z_n| \leqslant h(n), \qquad \text{avec} \qquad h(n) = \mathrm{A}\, n^\alpha\, (\alpha \geqslant 0).$$

On pourrait par la même méthode étudier le cas où $h(n) = \mathrm{A}\ (\log n)^\alpha$; on verrait que les suites $(\Pi_n)$ correspondantes forment des bases d'un espace comprenant toutes les fonctions entières d'ordre fini et certaines fonctions entières d'ordre infini. De même, l'étude du cas où

$$h(n) = \mathrm{A}\, e^{n^\alpha}$$

montrerait que les suites $(\Pi_n)$ correspondantes constituent des bases d'un certain espace de fonctions entières d'ordre zéro.

*CONSÉQUENCES DES THÉORÈMES* (3 — 2 — 4) *ET* (3 — 2 — 5) *:*

(3 – 2 – 6) *Dans* $E(\rho;\ a^\rho \rho^{-1})$, *les conditions*:

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ |z_n|\ n^{-1/\rho} \leqslant 1 \qquad et \qquad f_{(n)}(z_n) = 0$$

*pour tout* $n \geqslant 0$, *entraînent* $f(z) \equiv 0$.

(3 — 2 — 7) *Si* $f \in E(\rho, \tau)$ *on sait que chaque* $f_{(n)}(z)$ *sauf au plus une, possède au moins un zéro* $z_n$. *Si* $f$ *n'est pas un polynôme, on a :*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ |z_n|\ n^{-1/\rho} > \frac{a}{(\rho\tau)^{1/\rho}}$$

III. — *LA CONSTANTE* $T(\rho)$.

1° *Définition :*

(3 — 3 — 1) *On appellera* $T(\rho)$ *la borne supérieure des nombres* $\tau$ *tels que les conditions :*

$f \in E(\rho,\ \tau)$ *et* $f_{(n)}(z_n) = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *avec* $|z_n| \leqslant n^{1/\rho}$, *entraînent* $f(z) \equiv 0$.
Il est clair, d'après (3 — 2 — 4) que :

$$T(\rho) \geqslant \frac{a^\rho}{\rho} > \frac{1}{\rho}(0{,}536)^\rho.$$

D'autre part on montrera au paragraphe suivant que $T(\rho)$ *est fini*, et plus précisément que

$$T(\rho) < \frac{1}{\rho}(0{,}5617)^\rho.$$

Nous donnerons d'abord quelques propriétés qu'il est aisé de vérifier :

(3 — 3 — 2) *La borne supérieure des nombres* $\tau$ *tels que les conditions :* $f \in E(\rho,\ \tau)$, $f_{(n)}(z_n) = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *avec* $|z_n| \leqslant A\, n^{1/\rho}$, *entraînent* $f(z) \equiv 0$, *est égale à*:

$$\frac{T(\rho)}{A^\rho}.$$

(3 — 3 — 3) $T(\rho)$ *est aussi la borne supérieure des nombres* $\tau$ *tels que les conditions :*

$f \in \mathrm{E}(\rho, \tau)$, $f_{(n)}(z_n) = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *et* $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} |z_n|\ n^{-1/\rho} \leqslant 1$, *entraînent* $f(z) \equiv 0$.

A chaque suite $\sigma = (z_n)$ telle que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ |z_n|\ n^{-1/\rho} \leqslant 1,$$

on peut *faire correspondre une constante* $\mathrm{T}_\sigma(\rho)$, *borne supérieure des nombres* $\tau$ *tels que les conditions*

$f \in \mathrm{E}(\rho, \tau)$ *et* $f_{(n)}(z_n) = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *entraînent* $f(z) \equiv 0$.

On a évidemment $\mathrm{T}_\sigma(\rho) \geqslant \mathrm{T}(\rho)$; notons aussi que $\mathrm{T}_\sigma(\rho)$ peut être infini comme le montre le cas des suites $(z_n)$ bornées. Si l'on désigne par S l'ensemble des suites $\sigma$ telles que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ |z_n|\ n^{-1/\rho} \leqslant 1,$$

on a :

$$\mathrm{T}(\rho) = \inf_{\sigma\in \mathrm{S}} \mathrm{T}_\sigma(\rho)$$

2° *Recherche d'un majorant de* $\mathrm{T}(\rho)$.

Si l'on trouve une $f \in \mathrm{E}(\rho, \tau)$ non identiquement nulle, et dont chaque $f_{(n)}(z)$ possède au moins un zéro $z_n$ tel que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ |z_n|\ n^{-1/\rho} \leqslant 1,$$

le nombre $\tau$ est un majorant de $\mathrm{T}(\rho)$. Nous allons construire de telles fonctions à partir des fonctions $f_\phi$ étudiées au chapitre précédent. Pour cela, nous adopterons une méthode utilisée par M. Combes ( [8] p. 145-146) pour rechercher des majorants des constantes de Whittaker et de Gontcharoff.

(3 — 3 — 4) *LEMME : Soit une suite quelconque* $(f_n)$ *de fonctions holomorphes dans un domaine* D, *et formant dans ce domaine une famille normale dont aucune fonction limite n'est identiquement nulle. Soit* $(g_n)$ *une deuxième suite de fonctions holomorphes dans* D; *supposons que*

$$f_n(z) - g_n(z) \to 0,$$

*uniformément sur tout compact inclus dans* D. *Soient :* K *un compact quelconque inclus dans* D, K' *un compact quelconque inclus dans* D *et contenant* K *dans son intérieur,* K'' *un compact quelconque contenu dans l'intérieur de* K. *Alors :*

a) *Si, à partir d'un certain rang, chaque* $f_n(z)$ *s'annule dans* K, *il en est de même des* $g_n(z)$ *dans* K'.

b) *Si, à partir d'un certain rang, aucune* $f_n(z)$ *ne s'annule dans* K, *il en est de même des* $g_n(z)$ *dans* K''.

c) *Si* A *désigne l'ensemble des points* $\alpha$ *de* D *tels qu'une infinité de* $f_n(z)$ *s'annulent dans tout voisinage de* $\alpha$, *et* B *l'ensemble des points* $\beta$ *de* D *tels qu'une infinité de* $g_n(z)$ *s'annulent dans tout voisinage de* $\beta$, *on a :* A = B.

Les propriétés a) et b) ont été énoncées par M. Combes ( [8] p. 145-146) dans un cas particulier; la propriété c) est implicitement contenue dans la même Note.

Remarquons que d'après nos hypothèses, les $g_n$ forment dans D une famille normale dont aucune fonction limite n'est identiquement nulle; les suites $(f_n)$ et $(g_n)$ satisfont donc aux mêmes hypothèses.

*a*) Supposons qu'il existe une partie infinie $I \subset N$ telle que, pour tout $n \in I$, $g_n(z)$ ne s'annule pas dans K'. On peut extraire de I une partie infinie J telle que $(g_n)_{n \in J}$ soit uniformément convergente sur K'; alors la suite $(f_n)_{n \in J}$ converge, uniformément sur K', vers une fonction F non identiquement nulle. Comme chaque $f_n(z)$ s'annule en au moins un point $z_n \in K$, F ne peut être la constante infinie; F est donc holomorphe à l'intérieur de K'. La suite $(z_n)_{n \in J}$ a au moins une valeur d'adhérence $\alpha \in K$; comme $\alpha$ appartient à l'intérieur de K', il existe un disque ouvert $\Gamma$ de centre $\alpha$, inclus dans K'. D'après un théorème classique de Hurwitz, appliqué dans $\Gamma$, on a $F(\alpha) = 0$ et une infinité de $g_n(z)$ de rang $n \in J$ s'annulent dans $\Gamma \subset K$, contrairement à l'hypothèse.

*b*) Si l'intérieur $\overset{\circ}{K}$ de K est vide, K'' est vide aussi et la proposition est évidente. Si $\overset{\circ}{K}$ n'est pas vide, supposons qu'il existe une partie infinie $I \subset N$ telle que, pour tout $n \in I$, $g_n(z)$ s'annule dans K''. Les sous-suites $(g_n)_{n \in I}$ et $(f_n)_{n \in I}$ satisfont aux mêmes hypothèses que les suites $(f_n)$ et $(g_n)$; d'après *a*) toutes les $f_n(z)$ de rang $n \in I$ s'annulent dans K à partir d'un certain rang. D'où la contradiction.

*c*) Il suffit d'établir que $A \supset B$. Soit $\beta \in B$, $\Gamma$ un disque quelconque de centre $\beta$ et de rayon $\varepsilon' < \varepsilon$. Si, à partir d'un certain rang, les $f_n(z)$ ne s'annulaient plus dans $\Gamma$, il en serait de même, d'après *b*) des $g_n(z)$ dans $\Gamma'$ et $\beta$ n'appartiendrait pas à B. Donc $\beta \in A$.

*APPLICATION :*

Posons
$$F(z) = \sum_{n=o}^{\infty} (A_n \tau^n) z^n,$$

où $A_n = e^{in(n-1)\frac{3\pi}{8}}$ et $\tau = 0{,}5617$.

Soit
$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n \tau^n}{(n\,!)^{1/\rho}} z^n;$$

G est entière, du type $\dfrac{\tau^\rho}{\rho}$ de l'ordre $\rho$.

Posons

$$f_n(z) = \frac{1}{\tau^n}\, F_{(n)}(z) \qquad \text{et} \qquad g_n(z) = \frac{1}{\tau^n}\, (n\,!)^{1/\rho}\, G_{(n)}(z\, n^{1/\rho})$$

Désignons par D le disque $|z| < \frac{1}{\tau}$. Les $f_n$ et les $g_n$ sont holomorphes dans D; les $f_n$ forment dans D une famille normale dont aucune fonction limite n'est iden tiquement nulle (car $|f_n(0)| = |A_n| = 1$); on vérifie de suite que $f_n(z) - g_n(z) \to 0$ uniformément sur tout compact inclus dans D; enfin, on sait que pour tout $n \geqslant 0$, $f_n(z)$ s'annule en un point $z_n$, tel que $|z_n| = b < 1$ (*cf.* ch II; § II. 2°) avec $b$ indépendant de $n$. D'après le lemme $(3 - 3 - 4 - a)$ toutes les $g_n(z)$, à partir d'un certain rang $n_0$, s'annulent dans le disque

$$|z| \leqslant b + \varepsilon < 1 \qquad (\text{avec } \varepsilon > 0).$$

Il en résulte que, pour tout $n \geqslant n_0$, $G_{(n)}(u)$ *s'annule en un point* $u_n = n^{1/\rho} z_n$.

Soit alors

$$\Phi(u) = u^{n_0}\;\; G_{(n_0)}(u);$$

$\Phi$ est elle aussi entière, du type $\frac{\tau^\rho}{\rho}$ de l'ordre $\rho$, et pour tout $n \geqslant 0$, $\Phi_{(n)}(u)$ s'annule en $u_n$ tel que $|u_n| \leqslant (b + \varepsilon)\, n^{1/\rho} < n^{1/\rho}$, sans que $\Phi(u)$ soit $\equiv 0$. Par suite, *on a pour* $T(\rho)$ *l'encadrement :*

$$(3 - 3 - 5) \qquad \boxed{\frac{1}{\rho}(0{,}536)^\rho < \frac{1}{\rho}\, a^\rho \leqslant T(\rho) \leqslant \frac{1}{\rho}(0{,}5617)^\rho}$$

En fait, la dernière inégalité est stricte, car on pouvait dans la démonstration précédente, remplacer 0,5617 par un nombre un peu plus petit.

*REMARQUES :*

*a*) On peut écrire $T(\rho)$ sous la forme :

$$T(\rho) = \frac{1}{\rho}[\theta(\rho)]^\rho.$$

On a : $0{,}536 < \theta(\rho) < 0{,}5617$. Il est possible que $\theta(\rho)$ soit indépendant de $\rho > 0$, et même que $\theta(\rho)$ soit égal à C.

*b*) Posons:

$$F_\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(n-1)\frac{\phi}{2}} z^n; \qquad \text{on sait que pour} \quad \phi = \frac{\pi}{2} \;\; F_\phi(z) \;\; \text{possè-}$$

de une racine de module $< 0{,}589$ (*cf.* ch. II. § II. 2°).

Si $\phi \to \frac{\pi}{2}$, $F_\phi(z) \to F_{\frac{\pi}{2}}(z)$, uniformément sur tout disque $|z| \leqslant R < 1$; par suite, pour $\phi$ assez voisin de $\frac{\pi}{2}$ $F_\phi(z)$ possède une racine $\zeta_0$ de module $< 0{,}6$.

Si on suppose de plus $\phi$ incommensurable avec $\pi$, on voit d'après $(2-2-7)$ qu'il existe une suite $(\zeta_n)_{n\in N}$ dense sur le cercle $|z| = |\zeta_0|$ et telle que $(F_\phi)_{(n)}(\zeta_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$.

Considérons alors : $\qquad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \dfrac{e^{in(n-1)\frac{\phi}{2}}}{n!}$;

G est entière, du type 1 de l'ordre 1.

Posons $g_n(z) = n!\, G_{(n)}(nz)$ et $f_n(z) = (F_\phi)_{(n)}(z)$; la différence $f_n(z) - g_n(z) \to 0$ uniformément sur tout disque $|z| \leqslant R < 1$ et le lemme $(3-3-4-c)$ montre que dans tout angle de sommet l'origine, une infinité de $G_{(n)}(z)$ s'annulent.

Cet exemple et d'autres exemples analogues (correspondant à d'autres valeurs de $\phi$) montrent que *la répartition angulaire des zéros $z_n$ des restes successifs dépend essentiellement de l'argument des coefficients $a_n$ du développement en série entière de $f(z)$.*

*c*) L'inégalité $T(\rho) \geqslant \frac{1}{\rho} a^\rho$ peut être démontrée directement par la méthode que nous avons utilisée au chapitre précédent pour établir l'inégalité $C \geqslant a > 0{,}536$.

3° *Étude des zéros des $f_{(n)}(z)$ dans des cas particuliers.*

a) *Soit* $\quad f(z) = e^z$.

Posons

$$g(z) = \frac{1}{1-z} \qquad \text{et} \qquad F_n(z) = n!\, f_{(n)}(nz).$$

On voit que $F_n(z) - g_{(n)}(z) \to 0$ uniformément sur tout disque $|z| \leqslant R < 1$, et

$$g_{(n)}(z) = \frac{1}{1-z}.$$

D'après (1 — 1 — 2) on a pour $n \geqslant 1$:

$$F_n(z) = n \int_0^1 (1-t)^{n-1} \; e^{ntz} \; dt .$$

Soit $b$ quelconque $< 1$, et $z$ tel que $R(z) \leqslant b$ (où $R(z)$ désigne la partie réelle de $z$). On a :

$$|F_n(z)| \leqslant n \int_0^1 (1-t)^{n-1} \; e^{ntb} \; dt = 1 + nb \int_0^1 (1-t)^n \; e^{ntb} \, dt$$

$$\leqslant 1 + nb \int_0^1 e^{nt(b-1)} \, dt \leqslant \frac{1}{1-b}$$

On voit alors, en s'appuyant sur un théorème bien connu de Vitali-Stieltjes, que

$$F_n(z) \to \frac{1}{1-z},$$

uniformément sur tout compact inclus dans le demi-plan $R(z) < 1$.

Il en résulte :

(3 — 3 — 6) *Soit* K *un compact quelconque inclus dans le demi-plan* $R(z) < 1$; *à partir d'un certain rang* $f_{(n)}(z)$ *ne s'annule plus dans* $n$K.

*REMARQUE :*

Pólya a démontré ( [18] vol. 2, p. 70) la propriété suivante, qui est plus précise : *pour* $f(z) = e^z$ *aucune* $f_{(n)}(z)$ *ne s'annule dans le demi-plan* $R(z) \leqslant n - 1$.

b) *Soit* $f(z) = \cos z - \sin z$. Posons

$$g(z) = \frac{1-z}{1+z^2} \qquad \text{et} \qquad F_n(z) = n! f_{(n)}(nz).$$

On vérifie aisément que $F_n(z) - g_{(n)}(z) \to 0$ uniformément sur tout disque $|z| \leqslant R < 1$. On a cette fois, pour tout $n \geqslant 1$ :

$$F_n(z) = n\sqrt{2} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \; \sin\left[ntz + \frac{3\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right] dt.$$

Soit $b$ quelconque tel que $0 < b < 1$ et supposons que $|J(z)| \leqslant b$ ($J(z)$ désignant la partie imaginaire de $z$). On a alors :

$$|F_n(z)| \leqslant n \sqrt{2} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \; e^{ntb} \, dt \leqslant \frac{\sqrt{2}}{1-b}.$$

Par suite $F_n(z) - g_{(n)}(z)$ tend aussi uniformément vers zéro sur tout compact inclus dans la bande de plan $|J(z)| < 1$. Comme $g_{(2n+1)}(-1) = g_{(2n)}(1) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$, le lemme (3 — 3 — 4 — $a$) montre qu'étant donné un voisinage V quelconque de 1, tous les $F_{2n}(z)$ s'annulent dans V à partir d'un certain rang; il en est de même des $F_{2n+1}(z)$ dans un voisinage donné quelconque V′ de — 1. Il en résulte que :

(3 – 3 – 7) *A partir d'un certain rang, chaque $f_{(n)}(z)$ s'annule en un point $z_n$ tel que $z_n \sim (-1)^n n$.*

IV. — *CAS OU LES $|f_{(n)}(z_n)|$ SONT PETITS :*

Nous nous limiterons pour simplifier au cas des fonctions $f$ entières d'ordre 1 et de type $\tau$ fini. On sait déjà qu'il est impossible que chaque $f_{(n)}(z)$ s'annule pour $|z| \leqslant n$ si $\tau < 0{,}536$ (*cf.* (3 – 2 – 6)). Plus généralement, nous allons montrer que si $(z_n)$ est une suite quelconque telle que $|z_n| \leqslant n$, les nombres $|f_{(n)}(z_n)|$ne peuvent pas être trop petits. Nous établirons un théorème analogue concernant les dérivées successives des fonctions entières d'ordre 1 et de type fini.

1° Soit $f$ une fonction entière quelconque du type $\tau < 0{,}536$ de l'ordre 1, et soit une suite quelconque $(z_n)$ telle que $|z_n| \leqslant n$ pour tout $n \geqslant 0$. On a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} z^n ,$$

où

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \ |\alpha_n|^{1/n} = \tau.$$

*a*) Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit; on a, à partir d'un certain rang N ($\varepsilon$) :

$$|\alpha_n| \leqslant (\tau + \varepsilon)^n.$$

On en déduit l'inégalité :

$$n!\,|f_{(n)}(z_n)| \leqslant (\tau + \varepsilon)^n \left[1 - (\tau + \varepsilon)\right]^{-1} .$$

*Il en résulte que :*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \ |n!f_{(n)}(z_n)|^{1/n} = L \leqslant \tau .$$

Cette inégalité est évidemment valable si l'on suppose seulement que $\tau < 1$.

b) *Supposons que* $L < \lambda < \tau$ ; il existe alors une constante A ($\lambda$) telle que

$$n!\,|f_{(n)}(z_n)| \leqslant A(\lambda)\ \lambda^n,$$

pour tout $n \geqslant 0$. Comme $\tau < 0{,}536$ on sait (*cf.* (3 — 2 — 4) ) que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{(n)}(z_n)\ \Pi_n(z).$$

Posons $\qquad |z| = R \quad$ quelconque $\quad > \dfrac{1}{a}$.

On a d'après (1 — 3 — 8) :

$$|\Pi_n(z)| < n!\, a^{-n}\, e^{Ra}.$$

Posons $p = [R\, a]$ et séparons en deux groupes les termes de la série précédente :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{p-1} f_{(n)}(z_n)\ \Pi_n(z) + \sum_{n=p}^{\infty} f_{(n)}(z_n)\, \Pi_n(z) = S_1 + S_2.$$

On a d'abord:

$$|S_2| \leqslant e^{Ra}\, A\,(\lambda) \sum_{n=p}^{\infty} (\lambda a^{-1})^n = e^{Ra}\ \frac{A(\lambda)}{1-\lambda a^{-1}}\ (\lambda a^{-1})^p \leqslant \frac{A(\lambda)}{(1-\lambda a^{-1})\lambda a^{-1}}\ e^{aR[1+\log \lambda a^{-1}]}$$

Comme $1 + \log \lambda a^{-1} < \lambda a^{-1}$, on obtient:

$$|S_2| \leqslant \frac{A(\lambda)}{(1-\lambda a^{-1})\ \lambda a^{-1}}\ e^{\lambda R}$$

*Majoration de* $|S_1|$ : ici $n \leqslant a R - 1$; d'où $|z_n| \leqslant n \leqslant a R - 1$ que nous poserons égal à $r$. On a $|z| = R = a^{-1} r + a^{-1} > a^{-1} r$; d'où en vertu de (1 — 3 — 7) l'inégalité:

$$|\Pi_n(z)| \leqslant R^{n+1} \left(R - \frac{r}{a}\right)^{-1}.$$

Il en résulte que :

$$|S_1| \leqslant R \left(R - \frac{r}{a}\right)^{-1} A(\lambda)\, e^{\lambda R}$$

et on a finalement :

$$|f(z)| \leqslant \left[\frac{A(\lambda)}{(1-\lambda a^{-1})\lambda a^{-1}} + \frac{R\ A(\lambda)}{R - a^{-1} r}\right] e^{\lambda R}, \qquad \text{pour} \qquad |z| = R > a^{-1};$$

*$f$ serait donc de type exponentiel* $\leqslant \lambda < \tau$, contrairement à l'hypothèse. D'où *le théorème :*

(3 — 4 — 1) *Si $f$ est entière, du type* $\tau < 0{,}536$ *de l'ordre* 1, *et si* $(z_n)$ *est une suite quelconque telle que* $|z_n| \leqslant n$, *on a :*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ |n!\, f_{(n)}(z_n)|^{1/n} = \tau$$

*REMARQUES :*

*a*) On ne peut avoir $|f_{(n)}(z_n)| < \dfrac{\lambda^n}{n!}$ pour tout $n$ si $\lambda < \tau$. Ce résultat généralise (3 — 2 — 6) pour les fonctions d'ordre 1et de type fini.

*b*) L'exemple du § III. 2° de ce même chapitre permet de montrer que dans

(3 — 4 — 1), 0,536 *ne peut être remplacé par un nombre supérieur ou égal à* 0,5617.

c) *Si* $z_n = z$ *pour tout* $n$, *on retrouve* (1 — 1 — 5) *dans le cas* $\rho = 1$.

d) *Si l'on suppose plus particulièrement que*

$$|\alpha_n|^{1/n} \to \tau < 0{,}536$$

*on peut établir plus simplement l'égalité :*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \, |n!f_{(n)}(z_n)|^{1/n} = \tau$$

Posons $b_n = n!f_{(n)}(z_n)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \, |b_n|^{1/n} < \lambda < \tau.$$

Soit $\rho$ donné tel que

$$\frac{\lambda}{\tau} < \rho < 1;$$

on a, à partir d'un certain rang :

$$|b_n| < |\alpha_n| \rho^n.$$

Soit $\mu$ quelconque $> \tau$ ; on a :

$$|\alpha_n| \mu^{-n} \to 0 \qquad \text{si} \qquad n \to +\infty.$$

Donc il existe une sous-suite infinie $(n_k)$ telle que, pour tout $n \geqslant n_k$, on ait :

$$|\alpha_n| \leqslant |\alpha_{n_k}| \; \mu^{n-n_k}$$

Or, pour tout $n$, on a l'égalité :

$$\alpha_n = \left( b_n - \frac{z_n}{n+1} \, b_{n+1} \right) - \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\alpha_{n+p}}{(n+1)\dots(n+p)} \left( z_n^{p-1} - z_{n+1}^{p-1} \right) z_n .$$

D'où, pour $n = n_k$ l'inégalité :

$$|\alpha_n| \leqslant |\alpha_n| \left[ \rho^n + \rho^{n+1} + \sup_{\alpha\in[0,2\pi]} \sum_{p=2}^{\infty} 2\mu^p \, |\sin(p-1)\alpha| \right]$$

Or, on sait, d'après (1 — 3 — 2) que le troisième terme placé entre crochets est strictement inférieur à 1 si $\mu$ a été choisi assez voisin de 0,536. On aboutit donc, pour $n_k$ assez grand, à une contradiction. Il en résulte que

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} \, |b_n|^{1/n} \geqslant \tau.$$

Quant à l'inégalité :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \, |b_n|^{1/n} \leqslant \tau.$$

elle s'établit comme au § IV. 1° *a)* de ce même chapitre.

2° *Cas des dérivées successives.*

On sait (*cf.* Mme SS. Macintyre [16] p. 241-251) que si $f$ est une fonction entière du type $\tau < 0{,}7259 = b$ de l'ordre 1, il est impossible que

$$f^{(n)}(z_n) = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad n \geqslant 0, \qquad \text{avec} \qquad |z_n| \leqslant 1.$$

Nous allons voir que, plus généralement, les nombres $|f^{(n)}(z_n)|$ ne peuvent pas être trop petits.

Soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} z^n;$$

on suppose que $f$ est du type $\tau < b$ de l'ordre 1. Soit $(z_n)$ une suite quelconque telle que $|z_n| \leqslant 1$. On a :

$$f^{(n)}(z_n) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha_{n+p}}{p!} z_n^p$$

*a*) Soit $\varepsilon > 0$, quelconque; il existe un entier $n_0(\varepsilon)$ tel que, pour tout $n > n_0(\varepsilon)$ on ait : $|\alpha_n| < (\tau + \varepsilon)^n$. On en déduit, pour $n > n_0(\varepsilon)$, l'inégalité :

$$|f^{(n)}(z_n)| < (\tau + \varepsilon)^n e^{\tau+\varepsilon}, \qquad \text{d'où} \qquad L = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \; |f^{(n)}(z_n)|^{1/n} \leqslant \tau.$$

Cette inégalité demeure d'ailleurs valable si l'on suppose seulement $\tau$ fini.

*b*) *Supposons que* $L < \lambda < \tau$. Il existe alors une constante $A(\lambda)$ telle que

$$|f^{(n)}(z_n)| < A(\lambda)\lambda^n, \qquad \text{pour tout} \qquad n \geqslant 0.$$

Comme $\tau$ est $< b$, on sait que $f(z)$ est développable en série

$$\sum_{n:o}^{\infty} f^{(n)}(z_n) P_n(z),$$

où les $P_n(z)$ sont les polynômes de Gontcharoff :

$$\int_{z_0}^{z} dz' \int_{z_1}^{z'} dz'' \dots \int_{z_{n-1}}^{z^{(n-1)}} dz^{(n)}.$$

On va majorer $|P_n(z)|$ pour $z$ fixé, de module R.

Posons $$P_n(0) = G_n(z_0, z_1, \dots, z_{n-1});$$

On a:

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!} G_{n-k}(z_k, \dots, z_{n-1}) + \frac{z^n}{n!}$$

On sait (*cf.* [16]) que:

$$|G_n(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})| \leqslant b^{-n}$$

On en déduit l'inégalité :

$$|P_n(z)| \leqslant b^{-n} \; e^{Rb}$$

Posons $p = [b\,R]$ et écrivons comme au paragraphe précédent :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{p-1} f^{(n)}(z_n) P_n(z) + \sum_{n=p}^{\infty} f^{(n)}(z_n) P_n(z) = S_1 + S_2$$

On a, ici encore :

$$|S_2| \leqslant \frac{A(\lambda)}{(1 - \lambda b^{-1}) \;\; \lambda b^{-1}} \; e^{\lambda R}$$

Les termes de $S_1$ sont de rang $n < b\,R$. On a cette fois :

$$|P_n(z)| \leqslant b^{-n} + b^{-n+1} \frac{R}{1} + \ldots + b^{-1} \frac{R^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{R^n}{n!} \leqslant (n+1) \frac{R^n}{n!}$$

Il en résulte que :

$$|S_1| \leqslant A(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) \frac{(\lambda R)^n}{n!} = (1 + \lambda R) A(\lambda) e^{\lambda R},$$

d'où finalement, l'inégalité :

$$|f(z)| \leqslant A(\lambda) \left[ 1 + \lambda R + \frac{1}{(1 - \lambda b^{-1}) \lambda b^{-1}} \right] e^{\lambda R}$$

qui montre que, si l'hypothèse $L < \tau$ était vérifiée, $f$ serait de type exponentiel $\leqslant \lambda < \tau$. On a donc le théorème :

(4 — 5 — 1) *Si $f$ est une fonction entière, du type $\tau < 0{,}7259$ de l'ordre* 1, *et si $|z_n| \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$, on a :*

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \; |f^{(n)}(z_n)|^{1/n} = \tau.$$

*REMARQUES :*

*a*) Mme SS. Macintyre ([15] p. 305-311) a donné un exemple de fonction entière du type $\tau < 0{,}7378$ de l'ordre 1, dont toutes les dérivées s'annulent dans le disque $|z| \leqslant 1$. *On ne peut donc pas remplacer dans l'énoncé précédent* 0,7259 *par un nombre supérieur à* 0,7378.

*b*) M. Combes a établi le même théorème (4 — 5 — 1) par une méthode différente, basée sur la théorie des systèmes infinis d'équations linéaires (*cf.* [9]). R. P. Boas (*cf.* [1] p. 485) avait établi l'inégalité :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(z_n)|^2}{r^{2n}} \geqslant 2 e^r - e^{2r}, \qquad \text{pour tout} \qquad r < \tau < \log 2.$$

Or, il est clair, d'après (4 — 5 — 1) que la série précédente est *divergente pour tout* $r < \tau$.

Enfin, dans sa thèse, Gontcharoff avait déjà obtenu des relations (moins précises que (4 — 5 — 1) ) entre les valeurs $f^{(n)}(z_n)$ et la croissance de $f$. (*cf.* [12] p. 64-67).

## CHAPITRE IV

## *THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE. NOUVELLES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS $f_{(n)}$.*

### I. — *DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE FONCTIONS HOLOMORPHES.*

1° *Convergence de suites de fonctions holomorphes.*

(4 — 1 — 1) *DÉFINITION : Soit $(\mathscr{L}_k)_{k\in\mathrm{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}$ (muni de la topologie de la convergence uniforme). Soit $(z_k)_{k\in\mathrm{N}}$ une suite de points du disque-unité $\Omega$. On dira que cette dernière suite possède la propriété* (U) *si pour toute $f \in \mathscr{F}$, les égalités $\mathscr{L}_k(f)(z_k) = 0$ pour tout $k \geqslant 0$ entraînent* $f(z) \equiv 0$. Avec ces hypothèses, on a le théorème suivant, qui généralise le théorème de Vitali-Stieltjes (*cf.* [13] p. 58-59).

(4 — 1 — 2) *Soit $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite quelconque de fonctions holomophes et bornées dans leur ensemble dans $\Omega$* (1)*. Soit une suite quelconque $(z_k)_{k\in\mathrm{N}}$ de points de $\Omega$ possédant la propriété* (U)*. Si pour tout $k \geqslant 0$, $\mathscr{L}_k(f_n)$ converge au point $z_k$ quand $n \to +\infty$ la suite $(f_n)$ converge uniformément sur tout disque $|z| \leqslant r < 1$.*

En effet, soit $\alpha \in \Omega$. Nous allons démontrer que $f_n(\alpha)$ converge. La suite $f_n(\alpha)$ étant bornée, ses valeurs d'adhérence sont finies; soient $a$ et $b$ deux quelconques d'entre elles. Il suffit d'établir que $a = b$. Il existe une partie infinie $\mathrm{I} \subset \mathrm{N}$, telle que

$$(f_n)_{n\in\mathrm{I}}(\alpha) \to a;$$

de même, il existe une partie infinie $\mathrm{J} \subset \mathrm{N}$ telle que

$$(f_n)_{n\in J}(\alpha) \to b.$$

La famille $(f_n)$ étant normale dans $\Omega$, on peut trouver $\mathrm{I}' \subset \mathrm{I}$ et $\mathrm{J}' \subset \mathrm{J}$ (avec $\mathrm{I}'$ et $\mathrm{J}'$ infinies) telles que $(f_n)_{n\in\mathrm{I}'}$ converge vers $g \in \mathscr{F}$ et $(f_n)_{n\in\mathrm{J}'}$ converge vers $h \in \mathscr{F}$. Or, pour tout $k \geqslant 0$, on a :

$$\mathscr{L}_k(f_n)(z_k) \to \mathscr{L}_k(g)(z_k) \quad \text{si} \quad n \to +\infty, \quad \text{avec} \quad n\in\mathrm{I}'$$

de même :

$$\mathscr{L}_k(f_n)(z_k) \to \mathscr{L}_k(h)(z_k) \quad \text{si} \quad n \to +\infty, \quad \text{avec} \quad n\in\mathrm{J}'$$

Comme $\mathscr{L}_k(f_n)(z_k)$ converge si $n \to +\infty$, on a:

$$\mathscr{L}_k(g)(z_k) = \mathscr{L}_k(h)(z_k) \quad \text{pour tout} \quad k \geqslant 0.$$

---

(1) On entend par là que pour tout $\mathrm{R} < 1$, il existe une constante $\mathrm{M}(\mathrm{R})$ telle que $|f_n(z)| \leqslant \mathrm{M}(\mathrm{R})$ quel que soit $n \geqslant 0$ et $z$ dans $\overline{\Omega}(\mathrm{R})$.

Donc $g = h$, et par suite : $a = g(\alpha) = h(\alpha) = b$. La suite $(f_n)$ converge donc en tout point de $\Omega$; d'après le théorème de Vitali, elle converge uniformément sur tout disque $|z| \leqslant r < 1$.

*REMARQUE :*

*Si la suite* $(z_k)$ *ne possède pas la propriété* (U), il existe $g \in \mathscr{F}$ et non identiquement nulle, telle que

$$\mathscr{L}_k(g)(z_k) = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad k \geqslant 0.$$

Considérons par exemple la suite $f_n(z) = g(z) \sin n; \mathscr{L}_k(f_n)(z_k) = 0$, donc converge si $n \to +\infty$. Cependant, $f_n(z)$ diverge en tout point $z$ de $\Omega$ en lequel $g(z)$ est $\neq 0$.

*Le théorème* (4 — 1 — 2) *n'est donc plus valable.*

*CAS PARTICULIERS :*

*a*) Prenons pour $\mathscr{L}_k$ l'application : $g \to g^{(k)}$ (dérivée d'ordre $k$). on déduit de (4 — 1 — 2) et de (2 — 3 — 1) la propriété :

*Soit une suite* $(f_n)$ *de fonctions holomorphes et bornées dans leur ensemble dans* $\Omega$. *Si chaque* $(f_n)^{(k)}$ *converge en* $z_k$ *tel que*

$$\overline{\lim_{k \to +\infty}}\; k\,|z_k| < 0{,}718,$$

*la suite* $(f_n)$ *converge uniformément sur tout disque* $|z| \leqslant R < 1$.

*b*) Prenons enfin pour $\mathscr{L}_k$ l'application : $g \to g_{(k)}$. On déduit de (4 — 1 — 2) et de (2 — 1 — 5) le théorème suivant :

(4 — 1 — 3) *Soit une suite* $(f_n)$ *de fonctions holomorphes dans* $\Omega$ *et bornées dans leur ensemble dans* $\Omega$. *Si chaque* $(f_n)_{(k)}(z_k)$ *converge si* $n \to +\infty$, *avec* $|z_k| \leqslant 0{,}536$, *la suite* $(f_n)$ *converge uniformément sur tout disque* $|z| \leqslant R < 1$.

*Conséquence :* Soit une suite $(z_n)$ de points de $\Omega$ possédant la propriété (U) et $(\Pi_n)$ la suite de polynômes qui lui est associée (*cf.* (1 — 2 — 1)). Pour établir que

la série
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Pi_n(z)$$

converge uniformément sur tout disque $|z| \leqslant R < 1$, il suffit de montrer que ses sommes partielles $S_n(z)$ sont bornées dans leur ensemble dans $\Omega$.

2° *Développements en série* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n [1 + h_n(z)]$

R. P. Boas a déduit d'un théorème de Paley et Wiener sur les bases d'espaces de Hilbert le théorème suivant (*cf.* [1] p. 472-474).

*Soit* $(g_n)_{n \in \mathrm{N}}$ *une suite quelconque de fonctions telles que*

$$g_n(z) = z^n\,[1 + h_n(z)] \qquad \text{avec} \qquad h_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(n)} z^k.$$

*Supposons que pour tout $n \geqslant 0$ et tout $k \geqslant 1$ on ait*

$$|\alpha_k^{(n)}| \leqslant A_k \qquad \textit{et posons} \qquad h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k.$$

*Si $s > 0$ est tel que $h(s) < 1$, toute fonction $f$ holomorphe pour $|z| < s$, continue pour $|z| \leqslant s$ est développable d'une seule façon en série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(z)$$

*uniformément convergente sur tout disque $|z| \leqslant s' < s$.*

On va établir par une méthode directe le théorème suivant, un peu plus général :

(4 — 1 — 4) *Soit une suite quelconque* $g_n(z) = z^n[1 + h_n(z)]$, *avec*

$$h_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(n)} z^k.$$

*Soit $s > 0$ tel que:*

$$H_n(s) = |\alpha_1^{(n)}|s + |\alpha_2^{(n)}|s^2 + \dots + |\alpha_k^{(n)}|s^k + \dots \leqslant 1 \qquad \textit{pour tout} \qquad n \geqslant 0.$$

*Alors:*

*a)* $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *est une base de* $\mathcal{F}(s)$

*b) les coordonnées* $(c_n)$ *de* $f \in \mathcal{F}(s)$ *vérifient l'inégalité :*

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} |c_n|^{1/n} \leqslant \frac{1}{s}$$

On peut toujours supposer, quitte à faire le changement de variable $z = s\,u$, que $s = 1$. Il est clair que pour tout $n \geqslant 0$, $g_n \in \mathcal{F}$. Soit $f$ un élément quelconque de $\mathcal{F}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ son développement en série de Taylor. *Supposons* qu'il existe une suite $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g_k(z),$$

la série étant uniformément convergente sur tout disque $|z| \leqslant r < 1$. D'après (1 — 1 — 8) on a alors, pour tout $n \geqslant 0$ :

$$f_{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (g_k)_{(n)}(0) = b_n,$$

ce qui s'écrit, en posant

$$\alpha_0^{(n)} = 1 \qquad \text{pour tout} \qquad n \geqslant 0:$$

$$(4-1-5) \qquad \sum_{k=0}^{n} c_{n-k}\ \alpha_k^{(n-k)} = b_n \qquad\qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

Il en résulte qu'il existe au plus une suite $(c_n)$ répondant à la question. La relation précédente définit, à partir des $b_n$ et des $\alpha_k^{(n)}$ une suite $(c_n)$. *Nous allons établir l'inégalité :*

$$(4-1-6) \qquad |c_n| \leqslant |b_0| + |b_1| + \ldots + |b_n|, \qquad \textit{valable pour tout } n \geqslant 0$$

D'après (4 — 1 — 5) on a :

$$c_n = \begin{vmatrix} b_n & \alpha_1^{(n-1)} \ldots\ldots & \alpha_k^{(n-k)} \ldots\ldots & \alpha_n^{(0)} \\ b_{n-1} & 1 \quad \ldots\ldots & \alpha_{k-1}^{(n-k)} \ldots\ldots & \alpha_{n-1}^{(0)} \\ b_{n-2} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-k+1} & 0 \quad \ldots\ldots & \alpha_1^{(n-k)} \ldots\ldots & \cdot \\ b_{n-k} & 0 \quad \ldots\ldots & 1 \quad \ldots\ldots & \alpha_{n-k}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & 0 \quad \ldots\ldots & \cdot \quad \ldots & 1 \ \alpha_1^{(0)} \\ b_0 & 0 \quad \ldots\ldots & 0 \quad \ldots & 0 \ 1 \end{vmatrix} = b_0 M_0 + b_1 M_1 + \ldots + b_n M_n.$$

Il suffit d'établir que $|M_p| \leqslant 1$ ($p = 0, 1, \ldots, n$), Raisonnons par récurrence. L'inégalité est vérifiée pour $p = n$, car $M_n = 1$. Supposons-la établie pour $p > n - k$. Remplaçons dans le déterminant précédent la première colonne par la $(k+1)^{eme}$ et soit $c'_n$ le nouveau déterminant.
On a :

$$c'_n = 0 = M_{n-k} + \alpha_1^{(n-k)} M_{n-k+1} + \ldots + \alpha_{k-1}^{(n-k)} M_{n-1} + \alpha_k^{(n-k)} M_n.$$

d'où :

$$|M_{n-k}| \leqslant |\alpha_1^{(n-k)}| + \ldots + |\alpha_{k-1}^{(n-k)}| + |\alpha_k^{(n-k)}| \leqslant 1.$$

*Ce qu'il fallait démontrer.* Soit alors un nombre quelconque $R < 1$; imposons à $\varepsilon > 0$ la condition $(1 + \varepsilon) R < 1$. On sait que :

$$|b_n| \leqslant A(1+\varepsilon)^n \qquad \text{pour tout} \qquad n \geqslant 0,$$

avec A indépendant de $n$.

On a alors, d'après (4 — 1 — 6) :

$$|c_n| \leqslant B(1+\varepsilon)^n \qquad (\text{avec B indépendant de } n)$$

On en déduit l'inégalité :

$$|c_n g_n(z)| \leqslant B(1+\varepsilon)^n R^n[1+H_n(1)] \leqslant 2B[(1+\varepsilon)R]^n,$$

valable pour $|z| \leqslant R$, et pour tout $n \geqslant 0$. Il en résulte que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(z)$ converge, uniformément sur tout disque $|z| \leqslant r < 1$, vers une fonction $F(z)$ holomorphe dans $\Omega$. Mais d'après (4 — 1 — 5), on a :

$$F_{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} c_{n-k}\, \alpha_k^{(n-k)} = b_n = f_{(n)}\ (0),$$

ce qui entraîne $F = f$. Donc la suite $(g_n)_{n \in N}$ est bien une base de $\mathscr{F}$. Enfin, on déduit de i'inégalité $|c_n| \leqslant B(1+\varepsilon)^n$, que $\overline{\lim}_{n \to +\infty} |c_n|^{1/n} \leqslant 1$.

Le théorème (4 — 1 — 4) est donc complètement démontré.

*REMARQUES :*

*a*) Si l'on suppose plus particulièrement que $|\alpha_k^{(n)}| \leqslant A_k$ pour tout $n \geqslant 0$ et tout $k \geqslant 1$, et que :

$$h(s) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k s^k \leqslant 1,$$

on retrouve le théorème de Boas. Dans l'article déjà cité ( [1] p. 477), Boas a énoncé un théorème analogue à (4 — 1 — 4 — *a*) avec l'hypothèse

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}}\ H_n(s) < 1,$$

mais la démonstration qu'il suggère semble devoir être précisée. Elle suppose en effet que l'inégalité $H_n(s) < 1$ pour tout $n \geqslant 0$ entraîne

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sup_{n \geqslant 0} |\alpha_k^{(n)}|)\, s^k < 1,$$

ce qui n'est pas toujours exact.

*b*) On aurait pu également établir (4 — 1 — 4) en considérant la série double

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_n\ \alpha_k^{(n)}\ z^{n+k}$$

qui, d'après l'inégalité

$$|c_n| \leqslant B\ (1+\varepsilon)^n,$$

est absolument convergente dans $\Omega$. En sommant cette série double suivant les diagonales ascendantes $(n + k = 0, 1, 2, ...)$ on trouve $f(z)$; en sommant par colonnes, on obtient $\sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(z)$. D'où (4 —1 — 4).

*c*) Si $s$ est $\neq 1$ l'inégalité (4 — 1 — 6) devient :

$$|c_n| \leqslant \frac{|b_0|}{s^n} + \frac{|b_1|}{s^{n-1}} + \dots + \frac{|b_{n-1}|}{s} + |b_n|$$

*Si l'on suppose que* $|\alpha_k^{(n)}| \leqslant A_k$ *pour tout* $n \geqslant 0$ *et tout* $k \geqslant 1$, *que*

$$h(s) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k s^k \leqslant 1, \qquad \text{que} \qquad \overline{\lim_{k\to+\infty}} (A_k)^{1/k} < \frac{1}{s}$$

*et que la série entière* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *a pour rayon de convergence* $s$, *on a :*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |c_n|^{1/n} = \frac{1}{s}$$

En effet, posons

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |c_n|^{1/n} = \mathrm{L}.$$

On sait déjà, d'après (4—1—4) que $\mathrm{L} \leqslant \frac{1}{s}$. Si L était $< \frac{1}{s}$, on pourrait trouver

$$\lambda < \frac{1}{s} \quad \text{et tel que} \quad |c_n| < B\lambda^n \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0,$$

avec

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} (A_k)^{1/k} < \lambda.$$

D'après (4 — 1 — 5) on aurait : $|b_n| \leqslant B'\lambda^n$, où $B'$ est indépendant de $n$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ aurait donc un rayon de convergence $> s$.

3° *Généralisations du théorème* (4 — 1 — 4).

Pour établir le théorème (4 — 1 — 4) nous avons fait des hypothèses sur les coefficients de tous les $g_n$. Nous allons voir qu'il suffit de les supposer vérifiées à partir d'une certaine valeur de $n$. Plus précisément, on a :

(4 — 1 — 7) *Soit* $(g_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *une suite quelconque d'éléments de* $\mathscr{F}(s)$ *tels que*

$$g_n(z) = z^n[1 + h_n(z)], \qquad \text{avec} \qquad h_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(n)} z^k.$$

*Si* $s > 0$ *est tel que, à partir d'un certain rang* $n_0$, $\mathrm{H}_n(s) \leqslant 1$, *alors la suite* $(g_n)$ *est une base de* $\mathscr{F}(s)$.

En effet, soit $f$ quelconque dans $\mathscr{F}(s)$. S'il existe une suite $(c_n)$ telle que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(z),$$

uniformément sur tout disque $|z| \leqslant r < s$, elle vérifie nécessairement la relation (4 — 1 — 5) et est par conséquent unique. On a

$$\mathrm{H}_n(s) \leqslant 1 \qquad \text{pour tout} \qquad n \geqslant n_0.$$

Posons:

$$\mathrm{F}(z) = f(z) - \sum_{n=0}^{n_0-1} c_n g_n(z),$$

où $(c_n)$ est définie par (4 — 1 — 5). Il est clair que

$$\mathrm{F}(z) = z^{n_0}\,\mathrm{G}(z),$$

avec $\mathrm{G} \in \mathscr{F}(s)$. D'après le théorème (4 — 1 — 4), la suite $(g_n^*)$ des applications :

$$z \to \frac{g_n(z)}{z^{n_0}} \qquad (n \geqslant n_0)$$

constitue une base de $\mathscr{F}(s)$.

Il existe donc une suite $(c'_n)$ $(n \geqslant n_0)$ telle que

$$\mathrm{G}(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} c'_n \frac{g_n(z)}{z^{n_0}},$$

uniformément sur tout disque $|z| \leqslant r < s$. D'où :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n_0-1} c_n g_n(z) + \sum_{n=n_0}^{\infty} c'_n g_n(z),$$

uniformément sur tout disque $|z| \leqslant r < s$. Ce qui établit (4 — 1 — 7).

*DÉFINITION : On appellera fonction majorante des fonctions*

$$h_n(v) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(n)} v^k$$

*toute fonction*

$$h(v) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_k v^k$$

*telle que, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $k \geqslant 1$, on ait $|\alpha_k^{(n)}| \leqslant A_k$. On notera cette propriété :* $h_n(v) \ll h(v)$. Donnons alors le corollaire suivant de (4 — 1— 7) :

(4 – 1 – 8) *Supposons que $h_n(v) \ll h(v)$ pour tout $n \geqslant n_0$, avec $g_n \in \mathcal{F}(s)$ pour tout $n \geqslant 0$. Si $h(s) \leqslant 1$, la suite $(g_n)_{n \in \mathrm{N}}$ est une base de $\mathcal{F}(s)$.*

On démontre sans difficultés le théorème suivant, qui permet de remplacer les hypothèses faites sur les nombres $|\alpha_k^{(n)}|$ par des hypothèses portant sur des combinaisons linéaires des $\alpha_k^{(n)}$ (*cf.* Boas [1] p. 479 pour un énoncé analogue).

(4 — 1 — 9) *Soit $\mathcal{A}$ un automorphisme continu de $\mathcal{F}$ (s) (supposé muni de la topologie de la convergence uniforme) et $(g_n)_{n \in \mathrm{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ (s). Si la suite $(\mathcal{A}(g_n))$ est une base de $\mathcal{F}$ (s), il en est de même de la suite $(g_n)$.*

Nous utiliserons plus loin le corollaire suivant de (4 — 1 — 9), dont la démonstration directe est d'ailleurs évidente :

(4 — 1 — 10) *Soit $\phi \in \mathcal{F}$ (s) et dépourvue de zéros dans le disque $|z| < s$. Si la suite $(\phi g_n)$ est une base de $\mathcal{F}$ (s), il en est de même de la suite $(g_n)$.*

4° *Développements en séries de polynômes.*

Soit $f \in \mathcal{F}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ son développement en série entière. Posons :

$$\mathrm{L}_n(f) = a_n + \alpha_1^{(n)} a_{n+1} + \dots + \alpha_k^{(n)} a_{n+k} + \dots \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

où la suite double $(\alpha_k^{(n)})$ satisfait à la condition suivante : il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\overline{\lim_{k \to +\infty}} \, |\alpha_k^{(n)}|^{1/k} < \frac{1}{1+\varepsilon},$$

quel que soit $n \geqslant 0$.

Les applications $\mathrm{L}_n$ appartiennent au dual $\mathcal{F}^*$ de $\mathcal{F}$. Remarquons que si l'on désigne par $\psi_n$ l'application : $z \to z^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_k(\psi_n) &= \alpha_{n-k}^{(k)} & &\text{si} \quad k < n \\ \mathrm{L}_k(\psi_n) &= 1 & &\text{si} \quad k = n \\ \mathrm{L}_k(\psi_n) &= 0 & &\text{si} \quad k > n \end{aligned}$$

Posons

$$g_n(v) = v^n \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(n)} v^k \right] = v^n \left[ 1 + h_n(v) \right];$$

on a: $\quad g_n \in \mathcal{F}(1+\varepsilon) \quad$ pour tout $\quad n \geqslant 0$

Soit

$$\Phi(v) = \frac{1}{v} f\left(\frac{1}{v}\right);$$

on vérifie de suite que :

$$L_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega^*(\rho)} \Phi(v) g_n(v) \, dv,$$

où $\rho$ satisfait à l'inégalité $1 < \rho < 1 + \varepsilon$.

Notons que si

$$L_n(f) = f_{(n)}(z_n) \quad (\text{avec } |z_n| \leqslant r < 1) \quad \text{on a} \quad g_n(v) = \frac{v^n}{1 - v z_n}$$

et que, si

$$L_n(f) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_n) \quad (\text{avec } |z_n| \leqslant r < 1) \quad \text{on a} \quad g_n(v) = \frac{v^n}{(1 - v z_n)^{n+1}}$$

Nous nous proposons de développer $f(z)$ en série de polynômes

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(f) c_n(z);$$

on va démontrer le théorème :

(4 — 1 — 11) *S'il existe $s > 1$ et tel que*

$$H_n(s) = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k^{(n)}| s^k \leqslant 1 \quad \textit{pour tout} \quad n \geqslant 0\,(^1),$$

*on peut trouver pour $\mathcal{F}$ une base $(c_n)_{n \in N}$ de polynômes (avec $d^0 c_n = n$) telle que tout élément $f$ de $\mathcal{F}$ ait pour coordonnées :*

$$L_0(f),\ L_1(f),\ \ldots,\ L_n(f),\ \ldots$$

Soit R quelconque $< 1$ et $z \in \overline{\Omega}(R)$; on peut toujours supposer que $1 < s < \frac{1}{R}$; l'application : $v \rightarrow \dfrac{1}{1-vz}$ appartient alors à $\mathcal{F}(s)$. Comme d'après (4 — 1 — 4), la suite $(g_n)_{n \in N}$ est une base de $\mathcal{F}(s)$, il existe une suite $c_n(z)$ telle que :

$$\frac{1}{1 - vz} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z) g_n(v),$$

(1) Ceci entraîne que l'hypothèse faite au début de ce paragraphe sur les nombres $\alpha_k^{(n)}$ est bien vérifiée.

uniformément sur tout disque $|v| \leqslant s' < s$. Par suite, les $c_n(z)$ vérifient la relation (4 — 1 — 5) où $b_n = z^n$, et $c_n$ est bien un polynôme de degré $n$.

Choisissons $s' > 1$; on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega^*(s')} \Phi(v) \ \frac{dv}{1 - vz} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega^*(s')}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(v)\, g_n(v)\, c_n(z)\right] dv =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{L}_n(f)\, c_n(z)$$

Or, d'après la remarque $c$ du § I. 2° de ce même chapitre, on a, pour $|z| \leqslant \mathrm{R}$

$$|c_n(z)| \leqslant \frac{1}{s^n} + \ldots + \frac{|z|^{n-k}}{s^k} + \ldots + |z|^n \leqslant \frac{1}{s^n}\left(\frac{1}{1 - s\mathrm{R}}\right)$$

De plus, à partir d'un certain rang, on a $|a_n| \leqslant (s')^n$, d'où l'inégalité :

$$|\mathrm{L}_n(f)| \leqslant (s')^n + |\alpha_1^{(n)}|\,(s')^{n+1} + \ldots + |\alpha_k^{(n)}|\,(s')^{n+k} + \ldots = (s')^n \ [1 + \mathrm{H}_n(s')] \leqslant 2(s')^n$$

Il en résulte que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{L}_n(f)\, c_n(z)$$

est uniformément convergente sur tout disque $|z| \leqslant \mathrm{R} < 1$. Il reste à établir l'unicité du développement en série de polynômes $c_n$. Nous allons pour cela démontrer, par récurrence sur $n$, que :

$$\mathrm{L}_k(c_n) = 0 \quad \text{si} \quad k \neq n; \qquad \mathrm{L}_k(c_n) = 1 \quad \text{si} \quad k = n\,.$$

La propriété est évidente pour $n = 0$; supposons-la établie jusqu'au rang $n — 1$.

On a, d'après (4 — 1 — 5) :

$$\mathrm{L}_k(c_n) + \alpha_1^{(n-1)}\, \mathrm{L}_k(c_{n-1}) + \ldots + \alpha_k^{(n-k)}\, \mathrm{L}_k(c_{n-k}) + \ldots + \alpha_0^{(n)}\, \mathrm{L}_k(c_0) = \mathrm{L}_k(\psi_n)$$

si $k = n$, on en déduit que $\mathrm{L}_n(c_n) = \mathrm{L}_n(\psi_n) = 1$

si $k > n$, on obtient: $\mathrm{L}_k(c_n) = \mathrm{L}_k(\psi_n) = 0$

si $k < n$, on a $\mathrm{L}_k(c_n) + \alpha_{n-k}^{(k)} = \mathrm{L}_k(\psi_n) = \alpha_{n-k}^{(k)}$,

d'où $\mathrm{L}_k(c_n) = 0$ pour tout $k \neq n$.

Supposons maintenant qu'il existe une suite $(\lambda_n)$ telle que :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n(z),$$

uniformément sur tout disque $|z| \leqslant R < 1$. On en déduit que

$$L_k(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n L_k(c_n) = \lambda_k \qquad \text{pour tout} \qquad k \geqslant 0.$$

*L'unicité de la représentation est donc établie.*

*REMARQUES :*

*a*) On aurait pu éviter la dernière partie de la démonstration précédente; en effet, Doss a établi (*cf.* [11] ) que *si* $(c_n)$ *est une suite de base*(1) *de polynômes telle que pour toute* $f \in \mathscr{F}$, *on ait*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n(z),$$

*uniformément sur tout disque* $|z| \leqslant R < 1$, *la suite* $(\lambda_n)$ *est unique.*

*b*) Dans le cas où $L_n(f) = f_{(n)}(z_n)$, la relation (4 — 1 — 5) vérifiée par les $c_n$ est identique à la relation (1 — 2—5); il en résulte que *les* $c_n$ *sont identiques aux polynômes* $\Pi_n$ *définis au chapitre* I.

c) *Supposons que la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *ait un rayon de convergence égal à* 1; l'inégalité

$$|L_n(f)| \leqslant 2(s')^n$$

montre d'abord que

$$L = \overline{\lim_{n+\to\infty}} \ |L_n(f)|^{1/n} \leqslant 1.$$

*Si* L *était strictement inférieur à* 1, on pourrait trouver $\lambda$ satisfaisant à l'inégalité $L < \lambda < 1$. On aurait alors, à partir d'un certain rang : $|L_n(f)| < \lambda^n$.

Soit $R' > \frac{1}{s}$; on a, pour $|z| \geqslant R'$ :

$$|c_n(z)| \leqslant |z|^n \left[1 + \frac{1}{s|z|} + \dots + \frac{1}{(s|z|)^n}\right] \leqslant |z^n| \left[\frac{sR'}{sR' - 1}\right]$$

---

(1) On dit qu'une suite $(c_n)$ de polynômes est une suite de base, si tout polynôme est égal à une combinaison linéaire finie des $c_n$.

La série de terme général $L_n(f)\,c_n(z)$ convergerait donc uniformément sur tout disque $|z| \leqslant R' < \frac{1}{\lambda}$ vers une fonction holomorphe qui ne peut être que $f$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ aurait donc un rayon de convergence supérieur à 1, contrairement à l'hypothèse.

D'où le théorème :

(4 — 1 — 12) *S'il existe $s > 1$ et tel que*

$$H_n(s) \leqslant 1 \qquad \textit{pour tout} \qquad n \geqslant 0,$$

*et si la série*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

*a un rayon de convergence égal à 1, on a :*

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \; |L_n(f)|^{1/n} = 1$$

Remarquons que *le résultat précédent reste valable si l'on suppose que* $H_n(s) \leqslant 1$ *seulement à partir d'un certain rang* $n_0$. On peut en effet supposer que tous les $\alpha_k^{(n)}$ tels que $n < n_0$ sont nuls sans modifier la valeur des $L_n(f)$ de rang $n \geqslant n_0$; il suffit alors d'appliquer (4 — 1 — 12) pour obtenir l'égalité

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \; |L_n(f)|^{1/n} = 1$$

II. — *APPLICATION AU CAS DES RESTES SUCCESSIFS.*

Le théorème (4 — 1 — 11) va nous permettre de retrouver rapidement certains résultats du deuxième chapitre. Nous obtiendrons également des résultats nouveaux en utilisant la remarque (4 — 1 — 10).

1° a) *Soit une suite quelconque de points $z_n$ tels que*

$$|z_n| \leqslant r < 0{,}5 \qquad \textit{pour tout} \qquad n \geqslant 0;$$

soit $f$ un élément quelconque de $\mathscr{F}$. Posons

$$L_n(f) = f_{(n)}(z_n);$$

on a

$$H_n(s) = \sum_{k=1}^{\infty} |z_n|^k s^k \leqslant \frac{s\,r}{1 - s\,r} < 1 \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0 \qquad \text{si} \qquad s\,r < \frac{1}{2}$$

il existe donc $s > 1$ et tel que $H_n(s) < 1$.

D'après (4 — 1 — 11) et la remarque *b*) du paragraphe précédent, on voit que *la suite* $(\Pi_n)$ *des polynômes associés à la suite* $(z_n)$ *constitue une base de* $\mathscr{F}$. On retrouve ainsi le théorème (2 — 1 — 3) dans le cas particulier où $a$ est remplacé par 0,5.

*b*) On peut retrouver intégralement (2 — 1 — 3) en procédant de la façon suivante : *supposons que*

$$|z_n| \leqslant r < a \qquad \textit{pour tout} \qquad n \geqslant 0$$

et posons cette fois :

$$\mathrm{L}_n(f) = f_{(n)}(z_n) - z_n f_{(n+1)}(z_{n+1})$$

On a

$$\mathrm{H}_n(s) = \sum_{k=2}^{\infty} s^k \; |z_n| \; |z_n^{k-1} - z_{n+1}^{k-1}|$$

D'après une généralisation connue du principe du module maximum (*cf.* [18] vol. 1, p. 142) $\mathrm{H}_n(s)$ est maximum quand $|z_n| = |z_{n+1}| = r$.

Soient

$$z_n = r\,e^{i\theta}, \qquad z_{n+1} = r\,e^{i\theta'}$$

deux valeurs rendant $\mathrm{H}_n(s)$ maximum et posons $\theta - \theta' = 2\,\alpha$; on a, pour tout $n \geqslant 0$ (*cf.* la démonstration de (1 — 3 — 3)) :

$$\mathrm{H}_n(s) \leqslant 2 \sum_{k=2}^{\infty} (s\,r)^k \,|\sin(k-1)\alpha| \leqslant 1 \qquad \text{si} \qquad s\,r \leqslant a$$

Il en résulte comme précédemment qu'il existe une suite de polynômes $\gamma_n$ tels que l'on ait :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [f_{(n)}(z_n) - z_n f_{(n+1)}(z_{n+1})]\,\gamma_n(z).$$

On en déduit que l'on a aussi :

$$f(z) = f(z_0)\gamma_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} f_{(n)}(z_n)\;[\gamma_n(z) - z_{n-1}\gamma_{n-1}(z)]$$

uniformément sur tout disque $|z| \leqslant \mathrm{R} < 1$. On vérifie aisément que

$$\gamma_0(z) = 1 = \Pi_0(z) \qquad \text{et que} \qquad \gamma_n(z) - z_{n-1}\gamma_{n-1}(z) = \Pi_n(z).$$

*On retrouve donc bien le théorème* (2 — 1 — 3)

*c*) On pourrait aussi retrouver le théorème (2 — 4 — 1) qui établit l'égalité

$$\varlimsup_{n \to +\infty} |f_{(n)}(z_n)|^{1/n} = \frac{1}{\mathrm{R}}$$

pour toute $f$ dont le rayon d'holomorphie à l'origine est égal à $\mathrm{R} \geqslant 1$, et toute suite $(z_n)$ satisfaisant à l'inégalité $|z_n| \leqslant r < 0{,}536$.

Il suffirait pour cela d'appliquer le théorème (4 — 1 — 12) à la suite

$$\mathrm{L}_n(f) = f_{(n)}(z_n) - z_n f_{(n+1)}(z_{n+1})$$

On pourrait également obtenir un résultat analogue dans le cas des dérivées successives d'une fonction $f$ dont le rayon d'holomorphie est $\geqslant 1$, et d'une suite $(z_n)$ telle que :

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \; n\,|z_n| < 0{,}718 \qquad (cf. (2-3-1)).$$

2° Afin d'obtenir aisément le développement de $f(z)$ en série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{(n)}(z_n)\,\Pi_n(z)$$

pour des distributions nouvelles des points $z_n$, nous allons établir le théorème :

(4 — 2 — 1) *Soit*

$$\phi(v) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n v^n$$

*une fonction holomorphe et dépourvue de zéros dans* $\Omega(1+\varepsilon)$ (*avec* $\varepsilon > 0$). *Soit une suite de points* $z_n$ *tels que* $|z_n| \leqslant r < 1$. *Supposons de plus que pour tout* $n \geqslant 0$ *et tout* $k \geqslant 1$ *on ait :*

$$|d_k + d_{k-1} z_n + \ldots + d_1 z_n^{k-1} + z_n^k| \leqslant A_k.$$

$$\textit{Alors, si} \quad \overline{\lim_{k \to +\infty}} \; (A_k)^{1/k} < 1 \quad \textit{et si} \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k < 1,$$

*la suite des polynômes* $\Pi_n$ *associés à la suite* $(z_n)$ *forme une base de* $\mathcal{F}$ *et l'on a, pour toute* $f \in \mathcal{F}$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{(n)}(z_n)\,\Pi_n(z)$$

Posons

$$G_n(v) = v_n \, \frac{\phi(v)}{1 - v z_n} = \phi(v) \;\; g_n(v) = v^n \;\; [1 + h_n(v)] \, .$$

On a:

$$h_n(v) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(n)} v^k, \qquad \text{où} \qquad \beta_k^{(n)} = d_k + d_{k-1} z_n + \ldots + d_1 z_n^{k-1} + z_n^k \, .$$

Il en résulte que

$$h_n(v) \ll \sum_{k=1}^{\infty} A_k v^k = h(v)$$

Soit $f$ un élément quelconque de $\mathcal{F}$ et R un nombre quelconque satisfaisant à l'inégalité

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < R < 1;$$

soit enfin $z \in \overline{\Omega}(\mathrm{R})$. D'après nos hypothèses, il existe $s > 1$ et tel que $h(s) < 1$. On peut toujours supposer que

$$1 < s < \inf\left(1 + \varepsilon, \frac{1}{r}, \frac{1}{\mathrm{R}}\right) = \inf\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{\mathrm{R}}\right).$$

Alors chaque $\mathrm{G}_n \in \mathscr{F}(s)$ et le théorème $(4 - 1 - 8)$ montre que la suite $(\mathrm{G}_n)$ est une base de $\mathscr{F}(s)$. Il existe donc une suite $c_n(z)$ telle que :

$$\frac{\phi(v)}{1 - vz} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z)\ \mathrm{G}_n(v),$$

uniformément sur tout disque $|v| \leqslant s' < s$. On en déduit que :

$$\frac{1}{1 - vz} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z)\, g_n(v),$$

uniformément sur tout disque $|v| \leqslant s' < s$.

Il résulte de cette dernière égalité que les $c_n(z)$ vérifient la relation $(4 - 1 - 5)$ où $b_n = z^n$, c'est-à-dire la relation $(1 - 2 - 5)$. Donc $c_n = \Pi_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Choisissons $s' > 1$; on a, comme dans la démonstration de $(4 - 1 - 11)$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega^*(s')} \Phi(v)\ \frac{dv}{1 - vz} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega^*(s')} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(v)\, g_n(v)\, \Pi_n(z)\right] dv$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_{(n)}(z_n)\, \Pi_n(z).$$

*Il reste à établir que cette dernière série converge uniformément sur* $\overline{\Omega}(\mathrm{R})$.

De l'égalité

$$\frac{\phi(v)}{1 - vz} = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n(z)\, \mathrm{G}_n(v),$$

on déduit que les $\Pi_n(z)$ vérifient aussi la relation $(4 - 1 - 5)$ dans laquelle

$$b_n = d_n + d_{n-1} z + \dots + z^n$$

Soit $\lambda$ tel que
$$\frac{1}{1 + \varepsilon} < \lambda < \mathrm{R};$$

comme
$$\overline{\lim_{n \to +\infty}}\ |d_n|^{1/n} \leqslant \frac{1}{1 + \varepsilon},$$

on peut trouver une constante B telle que $|d_n| < \mathrm{B}\, \lambda^n$ pour tout $n \geqslant 0$. On a donc, quel que soit $z \in \overline{\Omega}(\mathrm{R})$:

$$|b_n| \leqslant \mathrm{B}\,[\lambda^n + \lambda^{n-1}\,\mathrm{R} + \dots + \mathrm{R}^n] \leqslant \frac{\mathrm{B}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mathrm{R}}\right)}\ \mathrm{R}^n$$

Or, on sait que:

$$|\Pi_n(z)| \leqslant \frac{|b_0|}{s^n} + \frac{|b_1|}{s^{n-1}} + \ldots + \frac{|b_{n-1}|}{s} + |b_n|$$

D'où finalement :

$$|\Pi_n(z)| \leqslant \frac{B}{\left(1-\frac{\lambda}{R}\right)}\left[\frac{1}{s^n}+\frac{R}{s^{n-1}}+\ldots+\frac{R^{n-1}}{s}+R^n\right] \leqslant \frac{B}{\left(1-\frac{\lambda}{R}\right)(1-Rs)}\left(\frac{1}{s}\right)^n = \frac{B'}{s^n}$$

Désignons alors par $s'$ un nombre quelconque satisfaisant à l'inégalité $1 < s' < s$. On a, à partir d'un certain rang

$$|a_n| < (s')^n \qquad (\text{où} \qquad a_n = f_{(n)}(0))$$

D'où l'inégalité :

$$|f_{(n)}(z_n)| \leqslant (s')^n [1 + |z_n| s' + \ldots + |z_n|^k (s')^k + \ldots] \leqslant \frac{(s')^n}{1 - r s'},$$

et l'on a:

$$|f_{(n)}(z_n) \;\; \Pi_n(z)| \leqslant \frac{B'}{1 - r s'} \left(\frac{s'}{s}\right)^n$$

quel que soit $z \in \bar{\Omega}(R)$. La série considérée est donc uniformément convergente sur $\bar{\Omega}(R)$ et le théorème (4 — 2 — 1) est établi.

3° *Applications du théorème précédent.*

En choisissant convenablement la fonction $\phi$ du théorème (4 — 2 — 1) on peut obtenir de nouvelles bases $(\Pi_n)$ de $\mathscr{F}$.

1) *Soit* $\alpha \in \Omega$ et $(z_n)$ une suite de points tels que, pour tout $n \geqslant 0$, on ait $|z_n - \alpha| \leqslant r$, avec $r < 1 - |\alpha|$. Posons $\phi(v) = 1 - v\alpha$. On a, avec les notations du théorème (4 — 2 — 1) :

$$\text{Pour} \qquad k = 1 \;:\; |\beta_k^{(n)}| = |z_n - \alpha| \leqslant r = A_1$$

$$\text{Pour} \qquad k > 1 \;:\; |\beta_k^{(n)}| = |z_n^k - \alpha z_n^{k-1}| \leqslant r(r + |\alpha|)^{k-1} = A_k.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \frac{r}{1 - (r + |\alpha|)} \qquad \text{est} \qquad < 1 \qquad \text{si} \qquad r < \frac{1 - |\alpha|}{2}.$$

Enfin :

$$\overline{\lim_{k \to +\infty}} \; (A_k)^{\frac{1}{k}} = r + |\alpha| < 1,$$

et le théorème (4 — 2 — 1) nous donne le résultat :

(4 – 2 – 2) *Soit* $(z_n)$ *une suite quelconque de points tels que*

$$|z_n - \alpha| \leqslant r < \frac{1 - |\alpha|}{2} \qquad \textit{pour tout} \qquad n \geqslant 0.$$

*La suite* $(\Pi_n)$ *associée à la suite* $(z_n)$ *est une base de* $\mathscr{F}$, *et toute* $f \in \mathscr{F}$ *a pour coordonnées*: $f(z_0), \ldots, f_{(n)}(z_n) \ldots$

On peut définir *une constante* $C(\alpha)$, borne supérieure des nombres $r$ tels que les conditions :

$$f \in \mathscr{F} \quad \text{et} \quad f_{(n)}(z_n) = 0 \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0, \quad \text{avec} \quad |z_n - \alpha| \leqslant r,$$

entraînent $f(z) \equiv 0$. D'après (4 — 2 — 2) on a :

$$C(\alpha) \geqslant \frac{1 - |\alpha|}{2}.$$

Pour $\alpha = 0$, on retrouve l'inégalité :

$$C(0) = C \geqslant \frac{1}{2}$$

Si

$$|\alpha| < \frac{1 - C}{2},$$

on a : $C(\alpha) < 1 - |\alpha|$. Il n'est d'ailleurs pas exclu que $C(\alpha) = (1 - |\alpha|)\, C$.

*REMARQUES :*

*a*) On aurait pu établir (4 — 2 — 2) en faisant l'hypothèse plus générale :

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}}\ |z_n - \alpha| < \frac{1 - |\alpha|}{2}$$

*b*) Soit $f \in \mathscr{F}$; on déduit en particulier de la remarque précédente que *si*

$$f_{(n)}(z_n) = 0 \qquad \textit{pour tout} \qquad n \geqslant 0, \qquad \textit{avec} \qquad z_n \to \alpha \in \Omega, \qquad \textit{on a} \qquad f(z) \equiv 0.$$

2) *Soient* $\alpha$ *et* $\beta$ *deux points donnés, quelconques dans* $\Omega$. Désignons par $\overline{\Omega}(\alpha, r)$ et $\overline{\Omega}(\beta, r)$ les disques fermés de centres respectifs $\alpha$ et $\beta$ et de rayon $r$. Posons $d = |\alpha - \beta|$; $A = \sup(|\alpha|, |\beta|)$. Supposons $A + r < 1$. Soit $(z_n)$ une suite de points tels que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$z_n \in \overline{\Omega}(\alpha, r) \cup \overline{\Omega}(\beta, r).$$

Avec ces hypothèses, on a le théorème :

(4 — 2 — 3) *Si*

$$r < \frac{(1 - A)^2}{d + 2(1 - A)},$$

*la suite* $(\Pi_n)$ *associée à la suite* $(z_n)$ *est une base de* $\mathscr{F}$, *et toute* $f \in \mathscr{F}$ *a pour coordonnées :*

$$f(z_0), \; \ldots, \; f_{(n)}(z_n), \; \ldots$$

En effet, posons cette fois : $\phi(v) = (1 - \alpha v)\;(1 - \beta v)$. On a :

*pour* $\quad k = 1 \; : \; |\beta_k^{(n)}| = |z_n - \alpha - \beta| \leqslant \mathrm{A} + r = \mathrm{A}_1$

*pour* $\quad k > 1 \; : \; |\beta_k^{(n)}| = |z_n^{k-2}\;(z_n - \alpha)\;(z_n - \beta)| \leqslant r(d + r)\;(\mathrm{A} + r)^{k-2} = \mathrm{A}_k$

Il suffit de vérifier que les hypothèses du théorème (4 — 2 — 1) sont satisfaites, ce qui est immédiat.

*REMARQUES :*

a) *Si* $d = 0$, on retrouve (4 — 2 — 2).

*b*) Soit $f \in \mathscr{F}$. Si chaque $f_{(n)}(z)$ s'annule en au moins un point $z_n \in \Omega$, il est impossible que tous les $z_n \in \overline{\Omega}(\alpha, r) \cup \overline{\Omega}(\beta, r)$ pour

$$r < \frac{(1 - \mathrm{A})^2}{d + 2(1 - \mathrm{A})},$$

sauf dans le cas où $f(z)$ est $\equiv 0$. *En particulier, si* $f(z) \not\equiv 0$, *il est impossible que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite* $(z_n)$ *soit contenu dans* $\{\alpha\} \cup \{\beta\}$.

Par contre, l'exemple $f_{\frac{2\pi}{3}}$ (*cf.* (2 — 2 — 5) ) montre que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(z_n)$ peut être constitué par 3 points de $\Omega$.

c) *Supposons plus particulièrement que* $\beta = -\alpha$, avec $0 < \alpha < 1$ et que tous les $z_n$ appartiennent à la région D d'équation $|z^2 - \alpha^2| \leqslant \rho^2$, où $\rho$ est supposé $> 0$ et tel que $\alpha^2 + \rho^2 < 1$. D est inclus dans $\Omega$ et a pour frontière la lemniscate d'équation $|z^2 - \alpha^2| = \rho^2$. On a cette fois :

$$|\beta_1^{(n)}| \leqslant (\alpha^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{A}_1, \qquad \text{et pour} \qquad k > 1:$$

$$|\beta_k^{(n)}| \leqslant \rho^2\;(\alpha^2 + \rho^2)^{\frac{k-2}{2}} = \mathrm{A}_k\,.$$

On vérifie de suite que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_k < 1 \qquad \text{si} \qquad \rho < \frac{1 - \alpha^2}{2} \qquad \text{et que} \qquad \varlimsup_{k \to +\infty} \;(\mathrm{A}_k)^{1/k} < 1.$$

Prenons $\rho = \alpha$; les hypothèses de (4 — 2 — 1) sont satisfaites si $\alpha < \sqrt{2} - 1$, d'où le résultat :

(4 — 2 — 4) *Si* $0 < \alpha < \sqrt{2} - 1$, *et si tous les* $z_n$ *appartiennent à la région* D *d'équation* $|z^2 - \alpha^2| \leqslant \alpha^2$, *les conditions :* $f \in \mathscr{F}$ *et* $f_{(n)}(z_n) = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$ *entraînent* $f(z) \equiv 0$.

Notons que le résultat précédent n'est pas contenu dans (2 — 1 — 5); en effet, étant donné un intervalle quelconque $[a, b] \subset ]-2+\sqrt{2}; 2-\sqrt{2}[$, il est possible de choisir $\alpha$ assez voisin de $\sqrt{2}-1$ pour que $D \supset [a, b]$.

## III. — *UNIVALENCE DES $f_{(n)}$ DANS LE CAS OU $f \in \mathscr{F}$.*

Nous allons voir que si $f$ n'est pas un polynôme, une infinité de $f_{(n)}$ sont univalentes dans un disque $\Omega(r)$ assez petit. R. P. Boas avait obtenu une propriété analogue dans le cas des dérivées successives des fonctions entières de type exponentiel fini (*cf.* [2] p. 719-721).

1° *Univalence dans un disque* $|z| \leqslant r < 1$.

Soient deux suites $(\alpha_n)_{n\in N}$ et $(\beta_n)_{n\in N}$ telles que $|\alpha_n| \leqslant r$, $|\beta_n| \leqslant r$, avec de plus $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. Soit $f$ un élément quelconque de $\mathscr{F}$. Posons:

$$\text{pour } n \geqslant 1: \qquad L_n(f) = \frac{f_{(n-1)}(\alpha_n) - f_{(n-1)}(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n}$$

et pour $n = 0$: $L_n(f) = f(0)$.

(si $\alpha_n = \beta_n$, on pose $L_n(f) = (f_{(n-1)})'\ (\alpha_n)$).

On a, quel que soit $n \geqslant 0$:

$$L_n(f) = a_n + a_{n+1}(\alpha_n + \beta_n) + \dots + a_{n+p}[\alpha_n^p + \alpha_n^{p-1}\beta_n + \dots + \beta_n^p] + \dots$$

D'où:

$$H_n(s) = \sum_{p=1}^{\infty} |\alpha_n^p + \alpha_n^{p-1}\beta_n + \dots + \beta_n^p|\, s^p \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} (p+1)(sr)^p = \frac{2sr-(sr)^2}{(1-sr)^2} = h(s).$$

Si

$$r < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

on peut trouver $s > 1$, et tel que $h(s) < 1$. Il suffit alors d'appliquer (4 — 1 — 11) pour obtenir le théorème suivant :

(4 — 3 — 1) *Si $(\alpha_n)$ et $(\beta_n)$ sont deux suites de points tels que*

$$|\alpha_n| \leqslant r < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad |\beta_n| \leqslant r$$

(*avec de plus $\alpha_0 = \beta_0 = 0$*), *toute $f \in \mathscr{F}$ est développable en série de polynômes :*

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} L_n(f)\, A_n(z)$$

*uniformément convergente sur tout disque $|z| \leqslant R < 1$.*

*REMARQUE :*

Les polynômes $A_n$ sont évidemment indépendants de $f \in \mathscr{F}$. Si l'on choisit $f(z) = z^n$, on obtient pour les $A_n$ la relation de récurrence :

$$(4-3-2)\quad A_n(z) + (\alpha_{n-1} + \beta_{n-1})A_{n-1}(z) + \ldots + (\alpha_1^{n-1} + \alpha_1^{n-2}\beta_1 + \ldots + \beta_1^{n-1})A_1(z) = z^n \ (n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots)$$

On déduit de (4 — 3 — 1) le corollaire :

(4 — 3 — 3) *Soit* $r < 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

*et* $f \in \mathscr{F}$. *Si* $f$ *n'est pas un polynôme, il existe une infinité de* $f_{(n)}$ *qui sont univalentes dans le disque* $|z| \leqslant r$. Donnons alors la définition suivante :

(4 — 3 — 4) *On appellera* U *la borne supérieure des nombres* $r$ *tels que pour toute* $f \in \mathscr{F}$ *et non polynôme, il existe une infinité de* $f_{(n)}$ *qui sont univalentes dans le disque* $|z| \leqslant r$.

On a d'abord, d'après (4 — 3 — 3) :

$$U \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

*RECHERCHE D'UN MAJORANT DE* U.

1). Soit $r$ un nombre quelconque strictement supérieur à la constante C étudiée au chapitre II; on sait qu'il existe une $f \in \mathscr{F}$ et non polynôme, dont toutes les $f_{(n)}(z)$ s'annulent dans le disque $|z| \leqslant r$ (*cf.* (2 — 2 — 3) ). Il existe donc une suite $(z_n)$ telle que $f_{(n)}(z_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$.

Si $z_{n+1}$ est $\neq 0$, on a $f_{(n)}(z_{n+1}) = f_{(n)}(0)$ et $f_{(n)}$ est multivalente dans le disque $|z| \leqslant r$.
Si $z_{n+1} = 0$, on a $(f_{(n)})'(0) = 0$ et $f_{(n)}$ est encore multivalente pour $|z| \leqslant r$.

Toutes les $f_{(n)}$ sont donc multivalentes dans le disque $|z| \leqslant r$. *Il en résulte que :* $U \leqslant C$ (on a vu que $C < 0{,}5617$).

2). Afin d'obtenir pour U un plus petit majorant, considérons à nouveau les fonctions $f \in \mathscr{F}$ qui satisfont à l'identité : $f_{(1)}(z) \equiv f(z\,e^{i\phi})$ (*cf.* (2 — 2 — 5) ). Si $f$ est multivalente pour $|z| \leqslant r$, il est clair qu'il en sera de même de toutes les $f_{(n)}$. Or, pour $\phi = \pi$, on trouve

$$f(z) = \frac{1+z}{1+z^2},$$

qui est multivalente dans tout disque $|z| \leqslant (\sqrt{2} - 1) + \varepsilon$, si petit que soit $\varepsilon > 0$. *Il en résulte que* $U \leqslant \sqrt{2} - 1$, *d'où l'encadrement suivant de* U.

$$(4-3-5)\qquad \boxed{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant U \leqslant \sqrt{2} - 1.}$$

*REMARQUES :*

*a*) On trouverait probablement un meilleur majorant de U en étudiant la multivalence d'autres fonctions $f_\Phi$, mais les calculs sont plus compliqués.

*b*) On pourrait donner de l'inégalité

$$U \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

une démonstration directe analogue (mais plus simple) à celle de l'inégalité $C \geqslant a$.

2° *Univalence dans un disque de centre* $\alpha \in \Omega$.

Soient $(\alpha_n)_{n\in N}$ et $(\beta_n)_{n\in N}$ deux suites telles que: $|\alpha_n - \alpha| \leqslant r$, $|\beta_n - \alpha| \leqslant r$ avec $r < 1 - |\alpha|$. Supposons de plus que $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. Posons:

$$G_n(v) = v^n \frac{(1 - v\alpha)^2}{(1 - v\alpha_n)(1 - v\beta_n)} = (1 - v\alpha)^2 g_n(v) = v^n [1 + h_n(v)].$$

On vérifie aisément que :

$$h_n(v) \leqslant 2vr + v^2 r(2|\alpha| + 3r) + \ldots + v^k r(|\alpha| + r)^{k-2}(2|\alpha| + (k+1)r) + \ldots = h(v)$$

Si $h(1) < 1$, il est clair que l'on pourra trouver $s > 1$ tel que $h(s)$ soit encore $< 1$. Or

$$h(1) = \frac{2r(1 - |\alpha|) - r^2}{(1 - |\alpha| - r)^2} < 1$$

si

$$r < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1 - |\alpha|).$$

On en déduit comme au paragraphe précédent le théorème :

(4 — 3 — 6) *Si* $(\alpha_n)_{n\in N}$ et $(\beta_n)_{n\in N}$ *sont deux suites telles que* $|\alpha_n - \alpha| \leqslant r$, $|\beta_n - \alpha| \leqslant r$, *avec*

$$r < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1 - |\alpha|),$$

*toute* $f \in \mathscr{F}$ *est développable en série de polynômes :*

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{(n-1)}(\alpha_n) - f_{(n-1)}(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} A_n(z),$$

*uniformément convergente sur tout disque* $|z| \leqslant R < 1$.

*REMARQUE :*

Pour $\alpha = 0$, on retrouve le théorème (4 — 3 — 1). On pourrait étudier la constante $U(\alpha)$, borne supérieure des nombres $r$ tels que, pour toute $f \in \mathscr{F}$ et non polynôme, une infinité de $f_{(n)}$ sont univalentes dans le disque $|z - \alpha| \leqslant r$. D'après $(4 - 3 - 6)$ on a :

$$\mathrm{U}(\alpha) \geqslant \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1 - |\alpha|)\,.$$

Il n'est d'ailleurs pas exclu que $\mathrm{U}(\alpha) = (1 - |\alpha|)\,\mathrm{U}$.

## IV. — *CAS DES FONCTIONS ENTIÈRES :*

1° *Zéros des $f_{(n)}(z)$.*

On pourrait retrouver certains résultats du chapitre III. Nous nous bornerons à étudier le cas particulier suivant :

*Soit une suite quelconque $(z_n)_{n \in \mathrm{N}}$ telle que $z_n^2 \sim n^2$.* On peut poser

$$z_n^2 = n^2\ (1 + \varepsilon_n) \qquad \text{où} \qquad \varepsilon_n \to 0.$$

On sait déjà que les conditions : $f \in \mathrm{E}\,(1\,;a)$ et $f_{(n)}(z_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$, entraînent $f(z) \equiv 0$ (*cf.* $(3 - 2 - 6)$). Nous allons voir que l'on peut remplacer ici $a$ par 1. Soit $f$ quelconque dans $\mathrm{E}\,(1,\ \tau)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ son développement en série entière. Soit $z$ fixé quelconque. Posons :

$$\mathrm{F}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{w^{n+1}}\ ;$$

F est holomorphe au moins pour $|w| > \tau$. On a pour $f$ la représentation de Pólya :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega^*(\tau')} e^{zw}\ \mathrm{F}(w)\,dw, \qquad \text{où} \qquad \tau' > \tau\,.$$

On en déduit de suite que :

$$f_{(n)}(z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega^*(\tau')} \frac{\mathrm{F}(w)}{n!}\ g_n(w)\,dw \qquad \text{où:}$$

$$g_n(w) = w^n\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_n^k\ w^k}{(n+1)\ldots(n+k)}\right]$$

Posons

$$\mathrm{G}_n(w) = (1 - w^2)\,g_n(w) = w^n\,[1 + h_n(w)];$$

on a:

$$h_n(v) = \frac{z_n}{n+1}\ w + \sum_{k=2}^{\infty} w^k \left[\frac{z_n^k - (n+k-1)(n+k)\,z_n^{k-2}}{(n+1)\,(n+2)\ldots(n+k)}\right]$$

Soit $\varepsilon > 0$, arbitrairement petit. A partir d'un certain rang $n_0$, on a : $\frac{1}{n} < \varepsilon$ et $|\varepsilon_n| < \varepsilon$. Il en résulte que pour $n \geqslant n_0$:

$$h_n(v) \leqslant (1+\varepsilon)w + 2\varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} k^2 \; [(1+\varepsilon)w]^k = h(w, \varepsilon).$$

Si $\tau < 1$, on peut trouver $s$ tel que $\tau < s < 1$. Il est clair que l'on pouvait choisir $\varepsilon$ assez petit pour que $h(s, \varepsilon) < 1$. D'après (4 — 1 — 8) la suite $(G_n)_{n \in N}$ est une base de $\mathscr{F}(s)$ et il en est de même de la suite $(g_n)_{n \in N}$ d'après (4 — 1 — 10). Il existe donc une suite $(c_n)$ telle que :

$$e^{zw} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(z)}{n!} \; g_n(w),$$

uniformément sur tout disque $|w| \leqslant \tau'$ (avec $\tau < \tau' < s$). On voit alors, en égalant les coefficients de $w^n$ dans chaque membre, que les $c_n$ vérifient la relation (1 — 2 — 5) et sont par suite identiques aux polynômes $\Pi_n$ associés à la suite $(z_n)$. Il suffit maintenant de remplacer dans l'intégrale de Pólya $e^{zw}$ par son développement en série précédent pour obtenir l'égalité :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{(n)}(z_n) \;\; \Pi_n(z)$$

On en déduit en particulier le résultat suivant :

(4 — 4 — 1) *Si* $\tau < 1$, *les conditions :* $f \in E(1, \tau)$ *et* $f_{(n)}(z_n) = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *avec* $z_n^2 \sim n^2$, *entraînent* $f(z) \equiv 0$.

Supposons plus particulièrement que $z_n \sim (-1)^n \, n$ et introduisons la définition suivante :

(4 — 4 — 2) *On appellera* T* *la borne supérieure des nombres* $\tau$ *tels que les conditions :* $f \in E(1, \tau)$ *et* $f_{(n)}(z_n) = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *avec* $z_n \sim (-1)^n \, n$, *entraînent* $f(z) \equiv 0$.

On a d'abord, d'après (4 — 4 — 1) : $T^* \geqslant 1$. D'autre part, l'exemple $f(z) = \sin z + \cos z$ montre (*cf.* (3 — 3 —7)) que $T^* \leqslant 1$.

*Il en résulte que* $T^* = 1$.

2° *Univalence des* $f_{(n)}$ *dans un disque* $|z| \leqslant$ R.

Soit R un nombre positif donné quelconque. On déduit immédiatement du théorème (4 — 3 — 3) que *pour toute* $f$ *entière non polynôme, il existe une infinité de* $f_{(n)}$ *qui sont univalentes dans le disque* $|z| \leqslant$ R.

3° *Univalence de* $f_{(n)}$ *dans le disque* $|z| \leqslant n^{1/\rho}$

a) *Notations et résultats préliminaires :*

Soit $f$ quelconque dans $E(\rho, \tau)$ avec $\rho > 0$, et soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ le développement en série entière de $f(z)$. Posons :

$$F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1/\rho} \frac{a_n}{w^{n+1}}$$

F est holomorphe pour $|w| > (\rho\tau)^{1/\rho}$; si $\rho = 1$, F est la transformée de Borel de $f$.

Posons :

$$\psi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{(n!)^{1/\rho}}.$$

Soit $z$ fixé quelconque. On vérifie aisément l'égalité :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega^*(r)} F(w) \quad \psi(zw)\, dw, \qquad \text{où} \qquad r > (\rho\tau)^{1/\rho}$$

On en déduit l'égalité :

$$f_{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega^*(r)} F(w) \quad w^n \ \psi_{(n)}(zw)\, dw$$

b) *Soient* $(\alpha_n)_{n\in N}$ *et* $(\beta_n)_{n\in N}$ *deux suites astreintes aux seules conditions*:

$$|\alpha_n| \leqslant n^{1/\rho}, \qquad |\beta_n| \leqslant n^{1/\rho}, \qquad \alpha_0 = \beta_0 = 0.$$

Posons:

$$L_n(f) = \frac{f_{(n-1)}(\alpha_n) - f_{(n-1)}(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} \text{ (pour } n \geqslant 1) \text{ et } L_0(f) = f(0)$$

On a:

$$L_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega^*(r)} \frac{F(w)}{(n!)^{1/\rho}} \, G_n(w)\, dw,$$

où:

$$G_n(w) = w^n \left[ 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{[\alpha_n^p + \alpha_n^{p-1}\beta_n + \dots + \alpha_n \beta_n^{p-1} + \beta_n^p]}{[(n+1)(n+2)\dots(n+p)]^{1/\rho}} \, w^p \right] = w^n [1 + h_n(w)]$$

On a:

$$h_n(w) \ll \frac{2w - w^2}{(1-w)^2} = h(w). \qquad \text{Si} \qquad s < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad h(s) \text{ est } < 1;$$

la suite $(G_n)$ est donc une base de $\mathscr{F}(s)$ et il existe une suite $c_n(z)$ telle que :

$$\psi(zw) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(z)}{(n!)^{1/\rho}} \, G_n(w),$$

uniformément sur tout disque $|w| \leqslant s' < s$.

Si

$$(\rho\ \tau)^{1/\rho} < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

on peut trouver $s$ et $s'$ tels que:

$$(\rho\ \tau)^{1/\rho} < s' < s < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On a alors :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega^*(s')} \mathrm{F}(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(z)}{(n!)^{1/\rho}} \mathrm{G}_n(w)\, dw = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z)\ \mathrm{L}_n(f)$$

Enfin, on peut vérifier que les $c_n$ satisfont à la relation (4 — 3 — 2); par suite les $c_n$ sont identiques aux $\mathrm{A}_n$ et l'on peut énoncer le théorème :

(4 – 4 – 3) *Soient* $(\alpha_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *et* $(\beta_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *deux suites telles que* $|\alpha_n| \leqslant n^{1/\rho}$, $|\beta_n| \leqslant n^{1/\rho}$, *avec* $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. *Toute*

$$f \in \mathrm{E}\left(\rho,\ \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\rho}\right),$$

*est développable en série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n(z)\ \mathrm{L}_n(f)\,.$$

On en déduit que :

(4 — 4 — 4) *Pour toute*

$$f \in \mathrm{E}\left(\rho,\ \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\rho}\right)$$

*et non polynôme, il existe une infinité de rangs n pour lesquels* $f_{(n)}$ *est univalente dans le disque* $|z| \leqslant n^{1/\rho}$.

Introduisons la définition :

(4 — 4 — 5) *On appellera* V $(\rho)$ *la borne supérieure des nombres t tels que pour toute fonction entière non polynôme qui* $\in$ E $(\rho, t)$, il *existe une infinité de rangs n pour lesquels* $f_{(n)}$ *est univalente dans le disque* $|z| \leqslant n^{1/\rho}$.

On a d'abord, d'après (4 — 4 — 4) l'inégalité :

$$\mathrm{V}(\rho) \geqslant \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\rho}$$

En vue d'obtenir un majorant de V $(\rho)$, nous allons établir le lemme :

(4 — 4 — 6) *Soit* $(f_n)_{n\in N}$ *une famille normale de fonctions holomorphes pour* $|z| < R$, *dont aucune fonction limite n'est constante, et soit* $(g_n)_{n\in N}$ *une suite de fonctions* $\in \mathscr{F}(R)$. *Supposons que*

$$f_n(z) - g_n(z) \to 0$$

*uniformément sur tout disque* $|z| \leqslant R' < R$. *Alors :*

*Si toutes les* $f_{(n)}$ *sont multivalentes dans le disque* $|z| \leqslant r < R$, *il en est de même des* $g_n$, *à partir d'un certain rang, dans le disque* $|z| \leqslant r + \varepsilon < R$ (*où* $\varepsilon$ *est* $> 0$ *et arbitrairement petit*).

En effet, supposons au contraire qu'il existe une partie infinie $I \subset N$ telle que, pour tout $n \in I$, $g_n$ soit univalente dans le disque $|z| \leqslant r + \varepsilon$. La famille des $f_n$ étant normale, il existe une partie infinie $J \subset I$ telle que la suite $(f_n)_{n\in J}$ converge uniformément sur le disque $|z| \leqslant r + \varepsilon$ vers une fonction F non constante. Les $(f_n)_{n\in J}$ étant multivalentes pour $|z| \leqslant r$, leur limite F est multivalente pour $|z| \leqslant r$. Comme $f_n(z) - g_n(z) \to 0$, $(g_n)_{n\in J} \to F$, uniformément sur le disque $|z| \leqslant r + \varepsilon$. Les $(g_n)_{n\in J}$ étant univalentes et F non constante, F est univalente pour $|z| \leqslant r$. D'où la contradiction.

*APPLICATION :*

Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit; posons $\tau = \sqrt{2} - 1 + \varepsilon$. Soit

$$F(z) = \frac{1 + \tau z}{1 + \tau^2 z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tau^n z^n, \qquad \text{où:} \qquad A_n = e^{in(n-1)\frac{\pi}{2}}$$

F est multivalente dans le disque $|z| \leqslant 1$; posons :

$$f_n(z) = \frac{F_{(n)}(z)}{\tau^n} = \sum_{p=0}^{\infty} A_{n+p}\, \tau^p z^p .$$

Les $f_n$ sont multivalentes dans le disque $|z| \leqslant 1$ et forment une famille normale de fonctions holomorphes dans le disque $|z| < \dfrac{1}{\tau} = R$. Aucune fonction limite de cette famille n'est constante. Posons :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(n!)^{1/\rho}}\, \tau^n z^n;$$

G est entière, du type $\dfrac{1}{\rho}\, \tau^\rho$ de l'ordre $\rho$.

Posons enfin :

$$g_n(z) = \frac{(n!)^{1/\rho}}{\tau^n}\, G_{(n)}(n^{1/\rho} z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_{n+p}\, \tau^p z^p}{\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{p}{n}\right)\right]^{1/\rho}}$$

Les $g_n$ sont entières, donc sont en particulier holomorphes pour $|z| < R$; de plus, on vérifie aisément que $f_n(z) - g_n(z) \to 0$ uniformément sur tout disque $|z| \leqslant R' < R$. On peut donc appliquer le lemme précédent : toutes les $g_n$ sont, à partir d'un certain rang, multivalentes dans le disque $|z| \leqslant 1$; les $G_{(n)}$ sont donc, à partir d'un certain rang, multivalentes dans le disque $|z| \leqslant n^{1/\rho}$, sans que G soit un polynôme.

Il en résulte que

$$V(\rho) \leqslant \frac{(\sqrt{2} - 1 + \varepsilon)^\rho}{\rho},$$

et ce, quel que soit $\varepsilon > 0$. *On a donc pour* $V(\rho)$ *l'encadrement suivant :*

$$(4-4-7) \qquad \boxed{\frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\rho \leqslant V(\rho) \leqslant \frac{1}{\rho}(\sqrt{2} - 1)^\rho}$$

*REMARQUE :*

Si l'on trouvait une fonction $f_\phi$ (*cf.* (2 — 2 — 5) ) conduisant à un meilleur majorant de U, la méthode précédente permettrait d'améliorer la majoration de $V(\rho)$. Il n'est d'ailleurs pas exclu que $V(\rho)$ soit égal à $\frac{1}{\rho} U^\rho$.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] R. P. Boas. — Expansions of analytic functions. *Transactions of the American Mathematical Society.* vol. 48 (1940) p. 467-487.

[2] R. P. Boas. — Univalent derivatives of entire functions. *Duke Mathematical Journal.* Vol. 6 (sept. 1940) p. 719-721.

[3] R. P. Boas. — Functions of exponential type (II). *Duke Mathematical Journal.* Vol. 11 (mars 1944) p. 17-22.

[4] R. P. Boas. — An upper bound for the Gontcharoff constant. *Duke Mathematical Journal.* Vol. 15 (déc. 1948) p. 953-954.

[5] E. Borel. — Leçons sur les fonctions entières. *Collection de monographies sur la théorie des fonctions.* Paris, Gauthier-Villars (1921).

[6] G. Bourion. — Recherches sur l'ultraconvergence. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure.* tome 50 (1933) p. 245-318.

[7] G. Bourion. — L'ultraconvergence dans les séries de Taylor. *Actualités Scientifiques et Industrielles.* 472 (1937).

[8] J. Combes. — Sur les zéros des dérivées successives des fonctions analytiques (I et II). *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.* Tome 240 (1955) p. 39-41 et 145-146.

[9] J. Combes. — Sur certains systèmes infinis d'équations linéaires (II et III). *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.* Tome 23 (1959, paru en 1961).

[10] R. Cooke. — Infinite matrices and sequence spaces. Londres (1950).

[11] S. H. Doss. — A theorem on uniqueness. *Journal of the London Mathematical Society.* Vol. 18 (1943) p. 137-140.

[12] W. Gontcharoff. — Recherches sur les dérivées successives des fonctions analytiques. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure.* Tome 47 (1930) p. 1-78.

[13] G. Julia. — Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé. *Collection de monographies sur la théorie des fonctions.* Paris, Gauthier-Villars (1924).

[14] N. Levinson. — A theorem of Boas. *Duke Mathematical Journal.* Vol. 8 (mars 1941) p. 181-182.

[15] S. S. Macintyre. — An upper bound for the Whittaker constant W. *Journal of the London Mathematical Society.* Vol. 22 (1947) p. 305-311.

[16] S. S. Macintyre. — On the zeros of successive derivatives of integral functions. *Transactions of th American Mathematical Society.* Vol. 67 (1949) p. 241-251.

[17] Y. Martin. — Sur les séries d'interpolation. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure.* Tome 66 (1949) p. 311-366.

[18] G. Polya et G. Szego. — Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Vol. 1 et 2. Berlin (1954).

[19] M. Pommiez. — Sur les zéros des restes successifs des séries de Taylor. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.* Tome 250 (février 1960), p. 1168-1170.

[20] M. Pommiez. — Sur les restes successifs des séries de Taylor. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.* Tome 250 (avril 1960) p. 2669-2671.

[21] M. Pommiez. — Sur les restes et les dérivées des séries de Taylor. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.* Tome 251 (oct. 1960) p. 1707-1709.

## TABLE DES MATIÈRES