ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

R. DESQ

Relations d'équivalence principales en théorie des demi-groupes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 27 (1963), p. 1-149
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1963_4_27__P1_0>

Relations d'équivalence principales en théorie des demi-groupes

INTRODUCTION

Dans un demi-groupe D, les relations d'équivalence principales à gauche ou à droite introduites par P. Dubreil, bilatères introduites par R. Croisot, sont liées très directement à l'opération du demi-groupe. Le point de départ de ce travail est l'étude des relations d'un type analogue, définies dans $D^{[p]}$, produit cardinal de p demi-groupes isomorphes à D. Plus précisément, considérons une partition de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ en trois sous-ensembles

$$I = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \quad J = \{\beta_1, \ldots, \beta_q\}, \quad J^* = \{\beta^*_1, \ldots, \beta^*_{q^*}\},$$

dont le premier I est non vide. Désignons par D^* le demi-groupe obtenu en adjoignant à D un élément unité 1_{D^*}.

Soient $A = [a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_p]$ un élément de $D^{[p]}$,

$X = [x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_q]$ un élément de $D^{[q]}$,

$U = [u_1, \ldots, u_{j^*}, \ldots, u_{q^*}]$ un élément de $D^{*[q^*]}$.

Nous représentons par $A_K[X, U]$ l'élément $y_1 \ldots y_n$ de D défini de la manière suivante :

$$y_k = a_i, \quad \text{pour } k = \alpha_i \in I,$$

$$y_k = x_j, \quad \text{pour } k = \beta_j \in J,$$

$$y_k = u_{j^*}, \quad \text{pour } k = \beta^*_{j^*} \in J^*.$$

Soit H un complexe de D ; si A est un élément de $D^{[p]}$, la relation $A_K[X, U] \in H$ peut être considérée comme une équation d'inconnues X et U. Deux éléments A et B de $D^{[p]}$ sont congrus mod. R^K_H si et seulement si les deux équations $A_K[X, U] \in H$ et $B_K[X, U] \in H$ admettent les mêmes solutions.

Le nombre entier positif p et le complexe H étant donnés, il existe plusieurs relations de la forme R_H^K opérant dans $D^{[p]}$; leur ensemble est l'image par une application isotone d'un interdemitreillis complet. Il existe en particulier, une relation $R_H^{K'}$ plus fine que les autres, celle qui correspond à la partition K' de l'ensemble $\{1, 2, \dots 2p+1\}$ définie par $I = \{2, 4, \dots, 2p\}$, $J = \phi$, $J^* = \{1, 3, \dots, 2p+1\}$.

Dans le premier chapitre qui est principalement consacré à l'étude générale des R_H^K, nous définissons la notion de complexe K - fort. Soit H un complexe du demi-groupe D ; H est K - fort si les conditions $A_K[X, U] \in H$, $B_K[X, U] \in H$, $A_K[Y, V] \in H$ impliquent $B_K[Y, V] \in H$.

Lorsque p est égal à 1, K est représenté d'une manière plus suggestive par un couple (r, s) d'entiers supérieurs ou égaux à - 1 ; r est le nombre d'éléments de J qui précédent l'unique élément α de I ($r = -1$ si α est précédé par un élément de J^*) s est le nombre d'éléments de J qui suivent α ($s = -1$ si α est suivi par un élément de J^*). Avec ces notations, la relation d'équivalence R_H^K la plus fine, définie dans D, correspond au couple (-1, -1) ; les relations correspondant à (-1, O) et (O, -1) sont également importantes. La notion de complexe K - fort permet de préciser certaines propriétés ; par exemple, soit H un complexe bilatèrement fort ; alors toute classe mod R' différente du résidu W'_H est un complexe (-1, -1) - fort ; si H est un complexe bilatèrement parfait, la classe K mod. R'_H qui le contient est le plus petit complexe (-1, -1) - fort engendré par H. Pour un sous-demi-groupe, le fait d'être fort ou unitaire, ou K - fort sont des propriétés étroitement liées ; en effet, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-demi-groupe soit (O, -1) - fort est qu'il soit fort et unitaire à droite.

Le cas où p est égal à 1 est évidemment le plus important, mais la première partie du chapitre II montre l'intérêt qu'il y a à passer constamment de D à $D^{[2]}$ par exemple. Nous voyons ainsi que les complexes dits semi-forts donnent pour les relations correspondantes des propriétés analogues à celles obtenues avec les complexes forts.

Dans la suite de ce chapitre, nous continuons l'étude des complexes liés aux relations R_H^K. Un complexe H est homomorphique [resp. homomorphique à droite] s'il existe une relation d'équivalence régulière [resp. régulière à droite] admettant H comme classe d'équivalence ; dans ce cas, H est une classe mod. $R_H^{(-1,-1)}$ [resp. $R_H^{(O,-1)}$]. Tout complexe (-1,-1) fort est homomorphique. Nous donnons également certains théorèmes de structure, par exemple :

Pour un demi-groupe D, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Tout sous-demi-groupe de D est (O,-1) - fort,

b) Tout sous-demi-groupe de D est unitaire à droite,

c) D est isomorphe au produit direct d'un zéro-demi-groupe à gauche par un groupe périodique.

Le K - résidu W_H^K d'un complexe H est l'ensemble des éléments A de $D^{[p]}$ tels que l'équation $A_K[X,U] \in H$ soit sans solutions. $W_H^{(O,-1)}$ est un idéal à droite, inversement, un idéal à droite propre quelconque est le (O,-1) - résidu d'au moins un complexe H. Ceci permet d'étendre aux idéaux quelconques certains résultats de la thèse de P. Lefebvre concernant les idéaux fortement larges.

Un homomorphisme φ d'un demi-groupe D sur un groupe G avec ou sans zéro est déterminé par l'image réciproque $\overset{-1}{\varphi}(e)$ de l'élément unité e de G. Cette image réciproque est un sous-demi-groupe réflectif et unitaire de D. Plus généralement, considérons un homomorphisme φ de D sur un demi-groupe E ayant un élément unité à droite e, $\overset{-1}{\varphi}(e)$ est un complexe homomorphique particulier de D appelé sous-demi-groupe U_d - homomorphique ou plus brièvement U_d - h [U - h si e est un élément unité bilatère]. Inversement, si S est un sous-demi-groupe U_d - h [resp. U - h] , $D|R_S^{(-1,-1)}$ est un demi-groupe admettant la classe formée par S comme élément unité à droite [resp. bilatère].

Dans le chapitre III, pour préciser les propriétés de ces sous-demi-groupes, nous sommes d'abord amenés à étudier les demi-groupes ayant des éléments neutres. Nous obtenons des théorèmes de décomposition. Un demi-groupe D ayant un élément unité à droite e est la somme de cinq sous-demi-groupes G, A', B', B'', C. Par exemple G est le sous-groupe maximum de D admettant e comme élément unité. Les éléments grossissants, introduits par E.S. Ljapin, permettent de préciser la nature de B'', qui est l'ensemble des éléments grossissants à droite de D. Nous pouvons alors poursuivre la décomposition, en faisant intervenir l'ensemble E des éléments neutres à droite. En particulier, si D est périodique, D est égal à $\sum_{e \in E} G_e + C$ où les sous-demi-groupes G_e sont des groupes isomorphes qui vérifient la loi de multiplication suivante : $\forall e, f \in E, \quad G_e \cdot G_f = G_e$; si C n'est pas vide, c'est l'idéal bilatère maximum de D.

Ces décompositions permettent d'obtenir certaines propriétés pour les demi-groupes quelconques :

Si S est un sous-demi-groupe U - h de D et si ${}_SW$ est contenu dans W_S (ou si $W_S \leq {}_SW$), S est réflectif, unitaire et équirésiduel.

Dans un demi-groupe périodique, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-demi-groupe soit U - h est qu'il soit réflectif et unitaire.

Un demi-groupe est dit U - simple s'il contient un élément unité e et si $R_{\{e\}}^{(-1,-1)}$ est l'égalité. Un groupe avec ou sans zéro est un demi-groupe U - simple particulier. Si φ est un homomorphisme d'un demi-groupe quelconque D sur un demi-groupe U - simple E d'élément unité e, φ est complètement déterminé par la connaissance du sous-demi-groupe $\varphi^{-1}(e)$.

Signalons encore le résultat suivant :

Tout demi-groupe U - simple holomorphe à un idéal bilatère d'un demi-groupe D est holomorphe à D.

Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance à M. P. Dubreil qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury de ma thèse. Ses encouragements m'ont été d'un très grand secours pendant toute la durée de mes recherches. Je suis également très heureux de remercier M. R. Croisot, rapporteur de cette thèse, pour les précieux conseils qu'il m'a donnés pendant sa rédaction. M. le Professeur Deheuvels a bien voulu s'intéresser à mon travail et me donner un second sujet ; je l'en remercie très vivement.

CHAPITRE I

DEFINITIONS ET PROPRIETES DES EQUIVALENCES PRINCIPALES DANS $D^{[p]}$

1) Définition des ${}_{\Omega}R^{K}_{H}$

D représente, sauf mention du contraire, un demi-groupe quelconque. Pour les notions fondamentales sur les demi-groupes, nous renvoyons au chapitre V de l'algèbre de Paul Dubreil (10), au livre de E.S. Ljapin (22), ou au livre de A.H. Clifford et G.B. Preston (4).

Nous désignerons par D^* le demi-groupe obtenu en adjoignant à D un élément 1_{D^*} ($1_{D^*} \notin D$) et en posant par définition :

$$\forall a \in D \ ; \ 1_{D^*} \cdot a = a \cdot 1_{D^*} = a, \quad \text{et} \quad 1_{D^*} \cdot 1_{D^*} = 1_{D^*}$$

Décomposons l'ensemble des n premiers nombres entiers $\{1, 2, \ldots, n\}$ en trois sous-ensembles disjoints :

$$I = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \qquad J = \{\beta_1, \ldots, \beta_q\}, \qquad J^* = \{\beta_1^*, \ldots, \beta_{q^*}^*\}$$

Nous avons $p + q + q^* = n$, nous supposerons de plus $p \neq 0$. L'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ muni de cette partition sera désigné par K.

Soient : $A = [a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_p]$ un élément de $D^{[p]}$,

$X = [x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_q]$ un élément de $D^{[q]}$,

$U = [u_1, \ldots, u_{j^*}, \ldots, u_{q^*}]$ un élément de $D^{*[q^*]}$.

Nous représenterons par $A_K[X, U]$ le monôme $y_1 y_2 \ldots y_n$ défini de la manière suivante : $y_k = a_i$, si $k \in I$ et si $k = \alpha_i$; $y_k = x_j$, si $k \in J$ et si $k = \beta_j$; $y_k = u_{j^*}$, si $k \in J^*$ et si $k = \beta^*_{j^*}$.

Si H est un complexe de D, et si A est un élément fixé de $D^{[p]}$, nous considèrerons $A_K[X, U] \in H$ comme une équation d'inconnues X, U.

Nous dirons que deux équations de ce type sont équivalentes relativement à un domaine $\Omega \subseteq D^{[q]} \times D^{*[q^*]}$, si et seulement si elles admettent les mêmes solutions dans Ω.

<u>Définition 1.1.</u> - Deux éléments A et B de $D^{[p]}$ sont congrus mod. ${}_{\Omega}R^{K}_{H}$, $A \equiv B \; ({}_{\Omega}R^{K}_{H})$, si et seulement si les équations $A_K\,[X, U] \in H$, $B_K\,[X, U] \in H$ sont équivalentes relativement à Ω.

${}_{\Omega}R^{K}_{H}$ est évidemment une relation d'équivalence dans $D^{[p]}$. Lorsque Ω est égal à $D^{[q]} \times D^{*[q^*]}$ nous écrivons R^{K}_{H} au lieu de ${}_{\Omega}R^{K}_{H}$.

<u>Remarque 1.1.</u> - Si J et J sont vides, $A_K\,[X, U]$ représente le produit $a_1 a_2 \ldots\ldots a_p$ où $A = [a_1, a_2, \ldots\ldots, a_p]$. Si $B = [b_1, b_2, \ldots\ldots, b_p]$, $A \equiv B\; (R^{K}_{H})$ si et seulement si les deux produits $a_1 a_2 \ldots\ldots a_p$, $b_1 b_2 \ldots\ldots b_p$ appartiennent tous les deux à H, ou tous les deux à D - H.

<u>Exemples</u> : Prenons $\Omega = D^{[q]} \times D^{*[q^*]}$;

si K a un élément, $K = I = \{1\}$, $a \equiv b\; (R^{K}_{H}) \Longleftrightarrow a \in H$ et $b \in H$, ou $a \in D - H$ et $b \in D - H$

Si K a 2 éléments :

- $K = (\alpha_1, \alpha_2)$, $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $A \equiv B\; (R^{K}_{H}) \Longleftrightarrow$ $a_1 a_2 \in H$ et $b_1 b_2 \in H$, ou $a_1 a_2 \in D - H$ et $b_1 b_2 \in D - H$.
- $K = (\alpha_1, \beta_1)$, $R^{K}_{H} = R_H$ (équivalence principale à droite(7))
- $K = (\alpha_1, \beta^*_1)$, R^{K}_{H} sera notée ρ_H.
- $K = (\beta_1, \alpha_1)$, $R^{K}_{H} = {}_{H}R$ (équivalence principale à gauche).
- $K = (\beta^*_1, \alpha_1)$, R^{K}_{H} sera notée ${}_{H}\rho$.

Lorsque K a trois éléments nous avons par exemple :

si $K = (\beta_1, \alpha_1, \beta_2)$, $R^{K}_{H} = R'_H$ (équivalence principale bilatère (6)),

si $K = (\beta^*_1, \alpha_1, \beta^*_2)$, R^{K}_{H} sera notée ρ'_H.

Ces exemples montrent que nous pouvons donner aux ${}_{\Omega}R^{K}_{H}$ le nom d'équivalences principales dans $D^{[p]}$.

2) Relations d'ordre dans l'ensemble des ${}_{\Omega}R^{K}_{H}$:

A) H et K fixes.

Considérons deux domaines Ω et Ω' inclus dans $D^{[q]} \times D^{*[q^*]}$. La relation $\Omega \leq \Omega'$ entraîne ${}_{\Omega}R^{K}_{H} \geq {}_{\Omega'}R^{K}_{H}$; en effet, si $A \equiv B({}_{\Omega'}R^{K}_{H})$, les équations $A_K\,[X, U] \in H$ et $B_K\,[X, U] \in H$ sont équivalentes relativement à Ω' et donc à fortiori relativement à Ω ; d'où $A \equiv B\,({}_{\Omega}R^{K}_{H})$.

Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de parties de $D^{[q]} \times D^{*[q^*]}$. Posons $\Omega = \bigcap_{i \in I} \Omega_i$ et $\Delta = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, nous avons

$$\bigwedge_{i \in I} {}_{\Omega_i}R^{K}_{H} = {}_{\Delta}R^{K}_{H} \quad \text{et si } \Omega \neq \emptyset, \quad \bigvee_{i \in I} {}_{\Omega_i}R^{K}_{H} \leq {}_{\Omega}R^{K}_{H}$$

où $\wedge$ (resp. $\vee$) désigne l'intersection (resp. l'union) dans le treillis des relations d'équivalence de $D^{[p]}$.

En effet, $\forall\, i \in I$, $\Omega \leq \Omega_i \leq \Delta$ d'où, $\forall\, i \in I$, ${}_{\Omega}R^{K}_{H} \geq {}_{\Omega_i}R^{K}_{H} \geq {}_{\Delta}R^{K}_{H}$,

ce qui entraîne $\bigvee_{i \in I} {}_{\Omega_i}R^{K}_{H} \leq {}_{\Omega}R^{K}_{H}$ et $\bigwedge_{i \in I} {}_{\Omega_i}R^{K}_{H} \geq {}_{\Delta}R^{K}_{H}$.

Mais d'autre part, si $\forall\, i \in I$, $A \equiv B\,({}_{\Omega_i}R^{K}_{H})$ et si $A_K\,[X, U] \in H$ est vérifiée pour un élément $[X, U]$ de Δ, il existe un indice ξ de I avec $[X, U] \in \Omega_\xi$, la relation $A \equiv B\,({}_{\Omega_\xi}R^{K}_{H})$ entraîne $B_K\,[X, U] \in H$. Par symétrie, on en déduit $A \equiv B\,({}_{\Delta}R^{K}_{H})$.

Par la suite, nous nous limiterons au cas où $\Omega = D^{[q]} \times D^{*[q^*]}$, d'après ce qui précède, c'est ce domaine qui donne les relations d'équivalence les plus fines.

B) $\Omega = D^{[q]} \times D^{*[q^*]}$, H fixe, puissance de I fixe.

a) Si, dans K, il y a entre deux éléments consécutifs α_i, α_{i+1} de I (ou avant α_1, ou après α_p) des éléments de J et des éléments de J^*, on peut supprimer ces derniers sans modifier la relation d'équivalence R^{K}_{H}. En effet, soit β^*_r un élément de J^* compris entre α_i et α_{i+1}, supposons

β^*_r précédé par un élément β_s de J. Soit K' l'ensemble obtenu à partir de K en supprimant β^*_r . $A_K\ [X, U]$ s'écrit $v_1 x_s u_r v_2$, où v_1 et v_2 sont deux monômes, ($X = [x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_q]$, $U = [u_1, \ldots, u_r, \ldots, u_{q^*}]$). Appelons X' l'élément de $D^{[q]}$ déduit de X en remplaçant x_s par $x_s u_r$, U' l'élément de $D^{*[q^*-1]}$ déduit de U en supprimant la composante de rang r ; alors $A_K\ [X, U] = A_{K'}\ [X', U']$. Inversement, $X' \in D^{[q]}$ et $U' \in D^{*[q^*-1]}$ étant donnés, prenons pour U l'élément de $D^{*[q^*]}$ déduit de U' en conservant les r - 1 premières composantes, en décalant les autres d'un rang et en prenant 1_{D^*} comme $r^{\text{ième}}$ composante. Alors $A_{K'}\ [X', U'] = A_K\ [X', U]$. Maintenant, si A et B sont deux éléments de $D^{[p]}$ congrus mod. R^K_H et si $A_{K'}\ [X', U'] \in H$, d'après la construction précédente, il existe X et U avec $A_K\ [X, U] = A_{K'}\ [X', U']$ et $B_K\ [X, U] = B_{K'}\ [X', U']$. $A \equiv B\ (R^K_H)$ donne $B_K\ [X, U] \in H$ et par suite $A \equiv B\ (R^{K'}_H)$. De même $A \equiv B\ (R^{K'}_H)$ donne $A \equiv B\ (R^K_H)$; d'où $R^K_H = R^{K'}_H$. On a la même démonstration si β^*_r est non pas précédé mais suivi par un élément de J. En répétant le raisonnement précédent on peut donc supprimer tous les éléments de J^* compris entre α_i et α_{i+1}.

b) Si, dans K, entre deux éléments consécutifs α_i , α_{i+1} de I il y a des éléments de J^* (d'après le a) on peut supposer qu'il n'y en a pas de J), on ne modifie pas R^K_H en faisant varier leur nombre sans l'annuler. Démonstration analogue à celle de a).

Par la suite, nous supposerons donc qu'entre deux éléments consécutifs de I (ou avant α_1, ou après α_p) il y a au maximum un élément de J^* , et que s'il y a des éléments de J alors il n'y en a pas de J^*. On a donc $q^* \leq p + 1$.

Dans ce qui suit, K désignera une partition $I \cup J \cup J^*$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, K' une partition $I' \cup J' \cup J'^*$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n'\}$, on suppose que les deux sous-ensembles I et I' ont le même nombre p d'éléments. Par hypothèse, l'écriture $\alpha_{i+1} > \alpha_i+1$ signifiera que :

pour $i = 1,2,\ldots, p-1$, les deux éléments α_i, α_{i+1} de I ne sont pas consécutifs;

pour $i = O$, l'élément α_1 de I est plus grand que 1 ;

pour $i = p$, l'élément α_p de I est plus petit que n.

c) Supposons que, pour un i, nous ayons s éléments $\beta_j,\ldots,\beta_{j+s-1}$ de J entre α_i et α_{i+1} dans K et r éléments $\beta'_{j'},\ldots,\beta'_{j'+r-1}$ de J' entre α'_i et α'_{i+1} dans K' avec $r \geqslant s$; supposons de plus que K et K' soient identiques avant α_i et après α_{i+1}. Soit $X' = [x'_1,\ldots, x'_j,\ldots, x'_{q'}]$ un élément de $D^{[q']}$, alors, si nous posons $X = [x_1,\ldots, x_q]$, avec $x_i = x'_i$ pour $i < j$, $x_i = x'_{q'-q+i}$ pour $i > j$ et $x_j = x'_j\ldots x'_{j+r-s}$, nous avons $A_K[X, U] = A_{K'}[X', U]$.

d) Supposons que nous ayons entre α_i et α_{i+1} un élément $\beta^*_{j^*}$ de J^* dans K, les autres hypothèses de c) étant conservées avec $r \geqslant 1$. On a $q'^* = q^* - 1$. A partir de $X' = [x'_1,\ldots, x'_{q'}]$ et de $U' = [u'_1,\ldots, u'_{q'^*}]$, construisons $X = [x_1,\ldots, x_q]$ et $U = [u_1,\ldots, u_q]$ en posant :

$x_j = x'_j$ si $j < j'$, $x_j = x'_{j+r}$ si $j \geqslant j'$;

$u_j = u'_j$ si $j < j^*$, $u_{j^*} = x'_{j'}\ldots x'_{j'+r-1}$, $u_j = u'_{j-1}$ si $j > j^*$;

alors, $A_K[X, U] = A_{K'}[X', U']$.

e) Supposons maintenant que, dans K', on ait $\alpha'_{i+1} = \alpha'_i + 1$ (ce qui signifie : pour $i = O$, $\alpha'_1 = 1$; pour $i = p$, $\alpha'_p = n$), les autres hypothèses de d) étant conservées. A partir de $U' = [u'_1,\ldots, u'_{q'^*}]$ construisons $U = [u_1,\ldots, u_{q^*}]$ en posant $u_j = u'_j$ si $j < j^*$, $u_{j^*} = 1_D^*$,

$u_j = u'_{j-1}$ si $j > j^*$ alors $A_K [X, U] = A_{K'} [X, U']$.

f) Nous écrirons $K \leq K'$ si nous passons de K à K' de la manière suivante :

1) K et K' ont des sous-ensembles I et I' équipotents :

$I = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_p\}$, $I' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_i, \ldots, \alpha'_p\}$.

2) si $\alpha_{i+1} = \alpha_i + 1$ dans K, $\alpha'_{i+1} = \alpha'_i + 1$ dans K'.

3) si entre α_i et α_{i+1} il y a s éléments de J dans K, alors dans K', il y a r éléments de J' entre α'_i et α'_{i+1} , avec $r \geq s$.

4) si entre α_i et α_{i+1} il y a un élément de J^* dans K, aucune condition n'est imposée à K' entre α'_i et α'_{i+1}.

Pour p fixé, la relation $\leq$ est une relation d'ordre dans l'ensemble $\overline{K}$ des K qui ont un sous-ensemble I de puissance p.

Si nous avons les relations : $K \leq K'$, $A \equiv B\ (R_H^K)$, $A_{K'} [X', U'] \in H$, d'après c, d, e, f, il existe $X \in D^{[q]}$, $U \in D^{*[q^*]}$ avec $A_K [X, U] = A_{K'} [X', U']$, $B_K [X, U] = B_{K'} [X', U']$; $A_K [X, U] \in H$ et $A \equiv B\ (R_H^K)$ impliquent $B_K [X, U] \in H$ et $B_{K'} [X', U'] \in H$.

Donc, pour tout complexe H, la condition $K \leq K'$ entraîne $R_H^K \leq R_H^{K'}$.

<u>Théorème 2.1.</u>- p étant fixé, l'ensemble des relations d'équivalence principales dans $D^{[p]}$, pour H donné, est l'image, par une application isotone, d'un inter-demi-treillis complet.

D'après ce qui précède, il suffit de montrer que $\overline{K}$ est un inter-demi-treillis complet pour la relation d'ordre définie dans f).

Soit $K_i = I_i \cup J_i \cup J_i^*$, $i \in I$, une famille quelconque d'éléments de $\overline{K}$. $K = \bigcap_{i \in I} K_i$ est obtenu de la manière suivante :

- si, entre deux éléments consécutifs de I_i , α'_i et α'_{i+1} , il y a r_i éléments de J_i , et si $\forall\, i \in I$, $r_i \neq O$, on prend, dans K, r éléments de J entre α_i et α_{i+1} , avec $r = \inf_{i \in I} r_i$.
- si, $\forall\, i \in I$, $\alpha^i_{i+1} = \alpha^i_i + 1$, on pose $\alpha_{i+1} = \alpha_i + 1$ dans K.
- dans les autres cas, on met, dans K, un élément de J^* entre α_i et α_{i+1}.

L'élément minimum de cet inter-demi-treillis est obtenu en prenant J vide et J^* formé de p+1 éléments, à cet élément correspond l'équivalence principale la plus fine.

Exemple p = 1.

K est caractérisé par le nombre r d'éléments de J qui précèdent l'unique élément de I et par le nombre s de ceux qui le suivent. Nous noterons K = (r, s). Si l'élément de I est précédé [suivi] par un élément de J^*, nous poserons $r = -1$ [$s = -1$] .

$\overline{K} = \{K\} = \{(r,s) \; ; \; r \geq -1 \; , \; s \geq -1\}$, avec comme relation d'ordre

$$(r,s) \leq (r',s') \iff \begin{cases} \text{pour } r \neq O \; , \; s \neq O \; ; \; r \leq r' \; , \; s \leq s' \; . \\ r = O, \; s \neq O \; ; \; r' = O \; , \; s \leq s' \; . \\ r \neq O \; , \; s = O \; ; \; r \leq r' \; , \; s' = O \; . \\ r = O \; , \; s = O \; ; \; r' = O \; , \; s' = O \; . \end{cases}$$

Pour $r \geq O$, $s \geq O$, $r + s \neq O$, nous retrouvons les relations étudiées par J. Calais (1), (2), (3). Avec ces notations, ρ_H correspond à (O, - 1), ${}_H\rho$ à (-1,O) , ρ'_H à (-1,-1) , ρ'_H est donc l'équivalence principale la plus fine définie dans D.

Revenons au cas général, p quelconque. $K \neq K'$ n'entraîne pas toujours $R^K_H \neq R^{K'}_H$. En particulier, supposons qu'il existe un nombre c tel que $D^c = D^{c+1}$; alors , si, dans K, il y a c éléments de J entre α_i et α_{i+1}, et si on passe de K à K' en augmentant ce nombre, nous avons $R^K_H = R^{K'}_H$. En effet, si

$x_1 \ldots x_c$ est un élément de D^c, $\forall r \geq 0$, il existe un élément $y_1 \ldots y_{c+r}$ de de D^{c+r} égal à $x_1 \ldots x_c$ car $D^c = D^{c+1}$ implique $D^c = D^{c+r}$. Un élément X de $D^{[q]}$ étant donné, nous pouvons donc trouver un élément X' de $D^{[q+r]}$ vérifiant $A_K [X, U] = A_{K'} [X', U]$. Le raisonnement fait dans f) donne $R_H^{K'} \leq R_H^K$. Mais $K \leq K'$, ce qui implique

$$R_H^K \leq R_H^{K'} \quad , \quad \text{d'où} \quad R_H^K = R_H^{K'} .$$

<u>Théorème 2.2.</u>- Si γ est le plus petit nombre tel que $D^{\gamma} = D^{\gamma+1}$, alors, quel que soit le complexe H, le nombre de relations R_H^K distinctes dans $D^{[p]}$ est inférieur ou égal à $N = (\gamma + 2)^{p+1}$

Supposons d'abord J^* vide.

Soit A_r^p le nombre de K distincts, lorsque, $\forall i \in \{0,1,\ldots p\}$, le nombre d'éléments de J compris entre α_i et α_{i+1} est inférieur ou égal à r.

$A_0^p = 1$.

A_1^p, si J contient un seul élément, nous avons p + 1 K distincts,

si J contient q éléments, $(q \leq p + 1)$, nous avons C_{p+1}^q K distincts,

d'où $A_1^p = 1 + C_{p+1}^1 + \ldots + C_{p+1}^q + \ldots + C_{p+1}^{p+1} = (1 + 1)^{p+1} = 2^{p+1}$.

A_s^p, si le nombre maximum d'éléments de J dans chaque case est inférieur ou égal à s - 1, nous avons A_{s-1}^p possibilités par définition,

- si seule une case contient s éléments, il reste A_{s-1}^{p-1} possibilités pour les autres, soit donc au total $A_{s-1}^{p-1} \cdot C_{p+1}^1$ cas distincts ;

- il y a C_{p+1}^q possibilités de mettre s éléments dans q cases distinctes, et chaque fois il reste A_{s-1}^{p-q} cas possibles, soit pour $q < p$,

$A_{s-1}^{p-q} \cdot C_{p+1}^q$;

- pour $q = p$, il reste chaque fois une case libre, c'est-à-dire s cas.

Nous avons donc $A^p_s = A^p_{s-1} + A^{p-1}_{s-1} . C^1_{p+1} \ldots + \ldots + A^{p-q}_{s-1} . C^q_{p+1} + \ldots + s . C^p_{p+1} + C^{p+1}_{p+1}$

Calculons $A^p_2 = 2^{p+1} + 2^p C^1_{p+1} + \ldots\ldots + 2^{p+1-q} C^q_{p+1} + \ldots\ldots + C^{p+1}_{p+1} = 3^{p+1}$

Supposons que nous ayons, pour $r < s$ et pour tout q, $A^q_r = (r+1)^{q+1}$; alors,

$A^p_s = s^{p+1} + s^p C^1_{p+1} + \ldots\ldots + s^{p+1-q} C^q_{p+1} + \ldots\ldots + C^{p+1}_{p+1} = (s+1)^{p+1}$.

Ce calcul est évidemment valable pour tout p. On a en particulier $A^p_\gamma = (\gamma+1)^{p+1}$. D'après le résultat qui précède l'énoncé du théorème 2.2., N est obtenu en mettant au maximum γ éléments de J dans chaque case. Si J^* n'est pas vide, lorsqu'un élément de J^* occupe une case, cette case ne peut contenir des éléments de J. Si J^* a q éléments, $q < p$, on a C^q_{p+1} possibilités pour les placer, et chaque fois il reste A^{p-q}_γ cas distincts pour les éléments de J.

Pour $q = p$, il reste $\gamma + 1$ cas. Donc au total nous avons

$$N = A^p_\gamma + A^{p-1}_\gamma C^1_{p+1} + \ldots\ldots + A^{p-q}_\gamma C^q_{p+1} + \ldots\ldots + (\gamma+1) C^p_{p+1} + C^{p+1}_{p+1} = A^p_{\gamma+1}$$

$$N = (\gamma + 2)^{p+1}$$

Cas particuliers :

Si D contient un élément unité e, alors $u = 1_{D^*}$ est équivalent à $u = e$. On peut donc supposer J^* vide, comme $D = D^2$, $N = 2^{p+1}$.

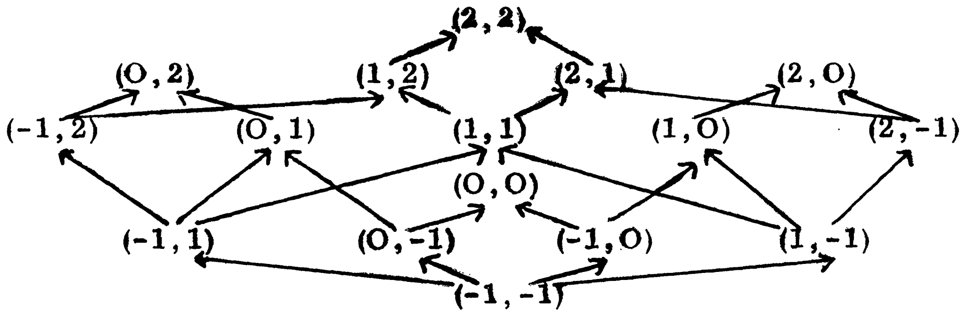
Si D est commutatif, des monômes ne différant que par leur ordre coïncident, on peut grouper tous les éléments de I au début, on a l'$\cap$-demi-treillis suivant :

$$\begin{array}{l} \nearrow (I) \\ (I, \beta^*_1) \\ \searrow (I, \beta_1) \longrightarrow (I, \beta_1, \beta_2) \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow (I, \beta_1, \ldots, \beta_q) \longrightarrow \ldots\ldots \end{array}$$

si $D^\gamma = D^{\gamma+1}$, on a au plus $\gamma + 2$ relations distinctes quel que soit p.

Si D est commutatif et a un élément unité, il ne reste que $(I, \beta_1) \longrightarrow (I)$.

Exemple : $p = 1$, $\gamma = 2$, D non commutatif, $N = 16$, les équivalences R^K_H correspondent à l'$\cap$-demi-treillis suivant :



3) Propriétés générales des R^K_H

Lemme 3.1.-

Si $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$ et si $(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_p) \equiv (b_1, \dots, b_i, b_{i+1}, \dots, b_p)$ (R^K_H)

alors, $\forall\ y, z \in D^*$,

$(a_1, \dots, a_i y, z a_{i+1}, \dots, a_p) \equiv (b_1, \dots, b_i y, z a_{i+1}, \dots, b_p)$ (R^K_H).

De l'hypothèse $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$, résulte que α_i est suivi par un élément β_j de $J \cup J^*$ et que α_{i+1} est précédé par un élément $\beta_{j'}$ de $J \cup J^*$.

- Supposons $j < j'$, alors d'après 2) B) β_j et $\beta_{j'}$ appartiennent à J.

$(a_1, \dots, a_i y, z a_{i+1}, \dots, a_p)_K \; [(x_1, \dots, x_j, \dots, x_{j'}, \dots, x_q) , U] =$

$(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_p)_K \; [(x_1, \dots, y x_j, \dots, x_{j'} z, \dots, x_q) , U]$. De l'égalité analogue vérifiée par les b_i, on déduit la conclusion du lemme.

- Supposons $j = j'$, et $\beta_j \in J$, alors

$(a_1, \ldots, a_i y, z a_{i+1}, \ldots, a_p)_K \left[(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_q), U\right] =$

$(a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_p)_K \left[(x_1, \ldots, y x_j z, \ldots, x_q), U\right]$.

- Supposons $j = j'$, et $\beta_j \in J^*$, alors

$(a_1, \ldots, a_i y, z a_{i+1}, \ldots, a_p)_K \left[X, (u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_{q^*})\right] =$

$(a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_p)_K \left[X, (u_1, \ldots, y u_j z, \ldots, u_{q^*})\right]$.

Considérons maintenant $D^{[p]}$ comme étant le produit direct de p demi-groupes isomorphes à D, on a donc, si $A = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_p)$ et $B = (b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_p)$ sont deux éléments quelconques de $D^{[p]}$,

$AB = (a_1 b_1, \ldots, a_i b_i, \ldots, a_p b_p)$.

<u>Théorème 3.1.</u> - Soit D un demi-groupe quelconque,

- si, $\forall i \geqslant 1$, $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$, R_H^K est régulière à droite dans $D^{[p]}$;
- si, $\forall i \leqslant p-1$, $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$, R_H^K est régulière à gauche dans $D^{[p]}$;
- si, $\forall i$, $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$, R_H^K est régulière dans $D^{[p]}$.

Si D est commutatif et si $J \cup J^*$ n'est pas vide, R_H^K est régulière dans $D^{[p]}$.

Les trois premières propositions sont une conséquence directe du lemme 3.1. Supposons D commutatif et soient A et B $(B = (b_1, \ldots, b_p))$ deux éléments de $D^{[p]}$, si par exemple J n'est pas vide, $AB_K \left[(x_1, \ldots, x_q), U\right] =$ $A_K \left[(b_1 \ldots . b_p x_1, \ldots, x_q), U\right]$, ce qui donne le résultat de la dernière proposition du théorème.

<u>Définition 3.1.</u>- K étant donné, le K-résidu de H dans $D^{[p]}$ est l'ensemble des $A \in D^{[p]}$, tels que $A_K [X, U] \in H$ n'admette pas de solution dans $D^{[q]} \times D^{*[q^*]}$. Cet ensemble sera noté W_H^K. Si W_H^K est vide, nous dirons que H est un complexe K-net.

Théorème 3.2. - Si W_H^K n'est pas vide, c'est une classe mod. R_H^K.

$\forall y, z \in D^*$, $(a_1, \dots, a_p) \in W_H^K$ et $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$ impliquent

$(a_1, \dots, a_i y, z a_{i+1}, \dots, a_p) \in W_H^K$.

- Si, $\forall$ i ≥ 1, $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$, W_H^K est un idéal à droite de $D^{[p]}$.

- Si, $\forall$ i, $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$, W_H^K est un idéal bilatère de $D^{[p]}$.

- Si D est commutatif et si $J \cup J^*$ n'est pas vide, W_H^K est un idéal de $D^{[p]}$.

La première proposition est une conséquence immédiate des définitions. Pour la deuxième, conservons les notations du lemme 3.1. Si pour un couple d'éléments y,z de D^*, $A = (a_1, \dots, a_i y, z a_{i+1}, \dots, a_p)$ n'appartenait pas à W_H^K, il existerait $X = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_{j'}, \dots, x_q)$ et U avec $A_K [X, U] \in H$, mais $A_K [X, U] = (a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_p)_K [(x_1, \dots, y x_j, \dots, x_{j'} z, \dots, x_q), U]$, $A_K [X, U] \in$ H contredirait donc l'hypothèse $(a_1, \dots, a_p) \in W_H^K$.

On a une démonstration semblable dans les deux autres cas du lemme 3.1. La fin du théorème résulte de cette proposition par une démonstration analogue à celle du théorème 3.1.

Théorème 3.3. -

a) $K \leq K' \Longrightarrow W_H^K \subseteq W_H^{K'}$.

b) Si on passe de K à K' en augmentant de r le nombre, supposé non nul, d'éléments de J compris entre α_i et α_{i+1}, alors

- si $1 \leq i \leq p$; $\forall y_j \in D$, $1 \leq j \leq r$ et $\forall s$, $0 \leq s \leq r$,

$(a_1, \dots, a_p) \in W_H^{K'} \Longrightarrow (a_1, \dots, a_i y_1 \dots y_s, y_{s+1} \dots y_r a_{i+1}, \dots, a_p) \in W_H^K$;

- si $i = O$; $\forall y \in D^r$, $(a_1,\dots,a_p) \in W_H^{K'} \Longrightarrow (ya_1,\dots, a_p) \in W_H^K$;

- si $i = p$; $\forall y \in D^r$, $(a_1,\dots,a_p) \in W_H^{K'} \Longrightarrow (a_1,\dots, a_p y) \in W_H^K$.

c) Inversement, si, $\forall y \in D^r$, $(a_1,\dots, a_i y, a_{i+1},\dots,a_p)$ appartiennent à W_H^K, alors $A = (a_1,\dots,a_p)$ appartient à $W_H^{K'}$ (pour $i = O$, on prend $(ya_1,\dots, a_p)$).

a) Soit A un élément de W_H^K, si A n'appartient pas à $W_H^{K'}$, il existe X' et U' vérifiant $A_{K'}$ $[X', U'] \in H$. $K \leq K'$ implique, d'après 2 B f, l'existence de X et U avec A_K $[X, U]$ $= A_{K'}$ $[X', U']$, on a donc A_K $[X, U] \in H$, ce qui contredit l'hypothèse.

b) Il faut envisager les deux premiers cas du lemme 3.1. Considérons uniquement le premier, on a une démonstration analogue pour le deuxième. Supposons qu'il existe $X = (x_1,\dots, x_j,\dots, x_{j'},\dots, x_q)$, U et $A' = (a_1,\dots, a_i y_1 \dots y_s, y_{s+1} \dots y_r a_{i+1},\dots, a_p)$ vérifiant A'_K $[X, U] \in H$.

Soient $A = (a_1,\dots, a_p)$, $X' = (x_1,\dots, x_{j-1}, y_1,\dots, y_s, x_j, \dots, x_{j'}, y_{s+1}, \dots, y_r, x_{j'+1},\dots, x_q)$,

$X' \in D^{[q+r]} = D^{[q']}$, A'_K $[X, U]$ $= A_{K'}$ $[X', U] \in H$, ce qui contredit $A \in W_H^{K'}$.

c) Supposons que A n'appartienne pas à $W_H^{K'}$, alors, il existe $X' = (x'_1, \dots, x'_{q'})$ et U vérifiant $A_{K'}$ $[X', U] \in H$.

Considérons les deux éléments X et A' définis par :

$X = (x_1,\dots, x_q)$ avec $x_k = x'_k$ si $k < j$, $x_k = x'_{k+r}$ si $k > j$ (j a été défini dans le lemme 3.1.) , $A' = (a_1,\dots, a_i y, a_{i+1},\dots, a_p)$ avec $y = x'_j \dots x'_{j+r-1}$;

$A_{K'}\left[X', U\right]$ est égal à $A_K\left[X, U\right]$, donc A' n'appartient pas à W_H^K, contrairement à l'hypothèse.

Remarque 3.1. - Si K est une partition de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, prenons un demi-groupe D tel que le complexe H égal à $D^n - D^{n+1}$ ne soit pas vide. W_H^K est différent de $D^{[p]}$, en effet, si $y_1 \ldots y_n$ est un élément de H, $(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_p})$ n'appartient pas à W_H^K. Pour tout K' tel que I' contienne p éléments et $I' \cup J'$ en contienne plus de n, $W_H^{K'}$ est égal à $D^{[p]}$. Cette remarque est à rapprocher du théorème 2.2 car elle montre que K étant donné $(K \neq I)$, on peut trouver un demi-groupe D, un complexe H, une partition $K' > K$ tels que R_H^K soit strictement plus fine que $R_H^{K'}$. En effet, on peut avoir W_H^K différent de $D^{[p]}$ et $W_H^{K'}$ égal à $D^{[p]}$.

Remarque 3.2. - Si H est un sous-demi-groupe de D, et si on passe de K à K' en ajoutant r éléments de J' au début et s éléments à la fin, $W_H^{K'}$ est inclus dans W_H^K. Si A n'appartient pas à W_H^K, il existe $X = (x_1, \ldots, x_q)$ et $U = (u_1, \ldots, u_q)$ vérifiant $A_K\left[X, U\right] \in H$.

Soient h_i, $1 \leq i \leq r$, h'_j, $1 \leq j \leq s$, des éléments de H.

Considérons les éléments X', U' définis par :

- si $\beta_1^* \neq 1$, $\beta_{q^*}^* \neq n$, $X' = (h_1, \ldots, h_r, x_1, \ldots, x_q, h'_1, \ldots, h'_s)$, $U' = U$;
- si $\beta_1^* = 1$, $\beta_{q^*}^* \neq n$, $X' = (h_1, \ldots, h_r u_1, x_1, \ldots, x_q, h'_1, \ldots, h'_s)$, $U' = (u_2, \ldots, u_q)$;

(définition analogue si $\beta_1^* \neq 1$, $\beta_{q^*}^* = n$ ou si $\beta_1^* = 1$, $\beta_{q^*}^* = n$).

Dans tous les cas, $A_{K'}\left[X', U'\right] = h_1 \ldots h_r \cdot A_K\left[X, U\right] \cdot h'_1 \ldots h'_s$ et par suite A n'appartient pas à $W_H^{K'}$. Si de plus $K \leq K'$ alors, d'après le théorème 3.3., W_H^K est égal à $W_H^{K'}$.

Supposons maintenant que nous ayons une partition de I :
$I = L \cup M$, avec $I = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, $L = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r)$, $M = (\alpha''_1, \ldots, \alpha''_s)$, $r + s = p$. Soient $K' = L \cup (M \cup J) \cup J^*$; $K'' = M \cup (L \cup J) \cup J^*$.
Dans K' par exemple, L joue le rôle de I dans K et $M \cup J$ celui de J. On conserve les éléments de J^* compris entre deux éléments de $M \cup J$ pour la commodité des démonstrations, (voir 2 B a).

<u>Définition 3.2.</u> - Dans $D^{[r]}$, on écrit $(a_1, \ldots, a_r) \equiv (b_1, \ldots, b_r)$ (R'^K_H) si et seulement si $(a'_1, \ldots, a'_p) \equiv (b'_1, \ldots, b'_p)$ (R^K_H) pour tous les éléments $(a'_1, \ldots, a'_p)$, $(b'_1, \ldots, b'_p)$ de $D^{[p]}$ construits de la façon suivante :

si $\alpha_i \in L$, soit $\alpha_i = \alpha'_k$, alors $a'_i = a_k$, $b'_i = b_k$,

si $\alpha_i \notin L$, alors $a'_i = b'_i$ (élément quelconque de D).

<u>Théorème 3.4.</u> - $R'^K_H = R^{K'}_H$.

Soient $(a_1, \ldots, a_r)$, $(b_1, \ldots, b_r)$, $X' = (x'_1, \ldots, x'_{q+s})$, U des éléments tels que $(a_1, \ldots, a_r) \equiv (b_1, \ldots, b_r)$ (R'^K_H) et $(a_1, \ldots, a_r)_{K'} [X', U] \in H$.

$\beta_j \in J$ donne $\beta_j \in J' = M \cup J$, il existe donc un indice j' défini par $\beta_j = \beta'_{j'}$; posons $X = (x_1, \ldots, x_q)$ avec $x_j = x'_{j'}$. Soit $A = (a'_1, \ldots, a'_p)$ l'élément de $D^{[p]}$, défini par : $a'_i = a_k$, si $\alpha_i \in L$ et si $\alpha_i = \alpha'_k$, $a'_i = x'_{m'}$ si $\alpha_i \in M$ et si $\alpha_i = \alpha''_m = \beta'_{m'}$ (qui existe car $M \subsetneq J'$) .
On a $(a_1, \ldots, a_r)_{K'} [X', U] = A_K [X, U]$ d'après la définition de K'.
Si $B = (b'_1, \ldots, b'_p)$ est construit de la même façon à partir de $(b_1, \ldots, b_r)$, d'après la définition de R'^K_H , $A \equiv B$ (R^K_H) , ce qui donne $B_K [X, U] \in H$ car

$A_K\,[X, U] \in H$. Mais $B_K\,[X, U] = (b_1, \dots, b_r)_{K'}\,[X', U]$, d'où $(b_1, \dots, b_r)_{K'}\,[X', U] \in H$ et $(a_1, \dots, a_r) \equiv (b_1, \dots, b_r)\ (R_H^{K'})$.

Inversement, supposons $(a_1, \dots, a_r) \equiv (b_1, \dots, b_r)\ (R_H^{K'})$ et soient $A = (a'_1, \dots, a'_p)$, $B = (b'_1, \dots, b'_p)$ deux éléments de $D^{[p]}$ construits à partir de $(a_1, \dots, a_r)$, $(b_1, \dots, b_r)$ comme l'indique la définition. Si $A_K\,[X, U] \in H$, à partir de A et de $X = (x_1, \dots, x_q)$ construisons $X' = (x'_1, \dots, x'_{q+s})$ de la manière suivante : $x'_{j'} = x_j$ si $\beta_{j'} \in J$ et si $\beta'_{j'} = \beta_j$,

$$x'_{j'} = a_i \text{ si } \beta'_{j'} \in M \text{ et si } \beta'_{j'} = \alpha'_m = \alpha_i .$$

On a alors $A_K\,[X, U] = (a_1, \dots, a_r)_{K'}\,[X', U]$ et $B_K\,[X, U] = (b_1, \dots, b_r)_{K'}\,[X', U]$, $(a_1, \dots, a_r) \equiv (b_1, \dots, b_r)\ (R_H^{K'})$ et $A_K\,[X, U] \in H$ entraînent $B_K\,[X, U] \in H$, d'où $A \equiv B\ (R_H^K)$ et $(a_1, \dots, a_r) \equiv (b_1, \dots, b_r)\ (R'^K_H)$.

A partir d'un élément $(a_1, \dots, a_r)$ de $W_H^{K'}$, construisons les éléments $(a'_1, \dots, a'_p)$ de $D^{[p]}$ tels que $a'_i = a_k$ si $\alpha_i \in L$ et si $\alpha_i = \alpha'_k$, a'_i élément quelconque de D dans les autres cas. L'ensemble des éléments construits de cette manière sera noté $(W_H^{K'}, D^{\{M\}})$. On définit de même $(W_H^{K''}, D^{\{L\}})$.

<u>Théorème 3.5.</u> - $W_H^K \supsetneq (W_H^{K'}, D^{\{M\}}) \cup (W_H^{K''}, D^{\{L\}})$ (1).

Si H est un sous-demi-groupe de D, si $L = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, si $M = (\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_q)$ et si $\alpha_{r+1} > \alpha_r + 1$ dans K , (1) devient une égalité.

La première inégalité résulte du fait que, d'après la démonstration du théorème 3.4., un monôme $(a'_1, \dots, a'_p)_K\,[X, U]$ peut s'écrire $(a_1, \dots, a_r)_{K'}\,[X', U]$ pour un X' convenable. Donc si $(a'_1, \dots, a'_p)$ n'appartient pas à W_H^K ,

$(a_1, \ldots, a_r)$ n'est pas dans $W_H^{K'}$.

Supposons maintenant vérifiées les hypothèses de la deuxième partie du théorème. Soit $A = (a_1, \ldots, a_p)$ un élément tel que $A' = (a_1, \ldots, a_r)$ ne soit pas dans $W_H^{K'}$ et que $A'' = (a_{r+1}, \ldots, a_p)$ ne soit pas dans $W_H^{K''}$.

$A' \notin W_H^{K'} \Longrightarrow \exists Y = (y_1, \ldots, y_{q+s})$ $(s = p-r)$ et $V = (v_1, \ldots, v_{q*})$ avec $A_{K'} [Y, V] \in H$,

$A'' \notin W_H^{K''} \Longrightarrow \exists Z = (z_1, \ldots, z_{q+r})$ et $T = (t_1, \ldots, t_{q*})$ avec $A''_{K''} [Z, T] \in H$.

$\alpha_{r+1} > \alpha_r + 1$, supposons que nous soyons dans le premier cas du lemme 3.1., j et j' ayant la même signification, désignons de plus par β^*_{j*} le plus grand élément de J^* plus petit que α_r. Soit $X = (x_1, \ldots, x_q)$ l'élément de $D^{[q]}$ défini par : $x_1 = y_1, \ldots, x_{j-1} = y_{j-1}$, x_j = la partie du monôme $A'_{K'} [Y, V]$ qui suit a_r , x_{j+1} = la partie du monôme $A''_{K''} [Z, T]$ jusqu'à z_{r+j+1} inclus ; $x_{j+2} = z_{r+j+2}$, $x. \ldots, x_q = z_{q+r}$.

Soit $U = (u_1, \ldots, u_{q*})$ l'élément de $D^{*[q^*]}$ défini par $u_k = v_k$ pour $k \leq j^*$, $u_k = t_k$ pour $k > j^*$. Ces constructions donnent $A_K [X, U] = A'_{K'} [Y, V]$. $A''_{K''} [Z , T]$; comme H est un sous-demi-groupe, $A_K [X, U] \in H$. Donc si $A = (a_1, \ldots, a_r)$ appartient à W_H^K, $(a_1, \ldots, a_r)$ est un élément de $W_H^{K'}$ ou $(a_{r+1}, \ldots, a_p)$ est un élément de $W_H^{K''}$, par suite

$$W_H^K = (W_H^{K'} , D^{\{M\}}) \cup (W_H^{K''} , D^{\{L\}})$$

Pour compléter la démonstration, il faut envisager les deux autres cas du lemme 3.1. Dans le deuxième cas, on prend pour x_j la partie du monôme $A'_{K'} [Y, V]$ qui suit a_r multipliée par la partie du monôme $A''_{K''} [Z, T]$

jusqu'à z_{r+j} inclus, $x_{j+1} = z_{r+j+1}$, le reste sans changement. Dans le troisième cas, on permute les rôles de X et de U du deuxième cas.

4) Complexes K-forts

K et H étant fixés, en associant à chaque élément A de $D^{[p]}$ l'ensemble φ_H^K (A) des solutions de l'équation $A_K [X, U] \in H$, nous définissons une application φ_H^K de $D^{[p]}$ dans $D^{[q]} \times D^{*[q^*]}$.

Définition 4.1.- Le complexe H est dit K-fort si l'application φ_H^K est semi-uniforme.

Ceci peut se traduire par :

$$A_K [X, U] \in H, \quad B_K [X, U] \in H, \quad A_K [Y, V] \in H \Longrightarrow B_K [Y, V] \in H$$

Exemples : p = 1, (O, 1)-fort $\Longleftrightarrow$ fort à droite, (1, 1)-fort $\Longleftrightarrow$ bilatèrement fort.

Propriété 4.1.- K étant fixé, l'ensemble des complexes K-forts d'un demi-groupe D constitue une famille de Moore.

D est K-fort car, $\forall A \in D^{[p]}$; $\varphi_D^K (A) = D^{[q]} \times D^{*[q^*]}$

Soit H_i, $i \in I$, une famille de complexes K-forts, telle que leur intersection H ne soit pas vide, alors H est K-fort ; en effet, $\forall i \in I$,

$$\left.\begin{array}{l} A_K [X, U] \in H \Longrightarrow A_K [X, U] \in H_i \\ B_K [X, U] \in H \Longrightarrow B_K [X, U] \in H_i \\ A_K [Y, V] \in H \Longrightarrow A_K [Y, V] \in H_i \end{array}\right\} \Longrightarrow B_K [Y, V] \in H_i \Longrightarrow B_K [Y, V] \in H.$$

Construction de la fermeture de Moore correspondante. H étant donné, on pose $H = H$, $H_{i+1} = H_i \cup \{B_K [Y, V]$ tel qu'il existe A, X, U vérifiant $A_K [X, U] \in H_i$, $B_K [X, U] \in H_i$, $A_K [Y, V] \in H_i\}$.

Le plus petit complexe K-fort H contenant H est donné par $\bigcup_{n=o}^{\infty} H_n$ (16)

Soit θ un homomorphisme du demi-groupe D sur un demi-groupe D'. θ induit un homomorphisme $\textcircled{H}_p$ de $D^{[p]}$ sur $D'^{[p]}$, $\textcircled{H}_p(a_1, \ldots, a_p) = (\theta a_1, \ldots, \theta a_p)$. On peut prolonger $\textcircled{H}_p$ en une application de $D^{*[p]}$ dans $D'^{*[p]}$ en définissant l'image de 1_{D^*} comme étant égale à $1_{D'^*}$

Propriété 4.2.-

a) Soient H' un complexe de D' et H l'image réciproque de H' par θ. $A \equiv B \, (R^K_H) \Longrightarrow \textcircled{H}_p(A) \equiv \textcircled{H}_p(B) \, (R^K_{H'})$.

Si, $\forall i$, $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$, il existe un homomorphisme $\overline{\textcircled{H}}_p$, de $D^{[p]}$ dans $D'^{[p]}$, rendant le diagramme suivant commutatif,

$$\begin{tikzcd} D^{[p]} \arrow[r, "\textcircled{H}_p"] \arrow[d, "\varphi"'] & D'^{[p]} \arrow[d, "\varphi'"] \\ D^{[p]}/R^K_H \arrow[r, "\overline{\textcircled{H}}_p"] & D'^{[p]}/R^K_{H'} \end{tikzcd}$$

(φ et φ' applications canoniques)

b) Si H' est K-fort dans D', H est K-fort dans D.

c) Si L est un complexe K-fort de D saturé pour l'équivalence d'homomorphisme de θ, $\theta(L)$ est un complexe K-fort de D'.

a) Soient A et B des éléments de $D^{[p]}$ congrus mod. R^K_H. Posons $A' = \textcircled{H}_p(A)$, $B' = \textcircled{H}_p(B)$. Si X' et U' sont deux éléments vérifiant $A'_K[X', U'] \in H'$, l'homomorphisme θ étant surjectif, il existe X et U avec $X' = \textcircled{H}_q(X)$, $U' = \textcircled{H}_{q^*}(U)$, on en déduit $A'_K[X', U'] = A_K[X, U]$; $A_K[X, U]$ appartient donc à H.

$A \equiv B \, (R^K_H) \Longrightarrow B_K[X, U] \in H \Longrightarrow B'_K[X', U'] \in H'$.

Si, $\forall i$, $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$, R^K_H et $R^K_{H'}$ sont régulières (théorème 3.1.), $D^{[p]}/R^K_H$

et $D'^{[p]}/R^K_{H'}$ sont des demi-groupes. Soient $\bar{A}$ un élément de $D^{[p]}/R^K_H$, A un élément de $\varphi^{-1}(\bar{A})$, posons $\bar{H}_p(\bar{A}) = \overline{H_p(A)}$ (on écrit $\varphi(B) = \bar{B}$; $\varphi'(B') = \bar{B'}$).
Si $B \in \varphi^{-1}(\bar{A})$, $A \equiv B\ (R^K_H)$ implique $H_p(A) \equiv H_p(B)\ (R^K_{H'})$, ce qui montre que $\bar{H}_p$ est bien une application de $D^{[p]}/R^K_H$ dans $D'^{[p]}/R^K_{H'}$. D'autre part θ, φ et φ' étant des homomorphismes, nous avons $\bar{H}_p(\bar{A}.\bar{B}) = \bar{H}_p(\overline{AB}) = \overline{H_p(AB)} = \overline{H_p(A) \,.\, H_p(B)} = \overline{H_p(A)} \,.\, \overline{H_p(B)} = \bar{H}_p(\bar{A}) \,.\, \bar{H}_p(\bar{B})$

b) Posons $H_p(A) = A'$, etc....
Soient $A_K[X, U] \in H$, $B_K[X, U] \in H$, $A_K[Y, V] \in H$, en appliquant θ on obtient $A'_K[X', U'] \in H'$, $B'_K[X', U'] \in H'$, $A'_K[Y', V'] \in H'$; H' étant K-fort il en résulte $B'_K[X', U'] \in H'$, d'où $B_K[X, U] \in \theta^{-1}(H') = H$. H est donc K-fort dans D.

c) Soient $L' = \theta(L)$, $A'_K[X', U'] \in L'$, $B'_K[X', U'] \in L'$, $A'_K[Y', V'] \in L'$. $\theta^{-1}(L') = \theta^{-1}[\theta(L)] = L$ puisque L est saturé modulo l'équivalence d'homomorphisme de θ. θ étant surjectif, il existe A avec $H_p(A) = A'$, etc... On a $A_K[X, U] \in L$, $B_K[X, U] \in L$, $A_K[Y, V] \in L$, mais L est K-fort dans D et par suite $B_K[Y, V] \in L$, ce qui donne $B'_K[Y', V'] \in L'$.

Considérons maintenant un demi-groupe D qui soit le produit direct de deux demi-groupes D' et D''. Soit A un élément de $D^{[p]}$, $A = (a_1, \dots, a_p)$, a_i appartenant à $D = D' \times D''$ s'écrit $a_i = (a'_i, a''_i)$; posons $A' = (a'_1, \dots, a'_p)$, $A'' = (a''_1, \dots, a''_p)$. On a une décomposition analogue pour les éléments de $D^{[q]}$ et de $D^{*[q^*]}$. Inversement, à partir d'un élément A' de $D'^{[p]}$ et d'un élément A'' de $D''^{[p]}$ on obtient un élément de $D^{[p]}$; on écrit $A = [A', A'']$. Mais à partir d'un élément U' de $D'^{*[q^*]}$ et d'un élément U'' de $D''^{*[q^*]}$ on n'obtient pas toujours un élément U de $D^{*[q^*]}$, car u = (u', u'') $\in D^*$ donne ou u $\in$ D et alors u' $\in$ D' et u'' $\in$ D'' , ou u = 1_{D^*} et alors u' et u'' sont respectivement égaux à $1_{D'^*}$ et $1_{D''^*}$. Dans U', u' peut appartenir à D', et dans U'', u'' peut valoir $1_{D''^*}$, (u',u'') n'est pas alors un élément de D^* . $\mathcal{A}'$ [resp. $\mathcal{A}''$] étant une partie de $D'^{[p]}$ [resp. $D''^{[p]}$], ($\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$) désigne l'ensemble des éléments A de $D^{[p]}$ obtenus en prenant A' dans $\mathcal{A}'$ et A'' dans $\mathcal{A}''$.

Propriété 4.3.- Soient deux demi-groupes D' et D'', D leur produit direct, H un complexe de D de la forme H' x H''.

a) $\left(W^K_{H'} , D''^{[p]}\right) \cup \left(D'^{[p]} , W^K_{H''}\right) \subseteq W^K_H$

b) Soient A = [A', A''] , B = [B', B''] deux éléments de $D^{[p]}$, les relations A' ≡ B' ($R^K_{H'}$) , A'' ≡ B'' ($R^K_{H''}$) entraînent A ≡ B (R^K_H) .

c) Si H' et H'' sont des complexes K-forts, H est un complexe K-fort.

d) Si, dans la partition K, J^* est vide, alors :

a) devient une égalité ;

- si A = [A',A''] et B = [B',B''] sont deux éléments de $D^{[p]} - W^K_H$ congrus mod. R^K_H , A' et B' [resp. A'' et B''] sont congrus mod. $R^K_{H'}$ [resp. $R^K_{H''}$] ;

- si H est un complexe K-fort ayant un K-résidu différent de $D^{[p]}$, H' et H'' sont K-forts.

a) Soit A = [A', A''] un élément de ($W^K_{H'}$, $D''^{[p]}$) , supposons que A n'appartienne pas à W^K_H , alors il existe un couple X = [X', X''] , U = [U',U''] vérifiant A_K [X, U] $\in$ H ; mais A_K [X,U] = (A'_K [X',U'] , A''_K [X'',U'']) et par suite A'_K [X',U'] $\in$ H' , contrairement à l'hypothèse.

b) Les hypothèses étant remplies, supposons qu'il existe un couple X,U vérifiant A_K [X,U] $\in$ H. Avec les notations précédentes, le couple X',U' vérifie A'_K [X',U'] $\in$ H' , la condition A' ≡ B' ($R^K_{H'}$) donne B'_K [X',U'] $\in$ H'.

De même $B''_K\ [X'', U''] \in H''$ et par suite $B_K\ [X, U] \in H$.

c) Si $A_K\ [X, U] \in H$, $B_K\ [X, U] \in H$, $A_K\ [Y, V] \in H$, on en déduit $A'_K\ [X', U'] \in H'$, $B'_K\ [X', U'] \in H'$, $A'_K\ [Y', V'] \in H'$, comme H' est K-fort, on a $B'_K\ [Y', V'] \in H'$, de même $B''_K\ [Y'', V''] \in H''$, d'où $B_K\ [Y, V] \in H$; H est un complexe K-fort.

d) J^* est vide. Soit $A = [A', A'']$ un élément qui n'appartient pas à $(W^K_H, D''^{[p]}) \cup (D'^{[p]}, W^K_{H''})$, $A' \notin W^K_{H'} \Longrightarrow \exists\, X'$ avec $A'_K\ [X'] \in H'$, $A'' \notin W^K_{H''} \Longrightarrow \exists\, X''$ avec $A''_K\ [X''] \in H''$, $X = [X', X'']$ vérifie $A_K\ [X] \in H$;

$$\text{d'où } W^K_H = (W^K_{H'}, D''^{[p]}) \cup (D'^{[p]}, W^K_{H''}) .$$

Soient A et B deux éléments de $D^{[p]} - W^K_H$ congrus mod. R^K_H. Soit X' tel que $A'_K\ [X'] \in H'$, comme A'' n'appartient pas à $W^K_{H''}$, il existe X'' vérifiant $A''_K\ [X''] \in H''$. Posons $X = [X', X'']$, on a $A_K\ [X] \in H$; mais alors la relation $A \equiv B\ (R^K_H)$ donne $B_K\ [X] \in H$, d'où $B'_K\ [X'] \in H'$. De même $B'_K\ [X'] \in H'$ implique $A'_K\ [X'] \in H'$ et par suite $A' \equiv B'\ (R^K_{H'})$.

Supposons maintenant que H soit un complexe K-fort ayant un K-résidu différent de $D^{[p]}$. $W^K_{H''}$ est donc différent de $D''^{[p]}$, il existe A'' et X'' vérifiant $A''_K\ [X''] \in H''$. Si $A'_K\ [X'] \in H'$, $B'_K\ [X'] \in H'$, $A'_K\ [Y'] \in H'$, posons $A = [A', A'']$, $B = [B', A'']$, $X = [X', X'']$, $Y = [Y', X'']$, nous avons $A_K\ [X] \in H$, $B_K\ [X] \in H$, $A_K\ [Y] \in H$, H étant K-fort, ceci donne $B_K\ [Y] \in H$, d'où $B'_K\ [Y'] \in H'$, H' est bien K-fort, de même H'' est K-fort.

Théorème 4.1.-

Si $K \leqslant K'$, tout complexe K-fort est K'-fort. Si H est un complexe K-fort, R_H^K et $R_H^{K'}$ coïncident sur $D^{[p]} - W_H^{K'}$.

Soient $A'_K\,[X',U'] \in H$, $B_{K'}\,[X',U'] \in H$, $A_{K'}\,[Y',U'] \in H$, K étant avant K', d'après 2 B f, il existe X, U, Y, V avec $A_{K'}\,[X',U'] = A_K\,[X,U]$, $B_{K'}\,[X',U'] = B_K\,[X,U]$, $A_{K'}\,[Y',V'] = A_K\,[Y,V]$.

H étant K-fort, on en déduit $B_K\,[Y,V] \in H$; mais $B_K\,[Y,V] = B_{K'}\,[Y',V']$, d'où $B_{K'}\,[Y',V'] \in H$, H est donc un complexe K'-fort.

D'après 2 B f on a $R_H^K \subseteq R_H^{K'}$.

Soient A et B deux éléments de $D^{[p]} - W_H^{K'}$ congrus mod. $R_H^{K'}$, il existe X' et U' vérifiant $A_K\,[X',U'] \in H$, $B_K\,[X',U'] \in H$,

ce qui avec les notations précédentes donne

$$A_K\,[X,U] \in H \quad , \quad B_K\,[X,U] \in H \;;$$

H étant K-fort, on en déduit $A \equiv B\ (R_H^K)$.

Exemple 4.1.-

Soients D le demi-groupe défini par la table de multiplication suivante :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	c
c	c	c	c	c
d	d	d	d	d

et H = {a} . $H^{\bullet}.a = H^{\bullet}.b = H^{\bullet}.c = \{a,b\}$, $H^{\bullet}.d = \{a\}$, donc H n'est pas fort, mais H est (2,O)-fort. Cet exemple montre que si $K < K'$, K'-fort est en général une propriété strictement plus faible que K-fort.

Exemple 4.2.-

Soit D le demi-groupe défini par la table de multiplication suivante :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	b	a
d	d	d	d	d

$H = \{b\}$ est un complexe fort, $W_H = \{a,b,d\}$, $W_H^{(O,2)} = D$, $R_H^{(O,1)}$ et $R_H^{(O,2)}$ ne coïncident pas.

Soit $K = I \cup J$ (I et J non vides, J $\neq$ vide) une partition de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$, posons $\overline{K} = J \cup I$, $\overline{K}$ est donc la partition déduite de K en permutant les rôles de I et de J.

Propriété 4.4.- L'ensemble des complexes K-forts coïncide avec l'ensemble des complexes $\overline{K}$-forts.

En effet, avec la convention précédente, on a $A_K[X] = X_{\overline{K}}[A]$. Si H est K-fort et si on a $X_{\overline{K}}[A] \in H$, $Y_{\overline{K}}[A] \in H$, $X_{\overline{K}}[B] \in H$, on en déduit $A_K[X] \in H$, $A_K[Y] \in H$, $B_K[X] \in H$, ce qui donne $B_K[Y] \in H$ ou encore $Y_{\overline{K}}[B] \in H$, H est donc un complexe $\overline{K}$-fort.

Inversement, $\overline{K}$-fort entraîne K-fort.

Exemple 4.3.-

fort à droite $\Longleftrightarrow$ fort à gauche . (7)

Exemple 4.4.-

bilatèrement fort $\Longleftrightarrow$ K-fort , avec $K = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2)$;

c'est-à-dire : le complexe H est bilatèrement fort si et seulement si ce complexe vérifie la propriété suivante:

$(H \cdot\!\cdot a_1) \cdot\!\cdot a_2$ coupe $(H \cdot\!\cdot b_1) \cdot\!\cdot b_2$ implique $(H \cdot\!\cdot a_1) \cdot\!\cdot a_2 = (H \cdot\!\cdot b_1) \cdot\!\cdot b_2$.

Exemple 4.5.-

La propriété 4.4. n'est plus valable si on remplace J par J^*

En effet, soit D le demi-groupe défini par la table suivante :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	a	a
d	a	a	b	b

Pour $K_1 = (O,-1)$ nous poserons $\varphi_H^{K_1}(a) = H \,.\!\cdot\, a$, et pour $K_2 = (-1,O)$,

$\varphi_H^{K_2}(a) = H \,\cdot\!. \,b$

Soit $H = \{b,c\}$, $H \,.\!\cdot\, a$ est vide, $H \,.\!\cdot\, b = 1_{D^*}$, $H \,.\!\cdot\, c = 1_{D^*}$, $H \,.\!\cdot\, d = \{c,d\}$
$H \,\cdot\!.\, a$ est vide, $H \,\cdot\!.\, b = 1_{D^*}$, $H \,\cdot\!.\, c = \{1_{D^*}\, d\}$ $H \,\cdot\!.\, d = \{d\}$

H est donc $(O,-1)$-fort , mais H n'est pas $(-1,O)$-fort.

Théorème 4.2.-

Si K est une partition telle que J^* soit vide et J non vide et si H est un complexe K-fort, il existe une bijection entre les ensembles

$$\left\{ D^{[p]}/R_H^K - W_H^K \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ D^{[q]}/R_H^{\overline{K}} - W_H^{\overline{K}} \right\} .$$

Les classes de $D^{[p]}$ mod. (R_H^K) différentes de W_H^K sont les images des éléments de $D^{[q]}$ par la fonction $\varphi_H^{\overline{K}}$.

H étant K-fort , dans $D^{[p]} - W_H^K$, nous avons $A \equiv B \; (R_H^K)$ si et seulement si $\varphi_H^K(A)$ coupe $\varphi_H^K(B)$. D'autre part, $X \in \varphi_H^K(A) \Longleftrightarrow A \in \varphi_H^{\overline{K}}(X)$.

Soit A un élément de $D^{[p]} - W_H^K$, X un élément de $\varphi_H^K(A)$, la classe $\mathcal{A}$ mod. R_H^K qui contient A est $\left[\varphi_H^K\right]^{-1}(X)$, c'est-à-dire $\varphi_H^{\overline{K}}(X)$. De même la classe

$\mathfrak{x}$ mod. $R_H^{\overline{K}}$ qui contient un élément X de $D^{[q]} - W_H^{\overline{K}}$ est $\left[\varphi_H^{\overline{K}}\right]^{-1}(A) =$ $\varphi_H^K(A)$, pour un élément quelconque A de $\varphi_H^{\overline{K}}(X)$, car, d'après la propriété 4.4., H est $\overline{K}$-fort.

On connaît donc la forme des classes. La bijection entre les deux ensembles est obtenue de la manière suivante :

- pour $\mathfrak{a} \in \left\{D^{[p]}/R_H^K - W_H^K\right\}$, on pose $\psi(\mathfrak{a}) = \varphi_H^K(A)$ où A est un représentant de $\mathfrak{a}$; d'après ce qui précède, ψ est bien une application de $\left\{D^{[p]}/R_H^K - W_H^K\right\}$ dans $\left\{D^{[q]}/R_H^{\overline{K}} - W_H^{\overline{K}}\right\}$.
- de même, pour $\mathfrak{x} \in \left\{D^{[q]}/R_H^{\overline{K}} - W_H^{\overline{K}}\right\}$, on pose $\psi'(\mathfrak{x}) = \varphi_H^{\overline{K}}(X)$ où X est un représentant de $\mathfrak{x}$.

On a, $\forall \mathfrak{x} \in \left\{D^{[q]}/R_H^{\overline{K}} - W_H^{\overline{K}}\right\}$, $\psi\psi'(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$; en effet posons $\mathfrak{a} = \varphi_H^{\overline{K}}(X)$ et soit A un représentant de $\mathfrak{a}$, $\psi\psi'(\mathfrak{x}) = \psi(\mathfrak{a}) = \varphi_H^K(A)$,

mais $A \in \varphi_H^{\overline{K}}(X) \Longrightarrow X \in \varphi_H^K(A)$ d'où $\psi\psi'(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$.

De même, on a, $\forall \mathfrak{a}$, $\psi'\psi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$; ψ est bien une bijection, ψ' étant la bijection inverse.

Revenons à K quelconque.

<u>Théorème 4.3.</u>- Soit H un complexe K-fort :

- si pour un i, $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$ et si
$(a_1, \dots, a_i y, z\, a_{i+1}, \dots, a_p) \equiv (b_1, \dots, b_i y, z\, b_{i+1}, \dots, b_p) \quad (R_H^K)$
avec $(a_1, \dots, a_i y, z a_{i+1}, \dots, a_p) \notin W_H^K$, $y \in D^*$, $z \in D^*$, alors
$(a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_p) \equiv (b_1, \dots, b_i, b_{i+1}, \dots, b_p) \quad (R_H^K)$.
- Si $\forall\, i \neq 0$, $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$, R_H^K est simplifiable à droite dans $D^{[p]} - W_H^K$.

- Si $\forall\, i,\ \alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$, R^K_H est simplifiable dans $D^{[p]} - W^K_H$.

- Si D est commutatif et si $J \cup J^*$ n'est pas vide, R^K_H est simplifiable dans $D^{[p]} - W^K_H$.

Posons $A = (a_1,\dots,a_p)$, $A' = (a_1,\dots,a_i y, z a_{i+1},\dots,a_p)$,

$B = (b_1,\dots,b_p)$, $B' = (b_1,\dots,b_i y, z b_{i+1},\dots,b_p)$.

Reprenons les notations du lemme 3.1. et considérons seulement le premier cas. (On a une démonstration analogue dans les deux autres cas).

$A' \equiv B'\ (R^K_H)$ et $A' \notin W^K_H \Longrightarrow \exists X\ (X = (x_1,\dots,x_j,\dots,x_{j'},\dots,x_q))$, U avec

$A'_K\,[X, U] \in H$ et $B'_K\,[X,U] \in H$. Posons $X' = (x_1,\dots,yx_j,\dots,x_{j'}z,\dots,x_q)$,

on a $A'_K\,[X,U] = A_K\,[X',U]$, $B'_K\,[X,U] = B_K\,[X',U]$, d'où

$A_K\,[X',U] \in H$, $B_K\,[X',U] \in H$, c'est-à-dire $\varphi^K_H(A)\ \ \varphi^K_H(B)$, ce qui donne $A \equiv B\ (R^K_H)$ car H est un complexe K-fort.

Les autres propositions du théorème sont une conséquence de la première et du théorème 3.2. car $(a_1c_1,\dots,a_pc_p) = AC \notin W^K_H$ implique, $\forall\, i$, $(a_1c_1,\dots,a_ic_i, a_{i+1},\dots,a_p) \notin W^K_H$.

<u>Corollaire 4.1.-</u> Soit H un complexe K-fort et K-net, si dans K, $\forall\, i$, $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$, R^K_H est une relation d'équivalence régulière et simplifiable.

C'est une conséquence directe du théorème précédent et du théorème 3.1.

<u>Théorème 4.4.-</u> Soit H un complexe K-fort,

- si, $\forall i \neq 0$, $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$, R_H^K est simplifiable à droite si et seulement si $D^{[p]} - W_H^K$ est un idéal à droite dans $D^{[p]}$.

- si, $\forall i$, $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$, R_H^K est simplifiable si et seulement si H est K-net, ou si W_H^K est égal à $D^{[p]}$.

- Supposons, $\forall i \neq 0$, $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$, et R_H^K simplifiable à droite. Soit $AC \in W_H^K$, on a alors $ACC \in W_H^K$ car W_H^K est un idéal à droite. Par suite $AC \equiv ACC\ (R_H^K)$, ce qui donne $A \equiv AC\ (R_H^K)$ et $A \in W_H^K$. $D^{[p]} - W_H^K$ est donc un idéal à droite.

Inversement, supposons $D^{[p]} - W_H^K$ idéal à droite et $AC \equiv BC\ (R_H^K)$; si $AC \notin W_H^K$ le théorème 4.2. donne $A \equiv B\ (R_H^K)$; si $AC \in W_H^K$, alors $A \in W_H^K$, $BC \in W_H^K$, $B \in W_H^K$ et $A \equiv B\ (R_H^K)$.

- Supposons maintenant, $\forall i$, $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$ et R_H^K simplifiable. Si W_H^K n'est pas vide considérons un de ses éléments V. $\forall A \in D^{[p]}$ on a $AV \in W_H^K$ qui est un idéal bilatère, $V^2 \in W_H^K$, d'où $AV \equiv V^2\ (R_H^K)$, ce qui donne $A \equiv V\ (R_H^K)$ et par suite $A \in W_H^K$. Nous avons donc seulement deux cas possibles :

$$W_H^K = D^{[p]} \quad \text{ou} \quad W_H^K = \emptyset .$$

Inversement, si $W_H^K = D^{[p]}$, R_H^K est la relation universelle, R_H^K est donc simplifiable;

si $W_H^K = \emptyset$, H est un complexe K-net, d'après le corollaire 4.1., R_H^K est simplifiable.

Propriétés particulières des R_H^K lorsqu'elles opèrent dans D.

Nous sommes donc dans le cas où I ne contient qu'un seul élément. Nous avons vu (exemple qui suit le théorème 2.1.) que K pouvait alors être représenté par un couple d'entiers supérieurs ou égaux à -1 , K = (p, q).

Théorème 5.1.-

a) Si $p' \geqslant p \geqslant 0$, $q' \geqslant q \geqslant 0$, $W_H^{(p',q')} = \left[W_H^{(p,q)} \,.\!\cdot\, D^{(p'-p)} \right] .\!\cdot\, D^{(q'-q)}$ (si p' = p, nous supprimons $D^{(p'-p)}$) .

b) $\forall q$, $W_H^{(-1,q)} = W_H^{(0,q)} \cap W_H^{(1,q)}$. Si $W_H^{(0,q)}$ est un idéal à gauche, $W_H^{(-1,q)} = W_H^{(0,q)}$.

c) $\forall q$, $W_H^{(1,q)} = W_H^{(-1,q)} .\!\cdot\, D$.

d) $W_H^{(-1,-1)} = W_H^{(0,1)} \cap W_H^{(1,0)} \cap W_H^{(1,1)} \cap W_H^{(0,0)}$,

$\left[W_H^{(0,0)} = D - H \right]$.

a) résulte du théorème 3.3. b).

b) $W_H^{(-1,q)} \subsetneq W_H^{(0,q)} \cap W_H^{(1,q)}$, d'après le théorème 3.3.a) ; si $a \in W_H^{(0,q)} \cap W_H^{(1,q)}$, il ne peut exister $u, x_1, \ldots, x_q$, avec $u a x_1 \ldots x_q \in H$, car si $\begin{cases} u = 1_{D^*} \text{ , ceci contredit } a \in W_H^{(0,q)} , \\ u \in D \text{ , ceci contredit } a \in W_H^{(1,q)} , \end{cases}$

donc $W_H^{(-1,q)} = W_H^{(0,q)} \cap W_H^{(1,q)}$.

Si $W_H^{(0,q)}$ est un idéal à gauche , $a \in W_H^{(0,q)} \Longrightarrow$ $D^* a D^q \subsetneq W_H^{(0,q)}. D^q$ (D^q est remplacé par D^* si q = -1) , $W_H^{(0,q)} . D^q \cap H = \emptyset$

d'où $a \in W_H^{(-1,q)}$. Nous avons donc $W_H^{(0,q)} = W_H^{(-1,q)}$. ►

c) Si $a \in W_H^{(-1,q)} \therefore D$, $Da \subsetneq W_H^{(-1,q)}$,

$D\,a\,D^q \subsetneq W_H^{(-1,q)} \,.\, D^q \subsetneq D - H$ d'où $a \in W_H^{(1,q)}$.

Si $a \in W_H^{(1,q)}$, $D^* . D\,a\,.\,D^q = D.a.D^q \subsetneq D - H$, d'où $Da \subsetneq W_H^{(-1,q)}$;

nous avons bien $W_H^{(1,q)} \doteq W_H^{(-1,q)} \therefore D$.

d) En utilisant b) et la propriété symétrique, nous avons successivement

$W_H^{(-1,-1)} = W_H^{(1,-1)} \cap W_H^{(O,-1)}$, $W_H^{(O,-1)} = W_H^{(O,O)} \cap W_H^{(O,1)}$,

$W^{(1,-1)} = W_H^{(1,1)} \cap W_H^{(1,O)}$, d'où le résultat annoncé.

Corollaire 5.1.-

Si $(p,q) \lneq (p',q')$, $p \neq -1$, $q \neq -1$, (p,q)-net $\Longleftrightarrow$ (p',q')-net.

Si $q \neq O$, $(-1,q)$-net $\Longleftrightarrow$ $(-1,-1)$-net $\Longleftrightarrow$ $(1,1)$-net $\Longleftrightarrow$ bilatèrement net (6).

$(-1,O)$-net $\Longleftrightarrow$ net à gauche (7).

$K \leqslant K' \Longrightarrow W_H^K \lneq W_H^{K'}$ (théorème 3.3.), donc si $K \lneq K'$,

K'-net $\Longrightarrow$ K-net.

D'après le théorème 5.1., si H est (p,q)-net pour $p \geqslant O$, $q \geqslant O$, il est (p',q')-net pour $(p',q') \geqslant (p,q)$.

Il ne reste donc que trois cas distincts : net à droite, net à gauche, et bilatèrement net.

Corollaire 5.2.-

$W_H \cap W'_H$ et $W'_H \cap {}_HW$ sont des idéaux bilatères, (6) , (7) .

En effet , $W_H \cap W'_H = W_H^{(O,1)} \cap W_H^{(1,1)} = W_H^{(-1,1)}$ qui est un idéal bilatère.

Théorème 5.2.-

a) $\forall H, \forall q \geqslant -1$, $R_H^{(-1,q)} = R_H^{(O,q)} \cap R_H^{(1,q)}$.

b) $\forall H$, $R_H^{(-1,-1)} = R_H^{(O,1)} \cap R_H^{(1,O)} \cap R_H^{(1,1)} \cap R_H^{(O,O)}$.

c) Si S est un sous-demi-groupe unitaire à gauche [resp. unitaire] ,

$\forall p \neq O$, $\forall q$, $R_S^{(-1,q)} = R_S^{(p,q)}$ [$\forall p \neq O$, $\forall q \neq O$, $R_S^{(-1,-1)} = R_S^{(p,q)}$] .

a) D'après 2.B.f, $R_H^{(-1,q)} \subsetneq R_H^{(O,q)} \cap R_H^{(1,q)}$.

Soient $a, b, x_1, \ldots, x_q$ des éléments de D, u un élément de D^* (si q = -1 , $x_1 \in D^*$) tels que $a \equiv b$ $(R_H^{(O,q)} \cap R_H^{(1,q)})$ et $uax_1 \ldots x_q \in H$, si $u = 1_{D^*}$, $a \equiv b$ $(R_H^{(O,q)})$ donne $ubx_1 \ldots x_q \in H$, si $u \in D$, $a \equiv b$ $(R_H^{(1,q)})$ donne $ubx_1 \ldots x_q \in H$; nous en déduisons $a \equiv b$ $(R_H^{(-1,q)})$.

b) On vérifie b) à partir de a) comme dans la démonstration du théorème 5.1.d.

c) Supposons que S soit un sous-demi-groupe unitaire à gauche. Soient $a, b, x_1, \ldots, x_q$ des éléments de D , u un élément de D^*, tels que $a \equiv b$ $(R_S^{(p,q)})$ et $uax_1 \ldots x_q \in S$; si $s \in S$, $s^{p-1}(su)ax_1 \ldots x_q \in S$; $a \equiv b$ $(R_S^{(p,q)})$ donne $s^{p-1}(su)bx_1 \ldots x_q \in S$, S unitaire à gauche implique $ubx_1 \ldots x_q \in S$, d'où $a \equiv b$ $(R_S^{(-1,q)})$ et $R_S^{(P,q)} \subsetneq R_S^{(-1,q)}$; mais on a toujours

$$R_S^{(-1,q)} \subsetneq R_S^{(P,q)} \quad , \text{ d'où } R_S^{(P,q)} = R_S^{(-1,q)}$$

(Démonstration analogue lorsque S est unitaire et $pq \neq O$).

Corollaire 5.3.-

$R_H \cap R'_H$, ${}_H R \cap R'_H$ sont des relations d'équivalence régulières.

En effet, $R_H \cap R'_H = R_H^{(O,1)} \cap R_H^{(1,1)} = R_H^{(-1,1)}$ qui est régulière .

Lemme 5.1.-

Soient H un complexe, X un idéal; tels que $H \cap X$ soit vide, si X est un idéal à droite X est contenu dans $W_H^{(0,-1)}$, si X est un idéal bilatère X est contenu dans $W_H^{(-1,-1)}$

En effet, si X est un idéal bilatère, $D^* X D^* \subseteq X$, d'où $D^* X D^* \cap H = \emptyset$ et $X \subseteq W_H^{(-1,-1)}$ d'après la définition de ce résidu.

Théorème 5.3.-

a) Soient H un complexe, A une classe d'équivalence mod. (R_H^K) différente de W_H^K. $(K = (p,q))$.

- si $pq \neq 0$, $R_H^K \subsetneq R_A^{(-1,-1)}$, $W_H^K \subsetneq W_A^{(-1,-1)}$, si de plus $H \subsetneq A$

$$W_H^K = W_A^{(-1,-1)}.$$

- si $p = 0$, $q \neq 0$, $R_H^K \subsetneq R_A^{(0,-1)}$, $W_H^K \subsetneq W_A^{(0,-1)}$

si de plus $H \subsetneq A$, $W_H^K = W_A^{(0,-1)}$.

b) Supposons en outre que H soit un complexe K-fort.

- si $pq \neq 0$, A est $(-1,-1)$-fort, R_H^K et $R_A^{(0,-1)}$ coïncident sur $D - W_A^{(-1,-1)}$.

- si $p = 0$, $q \neq 0$, A est $(0,-1)$-fort, R_H^K et $R_A^{(0,-1)}$ coïncident sur $D - W_A^{(0,-1)}$.

a) $pq \neq 0$. Soient b, c des éléments de D, u, v des éléments de D^* tels que $b \equiv c \; (R_H^K)$ et $ubv \in A$. R_H^K est régulière d'après le théorème 3.1., d'où $ubv \equiv ucv \; (R_H^K)$, comme A est une classe mod. R_H^K, on a $ucv \in A$. Par suite, on a $b \equiv c \; (R_A^{(-1,-1)})$ et $R_H^K \subseteq R_A^{(-1,-1)}$. A est une classe différente de W_H^K, $A \cap W_H^K$ est donc vide, le lemme 5.1. montre que l'idéal W_H^K est contenu dans $W_A^{(-1,-1)}$.

Si H est inclus dans A, W_H^K contient W_A^K, mais, d'après le théorème 3.3., $W_A^{(-1,-1)}$ est contenu dans W_A^K, d'où $W_H^K = W_A^{(-1,-1)}$.

b) $pq \neq 0$. H étant K-fort, il existe des éléments $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q$ de D (si $p = -1$, $x_1 \in D^*$) vérifiant la propriété suivante :

a appartient à A si et seulement si $x_1 \ldots x_p a\, y_1 \ldots y_q$ est dans H. Soient b, c des éléments de D, u, v, u', v' des éléments de D^* tels que ubv, ucv, u'bv' appartiennent à A, alors,

$x_1 \ldots (x_p u) b (v y_1) \ldots y_q \in H$, $x_1 \ldots (x_p u) c (v y_1) \ldots y_q \in H$, $x_1 \ldots (x_p u')$. $b (v' y_1) \ldots y_q \in H$; H étant K-fort, $x_1 \ldots (x_p u') c (v' y_1) \ldots y_q = x_1 \ldots x_p (u'cv') y_1 \ldots y_q \in H$, d'où $u'cv' \in A$; A est donc (-1,-1)-fort.

D'après a) $R_H^K \leqslant R_A^{(-1,-1)}$, supposons $b \equiv c \ (R_A^{(-1,-1)})$ et $b \notin W_A^{(-1,-1)}$, $\exists$ u, v tels que $ubv \in A$, $ucv \in A$, mais alors $x_1 \ldots (x_p u) b (v y_1) \ldots y_q \in H$, $x_1 \ldots (x_p u) c (v y_1) \ldots y_q \in H$, d'où $b \equiv c \ (R_H^K)$ car H est K-fort. R_H^K et $R_A^{(-1,-1)}$ coïncident sur $D - W_A^{(-1,-1)}$.

Le cas $p = 0$ s'étudie d'une manière analogue.

<u>Définition 5.1.-</u>

Un complexe H est dit K-parfait, s'il est K-fort et si, $\forall h, h' \in H$, $\varphi_H^K(h) \cap \varphi_H^K(h')$ n'est pas vide.

Remarque : Pour $K = (-1,-1)$, $K = (0,-1)$ ou $K = (-1,0)$, K-parfait $\Longleftrightarrow$ K-fort.

En effet, pour $K = (-1,-1)$ par exemple, nous avons $\forall h \in H$, $(1_{D^*}, 1_{D^*}) \in \varphi_H^K(h)$.

<u>Théorème 5.4.-</u>

Un complexe K-parfait H est inclus dans une classe A mod. R_H^K ($K = (p,q)$).

Si $pq \neq 0$, A est la fermeture $(-1,-1)$-forte de H, $W_H^K = W_A^{(-1,-1)}$, $R_H^K = R_A^{(-1,-1)}$.

Si $p = 0$, $q \neq 0$, A est la fermeture $(0,-1)$-forte de H, $W_H^K = W_A^{(0,-1)}$, $R_H^K = R_A^{(0,-1)}$.

Les conditions H complexe K-fort et $\varphi_H^K(h) \between \varphi_H^K(h')$ impliquent $h \equiv h' \; (R_H^K)$ et ceci est vérifié quels que soient h et h' éléments de H.

H est donc inclus dans une classe A mod. R_H^K différente de W_H^K. Si $K = (-1,-1)$ ou $K = (0,-1)$, H = A car, d'après le théorème 5.2., H est alors saturé mod. R_H^K.

D'après le théorème 5.3., si $pq \neq 0$, A est un complexe $(-1,-1)$-fort, et

$$W_H^K = W_A^{(-1,-1)} \quad , \quad R_H^K = R_A^{(-1,-1)} \quad ;$$

si $p = 0$, $q \neq 0$, A est un complexe $(0,-1)$-fort, et

$$W_H^K = W_A^{(0,-1)} \quad , \quad R_H^K = R_A^{(0,-1)}$$

Pour $pq \neq 0$, il reste à montrer que A est la fermeture $(-1,-1)$-forte de H. Soit $\overline{H}$ cette fermeture. Si $a \in A$ et $h \in H$, a est congru à h mod. R_H^K, $\varphi_H^K(h)$ n'étant pas vide, il existe $x_1, \ldots, y_q$ éléments de D (si $p = -1$, $x_1 \in D^*$) tels que $x_1 \ldots x_p h y_1 \ldots y_q \in H$, $x_1 \ldots x_p a y_1 \ldots y_q \in H$, d'où

$x_1 \ldots x_p h y_1 \ldots y_q \in \overline{H}$,

$x_1 \ldots x_p a y_1 \ldots y_q \in \overline{H}$, car $H \subseteq \overline{H}$. Comme $\overline{H}$ est $(-1,-1)$-fort on en déduit $a \equiv h \; (R_{\overline{H}}^{(-1,-1)})$, mais alors $h \in \overline{H}$ entraîne $a \in \overline{H}$, d'où $A \subseteq \overline{H}$.

D'autre part A étant un complexe $(-1,-1)$-fort contenant H nous avons $\overline{H} \subseteq A$, A est bien la fermeture cherchée.

Pour $p = 0$, $q \neq 0$, nous avons une démonstration analogue.

<u>Propriété 5.1.</u>-

Soit S un sous-demi-groupe de D. $[K = (p,q)]$

Si $pq \neq 0$, S est unitaire et K-fort si et seulement si S est $(-1,-1)$-fort.

Si $p = O$, $q \neq O$, S est unitaire à droite et K-fort si et seulement si S est $(O,-1)$-fort.

$pq \neq O$. Soit S un sous-demi-groupe $(-1,-1)$-fort.

Comme $(-1,-1) \leqslant (p,q)$, S est K-fort (théorème 4.1.)

Soient $x \in D$, $s \in S$ avec $sx \in S$; $s^2 \in S \Longrightarrow (s, 1_{D^*}) \in \varphi_S^{K'}(s) \cap \varphi_S^{K'}(x)$, $(K' = (-1,-1))$. S étant $(-1,-1)$-fort, ceci entraîne $s \equiv x \ (R_S^{K'})$ et $x \in S$, car S est saturé mod. $R_S^{K'}$. Donc S est unitaire à gauche, on vérifie de même que S est unitaire à droite.

Inversement, supposons que S soit unitaire et K-fort ; soient a, b des éléments de D, u, u', v, v' des éléments de D^*, tels que $uav \in S$, $ubv \in S$, $u'av' \in S$. On en déduit, si $s \in S$, $s^{p-1}(su)a(vs)s^{q-1} \in S$, $s^{p-1}(su)b(vs)s^{q-1} \in S$, $s^{p-1}(su')a(v's)s^{q-1} \in S$, ce qui donne $s^{p-1}(su')b(v's)s^{q-1} \in S$ car S est (p,q)-fort.

$s^p(u'bv')s^q \in S$ et S unitaire donnent $u'bv' \in S$, S est donc $(-1,-1)$-fort.

<u>Théorème 5.5.</u>-

Soit S un sous-demi-groupe K-fort $(K = (p,q))$, S est inclus dans une classe $\mathcal{U}$ mod. R_S^K.

- si $pq \neq O$, U est un sous-demi-groupe $(-1,-1)$-fort, c'est le plus petit complexe unitaire contenant S et on a $R_S^K = R_U^{(-1,-1)} = R_U^{(1,1)} = R_U^K$.

- si $p = O$, $q \neq O$, U est un sous-demi-groupe $(O,-1)$-fort, c'est le plus petit complexe unitaire à droite contenant S et on a

$$R_S^K = R_U^{(O,-1)} = R_U^{(O,1)} = R_U^K .$$

S est un complexe K-parfait car $\forall s, s' \in S$ on a $s^p s . s^q \in S$, $s^p s' s^q \in S$.

Si $pq \neq O$, d'après le théorème 5.4., U est un complexe $(-1,-1)$-fort, $R_S^K = R_U^{(-1,-1)}$; d'après la propriété 5.1., U est un sous-demi-groupe unitaire si nous admettons que U est un sous-demi-groupe ; le théorème 5.2. donne alors $R_U^{(-1,-1)} = R_U^{(1,1)} = R_U^K$.

Il nous reste à vérifier que U est un sous-demi-groupe et que c'est l'enveloppe unitaire de S.

Soient u,u' $\in$ U ; on a u $\equiv$ s(R_s^K) , u' $\equiv$ s (R_s^K) , R_s^K étant régulière on en déduit uu' $\equiv$ su' $\equiv$ s^2 (R_s^K) , d'où uu' $\in$ U.

Pour p = O, q $\neq$ O, R_s^K est seulement régulière à droite, ce qui donne uu' $\equiv$ su' (R_s^K). Mais u' $\equiv$ s (R_s^K) et $s.s^q$ $\in$ S impliquent $u's^q \in$ S, d'où $su's^q$ $\in$ S et comme S est K-fort ceci donne su' $\equiv$ s (R_s^K) . Donc uu' $\in$ U.

Si pq $\neq$ O, soit K' un complexe unitaire contenant S . $\forall$ u $\in$ U, $s^p u s^q$ $\in$ S ; s^p , s^q , $s^p u s^q$ $\in$ K', K' est unitaire, d'où u $\in$ K ; donc U $\subsetneq$ K', U est bien le plus petit complexe unitaire contenant S. (propriété 5.1.)

Exemple 5.1.-

Dans l'exemple 4.1., H est un sous-demi-groupe (2,O)-fort, la classe K' mod. ${}_H R$ qui le contient est le complexe { a,b,c } , K' n'est pas unitaire à gauche, en effet, a $\in$ K', ad $\in$ K', mais d n'appartient pas à K'. La classe mod. $R_H^{(2,O)}$ qui contient H est D , D est évidemment unitaire à gauche.

Théorème 5.6.-

Soient H un complexe symétrique (c'est-à-dire tel que $R_H = {}_H R = R$, $W_H = {}_H W = W$) et A une classe mod. R différente de W. (7)

a) R $\subsetneq$ $R_A^{(-1,-1)}$, W $\subsetneq$ $W_A^{(-1,-1)}$, et si on a de plus H $\subsetneq$ A alors W = $W_A^{(-1,-1)}$.

b) Si en outre H est fort, A est (-1,-1)-fort, R et $R_A^{(-1,-1)}$ coïncident sur D - $W_A^{(-1,-1)}$.

a) D'une manière générale, soient R une relation d'équivalence régulière et A une classe mod. R ; R est plus fine que $R_A^{(-1,-1)}$, en effet, soient b et c des éléments de D congrus mod. R, u, v des éléments de D^* tels que ubv appartienne à A. Comme R est régulière, on en déduit ubv $\equiv$ ucv (R) et ucv $\in$ A. Si H est un complexe symétrique R_H est régulière, donc R_H est plus fine que $R_A^{(-1,-1)}$; de plus le résidu W est un idéal bilatère disjoint de la classe A , d'après le lemme 5.1., W est inclus dans $W_A^{(-1,-1)}$.

b) Soient b , c des éléments de D^*, u, v, u', v' des éléments de D tels que ubv, ucv, u'bv' appartiennent à A. On a ubv $\equiv$ ucv (R) car A est une classe mod. R. Lorsque H est fort, R est simplifiable sur D - W, d'où b $\equiv$ c (R) , ce qui donne u'bv' $\equiv$ u'cv' (R) car R est régulière , u'cv' appartient donc à A et A est un complexe (-1,-1)-fort.

R et $R_A^{(-1,-1)}$ coïncident sur D - $W_A^{(-1,-1)}$. En effet, soient b, c des éléments de D - $W_A^{(-1,-1)}$ congrus mod. $R_A^{(-1,-1)}$, il existe u, v éléments de D vérifiant ubv $\in$ A , ucv $\in$ A , d'où ubv $\equiv$ ucv (R) , ce qui donne b $\equiv$ c (R) car R est simplifiable sur D - W. L'égalité entre R et $R_A^{(-1,-1)}$ résulte alors de a).

<u>Corollaire 5.4.</u>-

Un complexe parfait H (7) est inclus dans une classe A mod. R (=R_H), A est la fermeture (-1,-1)-forte de H, $W_H = W = W_A^{(-1,-1)}$, $R = R_A^{(-1,-1)}$.

On vérifie, comme dans le théorème 5.4., que A est la fermeture (-1,-1)-forte de H. Les autres résultats du corollaire découlent directement du théorème 5.6.

<u>Remarque</u> : Dans certains cas, les conditions imposées à p et q ne sont pas identiques, on obtient évidemment les résultats symétriques de ceux qui sont énoncés en permutant ces conditions.

6) Caractérisation des K-résidus dans D.

Nous faisons encore l'hypothèse : I ne contient qu'un seul élément.

Définition 6.1.-

Un complexe X est dit K-fermé si pour :

(1) $K = (p,q)$, $p > 0$, $q > 0$, il existe un complexe A vérifiant $X=(A \mathbin{.^{\cdot}} D^p) \mathbin{^{\cdot}.} D^q$.

(2) $K = (0,q)$, $q > 0$, " " " " $X=(A \mathbin{^{\cdot}.} D^q)$.

(2') $K = (p,0)$, $p > 0$, " " " " $X=(A \mathbin{.^{\cdot}} D^p)$.

(3) $K = (-1,q)$, $q > 0$, il existe un complexe A vérifiant $X=[(A \mathbin{.^{\cdot}} D) \mathbin{^{\cdot}.} D^q] \cap (A \mathbin{^{\cdot}.} D^q)$.

(3') $K = (p,-1)$, $p > 0$, " " " " " $X=[(A \mathbin{^{\cdot}.} D) \mathbin{.^{\cdot}} D^p] \cap (A \mathbin{.^{\cdot}} D^p)$.

(4) $K = (-1,-1)$, X est un idéal bilatère différent de D.

(5) $K = (0,-1)$, X est un idéal à droite différent de D.

(5') $K = (-1,0)$, X est un idéal à gauche différent de D.

(6) $K = (0,0)$, X est un complexe quelconque différent de D.

Remarque 6.1.-

Les cas (2),(2') ; (3),(3') ; (5),(5') sont respectivement symétriques.

Remarque 6.2.-

Tout complexe (p,q)-fermé est (p',q')-fermé si on a, dans

(1) $0 \leq p' \leq p$, $0 \leq q' \leq q$, (remplacer A par $(A \mathbin{.^{\cdot}} D^{p-p'}) \mathbin{^{\cdot}.} D^{q-q'})$.

(2) $0 = p' = p$, $0 \leq q' \leq q$, (remplacer A par $A \mathbin{^{\cdot}.} D^{q-q'})$.

(3) $-1 = p' = p$, $0 \leq q' \leq q$, (remplacer A par $A \mathbin{^{\cdot}.} D^{q-q'})$.

Lemme 6.1.-

Dans le cas (1), X est un idéal bilatère et $X = (D^p X D^q \mathbin{.^{\cdot}} D^p) \mathbin{^{\cdot}.} D^q$.

" " (2), X est un idéal à droite et $X = X D^q \mathbin{^{\cdot}.} D^q$.

" " (3), X est un idéal bilatère et $X = X D^q \mathbin{^{\cdot}.} D^q$; inversement, un idéal bilatère X vérifiant $X = X D^q \mathbin{^{\cdot}.} D^q$ est (-1,q)-fermé.

(1) et (2) résultent de ([12]).

(3) , $x \in X \Longleftrightarrow D x D^q \subseteq A$ et $x D^q \subseteq A$.

$u,v \in D^*$, $x \in X$, on a $D\, uxv\, D^q \subseteq D x D^q \subseteq A$.

Si $u \in D$, $uxv\, D^q \subseteq D x D^q \subseteq A$; si $u = 1_{D^*}$, $uxv\, D^q \subseteq x D^q \subseteq A$.

Donc uxv appartient à X , X est un idéal bilatère.

Pour tout complexe X, nous avons $X \subsetneq X D^q \cdot . D^q$.

Si X est (-1,q) fermé, X est inclus dans $A \cdot . D^q$ d'où $X D^q \subsetneq A$ et $X D^q \cdot . D^q \subsetneq A \cdot . D^q$.

$X D^q$ est un idéal à gauche puisque X est un idéal bilatère, nous avons donc $D X D^q \subsetneq X D^q$, ce qui donne $X D^q \subsetneq X D^q . \cdot D$.

D'où $X D^q \cdot . D^q \subsetneq (X D^q . \cdot D) \cdot . D^q \subsetneq (A . \cdot D) \cdot . D^q$, et par suite $X D^q \cdot . D^q \subsetneq \left[(A . \cdot D) \cdot . D^q\right] \cap (A \cdot . D^q) = X$.

Il en résulte $X = X D^q \cdot . D^q$.

Inversement, si X est un idéal bilatère tel que $X = X D^q \cdot . D^q$, X est (-1,q)-fermé ; en effet,

$D X D^q \subsetneq X D^q \Longrightarrow X D^q \subsetneq X D^q . \cdot D \Longrightarrow (X D^q \cdot . D^q) \subsetneq (X D^q . \cdot D) \cdot . D^q$,

d'où $X = \left[(X D^q . \cdot D) \cdot . D^q\right] \cap (X D^q \cdot . D^q)$.

<u>Théorème 6.1.-</u>

Pour qu'un complexe X soit un K-résidu, il faut et il suffit qu'il soit K-fermé. $\left[K = (p,q)\right]$

D'après la définition du K-résidu d'un complexe H, nous avons

si $p > 0$, $q > 0$, $W_H^K = \left[(D - H) . \cdot D^p\right] \cdot . D^q$;

si $p = 0$, $q > 0$, $W_H^K = (D - H) \cdot . D^q$;

si $p = -1$, $q > 0$, $W_H^K = \left[(D - H) \cdot . D^q\right] \cap \left\{\left[(D - H) . \cdot D\right] \cdot . D^q\right\}$

(d'après le théorème 5.1.).

Ceci démontre le théorème 6.1. pour les cas 1,2,3 en prenant $A = D - H$.

Pour (4), (5) la condition nécessaire est une conséquence du théorème 3.2.

Dans (4), (5), (6) la condition est suffisante, en effet posons $H = D - X$.

$X \cap H$ est vide, donc

- si X est un idéal bilatère, $X \subsetneq W_H^{(-1,-1)}$ (lemme 5.1),

$W_H^{(-1,-1)} \subsetneq D - H = X$ (théorème 5.1.), d'où $X = W_H^{(-1,-1)}$;

- si X est un idéal à droite, $X = W_H^{(0,-1)}$ (même démonstration);
- si X est un complexe quelconque, $X = W_H^{(0,0)}$

Remarque 6.3.-

Les familles de complexes ayant même K-résidu sont convexes et contiennent un élément maximum.

Pour (1) et (2) ceci résulte de ([12]) ; l'élément maximum étant

dans (1), $D - D^p X D^q$, dans (2), $D - X D^q$.

Dans (3), $X = X D^q \cdot . D^q$, si $H = D - X D^q$, d'après le lemme 6.1.,

$X = W_H^{(-1,q)}$.

Soit H' un complexe contenant strictement H, soit h un élément de H' - H, h appartient donc à $H' \cap X D^q$; $h = xy_1 \ldots y_q \in H' \Longrightarrow x \notin W_{H'}^{(-1,q)} \Longrightarrow$ $W_{H'}^{(-1,q)} \neq X$.

$D - X D^q$ est bien l'élément maximum de la famille considérée.

Dans les cas (4), (5), (6) l'élément maximum est $D - X$.

Théorème 6.2.-

a) Pour que l'idéal bilatère (A) engendré par le complexe A soit (p,q)-fermé, $p > 0$, $q > 0$, $[p = -1, \quad q > 0]$, il faut et il suffit que $(D^p A D^q . \cdot D^p) \cdot . D^q$ soit inclus dans (A) $[A D^q \cdot . D^q \subsetneq (A)]$.

b) Pour que l'idéal à droite |A) engendré par un complexe A soit (O,q)-fermé , $q > 0$, il faut et il suffit que $A D^q \cdot . D^q$ soit inclus dans |A).

a) $p > 0$, $q > 0$, d'après le lemme 6.1., (A) est (p,q)-fermé si et seulement si $(A) = \left([D^p (A) D^q] . \cdot D^p\right) \cdot . D^q$.

La condition est nécessaire :

$$A \subsetneq (A) \Longrightarrow [D^p A D^q . \cdot D^p] \cdot . D^q \subsetneq [D^p (A) D^q . \cdot D^p] \cdot . D^q = (A) .$$

La condition est suffisante :

Pour tout complexe X , $X \subsetneq [D^p X D^q . \cdot D^p] \cdot . D^q$.

$$D^p (A) D^q = D^p [A \cup A D \cup D A \cup D A D] D^q = D^p A D^q .$$

d'où $[D^p (A) D^q . \cdot D^p] \cdot . D^q = [D^p A D^q . \cdot D^p] \cdot . D^q \subsetneq (A)$

et $(A) = [D^p (A) D^q . \cdot D^p] \cdot . D^q$.

Pour b) et le deuxième cas de a), nous avons une démonstration analogue.

<u>Théorème 6.3.-</u>

a) Pour que tous les idéaux bilatères d'un demi-groupe D soient (p,q)-fermés, il faut et il suffit que l'idéal D soit :

- si $p > O$, $q > O$, simplifiable dans le demi-groupe des idéaux bilatères ;
- si $p = -1$, $q > O$, simplifiable à droite dans le demi-groupe des idéaux bilatères.

b) Pour que tous les idéaux à droite d'un demi-groupe D soient (O,q)-fermés, $q > O$, il faut et il suffit que D soit simplifiable à droite dans le demi-groupe des idéaux à droite de D.

c) Si tous les idéaux bilatères [à droite] d'un demi-groupe D sont (p,q)-fermés, ils sont aussi (p',q')-fermés pour :

- tous les couples (p',q'), si $p > O$, $q > O$.
- tous les couples $(-1,q')$, si $p = -1$, $q > O$.
- [tous les couples (O,q'), si $p = O$, $q > O$].

a) $p > O$, $q > O$. Si $\mathfrak{M}_{(p,q)}$ est la relation d'équivalence définie dans l'ensemble des idéaux bilatères de D par :

$X \equiv X' \ (\mathfrak{M}_{(p,q)})$ si et seulement si $D^p X D^q = D^p X' D^q$, les idéaux (p,q)-fermés sont les éléments maximaux des classes mod $\mathfrak{M}_{(p,q)}$ ([12]).

Donc, pour que tous les idéaux bilatères soient (p,q)-fermés, il faut et il suffit que ces classes ne contiennent qu'un seul élément, autrement dit, si X et X' sont idéaux bilatères la relation $D^p X D^q = D^p X' D^q$ doit impliquer $X = X'$.

Ceci équivaut à $X D = X' D \Longrightarrow X = X'$ et $D X = D X' \Longrightarrow X = X'$.

Nous avons un raisonnement analogue pour $p = O$, $q > O$ avec les idéaux à droite, c'est-à-dire pour b).

$p = -1$, $q > O$. Si tout idéal bilatère est $(-1,q)$-fermé ; $X D^q = X' D^q$ implique $X = X'$, en effet, d'après le lemme 6.1., $X = X D^{q} \cdot . D^q$, $X' = X' D^{q\cdot} . D^q$.

Donc si X, X' sont des idéaux bilatères et si $X D = X' D$, on a $X = X'$.

Inversement, supposons D simplifiable à droite dans le demi-groupe des idéaux bilatères. Soit $Y = X D^{q} \cdot . D^q$; X étant un idéal bilatère, il en est de même pour Y.

$Y = X D^q \mathbin{\cdot .} D^q \Longrightarrow X \subseteq Y$, d'où $X D^q \subseteq Y D^q$; mais $Y D^q \subseteq X D^q$, et par suite $X D^q = Y D^q$. X et Y étant des idéaux bilatères, nous avons $X = Y$, d'où $X = X D^q \mathbin{\cdot .} D^q$; d'après le lemme 6.1., X est $(-1,q)$-fermé.

c) Cette proposition est une conséquence du fait que les conditions trouvées sont indépendantes, dans chaque cas, de p et de q.

<u>Théorème 6.4.-</u>

Si p et q sont deux nombres positifs, pour qu'un idéal bilatère X soit tel qu'il existe un complexe H vérifiant : $X = W_H^{(O,q)} = W_H^{(p,O)}$, il faut et il suffit que l'on ait

$$D^pX \mathbin{. \cdot} D^p \subseteq X , \quad D^pX \mathbin{\cdot .} D^q \subseteq X, \quad X D^q \mathbin{. \cdot} D^p \subseteq X, \quad X D^q \mathbin{\cdot .} D^q \subseteq X .$$

Condition nécessaire : Si H existe, $K = (D - X D^q) \cap (D - D^pX)$ a la même propriété que H, d'après la remarque 6.3. ; nous avons donc

$$(D^pX \cup X D^q) \mathbin{. \cdot} D^p = X \quad , \quad (D^pX \cup X D^q) \mathbin{\cdot .} D^q = X ,$$

d'où les conditions du théorème.

Condition suffisante : Prenons $K = D - (D^pX \cup X D^q)$,

$$X \subseteq D^pX \mathbin{. \cdot} D^p \subseteq (D^pX \quad X D^q) \mathbin{. \cdot} D^p = (D^pX \mathbin{. \cdot} D^p) \cup (X D^q \mathbin{. \cdot} D^p) \subseteq X ,$$

$$X \subseteq X D^q \mathbin{\cdot .} D^q \subseteq (D^pX \quad X D^q) \mathbin{\cdot .} D^q = (D^pX \mathbin{\cdot .} D^q) \cup (X D^q \mathbin{\cdot .} D^q) \subseteq X ,$$

d'où $\quad X = (D^pX \cup X D^q) \mathbin{. \cdot} D^p = W_K^{(p,O)}$,

$$X = (D^pX \cup X D^q) \mathbin{\cdot .} D^q = W_K^{(O,q)}$$

<u>Théorème 6.4'.-</u>

p positif étant donné, pour qu'un idéal bilatère X soit tel qu'il existe un complexe H vérifiant : $X = W_H^{(O,-1)} = W_H^{(p,O)}$ ou $X = W_H^{(O,O)} = W_H^{(p,O)}$, il faut et il suffit que l'on ait $X = X \mathbin{. \cdot} D$.

Supposons qu'il existe H tel que $X = W_H^{(O,-1)} = W_H^{(p,O)}$, d'après la remarque 6.3., nous pouvons prendre $H = (D - X) \cap (D - D^pX) = D - X$ car $D^pX \subseteq X$ (X idéal bilatère). Ceci entraîne $W_H^{(O,-1)} = X$.

Il faut aussi avoir $W_H^{(p,O)} = X$, c'est-à-dire $X \mathbin{.\cdot} D^p = X$.

Or $X .^{\cdot} A = X \Longrightarrow X .^{\cdot} D = X$, en effet $A \subsetneq D \Longrightarrow X .^{\cdot} A \geqslant X .^{\cdot} D$, mais $D X \leqslant X \Longrightarrow X \leqslant X .^{\cdot} D$, d'où $X = X .^{\cdot} D$.

Inversement, si X est un idéal bilatère vérifiant $X .^{\cdot} D = X$, nous avons $\forall p > 0$, $X .^{\cdot} D^p = X$. Prenons $K = D - X$,

$$W_K^{(0,-1)} = X \quad , \quad W_K^{(p,0)} = (D - K) .^{\cdot} D^p = X .^{\cdot} D^p = X .$$

Dans ce cas de plus nous avons $W_K^{(p,-1)} = W_K^{(0,-1)} = W_K^{(p,0)} = X$.

Pour $q = 0$, $p > 0$, $W_H^{(0,0)} = D - H \Longrightarrow H = D - X$, d'où $X .^{\cdot} D^p = X$ et $X .^{\cdot} D = X$.

Inversement, si $X .^{\cdot} D = X$, en prenant $K = D - X$ on a $W_K^{(0,0)} = W_K^{(p,0)} = X$.

<u>Théorème 6.5.-</u>

p et q étant donnés, pour qu'un idéal bilatère X soit tel qu'il existe un complexe H vérifiant

$$X = W_H^{(p,q)} = W_H^{(0,q)} = W_H^{(p,0)}$$, il faut et il suffit que l'on ait :

- si $p > 0$, $q > 0$, $X = X .^{\cdot} D$, $X = X ^{\cdot}. D$;
- si $p > 0$, $q = -1$, $X = X .^{\cdot} D$.

Le cas $p > 0$, $q = -1$, est une conséquence du théorème 6.4'.

$p > 0$, $q > 0$. Condition nécessaire :

La remarque 6.3. permet de prendre $H = (D - D^p X D^q) \cap (D - D^p X) \cap (D - X D^q)$, d'où $H = D - (D^p X \cup X D^q)$. Il faut donc que l'on ait

$(D^p X \cup X D^q) .^{\cdot} D^p = X$, $(D^p X \cup X D^q) ^{\cdot}. D^q = X$, $\left[(D^p X \cup X D^q) .^{\cdot} D^p\right] ^{\cdot}. D^q = X$ c'est-à-dire :

$X .^{\cdot} D^p = X$, $X ^{\cdot}. D^q = X$, d'où $X .^{\cdot} D = X$; $X ^{\cdot}. D = X$.

Condition suffisante :

Prenons $H = D - X$;

$$W_H^{(0,q)} = X ^{\cdot}. D^q = X \quad , \quad W_H^{(p,0)} = X .^{\cdot} D^p = X \quad , \quad W_H^{(p,q)} = \left[X .^{\cdot} D^p\right] ^{\cdot}. D^q = X.$$

Lemme 6.2. -

Pour que D^n soit un demi-groupe simple à droite [simple] il faut et suffit que tout idéal à droite [bilatère] non vide de D contienne D^n.

Supposons D^n simple à droite, soit X un idéal à droite de D, $X D^n$ est un idéal à droite de D^n non vide, nous avons donc $X D^n = D^n$. Mais $X D^n$ est contenu dans X et par suite D^n est inclus dans X.

Inversement, supposons que D^n soit inclus dans tout idéal à droite de D. Soit X' un idéal à droite de D^n, $X = X' D^n$ est un idéal à droite de D, d'où $D^n \subseteq X = X' D^n \subseteq X'$ et par suite $X' = D^n$.

Le cas bilatère se démontre de la même manière.

Théorème 6.6.-

Si $n \geqslant 2$, pour que D^n soit simple à droite, il faut et il suffit que D ne contienne pas d'idéaux (O,n - 1)-fermés propres.

Si D^n est simple à droite, pour tout idéal à droite X non vide, $X D^{n-1}$ est un idéal à droite non vide de D, d'après le lemme 6.2., D^n est contenu dans $X D^{n-1}$. Or, si X est (O,n-1)-fermé, le lemme 6.1. donne,

$$X = X D^{n-1} \therefore D^{n-1} \supseteq D^n \therefore D^{n-1} = D .$$

Inversement, supposons qu'il existe un idéal à droite X de D ne contenant pas D^n. Posons $X' = D^n \cap X$, le (O, n-1) résidu de D - X' n'est pas vide car $X D^{n-1}$ est inclus dans X', ce qui montre que X est contenu dans ce résidu. $W^{(O,n-1)}_{D - X'}$ est différent de D, en effet, il existe un élément $x_1 x_2 \ldots x_n$ appartenant à $D^n \setminus X$, d'où un élément x_1 de D qui n'appartient pas à $W^{(O,n-1)}_{D - X'}$.

$W^{(O,n-1)}_{D - X'}$ serait donc un idéal à droite (O,n-1)-fermé (théorème 6.1.) propre de D, ce qui contredit l'hypothèse.

Théorème 6.7.-

Si $n \geqslant 3$, pour que D^n soit simple, il faut et il suffit que D ne contienne pas d'idéaux (p,q)-fermés propres, pour un couple d'entiers positifs p,q ayant pour somme n-1.

Pour toute partie non vide X de D , $D^p X D^q$ est un idéal bilatère non vide de D^n , car $p+q = n-1$, donc si D^n est simple, $D^p X D^q$ est égal à D^n . Si de plus X est (p,q)-fermé, $X = (D^p X D^q . \cdot D^p) \cdot . D^q = (D^n . \cdot D^p) \cdot . D^q = D$.

Inversement, soit X un idéal bilatère de D ne contenant pas D^n, $D^p X D^q$ est inclus dans $D^n \cap X = X'$. Nous avons $X \subsetneq W^{(p,q)}_{D - X'}$, de plus, il existe un élément $x_1 \ldots\ldots x_p a\, y_1 \ldots\ldots y_q$ appartenant à $D^n \setminus X$, d'où un élément a de D qui n'appartient pas à $W^{(p,q)}_{D - X'}$; $W^{(p,q)}_{D - X'}$ serait donc un idéal (p,q)-fermé propre, ce qui contredit l'hypothèse.

Remarque : Pour deux couples d'entiers positifs (p,q) , (p',q') ayant la même somme, D ne contient pas d'idéaux (p,q)-fermés propres si et seulement si D ne contient pas d'idéaux (p',q')-fermés propres. En effet, d'après le théorème 6.7., l'une ou l'autre de ces propriétés est équivalente à la condition D^{p+q+1} simple.

Théorème 6.8.-

Pour que D^2 soit simple, il faut et il suffit que D ne contienne pas d'idéaux (-1,1) (ou (1,-1))-fermés propres.

Démonstration analogue à celle du théorème précédent.

CHAPITRE II

COMPLEXES PARTICULIERS LIES AUX R_H^K

Dans ce chapître nous allons approfondir l'étude de certaines relations d'équivalence introduites dans le premier chapître.

1) Relations $\mathscr{L}_H$, L_H et ${}_HL$ et complexes semi-forts.

Notations. Pour $K = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2)$, nous poserons : $R_H^K = \mathscr{L}_H$, $W_H^K = \mathscr{W}_H$.

Pour $K = (\alpha_1, \beta_1, \beta_2)$, c'est-à-dire $K = (O,2)$, nous poserons :

$$R_H^K = L_H, \quad W_H^K = \overline{W}_H .$$

Pour $K = (2,O)$, nous poserons : $R_H^K = {}_HL$, $W_H^K = {}_H\overline{W}$.

$\mathscr{L}_H$ est donc une relation d'équivalence définie dans $D^{[2]}$ par :

$$(x,y) \equiv (x',y') \quad (\mathscr{L}_H) \Longleftrightarrow (H.\dot{}x)\dot{}.\,y = (H.\dot{}x')\dot{}.\,y' .$$

L_H et ${}_HL$ opèrent dans D, nous avons

$$a \equiv b\ (L_H) \Longleftrightarrow (H.\dot{}a) \cap D^2 = (H.\dot{}b) \cap D^2 .$$

Posons $K = H \cap D^3$, alors, $\mathscr{L}_H = \mathscr{L}_K$, $L_H = L_K$, ${}_HL = {}_KL$,

$$\mathscr{W}_H = \mathscr{W}_K, \quad \overline{W}_H = \overline{W}_K, \quad {}_H\overline{W} = {}_K\overline{W} .$$

Remarque 1.1.-

D'après l'étude qui précède le théorème 1.3.5. (théorème 3.5, chapitre 1),

$$a \equiv b\ (L_H) \Longleftrightarrow \forall\, y \in D\ ,\ (a,y) \equiv (b,y)\ (\mathscr{L}_H) .$$

Remarque 1.2.-

Les théorèmes 1.5.1. et 1.3.5. donnent

$$\overline{W}_H = W_H\dot{}.\,D\ ,\quad {}_H\overline{W} = {}_HW.\dot{}D\ ,\quad \mathscr{W}_H \supseteq (\overline{W}_H, D) \cup (D, {}_H\overline{W}) .$$

Supposons qu'il existe un élément (a,b) appartenant à $\mathscr{W}_H \setminus (\overline{W}_H, D) \cup (D, {}_H\overline{W})$;

$a \notin W_H \Longrightarrow \exists u,\ x \in D$, tels que $h = aux \in H \cap D^3 = K$,

$b \notin {}_HW \Longrightarrow \exists v,\ y \in D$, tels que $k = yvb \in H \cap D^3 = K$,

$$(a,b) \in \mathcal{W}_H \Rightarrow (h,k) \in \mathcal{W}_H \quad \text{(théorème 1.3.2)} .$$

Donc la relation $(K,K) \cap \mathcal{W}_H = \emptyset$ entraîne $\mathcal{W}_H = (\overline{W}_H, D) \cup (D, {}_H\overline{W})$.

Si S est un sous-demi-groupe, on a

$$\overline{W}_S = W_S \ , \quad {}_S\overline{W} = {}_SW \ , \ \mathcal{W}_S = (W_S, D) \cup (D, {}_SW) .$$

Définition 1.1.-

Un complexe H est dit totalement net si $\mathcal{W}_H$ est vide.

Un complexe totalement net est évidemment net, la réciproque est inexacte comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.1.-

D étant le demi-groupe défini par la table de multiplication ci-après ,

	a	b	c	d
a	a	a	c	c
b	b	b	d	d
c	a	a	c	c
d	b	b	d	d

prenons $H = \{a,d\}$; H est net, mais H n'est pas totalement net car $\mathcal{W}_H$ contient l'élément (a,d).

Définition 1.2.-

Un complexe H est dit semi-fort à droite [resp. à gauche] si, pour tout $x \in D$, l'ensemble $H^{\cdot}.x$ [resp. $H.^{\cdot}x$] est vide ou fort. H est dit semi-fort s'il est à la fois semi-fort à droite et semi-fort à gauche.

Propriété 1.1.-

Tout complexe (O,2)-fort est semi-fort à droite.

Soit H un complexe (O,2)-fort, et soit x un élément de D, tel que $H^{\cdot}.x$ ne soit pas vide ; vérifions que $H^{\cdot}.x$ est fort. Supposons qu'il existe a, b, y, y' avec $a \in [(H^{\cdot}.x)^{\cdot}.y] \cap [(H^{\cdot}.x)^{\cdot}.y']$ et $b \in (H^{\cdot}.x)^{\cdot}.y$; ceci équivaut à

$ayx \in H$, $ay'x \in H$, $byx \in H$. Comme H est (O,2)-fort, ces conditions impliquent $by'x \in H$, d'où $b \in (H^{\cdot}.x)^{\cdot}.y'$, et par suite $H^{\cdot}.x$ est un complexe fort.

Corollaire 1.1.-

a) Tout complexe fort est semi-fort.

b) Si D contient un élément unité à droite e, tout complexe semi-fort à droite est fort.

a) En effet, d'après le théorème 1.4.1., fort implique (O,2)-fort et (2,O)-fort.

b) Si H est semi-fort à droite, $H^{\cdot}.e$ est fort, mais $H^{\cdot}.e$ est égal à H, H est donc un complexe fort.

Exemple 1.2.-

Reprenons l'exemple 1.4.1., H est un complexe (2,O)-fort donc semi-fort à gauche, mais H n'est pas semi-fort à droite ; en effet, $H^{\cdot}.d = H$.

Propriété 1.2.-

Tout complexe bilatèrement fort est semi-fort.

D'après l'exemple 1.4.4. , si H est bilatèrement fort et si les complexes $(H^{\cdot}.x).^{\cdot}y$, $(H^{\cdot}.x').^{\cdot}y'$ se coupent , alors ces complexes coïncident. En particulier , $[(H^{\cdot}.x).^{\cdot}y] \between [(H^{\cdot}.x).^{\cdot}y']$ entraîne $(H^{\cdot}.x).^{\cdot}y = (H^{\cdot}.x).^{\cdot}y'$; pour tout $x \in D$, $H^{\cdot}.x$ est fort, H est donc semi-fort à droite. On vérifie de même que H est semi-fort à gauche.

Exemple 1.3.-

Le demi-groupe D et le complexe H étant donnés, considérons un tableau carré dont les lignes et les colonnes sont indexées par les éléments de D. Si $x \in D$, $y \in D$, mettons l'ensemble $(H.^{\cdot}x)^{\cdot}.y$ dans la case définie par la ligne x et la colonne y. Pour que H soit semi-fort à droite [resp. à gauche, resp. bilatèrement fort] , il faut et il suffit que les ensembles figurant dans deux cases d'une même colonne [resp. ligne , resp. deux cases quelconques] soient identiques ou disjoints.

Soient D le semi-groupe libre, commutatif engendré par quatre éléments a,b,c,d , et $H = \{a^3, a^2b , ab^2 , b^3 , acd\}$. Construisons le tableau sus-indiqué :

	a	b	c	d	x
a	a,b	a,b	d	c	$\emptyset$
b	a,b	a,b	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
c	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	a	$\emptyset$
d	$\emptyset$	$\emptyset$	a	$\emptyset$	$\emptyset$
y	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

x et y sont des éléments de $D - \{a,b,c,d\}$ donc des mots de longueur supérieure ou égale à 2 , ceci justifie le contenu du tableau. Nous en déduisons que H est un complexe semi-fort et qu'il n'est pas bilatèrement fort ; D étant commutatif, H n'est pas non plus (O,2)-fort.

Propriété 1.3.-

Les complexes semi-forts à droite [resp. semi-forts] d'un demi-groupe D forment une famille de Moore.

D est fort, donc semi-fort à droite. Soient H_i , $i \in I$, une famille de complexes et H leur intersection, si H n'est pas vide, $H^{\bullet}.x = \bigcap_{i \in I} (H_i^{\bullet}.x)$. Si tous les H_i sont semi-forts à droite, les $H_i^{\bullet}.x$ sont vides ou forts, leur intersection est vide ou forte, H est donc un complexe semi-fort à droite.

Nous allons maintenant donner la construction de la fermeture correspondante. Soit H un complexe de D. Posons $H_0 = H$; H_n étant construit, considérons le complexe T_n égal à la réunion, pour tous les éléments (x,y,y') de $D^{[3]}$, des parties de D de la forme $y' . [(H_n .^{\bullet} y)^{\bullet}.x] . x$ qui rencontrent H_n . Posons $H_{n+1} = H_n \cup T_n$. Soit $\overline{H} = \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n$.

Si K est un complexe semi-fort à droite contenant H, K contient $\overline{H}$; H_0 est contenu dans K ; supposons H_n inclus dans K.

Si $y' [(H_n^{\bullet}.x).^{\bullet}y] x \between H_n$, $y' [(K^{\bullet}.x).^{\bullet}y] x \between K$, ce qui implique , $[(K^{\bullet}.x).^{\bullet}y] \between [(K^{\bullet}.x).^{\bullet}y']$, mais K étant semi-fort à droite, $K^{\bullet}.x$ est fort, d'où $(K^{\bullet}.x).\,y = (K^{\bullet}.x).^{\bullet}y'$ et $y'\,[(K^{\bullet}.x).^{\bullet}y]\,x \subseteq K$, ce qui donne $y'\,[(H_n\ x).\,y]\,x \subseteq K$; T_n est donc inclus dans K et par suite K contient H_{n+1}. Par récurrence, nous en déduisons que $\overline{H}$ est contenu dans K.

Montrons maintenant que $\overline{H}$ est un complexe semi-fort à droite. Soient x, y, y', u, v des éléments de D, tels que $u \in [(\overline{H}^{\bullet}.x).^{\bullet}y] \cap [(\overline{H}^{\bullet}.x).^{\bullet}y']$ et $v \in [(\overline{H}^{\bullet}.x).^{\bullet}y]$. Nous avons donc, $yux \in \overline{H}$, $y'ux \in \overline{H}$, $yvx \in \overline{H}$; $\overline{H} = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$, les H_i étant emboités, il existe un indice n avec

$$yux \in H_n \quad , \quad y'ux \in H_n \quad , \quad yvx \in H_n \quad ,$$

d'où $y'ux \in y'\,[(H_n^{\bullet}.x).^{\bullet}y]\,x \cap H_n$, ce qui donne $y'\,[(H_n^{\bullet}.x).^{\bullet}y]x \subseteq T_{n+1}$. Comme $v \in [(H_n^{\bullet}.x).^{\bullet}y]$, $y'vx \in y'\,[(H_n^{\bullet}.x).^{\bullet}y]\,x$ et par suite $y'vx \in \overline{H}$.

$\overline{H}$ est bien le plus petit complexe semi-fort à droite contenant H.

Pour la propriété semi-fort, nous avons une construction analogue en remplaçant T_n par $T_n \cup T'_n$, T'_n étant la réunion, pour tous les éléments (x, x', y) de $D^{[3]}$, des parties de D de la forme $y\,[(H_n\ .x).\ y]\,x'$ qui rencontrent H_n.

Propriété 1.4.-

Soit φ un homomorphisme d'un demi-groupe D sur un demi-groupe D'.

a) Si K est un complexe semi-fort à droite de D', $\varphi^{-1}(K)$ est un complexe semi-fort à droite de D.

b) Si H est un complexe semi-fort à droite de D saturé pour l'équivalence d'homomorphisme de φ, $\varphi(H)$ est un complexe semi-fort à droite de D'.

La démonstration de cette propriété est semblable à celle de la propriété 1.4.2. Nous pouvons également énoncer une propriété analogue à la propriété 1.4.3.

Propriété 1.5.-

Soient D' et D'' deux demi-groupes, D leur produit direct, $D = D' \times D''$, H un complexe de D de la forme $H' \times H''$.

a) Si H' et H" sont semi-forts à droite, H est semi-fort à droite.

b) Si H est semi-fort à droite et si $H \cap D^3$ n'est pas vide, H' et H" sont semi-forts à droite.

<u>Théorème 1.1.</u>-

Soient H un complexe semi-fort à droite du demi-groupe D, a,b,c des éléments de D, u,v des éléments de D^*. Si (au,vc), (bu,vc) sont congrus mod. $(\mathcal{L}_H)$ et si (au,vc) n'est pas dans $\mathcal{W}_H$, alors on a $(a,c) \equiv (b,c)$ $(\mathcal{L}_H)$.

Comme (au,vc) n'appartient pas à $\mathcal{W}_H$, il existe $x \in D$ avec $auxvc \in H$, $buxvc \in H$, d'où $uxv \in \left[(H.^{\cdot}a)^{\cdot}.c\right] \cap \left[(H.^{\cdot}b)^{\cdot}.c\right]$. Mais H étant semi-fort à droite, $H^{\cdot}.c$ est fort, ce qui entraîne $(H.^{\cdot}a)^{\cdot}.c = (H.^{\cdot}b)^{\cdot}.c$ et $(a,c) \equiv (b,c)$ $(\mathcal{L}_H)$.

<u>Corollaire 1.2.</u>-

Si H est un complexe semi-fort à droite tel que $(K,K) \cap \mathcal{W}_H = \emptyset$, $(K = H \cap D^3)$, L_H est simplifiable à droite dans $D - \overline{W}_H$.

Soient ac, bc des éléments de $D - \overline{W}_H$ congrus mod. L_H ;

- si $y \in {}_H\overline{W}$, (a,y) et $(b,y) \in \mathcal{W}_H$ d'où $(a,y) \equiv (b,y)$ $(\mathcal{L}_H)$;

- si $y \notin {}_H\overline{W}$, d'après la remarque 1.2, $(ac,y) \notin \mathcal{W}_H$; le théorème 1.1. donne alors $(a,y) \equiv (b,y)$ $(\mathcal{L}_H)$. Pour tout $y \in D$, nous avons $(a,y) \equiv (b,y)$ $(\mathcal{L}_H)$, ce qui entraîne $a \equiv b$ (L_H) (Remarque 1.2.).

<u>Théorème 1.2.</u>-

Soient H un complexe de D et A une classe mod. L_H différente de $\overline{W}_H$.

a) Si H est semi-fort à droite et si $\mathcal{W}_H$ vérifie la condition suivante :

$x,x',y,u,v \in D$, $xuy \equiv x'uy \equiv xvy$ (L_H), $xuy \notin \overline{W}_H$, $(xuy,z) \in \mathcal{W}_H \Longrightarrow (x',vy,z) \in \mathcal{W}_H$,

A est un complexe semi-fort à droite.

b) Si H est semi-fort, A est fort.

c) Si H est bilatèrement fort, A est (1,-1)-fort.

a) Si xuy, x'uy , xyv appartiennent à A ; xuy , x'uy , xvy sont congrus mod. L_H puisque A est une classe mod. L_H .

Si z est tel que (xuy,z) n'appartienne pas à $\mathcal{W}_H$, le théorème 1.1. donne $(x,z) \equiv (x',z) \quad (\mathcal{L}_H)$

d'où $(xvy,z) \equiv (x'vy,z) \quad (\mathcal{L}_H)$ (lemme 1.3.1) .

Si z est tel que (xuy,z) soit dans $\mathcal{W}_H$, la condition vérifiée par $\mathcal{W}_H$ implique $(xvy,z) \equiv (x'vy,z) \quad (\mathcal{L}_H)$. Nous en déduisons $xvy \equiv x'vy \ (L_H)$, d'où $x'vy \in A$.

A est un complexe semi-fort à droite.

b) Supposons H semi-fort. Soient x,x',u,v, des éléments de D tels que xu, x'u, xv appartiennent à A. Nous avons $xu \equiv x'u \equiv xv \ (L_H)$; pour tout $t \in D$, $(xu,t) \equiv (x'u,t) \quad (\mathcal{L}_H)$

Si (xu,t) n'appartient pas à $\mathcal{W}_H$, le théorème 1.1. donne $(x,t) \equiv (x',t) \quad (\mathcal{L}_H)$ d'où $(xv,t) \equiv (x'v,t) \quad (\mathcal{L}_H)$.

Supposons qu'il existe un élément z de D, tel que $(xu,z) \in \mathcal{W}_H$ et $(x'v,z) \notin \mathcal{W}_H$. Il existe $b \in D$ avec $x'vbz \in H$. A étant différent de $\overline{W}_H$, d'après ce qui précède, il existe $a,t \in D$, tels que $xuat \in H$, $x'uat \in H$, $xvat \in H$, $x'vat \in H$.

Nous avons donc $v \in [(H.\dot{}x')\dot{}.bz] \cap [(H.\dot{}x')\dot{}.at]$; H étant semi-fort à gauche, ceci entraîne $[(H.\dot{}x')\dot{}.bz] = [(H.\dot{}x')\dot{}.at]$.

$u \in [(H.\dot{}x')\dot{}.at]$ implique $u \in [(H.\dot{}x')\dot{}.bz]$, d'où $x'ubz \in H$, ce qui contredit l'hypothèse $(x'u,z) \in \mathcal{W}_H$ (conséquence directe de $(xu,z) \in \mathcal{W}_H$) .

Pour tout $y \in D$, nous avons donc $(xv,y) \equiv (x'v,y) \quad (\mathcal{L}_H)$, ce qui implique $xv \equiv x'v \quad (L_H)$ et $x'v \in A$. A est bien un complexe fort.

c) Soient x,y,a,b des éléments de D , u,v des éléments de D^* , tels que xau, xbu, yav appartiennent à A. Pour tout $z \in D$,

$(xau,z) \equiv (xbu,z) \equiv (yav,z)$ $(\mathcal{L}_H)$. S'il existe $c \in D$, avec $xaucz \in H$, nous avons également $xbucz \in H$, $yavcz \in H$; d'où $a \in [(H.^{\cdot}x)^{\cdot}.ucz] \cap [(H.^{\cdot}y)^{\cdot}.vcz]$. H étant bilatèrement fort, nous en déduisons $[(H.^{\cdot}x)^{\cdot}.ucz] = [(H.^{\cdot}y)^{\cdot}.vcz]$, or $b \in [(H.^{\cdot}x)^{\cdot}.ucz]$, d'où $b \in [(H.^{\cdot}y)^{\cdot}.vcz]$ et $ybvcz \in H$. Comme H est en particulier semi-fort à droite, ceci implique $(xau,z) \equiv (ybv,z)$ $(\mathcal{L}_H)$.

Soit $t \in D$, tel que $(xau,t) \in \mathcal{W}_H$ (d'où $(yav,t) \in \mathcal{W}_H$). Supposons que (ybv,t) n'appartienne pas à $\mathcal{W}_H$, alors, il existe $d \in D$, avec $ybvdt \in H$.

D'autre part A étant différent de $\overline{W_H}$, il existe, d'après ce qui précède, $c \in D$, $z \in D$ tels que $xaucz$, $xbucz$, $yavcz$, $ybvcz$ appartiennent à H .

$$b \in [(H.^{\cdot}y)^{\cdot}.vdt] \cap [(H.^{\cdot}y)^{\cdot}.vcz] ,$$

H étant semi-fort à gauche, on en déduit $[(H.^{\cdot}y)^{\cdot}.vdt] = [(H.^{\cdot}y)^{\cdot}.vcz]$; la condition $a \in [(H.^{\cdot}y)^{\cdot}.vcz]$ entraîne $yavdt \in H$ contrairement à l'hypothèse $(yav,t) \in \mathcal{W}_H$.

Par suite, pour tout $z \in D$, $(yav,z) \equiv (ybv,z)$ $(\mathcal{L}_H)$, d'où $yav \equiv ybv$ (L_H) , $ybv \in A$; A est (1,-1)-fort.

<u>Exemple 1.4.-</u>

D est le demi-groupe à 6 éléments défini par la table suivante :

	a	b	c	d	e	f
a	a	a	c	a	a	c
b	a	b	c	a	b	c
c	c	c	a	c	c	a
d	d	d	f	d	d	f
e	d	e	f	d	e	f
f	f	f	d	f	f	d

	a	b	c	d	e	f
a	∅	∅	∅	∅	∅	∅
b	∅	b, e	∅	∅	b, e	∅
c	∅	∅	∅	∅	∅	∅
d	c, f	c, f	a, b d, e	c, f	c, f	a, b d, e
e	c, f	c, f	a, b d, e	c, f	c, f	a, b d, e
f	a, b d, e	a, b d, e	c, f	a, b d, e	a, b d, e	c, f

$H = \{b,f\}$; dans le deuxième tableau nous avons mis le complexe $(H.^{\bullet}x)^{\bullet}.y$ dans la case définie par la ligne x et la colonne y.

D'après l'exemple 1.3., nous voyons que H est un complexe semi-fort à gauche sans être semi-fort à droite.

Les classes mod. ${}_{H}L$ sont $A = \{a,d\}$, $B = \{b,e\}$, $C = \{c,f\}$; ${}_{H}\overline{W}$ est vide.

B est un complexe fort, les classes mod. ${}_{B}L$ sont ${}_{B}\overline{W} = \{a,c,d,f\}$ et $\{b,e\}$.

C est un complexe fort, les classes mod. ${}_{C}L$ sont $\{a,b,d,e\}$, $\{c,f\}$; ${}_{C}\overline{W}$ est vide.

Donc nous avons seulement ${}_{H}L \subset {}_{C}L$ dans $D - {}_{C}\overline{W}$.

A n'est semi-fort d'aucun côté. ${}_{H}L$ et ${}_{A}L$ coïncident. L'hypothèse du théorème symétrique de 1.2.a, concernant $\mathcal{W}_{H}$ n'est pas vérifiée, en effet,

$baa = bab = bba = a$, ${}_{H}\overline{W} = \emptyset$, $(b,a) \in \mathcal{W}_{H}$, alors que $bbb = b$ et que (b,b) n'est pas dans $\mathcal{W}_{H}$.

Cet exemple montre aussi que H, qui est semi-fort à gauche, n'est pas (2,O)-fort, en effet d'après le théorème 1.5.3., A serait (-1,O)-fort, donc en particulier, semi-fort.

<u>Théorème 1.3.</u>-

Soient H un complexe semi-fort à droite, S un sous-demi-groupe de D inclus dans H, tel que S H soit contenu dans H. Alors,

- S est inclus dans une classe U_S mod. L_H .
- U_S est un sous-demi-groupe (O,-1)-fort .
- Si $K = H \cap D^3$ est inclus dans S, U_S est le plus petit complexe unitaire à droite contenant S.

Tout d'abord remarquons que les relations $(s,y) \in \mathcal{W}_H$, $s \in S$, impliquent $y \in {}_{H}\overline{W}$. En effet, s'il existait x,a , avec $xay \in H$, sxay appartiendrait à SH , ce qui contredirait $(s,y) \in \mathcal{W}_H$ car SH est contenu dans H.

Soient s et s' deux éléments quelconques de S, y un élément de D. Alors

- si $(s,y) \in \mathcal{W}_H$, $y \in {}_H\overline{W}$, d'où $(s',y) \in \mathcal{W}_H$ et $(s,y) \equiv (s',y)$ $(\mathcal{L}_H)$;

- si $(s,y) \notin \mathcal{W}_H$, il existe $a \in D$, avec $say \in H$; $SH \subsetneq H$ donne $s.say \in H$ $s'.say \in H$, d'où $(s,y) \equiv (s',y)$ $(\mathcal{L}_H)$ car H est semi-fort à droite.

On en déduit la relation $s \equiv s'$ (L_H) ; S est inclus dans une classe U_S mod. L_H.

Soient u un élément de U_S , s un élément de S , y un élément de D. Alors

- si $(s,y) \in \mathcal{W}_H$, $(su,y) \in \mathcal{W}_H$, d'où $(s,y) \equiv (su,y)$ $(\mathcal{L}_H)$,

- si $(s,y) \notin \mathcal{W}_H$, il existe $a \in D$, avec $say \in H$, $uay \in H$ mais alors $suay \in SH \subsetneq H$, ce qui donne $(su,y) \equiv (s,y)$ $(\mathcal{L}_H)$ puisque H est semi-fort à droite. Nous avons donc $su \equiv s$ (L_H) .

Soient u_1, u_2 deux éléments de U_S ; on a $u_1 \equiv s$ (L_H) , $u_2 \equiv s$ (L_H) et comme L_H est régulière à droite , $u_1 u_2 \equiv su_2$ (L_H) , mais $u_2 \equiv s$ (L_H) implique $su_2 \equiv s$ (L_H) ; $u_1 u_2$ appartient donc à U_S qui est un sous-demi-groupe.

Soient a, b deux éléments de D , v, w deux éléments de D^*, tels que av, by, aw appartiennent à U_S . Alors

- si $(s,y) \in \mathcal{W}_H$, $(bw,y) \in \mathcal{W}_H$, d'où $(s,y) \equiv (bw,y)$ $(\mathcal{L}_H)$;

- si $(s,y) \notin \mathcal{W}_H$, il existe $c \in D$, avec $scy \in H$, $avcy \in H$, $bvcy \in H$ $awcy \in H$, on a donc $vc \in [(H.\dot{}a)\dot{}.y] \cap [(H.\dot{}b)\dot{}.y]$, ce qui implique $[(H.\dot{}a)\dot{}.y] = [(H.\dot{}b)\dot{}.y]$ car H est semi-fort à droite ; et par suite ,

$$wc \in [(H.\dot{}a)\dot{}.y] \Longrightarrow wc \in [(H.\dot{}b)\dot{}.y] \Longrightarrow c \in [(H.\dot{}bw)\dot{}.y] \cap [(H.\dot{}s)\dot{}.y]$$

$$\Longrightarrow (bw,y) \equiv (s,y) \quad (\mathcal{L}_H) .$$

Nous avons donc $bw \equiv s$ (L_H) , $bw \in U_S$; U_S est un sous-demi-groupe $(0,-1)$-fort , en particulier U_S est unitaire à droite. (propriété 1.5.1).

Supposons $H \cap D^3 \subsetneq S$, et soit V un complexe unitaire à droite contenant S . $\forall u \in U_S$ et $\forall s \in S$, $u s^2 \in H$ car $s^3 \in H$, donc $us^2 \in H \cap D^3$, $us^2 \in S \subseteq V$, V unitaire à droite donne $u \in V$, U_S est donc contenu dans V.

<u>Corollaire 1.3.</u>-

Soit S un sous-demi-groupe de D, $\bar{S}$ sa fermeture semi-forte à droite. S est inclus dans une classe $\bar{U}$ mod. $L_{\bar{S}}$; $\bar{U}$ est un sous-demi-groupe (O,-1)-fort.

Il suffit que nous montrions que $S.\bar{S}$ est contenu dans $\bar{S}$. Reprenons les notations de la construction correspondante (propriété 1.3.) . $H_0 = S$, $S H_0 \subseteq H_0$, supposons $S H_n \subseteq H_n$. Si $y' \left[(H_n^{\cdot}.x).^{\cdot}y\right] x \between H_n$, $\forall s \in S$, $sy' \left[(H_n^{\cdot}.x).^{\cdot}y\right] x \between SH_n$, d'après l'hypothèse de récurrence, $SH_n \subseteq H_n$, d'où $S T_n \subseteq T_n$ et $S H_{n+1} \subseteq H_{n+1}$. Nous avons bien $S \bar{S} \subseteq \bar{S}$.

<u>Corollaire 1.4.</u>-

a) Un sous-demi-groupe semi-fort à droite S est contenu dans une classe U_S mod. L_S différente de W_S , U_S est un sous-demi-groupe (O,-1)-fort.

b) U_S est le plus petit complexe unitaire contenant S.

c) $W_S = W_{U_S} = W_{U_S}^{(O,-1)}$, $L_S = L_{U_S} = R_{U_S} = \rho_{U_S}$.

a) et b) résultent directement du théorème 1.3.

c) L'égalité des résidus est une conséquence du théorème 1.5.3., $L_{U_S} = R_{U_S} = \rho_{U_S}$ (théorème 1.5.5) . S étant un sous-demi-groupe, d'après le corollaire 1.2., L_S est simplifiable à droite sur $D - W_S$; le théorème 21 de ([7]) donne alors $L_S = R_{U_S}$.

<u>Corollaire 1.5.</u>-

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-demi-groupe soit (O,-1)-fort est qu'il soit semi-fort à droite et unitaire à droite.

Si S est unitaire à droite, S est égal à U_S , donc S est (O,-1) fort. Inversement, si S est (O,-1)fort, S est unitaire à droite et fort (propriété 1.5.1) donc S est à fortiori semi-fort à droite.

Nous allons maintenant considérer également la classe ${}_SU$ mod. ${}_SL$ contenant S , lorsque S est semi-fort.

Théorème 1.4.-

Si S est un sous-demi-groupe semi-fort, ${}_SU \subsetneq U_S + W_S$, $U_S \subsetneq {}_SU + {}_SW$. Si de plus S est équirésiduel , $U_S = {}_SU$.

Si u est un élément de ${}_SU \setminus W_S$, il existe $a \in D$ avec $ua \in S$, ce qui donne, pour tout $s \in S$, $uas \in S \subsetneq {}_SU$. ${}_SU$ étant unitaire à gauche, $as \in {}_SU$, c'est-à-dire $as \equiv s$ (${}_SL$). Comme $s^3 \in S$, nous avons $s^2as \in S$, et $a \in [(S.\cdot u)^\cdot.s] \cap [(S.\cdot s^2)^\cdot.s]$, d'où $[(S.\cdot u)^\cdot.s] = [(S.\cdot s^2)^\cdot.s]$ car S est semi-fort à droite. Or $s \in [(S.\cdot s^2)^\cdot.s]$ et par suite $us^2 \in S \subsetneq U_S$. $s^2 \in U_S$, $us^2 \in U_S$ et U_S unitaire à droite impliquent $u \in U_S$.

Supposons maintenant $W_S \subsetneq {}_SW$; comme on a ${}_SU \cap {}_SW = \emptyset$, on en déduit ${}_SU \cap W_S = \emptyset$ et ${}_SU \subsetneq U_S$. Si S est équirésiduel, nous avons bien $U_S = {}_SU$.

Définition 1.2.- (10)

Nous dirons qu'un complexe S est unitaire à droite par rapport à un complexe H, si les relations $s \in S$, $xs \in H$ entraînent $x \in H$.

Théorème 1.5.-

Si S est un sous-demi-groupe semi-fort à droite, unitaire à gauche par rapport à U_S (classe contenant S mod. L_S), alors

$\forall a \in D$, $\forall u \in U_S$, $ua \equiv a$ (L_S) .

$\forall s \in S$, $\forall u \in U_S$, nous avons $u \equiv s$ (L_S) , d'où $ua \equiv sa$ (L_S)

Considérons sa et a,

$sa \in W_S \Longleftrightarrow a \in W_S$; en effet, si $a \notin W_S$, il existe $x \in D$ avec $ax \in S$

d'où sax $\in$ S et sa $\notin W_S$; si sa $\notin W_S$, il existe x $\in$ D avec sax $\in$ S ;

s $\in$ S , sax $\in$ S , et S unitaire à gauche par rapport à U_S donnent ax $\in \tilde{U}_S$

$ax \equiv s\ (L_S)$ et $s^3 \in S$ impliquent $axs^2 \in S$, donc a $\notin W_S$.

Supposons que a et sa n'appartiennent pas à W_S ; alors

- si $(a,z) \in \mathcal{W}_S$, d'après la remarque 1.2., $z \in {}_S\overline{W}$ et $(sa,z) \in \mathcal{W}_S$;

- si $(a,z) \notin \mathcal{W}_S$, il existe b $\in$ D avec abz $\in$ S , d'où sabz $\in$ S, ce qui implique $(a,z) \equiv (sa,z)\ (\mathcal{L}_S)$ car S est semi-fort à droite. Nous avons donc $sa \equiv a\ (L_S)$.

Corollaire 1.5.-

Si S est un sous-demi-groupe semi-fort et équirésiduel, $W_S = {}_SW = W$ est un idéal bilatère premier.

D'après les théorèmes 1.3. et 1.4., U_S est un sous-demi-groupe unitaire contenant S, donc S est unitaire à gauche et à droite par rapport à U_S . Soient a,b deux éléments de D, tels que ab $\in$ W. Si par exemple b n'appartient pas à W, il existe x $\in$ D avec bx $\in$ S .

Le théorème symétrique de 1.5. donne $abx \equiv a\ ({}_SL)$. W étant un idéal bilatère, ab $\in$ W entraîne abx $\in$ W . Mais W est une classe mod. ${}_SL$, donc a $\in$ W.

Définition 1.3.-

Un complexe H est dit L-symétrique si $L_H = {}_HL$ et si $\overline{W}_H = {}_H\overline{W}$.

Exemple 1.5.-

Soient D le demi-groupe à 4 éléments défini par la table de multiplication suivante :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	c	d
d	d	d	d	d

et H = {d } .

Les classes mod. L_H sont : $\overline{W}_H = \{a,b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$.

Les classes mod. ${}_HL$ sont : $\{a,b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$; ${}_H\overline{W}$ est vide.

$L_H = {}_HL$, mais H n'est pas L-symétrique.

Propriété 1.5.-

Tout complexe fort et symétrique (7) est L-symétrique.

D'après le théorème 1.4.1., R_H et L_H coïncident sur $D - \overline{W}_H$, ${}_HR$ et ${}_HL$ coïncident sur $D - {}_H\overline{W}$. Mais $W_H = {}_HW = W$ donne $W = (D - H)^{\bullet}.D = (D - H).^{\bullet}D$; d'où $\overline{W}_H = W_H{}^{\bullet}.D = \left[(D - H).^{\bullet}D\right]{}^{\bullet}.D = \left[(D - H)^{\bullet}.D\right].^{\bullet}D = {}_HW.^{\bullet}D = {}_H\overline{W}$; $\overline{W}_H = {}_H\overline{W}$, et comme $R_H = {}_HR$, $L_H = {}_HL$.

Théorème 1.6.-

Soit S un sous-demi-groupe semi-fort , tel que $L_S = {}_SL = L$,

- si S est net, $D/_L$ est un groupe.
- si S est équirésiduel, $D/_L$ est un groupe avec zéro.

Soit U la classe mod. L contenant S, d'après le corollaire 1.4. et son symétrique, U est un complexe fort, et on a $W_S = W_U$, $R_U = L$, ${}_SW = {}_UW$, ${}_UR = L$.

Le théorème 1.6. est alors une conséquence des théorèmes 26 et 27 de (7).

Propriété 1.6.-

Soit H un complexe semi-fort du demi-groupe D. Supposons que H soit L-symétrique, contenu dans D^3, totalement net ou bien que $\forall h \in H$, on ait $(h,h) \notin \mathcal{W}_H$. Alors H est saturé dans D^3 pour L.

$H \cap \overline{W}$ est vide $(\overline{W} = \overline{W}_H = {}_H\overline{W})$; en effet, $h \in \overline{W}$ entraîne $(h,D) \in \mathcal{W}_H$, d'où $(h,h) \in \mathcal{W}_H$.

Soit $xyz \equiv h\ (L)$; $h = pqr$ puisque $H \subseteq D^3$. h n'appartient pas à W, donc il existe $u \in D$, $v \in D$ tels que $pqruv$, $xyzuv \in H$.

Les relations $pqr \in H$, $pqruv \in H$, H semi-fort à gauche donnent

$(p,r) \equiv (p,ruv)$ $(\mathcal{L}_H)$; d'où d'après le lemme 1.3.1., $(pqr,pqr) \equiv (pqr,pqruv)$ $(\mathcal{L}_H)$.
D'autre part, L étant régulière, $xyzuv \equiv pqruv$ (L) .
Nous avons donc successivement : $(xyz,xyz) \equiv (xyz,pqr) \equiv (pqr,pqr) \equiv$
$\equiv (pqr,pqruv) \equiv (xyz,pqruv) \equiv (xyz,xyzuv)$ $(\mathcal{L}_H)$, et comme (pqr,pqr) n'appartient pas à $\mathcal{W}_H$, d'après le théorème 1.1., $(x,z) \equiv (x,zuv)$ $(\mathcal{L}_H)$ car H est semi-fort à gauche.
Or xyzuv appartient à H, donc xyz appartient à H ; H est bien saturé mod. L dans D^3.

Théorème 1.7.-

Dans un demi-groupe D, soit H un complexe semi-fort, L-symétrique, totalement net. Pour que $F = D/_L$ soit un groupe, il faut et il suffit que K $(K = H \cap D^3)$ soit inclus dans une classe mod. L. Si cette condition est vérifiée, K est un complexe fort dans D^2, saturé dans D^3 mod. L.
D'après les hypothèses, $L_H = L_K = L$, K est semi-fort et net. D'après le corollaire 1.2. , L est une relation d'équivalence régulière et simplifiable dans D . Si K est inclus dans une classe A mod. L , $\overline{W}_A$ est contenu dans $\overline{W}_K$ donc A est net ; mais L étant simplifiable le théorème 21 de (7) montre que A est un complexe fort et que l'on a $L = R_A = {}_AR = R$. Nous déduisons donc du théorème 1 de (5) que $D/_L$ est un groupe.

D'après la propriété 1.6. , $K = A \cap D^3$. Soient $a,b \in D^2$, $x,y \in D$, tels que $ax \in K$, $bx \in K$, $ay \in K$, A étant fort, $by \in A$, mais $by \in D^3$ et par suite $by \in K$; K est, en particulier, un complexe fort dans D^2.

Supposons maintenant que F soit un groupe. Soient φ l'homomorphisme de D sur F défini par L, L' [resp. L''] la restriction de L à D^3 [resp. D^2] $\varphi(D^3)$ [resp. $\varphi(D^2)$] est égal à F, donc F est isomorphe à $D^3/_{L'}$ et à $D^2/_{L''}$.
K étant semi-fort dans D l'est à fortiori dans D^3, K est de plus saturé dans D^3 pour L' (propriété 1.6.), donc son image $\overline{K}$ dans F est un complexe semi-fort (propriété 1.4.) ; mais, d'après le corollaire 1.1., un complexe semi-fort dans

un groupe est fort, $\overline{K}$ est donc fort dans F.

Soient $a, b \in D^2$, $x, y \in D$, tels que $ax \in K$, $ay \in K$, $bx \in K$. Notons $\overline{a}$ l'image de a dans F. Nous avons $\overline{a}\,\overline{x}$, $\overline{b}\,\overline{x}$, $\overline{a}\,\overline{y} \in \overline{K}$, d'où $\overline{b}\,\overline{y} \in \overline{K}$ et $b\,y \in K$, puisque K est saturé mod. L dans D^3. De même xa, xb, ya $\in$ K entraînent yb $\in$ K.

Considérons maintenant F comme étant égal à l'image de D^2. D'après la définition même de L_K sa restriction dans D^2 est égale à l'équivalence principale à droite R'_K définie par K dans D^2 ; de même $L'' = {}_K R'$. K considéré comme sous-ensemble de D^2 est donc fort et symétrique. D'après le théorème 1 de (5) $K \cap D^4$ est inclus dans une classe mod. $R' = R'_K$.

Soient k_1, $k_2 \in K$, il existe x_1, $x_2 \in D^2$ avec $k_1 x_1$, $k_2 x_2 \in K \cap D^4$. Nous avons donc, $\overline{k_1}\,\overline{x_1} = \overline{k_2}\,\overline{x_2}$. Il existe $a, b, c \in D$ avec $k_1 = abc$ car K est inclus dans D^3 ; $abc \in K$, $a.bcx_1 \in K$ impliquent $bc \equiv bcx_1$ $({}_K R')$, en effet, nous avons vu que $a, b \in D^2$, $x, y \in D$, $xa, xb, ya \in K$ donnent $yb \in K$. Nous avons donc $\overline{b}\,\overline{c} = \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{x_1}$, d'où $\overline{x_1} = \overline{e}$ (élément unité de F).

De même $\overline{x_2} = \overline{e}$, et par suite $\overline{k_1} = \overline{k_2}$; k_1 et k_2 appartiennent à la même classe mod. L ; K est bien inclus dans une classe mod. L.

2) Complexes homomorphiques

Soit K un complexe du demi-groupe D, considérons les relations binaires suivantes :

1) η'_K : $x \sim y\ (\eta'_K) \Longleftrightarrow \exists t\ ,\ u,v \in D^*$, avec $u = v = 1_{D^*}$ ou u et v appartiennent à K , et $x = ut$, $y = vt$.

η_K : η_K = fermeture transitive de η'_K .

2) μ'_K : $x \sim y\ (\mu'_K) \Longleftrightarrow \exists t,t',u,v \in D^*$, avec $u = v = 1_{D^*}$ ou u et v appartiennent à K , et $x = tut'$, $y = tvt'$.

μ_K : μ_K = fermeture transitive de μ'_K .

Propriété 2.1.-

η_K [resp. μ_K] est une relation d'équivalence régulière à droite [régulière] K est contenu dans une classe T [T'] mod. η_K [μ_K]. η_K [μ_K] est la plus fine relation d'équivalence régulière à droite [régulière] ayant une classe contenant K.

Cette propriété est une conséquence des définitions et de l'étude des relations binaires faites dans (22) (27).

Définition 2.1.-

Un complexe H est dit homomorphique à droite [homomorphique] s'il existe une relation d'équivalence régulière à droite [régulière] admettant H comme classe.

Avec les notations de la propriété 2.1., nous avons :

Propriété 2.1'.-

T [T'] est le plus petit complexe homomorphique à droite [homomorphique] contenant K.

Définition 2.2.-

Nous noterons :

$H \cdot\!\cdot a = \varphi_H^{(0,-1)}(a) = \{u\ ;\ u \in D^*,\ au \in H\}$, (voir 4ème partie Chap. 1)

$$H \mathbin{\cdot\,.} a = \varphi_H^{(-1,0)}(a) = \{u \,;\, u \in D^*,\ ua \in H\},$$

$$H \mathbin{.\!\cdot\!.} a = \varphi_H^{(-1,-1)}(a) = \{(u,v) \,;\, u,v \in D^*,\ uav \in H\}.$$

Remarque 1.1.-

Ces complexes ont été définis indépendamment par P. Grillet (17) .

$H \mathbin{.\cdot'} a = H \mathbin{\cdot.}_\Sigma\, a$, où Σ est la famille des multiplications à droite.

$H \mathbin{'\cdot.} a = H \mathbin{\cdot,}_\Sigma\, a$, où Σ est la famille des multiplications à gauche.

$H \mathbin{.\cdot,} a = H \mathbin{'\cdot}_\Sigma\, a$, où Σ est la famille des multiplications.

Soient H et K deux complexes de D, nous nous proposons de construire le complexe $\overline{H}$ $[\overline{H'}]$ saturé mod. η_K $[\mu_K]$ contenant H . Posons $H_0 = H$, H_n étant construit , nous en déduisons :

$$\mathcal{H}_n = \bigcup_{k \in K} (H_n \mathbin{.\cdot'} k) \quad \text{et} \quad H_{n+1} = \Big(\bigcup_{t \in \mathcal{H}_n} Kt\Big) \cup H_n .$$

Soit $U = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$.

$H_0 \subseteq \overline{H}$; supposons $H_n \subseteq \overline{H}$ et soit u un élément de $H_{n+1} \setminus H_n$. Il existe $k \in K$, $t \in \mathcal{H}_n$, avec $u = kt$; comme $t \in \mathcal{H}_n$, il existe $k' \in K$, tel que $u' = k't$ soit dans H_n. Les relations $u = kt$, $u' = k't$, $k \in K$, $k' \in K$ entraînent $u \sim u'$ (η'_K), et par suite, $u \in \overline{H}$ car $u' \in H_n$; H_{n+1} est donc inclus dans $\overline{H}$, ce qui, par récurrence, donne $U \subseteq \overline{H}$.

Inversement, soit x un élément de $\overline{H}$. Il existe $h \in H$ congru à x mod. η_K ; il existe donc une suite : $x_0, x_1, \dots, x_n$ telle que $x_0 = h$, $x_n = x$, $x_i \sim x_{i+1}$ (η'_K) . $x_0 \in H_0$; supposons que x_i soit dans H_i ; $x_i \sim x_{i+1}$ (η'_K), donc il existe $t, k, k' \in D^*$, avec $x_i = kt$, $x_{i+1} = k't$. Nous avons ,

soit $k = k' = 1_{D^*}$, et alors $x_{i+1} = x_i$, $x_{i+1} \in H_{i+1}$,

soit $k, k' \in K$, alors $kt \in H_i$ donne $t \in \mathcal{H}_i$, d'où $x_{i+1} = k't \in H_{i+1}$.

Nous en déduisons donc $x \in H_n$, d'où $\overline{H} \subseteq U$ et $\overline{H} = U$.

Pour la construction de $\overline{H'}$, nous posons : $H'_0 = H$,

$$\mathcal{H}'_n = \bigcup_{k \in K} (H'_n \mathbin{.\cdot.} k) \ , \qquad H'_{n+1} = \Bigl(\bigcup_{(t,t') \in \mathcal{H}'_n} tKt' \Bigr) \cup H'_n \ .$$

En particulier, ces deux constructions donnent T et T' si on prend K à la place de H ; elles donnent aussi la classe X $[X']$ mod. η_K $[\mu_K]$ contenant un élément donné x en prenant $H = \{x\}$. Si x n'appartient pas à l'idéal à droite engendré par K, $X = \{x\}$, en effet, $\mathcal{H}_0$ est vide , d'où $H_1 = H_0 = \{ x \}$. De même si x n'appartient pas à l'idéal bilatère engendré par K , $X' = \{ x \}$.

Propriété 2.2.-

Pour qu'un complexe K soit homomorphique à droite [resp. homomorphique] , il faut et il suffit que, $\forall\, k,k' \in K$, on ait $K \mathbin{.\cdot} k = K \mathbin{.\cdot} k'$ $[K \mathbin{.\dot{}.} k = K \mathbin{.\dot{}.} k']$.

En effet, pour que K soit égal à T, il faut et il suffit que K_1 soit égal à K_0 dans la construction de T.

Corollaire 2.1.-

L'ensemble des complexes homomorphiques à droite [homomorphiques] constitue une famille de Moore.

D est homomorphique ; $(\bigcap_{i \in I} K_i) \mathbin{.\cdot} k = \bigcap_{i \in I} (K_i \mathbin{.\cdot} k)$ $\Bigl[(\bigcap_{i \in I} K_i) \mathbin{.\dot{}.} k = \bigcap_{i \in I} (K_i \mathbin{.\dot{}.} k) \Bigr]$.

La fermeture de Moore associée pour le complexe K est évidemment la classe T $[T']$ mod. η_K $[\mu_K]$ contenant K.

Corollaire 2.2.-

Dans un demi-groupe, tout sous-demi-groupe unitaire à gauche est un complexe homomorphique à droite.

Les relations $s \in S$, $u \in S \mathbin{.\cdot} s$ donnent $su \in S$; si u est différent de 1_{D^*}, comme S est unitaire à gauche, u appartient à S , donc $\forall\, s' \in S$, $s'u \in S$, ce qui implique $\forall\, s,s' \in S$, $S \mathbin{.\cdot} s = S \mathbin{.\cdot} s'$

Exemple 2.1.-

Soit D le demi-groupe engendré par trois éléments : a, b, c, liés par la seule relation de définition $cac = a$. Prenons $H = \{a,b\}$.

$H \,.\!\cdot\!{}^{\cdot}\, a = H \,.\!\cdot\!{}^{\cdot}\, b = H \,{}^{\cdot}\!\cdot\!.\, a = H \,{}^{\cdot}\!\cdot\!.\, b = 1_{D^*}$; $H .^{\cdot}. b = (1_{D^*}, 1_{D^*})$

$$H \,.^{\circ}.\, a = \left[(1_{D^*}, 1_{D^*}) \cup \{(c^n, c^n), \text{ n entier positif}\}\right]$$

H est donc homomorphique à droite et à gauche, mais H n'est pas homomorphique.

Dans la suite nous utiliserons les notations suivantes introduites dans la première partie du chapitre I :

$R_H^{(O,-1)} = \rho_H$; $a \equiv b\ (\rho_H) \Longleftrightarrow H \,.\!\cdot\!{}^{\cdot}\, a = H \,.\!\cdot\!{}^{\cdot}\, b$;

$R_H^{(-1,O)} = {}_H\rho$; $a \equiv b\ ({}_H\rho) \Longleftrightarrow H \,{}^{\cdot}\!\cdot\!.\, a = H \,{}^{\cdot}\!\cdot\!.\, b$;

$R_H^{(-1,-1)} = \rho'_H$; $a \equiv b\ (\rho'_H) \Longleftrightarrow H .^{\cdot}. a = H .^{\cdot}. b$.

<u>Propriété 2.3.</u>-

Un complexe H forme une classe mod. ρ_H $[\rho'_H]$ si et seulement si H est homomorphique à droite [homomorphique] .

Si H est homomorphique à droite, $\forall h, h' \in H$, $H \,.\!\cdot\!{}^{\cdot}\, h = H \,.\!\cdot\!{}^{\cdot}\, h'$, d'où $h \equiv h'\ (\rho_H)$. H est donc indivisible mod. ρ_H , d'autre part, d'après le théorème 1.5.2., H est saturé, d'où le résultat. La réciproque est une conséquence directe de la propriété 2.2. Nous pouvons même préciser que ρ_H $[\rho'_H]$ est l'équivalence régulière à droite [régulière] la moins fine admettant H comme classe . (29) (15) .

<u>Théorème 2.1.</u>-

Dans un demi-groupe D soit H un complexe homomorphique .

a) Si H est bilatèrement net, D/ρ'_H est un demi-groupe à noyau.

b) Si $W_H^{(-1,-1)}$ est un idéal premier, D/ρ'_H est obtenu par l'adjonction d'un zéro à un demi-groupe à noyau.

K étant homomorphique, son image dans D/ρ'_H est formée d'un seul élément $\overline{K}$. Si $W_H^{(-1,-1)}$ est vide, $\overline{K}$ appartient à tous les idéaux bilatères de D/ρ'_H, D/ρ'_H est donc un demi-groupe à noyau (demi-groupe ayant un idéal bilatère minimum).

Si $W_H^{(-1,-1)}$ n'est pas vide, son image dans D/ρ'_H est un élément zéro si $W_H^{(-1,-1)}$ est un idéal premier, $D/\rho'_H - \{O\}$ est un sous-demi-groupe à noyau.

<u>Corollaire 2.3.-</u>

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe D ait pour image homomorphe un demi-groupe à noyau est que D contienne un complexe homomorphique bilatèrement net.

La condition est suffisante d'après le théorème 2.1., montrons qu'elle est nécessaire. Soit φ un homomorphisme de D sur un demi-groupe F ayant un noyau N. Soit k un élément de N, posons $K = \varphi^{-1}(k)$. Si h appartient à D, l'idéal bilatère engendré par $\varphi(h)$ contient k, il existe donc u' et v' $\in F^*$ avec $u' . \varphi(h). v' = k$, d'autre part φ étant surjective, il existe $u,v \in D^*$ tels que $u' = \varphi(u)$, $v' = \varphi(v)$ (si $u' = 1_{F^*}$ nous prenons $u = 1_{D^*}$).

$$\varphi(u) . \varphi(h) . \varphi(v) = k \Longrightarrow \varphi(uhv) = k \Longrightarrow uhv \in \varphi^{-1}(k) = K .$$

K est donc un complexe homomorphique bilatèrement net. De plus si ρ_φ désigne l'équivalence d'homomorphisme de φ, on a $\rho_\varphi \leqslant \rho'_K$, (d'après la propriété 2.3.) .

<u>Théorème 2.2.-</u>

Tout complexe d'un demi-groupe D est homomorphique à droite si et seulement si D vérifie l'une des conditions suivantes :

a) $O(D) \leqslant 2$ (O(D) désigne l'ordre de D) .

b) $O(D) > 2$; tout élément idempotent de D est neutre à droite ou permis à gauche ; $\forall x,y \in D$, si x est différent de x^2, on a $yx = x^2$.

Supposons d'abord tout complexe de D homomorphique à droite. Soit x un élément quelconque de D, considérons $H = \{x, x^2\}$; on a $x \in H$, $x.x \in H$, $x^2 \in H$ d'où $x^2.x \in H$, ce qui donne $x^3 = x$ ou $x^3 = x^2$; donc $\forall x \in D$, x^2 est un élément idempotent de D.

Soient e un élément idempotent de D, x un élément quelconque de D, considérons $H = \{e,x\}$; on a $e \in H$, $x \in H$, $ee \in H$, d'où $x.e \in H$, ce qui donne $xe = x$ ou $xe = e$. Supposons qu'il existe un élément y différent de e, tel que $ye = y$, soit x un élément différent de y, prenons $H = \{x, y\}$; on a $y \in H$, $ye \in H$, $x \in H$, d'où $xe \in H$, comme nous avons déjà $xe = x$ ou $xe = e$, nous en déduisons, $\forall x \in D$, $xe = x$. Donc tout idempotent de D est soit un élément unité à droite, soit un zéro à droite.

Considérons un élément x différent de x^2, soit y un élément de $D - \{x^2\}$. Prenons $H = \{x, yx, y\}$; on a $x \in H$, $y \in H$, $yx \in H$, d'où $x^2 \in H$, ce qui donne $x^2 = yx, yx^2 = x^3$, c'est-à-dire : $yx^2 = x$ ou $yx^2 = x^2$. Si $O(D) > 2$, prenons y différent de x et de x^2, alors x^2 qui est un idempotent est un zéro à droite car yx^2 est différent de y. Nous avons, en particulier, $x^3 = x^2$, d'où, $\forall y \in D$, $yx = x^2$.

Inversement, soit D un demi-groupe qui vérifie les conditions du théorème. S'il vérifie a), un complexe de D contient un seul élément ou est égal à D donc est bien homomorphique à droite et même homomorphique. S'il vérifie b), soient H un complexe de D, h, h' deux éléments de H, x un élément de D tel que $hx \in H$:

- si $x = x^2$, x est ou bien neutre à droite et alors $h'x = h'$, $h'x \in H$,
  ou bien permis à gauche et alors $hx = h'x = x$, $h'x \in H$;
- si $x \neq x^2$, $hx = x^2$, $h'x = x^2$, $h'x \in H$;

on a donc, $\forall h, h' \in H$, $H \mathbin{.\cdot} h = H \mathbin{.\cdot} h'$.

<u>Théorème 2.3.-</u>

Tout complexe d'un demi-groupe D est homomorphique si et seulement si D vérifie l'une des conditions suivantes :

a) $O(D) \leq 2$;

b) D est un zéro demi-groupe (demi-groupe dans lequel le produit de deux éléments est O).

Supposons que O(D) soit plus grand que 2 et que tout complexe de D soit homomorphique ; tout complexe de D est, en particulier, homomorphique à gauche et à droite, donc, d'après le théorème 1.2. et le théorème symétrique, pour tout $x \in D$, x^2 est un élément unité ou un élément zéro, noté O. Si x est différent de x^2, $\forall y \in D$, on a $yx = xy = O$; D ne peut pas contenir un élément unité, D est un zéro demi-groupe.

Inversement, supposons que D soit un zéro demi-groupe ; soit H un complexe de D. Si H ne contient pas O, on a

$$\forall x \in D - H , \quad H.^{\bullet}. x = \emptyset , \qquad \forall x \in H , \quad H.^{\circ}.x = (1_{D^*}, 1_{D^*}) ,$$

Si H contient O, on a

$$\forall x \in D - H , \quad H.^{\circ}.x = (D^*, D) \cup (D, 1_{D^*}) , \quad \forall x \in H , \quad H.^{\bullet}.x = (D^*, D^*) .$$

Donc dans les deux cas H est un complexe homomorphique et si H est différent de D, D/ρ'_H est un zéro demi-groupe à deux éléments.

Corollaire 2.4.-

Pour un demi-groupe D les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Tout complexe de D est homomorphique à gauche et à droite.

b) Tout complexe de D est homomorphique.

En effet, dans la démonstration du théorème 2.3. seule la propriété a) du corollaire a été utilisée pour obtenir la condition nécessaire.

3) <u>Relations entre les complexes K-forts et les complexes homomorphiques.</u>

<u>Propriété 3.1.</u>-

Un complexe H (O,-1)fort est fort, homomorphique à droite, ρ_H et R_H coïncident sur $D - W_H$ (7).

Inversement, si H est un complexe fort, homomorphique à droite, tel que ρ_H et R_H coïncident sur $D - W_H$, H est (O,-1)-fort.

Cette propriété admet une démonstration analogue à la propriété suivante.

<u>Propriété 3.2.</u>-

Un complexe H (-1,-1)-fort est fort, bilatèrement fort, homomorphique, ρ'_H et R_H coïncident sur $D - W_H$, ρ'_H et ${}_H R$ coïncident sur $D - {}_H W$, ρ'_H et R'_H coïncident sur $D - W'_H$ (6).

Inversement, si un complexe H vérifie les conditions précédentes, H est un complexe (-1,-1)-fort.

$\forall\, h \in H$, $(1_{D^*}, 1_{D^*})$ appartient à $H.^{\bullet}.h$, donc si H est (-1,-1)-fort, $\forall\, h,h' \in H$, on a $H.^{\bullet}.h = H.^{\bullet}.h'$, H est homomorphique. Les autres conclusions de la partie directe résultent du théorème 1.4.1.

Inversement, soient $a,b \in D$, $u,v \in D^*$, avec $(u,v) \in (H.^{\bullet}.a) \cap (H.^{\bullet}.b)$.

Nous avons quatre cas possibles :

1) $(u,v) = (1_{D^*}, 1_{D^*})$ alors $a,b \in H$; comme H est homomorphique, nous avons $H.^{\bullet}.a = H.^{\bullet}.b$.

2) $(u,v) = (1_{D^*}, x)$ avec $x \in D$; $x \in H.^{\bullet}a \cap H.^{\bullet}b$, H étant fort, nous en déduisons $a \equiv b\ (R_H)$ et $a \notin W_H$; mais alors $a \equiv b\ (\rho'_H)$ et

$$H.^{\bullet}.a = H.^{\bullet}.b$$

3) $(u,v) = (x, 1_{D^*})$ avec $x \in D$; démonstration symétrique de 2).

4) $(u,v) = (x,y)$ avec $x,y \in D$; $(x,y) \in H..a \cap H..b$, H étant bilatèrement fort nous en déduisons $a \equiv b\ (R'_H)$ et $a \notin W'_H$; d'où $a \equiv b\ (\rho'_H)$.

Exemple 3.1.-

Soient D le demi-groupe à 4 éléments défini par la table de multiplication suivante :

	a	b	c	d
a	a	a	c	c
b	b	b	d	d
c	a	a	c	c
d	b	b	d	d

et $H = \{a\}$.

$H.^{\bullet}a = H.^{\bullet}c = \{a,b\}$, $H.^{\circ}b = H.^{\bullet}d = \emptyset$, $H^{\bullet}.a = H^{\circ}.b = \{a , c\}$,

$H^{\bullet}.c = H^{\bullet}.d = \emptyset$, $H..a = H..b = H..c = H..d = \{ (a,a),(a,b),(c,a),(c,b) \}$

H est un sous-demi-groupe, c'est un complexe fort, bilatèrement fort, homomorphique puisque réduit à un seul élément ; mais H n'est pas un complexe (-1,-1)-fort, en effet, on a $(a,a) \in H .^{\circ}.a \cap H .^{\bullet}. b$ et $H.^{\bullet}a \neq H.^{\circ}b$.

Théorème 3.1.-

Soit H un complexe (-1,-1)-fort d'un demi groupe D :

a) Si H est bilatèrement net, D/ρ'_H est un semi-groupe à noyau ;

b) Si $W_H^{(-1,-1)}$ est un idéal premier, D/ρ'_H est obtenu par l'adjonction d'un zéro à un semi-groupe à noyau.

ρ'_H est simplifiable sur $D - W_H^{(-1,-1)}$ (théorème 1.4.3) ; d'autre part H est homomorphique, le théorème 3.1. est alors une conséquence du théorème 2.1.

Ces notions permettent également de préciser certains résultats de P. Dubreil (7) , ou de R. Croisot (6).

Théorème 3.2.-

Soit R une relation d'équivalence régulière à droite et simplifiable à droite définie dans le demi-groupe D. Toute classe H mod. R est un complexe (O,-1)-fort , $R \leq \rho_H$, R et ρ_H coïncident sur $D - W_H^{(O,-1)}$.

Théorème 3.3.-

Soit R une relation d'équivalence régulière et simplifiable définie dans le demi-groupe D. Toute classe H mod. R est un complexe $(-1,-1)$-fort, $R < \rho'_H$, R et ρ'_H coïncident sur $D - W_H^{(-1,-1)}$.

Les démonstrations sont analogues à celles des théorèmes correspondants, théorème 21 de (7), théorème 24 de (6), en prenant $x, y, x', y' \in D^*$ au lieu de $x, y, x', y' \in D$.

Corollaire 3.1.-

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe D ait pour image homomorphe un semi-groupe à noyau est que D contienne un complexe $(-1,-1)$-fort et bilatèrement net.

Ce corollaire est une conséquence directe du corollaire 2.3. et du théorème 3.3.

Corollaire 3.2.-

Soient H un complexe bilatèrement net dans un demi-groupe D, $\overline{H}$ sa fermeture $(-1,-1)$-forte. $\rho'_{\overline{H}}$ est la plus fine relation d'équivalence régulière et simplifiable pour laquelle H est indivisible.

Soit R la plus fine relation d'équivalence régulière et simplifiable laissant H indivisible. H est inclus dans une classe A mod.R. Comme H est bilatèrement net, A est bilatèrement net ; le théorème 3.3. donne $R = \rho'_A$; A est $(-1,-1)$-fort, donc A contient $\overline{H}$.

$\rho'_{\overline{H}}$ est régulière et simplifiable (corollaire 1.4.1.), $\overline{H}$ est une classe mod. $\rho'_{\overline{H}}$ et par suite $R \leq \rho'_{\overline{H}}$. A étant indivisible mod. R l'est mod. $\rho'_{\overline{H}}$ donc A est contenu dans $\overline{H}$; ce qui donne $A = \overline{H}$ et $R = \rho'_{\overline{H}}$.

Théorème 3.4.-

Tout complexe d'un demi-groupe D est $(0,-1)$-fort si et seulement si D est un groupe d'ordre 2, ou un zéro demi-groupe à gauche.

Si tout complexe de D est $(0,-1)$-fort, tout complexe de D est en particulier homomorphique à droite ; D vérifie donc les conditions du théorème 2.2.

Soit e un élément idempotent de D, supposons qu'il existe $y \in D - \{e\}$ avec $ye = e$; prenons $H = \{e\}$, on a $ye \in H$, $ee \in H$, $e \in H$, $y \in H$, ce qui est impossible. Tout élément idempotent de D est donc un élément neutre à droite.

Si D contient un élément x qui ne soit pas idempotent, $O(D) = 2$, $D = \{x, x^2\}$ avec $x^3 = x$, (D est isomorphe au groupe à deux éléments) ; en effet si $O(D)$ était supérieur à 2, d'après le théorème 2.2., x^2 serait un élément idempotent permis à gauche.

Si tout élément de D est idempotent, D est évidemment un zéro demi-groupe à gauche, ceci finit d'établir la condition nécessaire du théorème.

Inversement, supposons que D soit un zéro demi-groupe à gauche. Soit H un complexe de D, $\forall h \in H$, $H \therefore h = D^*$; $\forall x \notin H$, $H \therefore x = \emptyset$; H est bien un complexe (O,-1)-fort.

Si D est le groupe à 2 éléments tout complexe de D est bilatèrement fort donc (-1,-1)-fort et par suite (O,-1)-fort.

Corollaire 3.3.-

Tout complexe d'un demi-groupe D est (-1,-1)-fort si et seulement si D est un groupe d'ordre 1 ou 2.

Si tout complexe de D est (-1,-1)-fort, tout complexe est (O,-1)-fort et (-1,O)-fort ; si D n'est pas un groupe d'ordre 2, D est un zéro demi-groupe à gauche et un zéro demi-groupe à droite, D est donc réduit à un seul élément. Réciproquement, nous avons déja vu que si D est un groupe à 2 éléments tout complexe de D est (-1,-1)-fort.

Pour étudier la structure des demi-groupes ayant tous leurs sous-demi-groupes (O,-1)-forts nous pouvons, en tenant compte de la propriété 1.5.1., caractériser d'abord les demi-groupes ayant tous leurs sous-demi-groupes unitaires à droite.

Théorème 3.5.-

Tous les sous-demi-groupes d'un demi-groupe D sont unitaires à droite si et seulement si D est isomorphe au produit direct d'un groupe périodique par un zéro demi-groupe à gauche.

Supposons que D ait tous ses sous-demi-groupes unitaires à droite. Pour $x \in D$, considérons le sous-demi-groupe S engendré par $\{x^2, x^5\}$; on a $x^4 \in S$, $x^5 \in S$, donc comme S est unitaire à droite, x appartient à S ; d'où $x = x^n$; D est un demi-groupe périodique réunion de groupes.

Soient e et f deux idempotents de D ; considérons le sous-demi-groupe S engendré par $\{ef\}$; on a $ef \in S$, $e.ef \in S$, ce qui donne $e \in S$, $e = (ef)^n$, $ef = (ef)^n . f$, $ef = (ef)^n = e$. L'ensemble E des idempotents de D est donc un zéro demi-groupe à gauche ; en particulier, tous les idempotents sont primitifs.

Soit I un idéal bilatère de D ; I étant un sous-demi-groupe est unitaire à droite, or, $\forall x \in D$, $\forall a \in I$, xa appartient à I d'où x appartient à I et $I = D$. D est donc un demi-groupe simple contenant des idempotents primitifs, par suite D est complètement simple.

$$D \approx \mathcal{M}(G ; I, \Lambda ; P) \quad \text{(notations de (4))}$$

Les idempotents de D sont les éléments $(p_{\lambda i}^{-1}, i, \lambda)$

$$ef = e \text{ donne } (p_{\lambda i}^{-1}, i, \lambda)(p_{\mu j}^{-1}, j, \mu) = (p_{\lambda i}^{-1}, i, \lambda)$$

$$\text{or, } (p_{\lambda i}^{-1}, i, \lambda)(p_{\mu j}^{-1}, j, \mu) = (p_{\lambda i}^{-1} . p_{\lambda j} . p_{\mu j}^{-1}, i, \mu) .$$

Nous en déduisons $\lambda = \mu$, Λ ne contient qu'un seul élément. Nous pouvons représenter les éléments de D par un couple (g, i) avec $g \in G$, $i \in I$; la matrice P est une matrice a une colonne, $P = (p_i)$, $i \in I$.
Si $a = (g_1, i)$, $b = (g_2, j)$, $ab = (g_1 p_j g_2, i)$. Les idempotents de D sont les éléments $e_i = (p_i^{-1}, i)$.

Soit φ l'application de D ans E x G définie par :

$$\varphi[(g, i)] = (e_i, p_i . g)$$

φ est une bijection de D sur E x G ; d'autre part,

$$\varphi[(g_1, i) . (g_2, j)] = \varphi(g_1 . p_j . g_2, i) = (e_i, p_i . g_1 . p_j . g_2)$$

$$[\varphi(g_1, i)] . [\varphi(g_2, j)] = (e_i, p_i . g_1) . (e_j, p_j . g_2) = (e_i, p_i . g_1 . p_j . g_2)$$

φ est donc un isomorphisme de D sur E x G .

(e_i , G) est un sous-groupe de E x G isomorphe à G ; D étant périodique G est aussi périodique.

Considérons maintenant un demi-groupe D produit direct d'un groupe périodique G et d'un zéro demi-groupe à gauche E. Soit S un sous-demi-groupe de D. Pour un élément e de E, si $S \cap (e, G)$ n'est pas vide, nous posons $S \cap (e, G) = (e, G'_e)$; (e, G'_e) est un sous-demi-groupe de D, G'_e est donc un sous-demi-groupe de G ; mais G est périodique, donc G'_e est un sous-groupe de G. En particulier, (e, 1) appartient à S (1 élément unité de G).

Soit un autre élément f de E tel que $S \cap (f, G) = (f, G'_f)$ ne soit pas vide, $(e,1) . (f, G'_f) = (e, G'_f) \subseteq S$ donc $G'_f \subseteq G'_e$, et par suite $G'_e = G'_f = G'$.

Tout sous-demi-groupe de D est donc de la forme E' x G' ; E' sous-ensemble non vide de E, G' sous-groupe de G. Inversement, un complexe construit de cette façon est évidemment un sous-demi-groupe de D.

Soient $a = (e_1 , g_1)$ un élément de D , $s = (e_2 , g_2)$ un élément de S, tels que $as \in S$. D'après la forme de S , $(e_2 , g_2) \in S$ donne $(e_2 , g_2^{-1}) = s'$ $\in S$; d'où $ass' \in S$, mais $ass' = (e_1,g_1).(e_2,g_2).(e_2,g_2^{-1}) = (e_1 , g_1) = a$.

Tout sous-demi-groupe de D est donc unitaire à droite.

De plus soient $a = (e_1 , g_1)$, $b = (e_2 , g_2)$, $x = (e_3 , g_3)$, $y = (e_4 , g_4)$ des éléments de D tels que ax , ay, $bx \in S = E' \times G'$.

$(e_1 , g_1.g_3) \in S$, $(e_1, g_1 .g_4) \in S$, $(e_2, g_2.g_3) \in S$ impliquent

$g_1.g_3$, $g_1.g_4$, $g_2.g_3 \in G'$; mais tout sous-groupe d'un groupe est fort donc $g_2.g_4 \in G'$ et $by = (e_2, g_2.g_4) \in S$; S est un complexe fort ; d'après la propriété 1.5.1., nous avons :

<u>Corollaire 3.4.-</u>

Pour un demi-groupe D les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Tout sous-demi-groupe de D est unitaire à droite.

b) Tout sous-demi-groupe de D est (O,-1)-fort.

c) D est isomorphe au produit direct d'un zéro demi-groupe à gauche par un groupe périodique.

Corollaire 3.5.-

Tous les complexes d'un demi-groupe D sont unitaires à droite si et seulement si D est un zéro demi-groupe à gauche.

Si tous les complexes de D sont unitaires à droite, tous les sous-demi-groupes de D le sont aussi, donc $D = E \times G$. Soit $H = \{(e, g)\}$.

$(e, g) \in H$, $(e, 1) . (e, g) \in H$ donnent $(e, 1) \in H$ d'où $g = 1$.

G est donc un groupe d'ordre 1, $D \approx E$. Inversement, dans E tout complexe est un sous-demi-groupe donc unitaire à droite d'après le théorème 3.5.

Corollaire 3.6.-

Tous les complexes d'un demi-groupe D sont unitaires si et seulement si $O(D) = 1$.

En effet, d'après le corollaire précédent, D doit être à la fois un zéro demi-groupe à gauche et un zéro demi-groupe à droite.

Corollaire 3.7.-

Tous les sous-demi-groupes d'un demi-groupe D sont unitaires si et seulement si D est un groupe périodique.

$D = E \times G$ (théorème 3.5.), soient e et f deux éléments de E. $\{(e, 1)\}$ est un sous-demi-groupe S ; $(e, 1) \in S$, $(e, 1) . (f, 1) \in S$, et S unitaire donnent $(f, 1) \in S$, d'où $e = f$; E ne contient qu'un seul élément, D est un groupe périodique. Inversement, tout sous-demi-groupe d'un groupe périodique est un sous-groupe et par suite est unitaire.

Corollaire 3.8.-

Tous les sous-demi-groupes d'un demi-groupe D sont $(-1,-1)$-forts si et seulement si D est un groupe périodique n'ayant que des sous-groupes distingués (D est abélien ou hamiltonien).

Tous les sous-demi-groupes doivent être unitaires et bilatèrement forts (propriété 1.5.1.) ; d'autre part, d'après le corollaire 2, théorème 28 de (6), un sous-groupe d'un groupe est bilatèrement fort si et seulement s'il est invariant, ceci finit de donner le résultat.

4 - Complexes ρ- W - minimaux à droite .

Soit W un idéal à droite quelconque du demi-groupe D , $(W \neq D)$, d'après le théorème 1.6.1., il existe des complexes admettant W pour (O,-1) résidu.

Définition 4.1.-

Un complexe est dit ρ -W-minimal à droite s'il est minimal dans la famille des complexes de D qui admettent W pour (O,-1)résidu.

Posons $W^{\circ}.D = W + V$, prenons $H \subsetneq D$ avec $W_H^{(O,-1)} = W$; nous avons $W_H = W^{\bullet}.D$ (théorème 1.5.1.) et $W = W_H^{(O,-1)} = W_H \cap (D - H) = (W + V) \cap (D - H)$, ce qui donne $V \subsetneq H$.

Inversement, soit K un complexe tel que l'on ait $K \cap W = \emptyset$, $V \subsetneq K$, $W_K = W + V$, alors , $W_K^{(O,-1)} = W_K \cap (D - K) = (W + V) \cap (D - K) = W$

Nous avons :

Propriété 4.1.-

Soient W un idéal à droite quelconque et $V = (W^{\bullet}.D) - W$, il y a identité entre les deux familles suivantes :

a) la famille des complexes qui admettent W pour (O,-1) résidu ;

b) la famille des complexes disjoints de W, qui contiennent V et qui admettent W + V pour résidu à droite.

Soit W' un idéal fermé à droite et soit H un complexe admettant W' pour résidu à droite.

$$W_H = W' \ , \quad W_H^{(O,-1)} = W' \cap (D - H) = W \ , \quad \text{si } W' \neq \emptyset \ , \quad W \neq \emptyset .$$

Nous avons $W^{\bullet}.D = W_H^{(O,-1)} {}^{\bullet}. D = W_H = W'$.

Inversement, soit X un idéal à droite tel que $X^{\bullet}. D = W'$, les complexes admettant X pour (O,-1) résidu admettent W' pour résidu à droite.

Nous en déduisons la propriété suivante :

Propriété 4.1'.-

Soient W' un idéal fermé à droite et W un idéal à droite tel que $W' = W^{\bullet}. D$, il y a identité entre les deux familles suivantes :

a) la famille des complexes K qui vérifient les relations

$$W_K = W' \quad , \quad W' \cap (D - K) = W \ ;$$

b) la famille des complexes qui admettent W pour (O,-1) résidu.

Définition 4.2.-

Soit W' un idéal fermé à droite, un complexe H est dit faiblement [strictement] W' - minimal à droite si $W_H = W'$ et s'il n'existe pas de complexe H' vérifiant :

$$H' \subset H \ , \quad W_{H'} = W' \ , \quad W' \cap (D - H) = W' \cap (D - H') \qquad [H' \subset H \ , \quad W_{H'} = W']$$

Si W' est fortement large à droite ($W'^{*}.D = W'$), pour qu'un complexe soit W'-minimal à droite, il faut et il suffit qu'il soit faiblement W'-minimal à droite et qu'il soit disjoint de W' (Corollaire 1.2. de (2O)).

Corollaire 4.1.-

Si W' est un idéal fermé à droite, un complexe H est faiblement W'-minimal si et seulement si H est ρ - W - minimal à droite avec $W = W' \cap (D - H)$

En effet $W_H^{(O,-1)} = W$ équivaut à $W_H = W'$ et $W' \cap (D - H) = W$.

Ce corollaire nous montre que les résultats concernant les complexes ρ-W-minimaux à droite (W idéal à droite quelconque) s'appliqueront aux complexes W - minimaux à droite lorsque W est fortement large à droite . En fait beaucoup de ces théorèmes vont avoir des énoncés et des démonstrations très proches des théorèmes correspondants de (2O) Nous ne donnerons que quelques types de raisonnements pour signaler les différences essentielles.

Lemme 4.1.-

Soient K un complexe ayant W pour (O,-1) résidu , k un élément de K . Pour que K - {k} admette W pour (O,-1) résidu , il faut et il suffit que l'on ait

$$k\,(K .\!\cdot\! k) \supset k \qquad \text{(inclusion stricte)} .$$

Soit $K' = K - \{k\}$, supposons que l'on ait $W_{K'}^{(O,-1)} = W$; $k \notin W_{K'}^{(O,-1)}$,

donc il existe $u \in D^{*}$ avec $ku \in K'$ (on a d'ailleurs $u \in D$) , d'où $u \in K .\!\cdot\! k$

et $k\,(K \cdot\!\cdot\, k) \supset \{k\}$ car nous avons toujours, $k \in k\,(K \cdot\!\cdot\, k)$.

Inversement, supposons que l'on ait $k\,(K \cdot\!\cdot\, k) \supset \{k\}$; $K' = K - \{k\}$ est contenu dans K, donc $W_K^{(O,-1)} \subsetneq W_{K'}^{(O,-1)}$. D'autre part, si $a \notin W_K^{(O,-1)}$, il existe $u \in D^*$ avec $au \in K$; nous avons soit $au \in K'$ et alors $a \notin W_{K'}^{(O,-1)}$;

- soit $au = k$, mais alors il existe $v \in D$ avec $kv \in K'$, d'où $auv \in K'$ et $a \notin W_{K'}^{(O,-1)}$.

Nous en déduisons $W_K^{(O,-1)} = W_{K'}^{(O,-1)}$.

Remarque 4.1.-

La condition $k\,(K \cdot\!\cdot\, k) \supset \{k\}$ équivaut à $K \cdot\!\cdot\, k \neq \emptyset$ et $k\,(K \cdot\!\cdot\, k) \neq \{k\}$.

Théorème 4.1.-

Pour qu'un complexe K ayant W pour (O,-1) résidu soit ρ - W - minimal à droite , il faut et il suffit que, pour tout $k \in K$, nous ayons $K \cdot\!\cdot\, k = k \cdot\!\cdot\, k$.

Si un complexe K est tel que, pour tout $k \in K$, on ait $K \cdot\!\cdot\, k = k \cdot\!\cdot\, k$, alors K est ρ-W-minimal à droite, pour $W = W_K^{(O,-1)}$.

Propriété 4.2.-

Si K est un complexe ρ -W-minimal, les conditions :
$u_1 , u_2 \in D^*$, $k_1 , k_2 \in K$, $k_1u_1 = k_2u_2$, $k_1u_1 \notin W$, entraînent $k_1=k_2$.
k_1u_1 n'appartient pas à W, donc il existe $u \in D^*$ avec $k_1u_1u = k_2u_2u = k \in K$; d'où $u_1u \in K \cdot\!\cdot\, k_1 = k_1 \cdot\!\cdot\, k_1$, $u_2u \in K \cdot\!\cdot\, k_2 = k_2 \cdot\!\cdot\, k_2$ ce qui donne

$$k_1u_1u = k_1 \ , \quad k_2u_2u = k_2 \quad \text{et} \quad k_1 = k_2$$

Posons $S_k = k \cdot\!\cdot\, k$;

Propriété 4.3.-

Soit K un complexe ρ - W - minimal à droite de D, $\forall k \in K$, nous avons

soit $k \in V = (W \mathbin{.^{\cdot}} D) - W$, alors $W \mathbin{.^{\cdot}} k = D$, $S_k = \emptyset$;

soit $k \notin V$, alors $W \mathbin{.^{\cdot}} k = W_{S_k}^{(O,-1)}$.

1) Si $v \in V$, vD est inclus dans W, donc $v \mathbin{.^{\cdot}} v = \emptyset$, $v \mathbin{.^{\cdot\cdot}} v = 1_{D^*}$, $K \mathbin{.^{\cdot\cdot}} v = 1_{D^*}$ car, d'après la propriété 4.1., V est contenu dans K.

2) Si k n'appartient pas à V, $W \mathbin{.^{\cdot}} k$ est différent de D ; soit a un élément de $D - (W \mathbin{.^{\cdot}} k)$, ka n'appartient pas à W, donc il existe $u \in D^*$ avec $kau \in K$, d'où $kau = k$, $au \in S_k$; S_k n'est pas vide et $W_{S_k}^{(O,-1)}$ est contenu dans $W \mathbin{.^{\cdot}} k$. Si a est un élément de $W \mathbin{.^{\cdot}} k$, ka appartient à W, d'où, $\forall u \in D^*$, $kau \in W$, $au \notin S_k$, nous avons donc $a \in W_{S_k}^{(O,-1)}$ et par suite $W \mathbin{.^{\cdot}} k = W_{S_k}^{(O,-1)}$

Le théorème 4.1. permet également de caractériser les complexes qui sont à la fois ρ - W - minimaux à droite et homomorphiques à droite. Si K est un de ces complexes, on doit avoir $\forall k, k' \in K$, $K \mathbin{.^{\cdot\cdot}} k = k \mathbin{.^{\cdot\cdot}} k = k' \mathbin{.^{\cdot\cdot}} k' = K \mathbin{.^{\cdot\cdot}} k'$.

Si W n'est pas fortement large à droite, $V = (W \mathbin{.^{\cdot}} D) - W$ n'est pas vide et est inclus dans tout complexe K admettant W pour (O,-1) résidu.

Si v est un élément de V, on a $v \mathbin{.^{\cdot\cdot}} v = 1_{D^*}$, donc si K est ρ - W - minimal à droite et homomorphique à droite, $\forall k \in K$, $K \mathbin{.^{\cdot\cdot}} k = 1_{D^*}$, ce qui donne $K = V$.

Réciproquement, si W est le (O,-1) résidu de V, V est homomorphique car, $\forall v \in V$, $V \mathbin{.^{\cdot\cdot}} v = 1_{D^*}$, V est ρ - W - minimal à droite, c'est même le seul complexe ρ - W - minimal à droite (propriété 4.1.).

Exemple 4.1.-

Soit D le demi-groupe à 4 éléments défini par la table de multiplication suivante :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	b	c	c
d	a	b	d	d

et soit $W = \{a\}$, on a $W + V = W^{\bullet} . D = \{a,b\}$, $V = \{b\}$, $W_V^{(O,-1)} = W$.

Remarque 4.2.-

1) Si $W_K^{(O,-1)} = W$, V constitue une classe mod. ρ_K puisque

$$v \in V \Longleftrightarrow K \mathbin{.\!\cdot\!\cdot} v = 1_{D^*} .$$

2) Pour qu'il existe un complexe (O,-1)-fort ayant W pour (O,-1) résidu ($W \neq W^{\bullet} . D$), il faut et il suffit que l'on ait $W_V^{(O,-1)} = W$ et que V soit fort.

Si K est (O,-1)-fort, K forme une seule classe mod. ρ_K , donc d'après la remarque précédente K = V , V est (O,-1)-fort , donc fort.

Inversement, si V est fort, V est (O,-1)-fort, en effet, soit u un élément de $V \mathbin{.\!\cdot\!\cdot} a \cap V \mathbin{.\!\cdot\!\cdot} b$, si $u = 1_{D^*}$ on a, $a \in V$, $b \in V$,

$V \mathbin{.\!\cdot\!\cdot} a = V \mathbin{.\!\cdot\!\cdot} b = 1_{D^*}$, si u appartient à D, on a $V \mathbin{.^{\bullet}} a = V \mathbin{.^{\bullet}} b$ puisque V est fort, mais $V \mathbin{.^{\bullet}} a$ n'étant pas vide, a n'appartient à V, on en déduit $V \mathbin{.\!\cdot\!\cdot} a = V \mathbin{.\!\cdot\!\cdot} b$.

Donc, si W n'est pas fortement large à droite et si V n'est pas fort, ou si $W_V^{(O,-1)}$ est différent de W, il n'existe pas de complexe (O,-1)-fort ayant W pour (O,-1) résidu.

Soient K et K' deux complexes ayant W pour (O,-1)-résidu. Soient f et φ les applications suivantes :

$f : K \to K'$, définie par , $\forall k \in K$, $f(k) = K' \cap k D^*$,

$\varphi : K' \to K$, définie par , $\forall k' \in K'$, $\varphi(k') = K \cap k' D^*$;

$\forall k \in K$, $f(k)$ n'est pas vide, en effet $k \notin W$, donc il existe $u \in D^*$ avec $ku \in K'$.

Propriété 4.4.-

Si K' est un complexe ρ - W - minimal à droite, $\forall k' \in K'$, on a $\mathcal{f}\varphi(k') = \{k'\}$.

Si k'_1 appartient à $\mathcal{f}\varphi(k')$, il existe $u, u' \in D^*$ avec $k'uu' = k'_1$, d'où $k' = k'_1$, d'après la propriété 4.2.

Les fonctions $\mathcal{f}$ et φ vérifient des propriétés analogues à celles vérifiées par les fonctions correspondantes de (20), nous en déduisons :

Théorème 4.2.-

Entre deux complexes K et K' ρ- W - minimaux à droite, il existe une bijection définie de la façon suivante : un élément k de K et un élément k' de K' se correspondent s'il existe $u \in D^*$ tel que $k' = ku$, ou, ce qui revient au même, s'il existe $u' \in D^*$ tel que $k = k'u'$.

$\mathcal{f}$ est l'application identique sur $V = (W^{\bullet}. D) - W$.

Théorème 4.3.-

Dans un demi-groupe contenant des complexes ρ - W - minimaux à droite, tout complexe admettant W pour (O,-1) résidu contient au moins un complexe ρ - W - minimal à droite.

Corollaire 4.2.-

Soit W' un idéal fermé à droite ; si le demi-groupe D contient des complexes ρ - W - minimaux à droite, pour tout W tel que $W' = W^{\bullet}. D$, alors tout complexe H admettant W' pour résidu à droite contient au moins un complexe H' faiblement W' - minimal à droite, avec $H' \cap W'$ égal à $H \cap W'$.

Un complexe H ayant W' pour résidu à droite, admet $W = W' \cap (D - H)$ pour (O,-1) résidu, H contient un complexe ρ- W - minimal à droite H' (théorème 4.3.), mais ce complexe est faiblement W' minimal à droite (corollaire 4.1.) ; d'autre part, H' contient $W^{\bullet}. D - W$, c'est-à-dire $W' \cap H$.

Exemple 4.2.-

Considérons le demi-groupe cyclique infini D engendré par un élément a. Tout idéal de D est de la forme $(a)_n = \{a^n, a^{n+1}, \dots\}$. Un complexe H admet $(a)_n$ pour $(O,-1)$-résidu si et seulement si H contient a^{n-1} et si $H \cap (a)_n$ est vide ; donc D contient un seul complexe ρ- $(a)_n$- minimal, c'est $H = \{ a^{n-1} \}$. D/ρ_H est isomorphe au quotient de D par $(a)_n$. Un complexe H admet $(a)_n$ pour résidu si et seulement si $H \cap (a)_n$ est égal à $\{a^n\}$; $\{ a^n \}$ est le seul complexe faiblement $(a)_n$-minimal , $\{ a^n \}$ est donc strictement $(a)_n$-minimal.

Soit W' un idéal fermé à droite d'un demi-groupe D. Désignons par $\mathcal{W}$ la famille des idéaux à droite W_i , $i \in I$, qui vérifient la relation : $W_i \overset{\bullet}{.} D = W'$. $\mathcal{W}$ est fermée pour l'intersection car $(\bigcap_{i \in I'} W_i) \overset{\bullet}{.} D = \bigcap_{i \in I'} (W_i \overset{\bullet}{.} D)$; $\mathcal{W}$ contient un élément minimum, en effet, $\forall i \in I$, W'D est contenu dans W_i , de plus W'D appartient à $\mathcal{W}$. Posons $W'D = W$ et $V = W' - W$; si V_1 est inclus dans V, $W + V_1$ est un idéal à droite. Si W_i est un élément de $\mathcal{W}$, tout complexe W compris entre W et W_i appartient à $\mathcal{W}$, en effet, $\overline{W}$ est un idéal à droite, et la relation $W \subsetneq \overline{W} \subsetneq W_i$ donne $W \overset{\bullet}{.} D \subsetneq \overline{W} \overset{\bullet}{.} D \subsetneq W_i \overset{\bullet}{.} D$, d'où $\overline{W} \overset{\bullet}{.} D = W'$.

Soit H un complexe ayant W' pour résidu à droite, posons $W_1 = W' \cap (D - H)$; soit W_2 un complexe compris entre W et W_1 , W_2 est un idéal à droite appartenant à $\mathcal{W}$. Considérons $H' = H \cup (W_1 - W_2)$; on a

$$H \subsetneq H' \text{ , d'où } W_{H'} \subsetneq W_H = W' \quad \text{et} \quad W_{H'}^{(O,-1)} \subsetneq W_H^{(O,-1)} \ ;$$

$H' \cap W_2 = \emptyset$ donne $W_2 \subsetneq W_{H'}^{(O,-1)}$, d'où $W' = W_2 \overset{\bullet}{.} D \subsetneq W_{H'}^{(O,-1)} \overset{\bullet}{.} D = W_{H'} \subsetneq W'$,

et par suite , $W_{H'} = W_H = W'$.

Si les conditions du corollaire 4.2. sont remplies, nous voyons que H' contiendra au moins un complexe ρ-W_1-minimal à droite et un complexe

ρ -W_2-minimal à droite, c'est-à-dire deux complexes faiblement W'-minimaux à droite en général non comparables. Nous avons plus précisément :

Propriété 4.5.-

Un complexe faiblement W'-minimal H contient un complexe H' différent de H ayant W' pour résidu à droite si et seulement si D contient un idéal à droite X, tel que l'on ait :

$X^{\cdot}.D = W'$, $X \supset W' \cap (D - H)$, $ax \in H \cap D^2 \cap X \Longrightarrow \exists y \in D$ avec $ay \in H - (H \cap X)$.

Supposons que X vérifie les conditions indiquées, prenons $H' = H - (H \cap X)$. H' est strictement contenu dans H car les conditions $X \subsetneq W'$, $X \supset W' \cap (D - H)$ impliquent $H \cap X \neq \emptyset$, $W_{H'}$ contient W_H ; d'autre part, si a n'appartient pas à W' , il existe $x \in D$ avec $ax \in H$, alors

- si $ax \notin X$, $ax \in H'$ et $a \notin W_{H'}$,

- si $ax \in X$, il existe $y \in D$ tel que $ay \in H'$, d'où $a \notin W_{H'}$.

$W_{H'}$ est donc égal à W'.

Réciproquement, supposons qu'il existe un complexe H' tel que l'on ait $H' \subset H$, $W_{H'} = W_H = W'$. Posons $X = W' \cap (D - H')$; $X^{\cdot}.D = W'$, $W' \cap (D - H) \subset X$ (l'égalité est impossible puisque H est faiblement W'-minimal) ; si $ax \in H \cap X$, a n'appartient pas à W', donc il existe $y \in D$ avec $ay \in H' \subsetneq H - H \cap X$.

Remarquons que la dernière condition imposée à X est en particulier vérifiée si H est dégagé de X.

Corollaire 4.3.-

Un complexe H est strictement W'-minimal à droite si et seulement si ce complexe est faiblement W'-minimal à droite et si pour tout idéal à droite X tel que $X^{\cdot}. D = W'$ et $W' \cap (D - H) \subset X$ on a

$X \cap H \cap D^2 \neq \emptyset$, et $ax \in H \cap D^2 \cap X \Longrightarrow aD \subsetneq D - (H - H \cap X)$.

Cette condition est automatiquement remplie lorsque $W' \cap (D - H)$ est maximal dans $\mathcal{W}$, c'est en particulier le cas lorsque W' est fortement large à droite et H disjoint de W' .

Soit à nouveau W un idéal à droite quelconque, si K est un complexe ρ- W - minimal à droite, nous posons $V_K = \bigcup_{k \in K} k\,(W \mathbin{.^{\bullet}} k)$.

Théorème 4.4.-

a) Si R est la réunion des complexes ρ - W - minimaux à droite de D,

$$K\,D^{*} = R + V_K \,,$$

b) Si K et K' sont deux complexes ρ- W - minimaux à droite,

$$K\,D^{*} = K'\,D^{*} \,, \qquad V_K = V_{K'} \,.$$

Théorème 4.5.-

k étant un élément quelconque de R, l'idéal à droite engendré par k soit $k\,D^{*}$ est W - minimal (20).

Corollaire 4.4.-

Si le demi-groupe D contient des complexes ρ - W - minimaux à droite, tout idéal à droite de D non contenu dans W contient un idéal à droite W - minimal engendré par un élément k d'un complexe ρ- W - minimal arbitraire K.

Si X est un idéal à droite non inclus dans W , $X \cup W$ est un idéal à droite qui rencontre K, car autrement $X \cup W$ serait inclus dans $W_K^{(0,-1)}$. Il existe donc un élément k appartenant à $K \cap (X \cup W) = K \cap X$ (puisque $K \cap W = \emptyset$) ; $k \in X$ donne $k\,D^{*} \subseteq X$.

Lemme 4.2.-

Un idéal à droite I est W - minimal si et seulement si $I \cup W$ couvre W.

Soit I un idéal W - minimal et soit W' un idéal à droite compris entre W et $I \cup W$. Nous avons donc $I \cup W = I \cup W'$ et $I \cap W \subseteq I \cap W' \subseteq I$. I étant W-minimal, il en résulte soit $I \cap W = I \cap W'$ mais alors $W = W'$, soit $I \cap W' = I$, mais alors $I \subseteq W'$, $W \subseteq W'$ et $W' = I \cup W$.

Réciproquement, si I est un idéal à droite tel que $I \cup W$ couvre W, supposons qu'il existe un idéal à droite W' compris entre $I \cap W$ et I. Nous avons $I \cap W = W' \cap W$, $W \subseteq W' \cup W \subseteq I \cup W$, d'où

- soit $W' \cup W = W$, mais alors $W' \subsetneq W$ et $W' = I \cap W$;
- soit $W' \cup W = I \cup W$, mais alors $W' = I$.

Théorème 4.6.-

Si un demi-groupe D contient des complexes ρ - W - minimaux à droite, tous les idéaux à droite W - minimaux de D sont de la forme $I_m = k D^* \cup W_1$, k étant un élément quelconque d'un complexe ρ - W - minimal à droite arbitraire et W_1 un idéal à droite de D contenu dans W. Si Σ est la réunion de ces idéaux, $\Sigma = R + W$.

Soit I_m un idéal à droite W - minimal, d'après le corollaire 4.4., I_m contient un idéal à droite $k D^*$, pour un $k \in K$. Posons $W_1 = I_m \cap W$, on a : $I_m \cap W \subsetneq kD^* \cup W_1 \subseteq I_m$, ce qui donne $I_m = k D^* \cup W_1$ puisque I_m est W - minimal et que W ne contient pas k.

Réciproquement, si $I = k D^* \cup W_1$, $I \cup W = k D^* \cup W$, mais $k D^*$ est W - minimal d'après le théorème 4.5., donc, d'après le lemme 4.2., $k D^* \cup W$ couvre W et I est W - minimal.

Nous avons encore le théorème suivant :

Théorème 4.7.-

Pour qu'un demi-groupe D possède des complexes ρ- W - minimaux à droite, il faut et il suffit que tout idéal à droite de D , non contenu dans W, contienne au moins un idéal à droite W - minimal.

Soit W' un idéal à droite quelconque, posons $W = W'D$, $W' = W + V$. Un complexe W_1 compris entre W et W' est un idéal à droite, nous allons caractériser les idéaux W_1-minimaux. Posons $V_1 = W_1 \cap V$, si v est un élément de V_1 et si X_1 est un idéal à droite de D contenu dans W_1 , l'idéal $v D^* \cup X_1$ est W_1 - minimal . En effet, $W_1 \cup v D^* \cup X_1 = W_1 \cup \{v\}$ car vD est contenu dans W.

Soit I un idéal W_1-minimal qui ne soit pas de cette forme, alors $I \cap W_1 = I \cap W'$, sinon I contiendrait un élément v de V_1 , $v D^* \cup (I \cap W_1)$ serait un idéal W_1 - minimal inclus dans I, donc égal à I. Il en résulte que I est W'-minimal.

Inversement, soit I un idéal W'-minimal tel que $I \cap V_1$ soit vide, I est W_1 minimal, en effet, $I \cap W' = I \cap (W_1 + V_1) = I \cap W_1$.

Théorème 4.8.-

Soit W' un idéal à droite du demi-groupe D, pour qu'il existe des complexes ρ- W - minimaux à droite pour tout idéal à droite W compris entre W'D et W', il faut et il suffit qu'il existe des complexes ρ - W' - minimaux à droite.

La condition est nécessaire puisque X peut être égal à W'.

Si D contient des complexes ρ- W' - minimaux à droite, tout idéal à droite de D non contenu dans W' contient au moins un idéal à droite W'-minimal. Soit W un idéal à droite compris entre W'D et W', et soit X un idéal à droite de D non contenu dans W, nous avons : soit $X \cap (W' - W) \neq \emptyset$, alors si v est un élément de $X \cap (W' - W)$, $v D^*$ est un idéal à droite W - minimal inclus dans X ;

: soit $X \cap (W' - W) = \emptyset$, alors $X \cap W' = X \cap W$ d'où $X \notin W'$, X contient donc un idéal à droite W'-minimal I, $I \cap (W' - W) = \emptyset$, donc I est W - minimal. D contient des complexes ρ - W - minimaux à droite puisque tout idéal à droite de D, non inclus dans W, contient au moins un idéal à droite W - minimal.

Corollaire 4.5.-

Soit W' un idéal fermé à droite du demi-groupe D. Pour que tout complexe H ayant W' pour résidu à droite contienne un complexe H' faiblement W' - minimal à droite, tel que $H' \cap W' = H \cap W'$, il suffit que tout idéal à droite de D, non contenu dans W', contienne au moins un idéal à droite W' - minimal. Si W' est fortement large à droite, cette condition est aussi nécessaire.

Soit $W = W' \cap (D - H)$, on a, $W_H^{(O,-1)} = W$ donc H contient un complexe ρ - W minimal H' (théorème 4.8.) mais, d'après le corollaire 4.1., H'

est un complexe faiblement W'-minimal à droite et $H \cap W' = H' \cap W' = W' - W$.
Si $W' \cdot D = W'$ la condition est nécessaire car nous pouvons choisir H avec $H \cap W' = \emptyset$.

W étant un idéal à droite, posons $W \cdot D = W + V$ et supposons que $W \cdot D$ soit réflectif. Si R est la réunion des complexes ρ - W - minimaux, V est inclus dans R car V est contenu dans tout complexe ayant W pour (O,-1) résidu. L'ensemble Y des éléments de D qui ont leur carré dans W + V est un idéal bilatère de D. Posons $Z = (R - V) \cap Y$ et $R = V + Z + \overline{R}$. Avec ces notations nous avons un théorème analogue au théorème 3.16 de (20).

<u>Théorème 4.9.</u>-

Soit D un demi-groupe admettant des complexes ρ - W - minimaux à droite, pour un idéal à droite W tel que $W + V = W \cdot D$ soit réflectif. La réunion R de ces complexes a la structure suivante :

$$R = V + Z + \overline{R} \ , \text{ avec } \overline{R} = \sum_{i \in I} C_i \ ,$$

$VR \subseteq W$, $RV \subseteq W + V$, $ZR \subseteq W + V$, $RZ \subseteq W + V$, $Z^2 \subseteq W + V$.
Les C_i sont des demi-groupes simples, sommes de leurs idéaux à droite minimaux, et $\forall i, j \in I$, $i \neq j$, $C_i C_j \subseteq W + V$.

5. Complexes ρ - W - minimaux bilatères.

Soit W un idéal bilatère quelconque du demi-groupe D, $(W \neq D)$, d'après le théorème 1.6.1., il existe des complexes admettant W pour (-1,-1) résidu, les complexes minimaux (s'il en existe) pour cette propriété seront dits ρ- W - minimaux bilatères. Si W est un idéal fortement large bilatère ,

$$W_H^{(-1,-1)} = W \Longleftrightarrow W'_H = W \quad \text{et} \quad H \cap W = \emptyset \quad ;$$

en particulier les complexes W - minimaux bilatères (20) sont ρ - W - minimaux bilatères .

Soit W' un idéal bilatèrement fermé et soit W un idéal bilatère tel que $W' = (W \,\dot{.}\, D) \,\dot{.}\, D$, si $W_H^{(-1,-1)} = W$, d'après le théorème 1.5.1., on a

$$W'_H = (W_H^{(-1,-1)} \,\dot{.}\, D) \,\dot{.}\, D = (W \,\dot{.}\, D) \,\dot{.}\, D = W' ,$$ mais nous ne pouvons pas parmi les complexes qui ont W' pour résidu bilatère caractériser ceux qui ont W pour (-1,-1) résidu. Pour obtenir un résultat analogue à celui donné par la propriété 4.1', nous devons introduire une nouvelle notion de résidu.

Définition 5.1.-

H étant un complexe de D, nous appellerons résidu médian de H le complexe

$$\overline{W}_H = W'_H \cap (D - H) .$$

Définition 5.2.- (18)

Un complexe W est appelé idéal médian si D W D est contenu dans W.

(*) Des notions voisines sont étudiées dans (14) (19) (25) .

Propriété 5.1.-

Le résidu médian d'un complexe H est un idéal médian, c'est le plus grand idéal médian contenu dans D - H .

Inversement, tout idéal médian est le résidu médian d'au moins un complexe.

Cette propriété se vérifie sans difficulté. Les complexes minimaux parmi ceux qui admettent W pour résidu médian sont dits W - minimaux médians.

Propriété 5.2.-

Soit W un idéal médian quelconque, posons $W' = (W.^{\cdot}D)^{\cdot}.D$, $V = W' - W$.

Il y a identité entre les deux familles suivantes :

a) la famille des complexes qui admettent W pour résidu médian,

b) la famille des complexes disjoints de W, qui contiennent V et qui admettent W' pour résidu bilatère.

Pour tout complexe H, W'_H est égal à $(\overline{W}_H .^{\cdot} D)^{\cdot}. D$, en effet, $a \in W'_H$ équivaut à $DaD \subseteq (D - H)$, donc à $DaD \leq \overline{W}_H$ car $\overline{W}_H$ est le plus grand idéal médian contenu dans D - H. Donc si H appartient à la première famille, W'_H est égal à W', de plus, on a $\overline{W}_H = W'_H \cap (D - H) = W' \cap (D - H) = W$, d'où on déduit que H contient V ; H appartient donc à la deuxième famille.

Réciproquement, si H appartient à la deuxième famille, H appartient à la première, en effet,

$$\overline{W}_H = W'_H \cap (D - H) = (W + V) \cap (D - H) = W \cap (D - H) = W \ .$$

Si W' est un idéal bilatèrement fermé, il existe des idéaux médians W_i tels que $W' = (W_i .^{\circ} D)^{\cdot}. D$, le plus petit étant l'idéal bilatère $D W' D$.

D'après la propriété précédente, l'étude des complexes ayant W' pour résidu bilatère est ramenée à l'étude des complexes ayant un W_i pour résidu médian.

Théorème 5.1.-

Pour qu'un complexe K ayant W pour (-1,-1) résidu [résidu médian] soit ρ - W - minimal bilatère [W - minimal médian], il faut et il suffit que $\forall k \in K$, on ait $K .^{\circ}. k = k .^{\cdot}. k$ $[K . . k = k . . k]$.

Propriété 5.3.-

a) Si S est à la fois un sous demi-groupe de D et un complexe ρ- W - minimal bilatère ou ρ - W - minimal médian, S ne contient qu'un seul élément.

b) Si k' et k'' sont deux éléments de K, les relations $u'k'v' = u''k''v''$, $u'k'v' \notin W$ entraînent $k' = k''$ (pour les complexes ρ - W - minimaux bilatères $u', v', u'', v'' \in D^*$ pour les complexes W - minimaux médians $u' = v' = 1_{D^*}$ ou $u', v' \in D$, $u'' = v'' = 1_{D^*}$ ou $u'', v'' \in D$).

Si S est ρ - W - minimal ou W - minimal médian, on a $S..s = s..s$, d'où $SsS = s$, si s et s' appartiennent à S, $Sss'S = s = s'$, donc $S = \{s\}$.

Théorème 5.2. -

Entre deux complexes ρ - W - minimaux bilatères [W - minimaux médians] il existe une correspondance bijective définie de la façon suivante : un élément k de K et un élément k' de K' se correspondent s'il existe $u, v \in D^*$ [$u = v = 1_{D^*}$ ou $u.v \in D$] tels que $ukv = k'$, ou, ce qui revient au même, s'il existe $u', v' \in D^*$ [$u' = v' = 1_{D^*}$ ou $u', v' \in D$] tels que $k = u'k'v'$

Théorème 5.3.-

Dans un demi-groupe contenant des complexes ρ - W - minimaux bilatères [W - minimaux médians], tout complexe admettant W comme (-1,-1) résidu [résidu médian] contient au moins un complexe ρ - W - minimal bilatère [W - minimal médian].

Si K est un complexe ρ - W - minimal bilatère [W - minimal médian], nous posons : $U_K = D^* K D^* \cap W$ [$U'_K = D K D \cap W$].

Théorème 5.4. -

a) Si B [M] est la réunion des complexes ρ - W - minimaux bilatères [W - minimaux médians], $D^*K D^* = B + U_K$ [$D K D \cup K = M + U'_K$].

b) Si K et K' sont deux complexes ρ - W - minimaux bilatères [W - minimaux médians], $D^*K D^* = D^*K' D^*$, $U_K = U_{K'}$ [$D K D \cup K = D K' D \cup K'$, $U'_K = U'_{K'}$].

Un idéal médian I est dit W- minimal si I couvre $I \cap W$, c'est-à-dire s'il n'existe pas d'idéal médian I' compris strictement entre $I \cap W$ et I.

Théorème 5.5.-

Si un demi-groupe D contient des complexes ρ- W - minimaux bilatères [W - minimaux médians] tous les idéaux bilatères [médians] W - minimaux sont de la forme $I_m = D^* k D^* \cup W'$ [$I_m = k \cup DkD \cup W'$] , k étant un élément quelconque d'un complexe ρ - W - minimal bilatère [W - minimal médian] arbitraire et W' un idéal bilatère [médian] quelconque de D contenu dans W .

Si Σ est la réunion de ces idéaux bilatères [médians] ,

$$\Sigma = B + W \quad [\Sigma = M + W] .$$

Théorème 5.6.-

Pour qu'un demi-groupe D ait des complexes ρ - W - minimaux bilatères [W - minimaux médians] , il faut et il suffit que tout idéal bilatère [médian] non contenu dans W contienne au moins un idéal bilatère [médian] W - minimal.

Soit W' un idéal médian, posons W = DW'D, V = W' - W ; un idéal médian W - minimal est de la forme $W_1 \cup \{v\}$, avec $W_1 \subseteq W$, $v \in V$, ou est W'-minimal ; inversement, un idéal médian , W' - minimal qui ne rencontre pas V est W - minimal . Ces considérations permettent d'énoncer un résultat analogue au corollaire 4.5.

Théorème 5.7.-

Soit W' un idéal bilatèrement fermé du demi-groupe D. Pour que tout complexe H ayant W' pour résidu bilatère contienne un complexe H' faiblement W' - minimal bilatère, tel que $H' \cap W' = H \cap W'$, il suffit que tout idéal médian, non contenu dans W', contienne au moins un idéal médian W'-minimal. (faiblement W'-minimal bilatère signifie que H' ne contient pas de complexe K vérifiant :

$K \subset H'$, $W'_K = W'$, $W' \cap (D - K) = W' \cap (D - H')$).

CHAPITRE III

DEMI-GROUPES AYANT DES ELEMENTS NEUTRES

1) Sous-demi-groupes U-homomorphiques.

H étant un complexe du demi-groupe D, le sous-ensemble $H \cup \{1_{D^*}\}$ de D^* est désigné par H^*.

Définition 1.1.- (Ljapin (22))

Un sous-demi-groupe S du demi-groupe D est dit U-homomorphique (noté U-h) si, quels que soient x, y éléments de D^*, s s' éléments de S^*, les relations $xsy \in S$, $xs'y \in D$ entraînent $xs'y \in S$.

Définition 1.1'.-

Un sous-demi-groupe S du demi-groupe D est dit U_d-homomorphique [resp. U_g-homomorphique] (noté U_d-h [resp. U_g-h]) si, quels que soient x, y éléments de D^*, s, s' éléments de S^*, les relations $xs \in D$, $xs' \in D$ [resp. $sy \in D$, $s'y \in D$], $xsy \in S$ entraînent $xs'y \in S$.

Remarque 1.1.-

a) Un sous-demi-groupe U-h est U_d-h et U_g-h.

b) Un sous-demi-groupe U_d-h est homomorphique et unitaire à droite.

c) Un sous-demi-groupe U-h est homomorphique et unitaire.

d) Un sous-demi-groupe U_d-h et unitaire à gauche est U-h. En effet, soient x, y des éléments de D, s, s' des éléments de S tels que $xsy \in S$, $xs'y \in D$,

- si $x \in D$, alors $xs \in D$, $xs' \in D$, donc, d'après la définition d'un sous-demi-groupe U_d-h, $xs'y$ appartient à S.
- si $x = 1_{D^*}$, $sy \in S$ et S unitaire à gauche entraînent $y \in S^*$, d'où $s'y \in S$.

e) D'après d) et b) un sous-demi-groupe qui est à la fois U_d-h et U_g-h est U-h.

Exemple 1.1.-

Si e est un élément unité bilatère de D, $S = \{e\}$ est U-h , mais un idempotent qui est U-h n'est pas toujours élément unité.

Soit D le demi-groupe commutatif suivant :

	a	b	c	d
a	a	b	b	d
b	b	d	d	a
c	b	d	d	a
d	d	a	a	b

{a} est un sous-demi-groupe U-h , a n'est pas un élément unité.

Propriété 1.1.-

Un sous-demi-groupe S du demi-groupe D est U-h, si et seulement si on peut trouver un demi-groupe D' ayant un élément unité à droite e', et un homomorphisme φ de D sur D' tel que l'on ait $S = \varphi^{-1}(e')$.

Soient D' un demi-groupe ayant un élément unité à droite e', φ un homomorphisme de D sur D', $S = \varphi^{-1}(e')$. e' étant un élément idempotent, S est un sous-demi-groupe. D'autre part, soient $x, y \in D^*$, $s, s' \in S$, on a $xsy \in S \Longrightarrow \varphi(x).\varphi(s).\varphi(y) = e' \Longrightarrow \varphi(x).\varphi(s').\varphi(y) = e' \Longrightarrow xs'y \in S$.

Nous avons également, $\forall x \in D$, $\varphi(x).e' = \varphi(x)$, puisque e' est un élément unité à droite dans D', d'où

$$xsy \in S \Longleftrightarrow \varphi(x).\varphi(y) = e' \Longleftrightarrow xy \in S .$$

S est bien un sous-demi-groupe U_d-h de D.

Réciproquement, supposons que S soit un sous-demi-groupe U_d-h , considérons le demi-groupe $D' = D/\rho'_S$ et l'homomorphisme canonique φ associé à ρ'_S . S est homomorphique (remarque 1.1.b) donc $\varphi(S) = e'$ et $\varphi^{-1}(e') =$ S (propriété II.2.3) . D'autre part, $\forall a \in D$, $\forall s \in S$, $a \equiv as\ (\rho'_S)$; en effet, $\forall u, v \in D^*$, $uav \in S$ équivaut à $ua.sv \in S$. $a \equiv as\ (\rho'_S)$ entraine

$\varphi(a) = \varphi(a).\varphi(s) = \varphi(a).e'$, e' est bien un élément unité à droite de D'.

Propriété 1.1'.- (Ljapin)

Un sous-demi-groupe S est U-h dans un demi-groupe D si et seulement si on peut trouver un demi-groupe D' ayant un élément unité bilatère e' , et un homomorphisme φ de D sur D' tel que $S = \varphi^{-1}(e')$.

Propriété 1.2.-

Un sous-demi-groupe S est U-h $[U_d\text{-h}]$ dans un demi-groupe D si et seulement si l'image de S dans D/ρ'_S est un élément unité bilatère [à droite] de ce demi-groupe.

Si S est U-h, S est U_d-h et U_g-h, dans D/ρ'_S l'image de S est d'après la démonstration de la propriété 1.1. un élément unité à droite, et d'après la propriété symétrique un élément unité à gauche.

Réciproquement, si $\varphi(S) = e'$, $\varphi^{-1}(e') = S$ car S est saturé mod. ρ'_S , la propriété 1.2. est alors une conséquence directe des propriétés 1.1. et 1.1'.

Propriété 1.3.-

L'ensemble des sous-demi-groupes U-h $[U_d\text{-h}]$ d'un demi-groupe D constitue une famille de Moore.

Cette propriété découle directement des définitions. Proposons nous de construire la fermeture associée à la propriété U-h.

Soit H un complexe quelconque de D, désignons par H_0 le sous-demi-groupe engendré par H. H_i étant construit, H'_{i+1} sera la réunion, pour tous les couples (u,v) appartenant à $(D, D^*) \cup (D^*, D)$, des complexes uH_i^*v qui rencontrent H_i ; H_{i+1} sera le sous-demi-groupe engendré par $H'_{i+1} \cup H_i$. Considérons $\overline{H} = \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n$.

Soit K un sous-demi-groupe U-h contenant H ; K contient H_0 , supposons que K contienne H_i ; si pour un couple (u,v), uH_i^*v coupe H_i , à fortiori uK^*v coupe K, mais alors uK^*v est inclus dans K puisque K est U-h, ceci nous montre que H'_{i+1} est contenu dans K, K contient donc H_{i+1} . Par récurrence, nous en déduisons que K contient $\overline{H}$.

Si u,v sont des éléments de D^* , h,h' des éléments de $\overline{H}^*$ vérifiant les relations : $uhv \in \overline{H}$, $uh'v \in D$, il existe un indice n tel que H_n^* contienne h , h', uhv, mais alors uh'v appartient à H'_{n+1} . Comme $\overline{H}$ est un sous-demi-groupe, c'est bien le plus petit sous-demi-groupe U-h contenant H.

Pour la propriété U_d-h , nous avons une construction analogue en posant $H'_{i+1} = K_{i+1} \cup K'_{i+1}$, où K_{i+1} est la réunion, pour tous les couples (u,v) appartenant à (D, D^*), des complexes u H_i^* v qui rencontrent H_i, K'_{i+1} la réunion, pour tous les éléments w de D, des complexes H_iw qui rencontrent H_i.

Propriété 1.4.-

Soit θ un homomorphisme du demi-groupe D sur un demi-groupe D',

a) Si S' est un sous-demi-groupe U-h [resp. U_d-h] de D', θ^{-1}(S') est un sous-demi-groupe U-h [resp. U_d-h] de D .

b) Si S est un sous-demi-groupe U-h [resp. U_d-h] de D saturé pour l'équivalence d'homomorphisme de θ, θ (S) est un sous-demi-groupe U-h [resp. U_d-h] de D' .

Cette propriété se vérifie directement à partir des définitions.

Propriété 1.5.-

Soient D un demi-groupe produit direct de deux demi-groupes D' et D'', S un sous-demi-groupe de D de la forme S = S' x S'' , alors S est U-h [resp. U_d-h] si et seulement si S' et S'' sont U-h [resp. U_d-h].

L'énoncé a un sens car S est un sous-demi-groupe si et seulement si S' et S'' sont des sous-demi-groupes. Un élément quelconque x de D peut s'écrire x = (x',x'') où x' appartient à D', x'' appartient à D'' .

Considérons des éléments x,y de D^*, s,t de S^* qui vérifient les relations xsy $\in$ S , xty $\in$ D, nous en déduisons x's'y' $\in$ S' , x't'y' $\in$ D' et x''s''y'' $\in$ S'', x''t''y'' $\in$ D'' ; si S' et S'' sont U-h, il en résulte x't'y' $\in$ S' et x''t''y'' $\in$ S'' , ce qui donne (x',x''). (t',t''). (y',y'') $\in$ S' $\times$ S'', c'est-à-dire xty $\in$ S . S est U-h.

Inversement, supposons que S soit un sous-demi-groupe U-h de D de la forme $S' \times S''$. Considérons des éléments x', y' de D'^*, s', t' de S'^* qui vérifient les relations $x's'y' \in S'$, $x't'y' \in D'$. Si $x' \in D'$, prenons pour x'' un élément quelconque de S'', si $x' = 1_{D'^*}$, prenons $x'' = 1_{D''^*}$, faisons un choix analogue pour y'', s'', t''. Les éléments $x = (x', x'')$, $y = (y', y'')$ appartiennent à D^*, $s = (s', s'')$, $t = (t', t'')$ appartiennent à S^* et vérifient les relations $xsy \in S$, $xty \in D$, on en déduit $xty \in S$ et $x't'y' \in S'$. S' est un sous-demi-U-h de D'.

<u>Théorème 1.1.-</u>

Tous les sous-demi-groupes d'un demi-groupe D sont U_d-h si et seulement si D est isomorphe au produit direct d'un zéro demi-groupe à gauche E par un groupe périodique G ayant tous ses sous-groupes distingués.

Si tous les sous-demi-groupes de D sont U_d-h, ils sont en particulier unitaires à droite (remarque 1.1.b), D est donc isomorphe au produit direct d'un zéro demi-groupe à gauche E par un groupe périodique G (théorème II.3.5). Soit S un sous-demi-groupe de $D = E \times G$, $S = E' \times G'$. Pour que S soit U_d-h dans D, il faut et il suffit que E' et G' soient U_d-h respectivement dans E et dans G (propriété 1.5.). E' est bien U_d-h car $\forall x, y \in E$, $xy \in E'$ entraîne $x \in E'$. G' est un sous-groupe de G, G' est U_d-h dans G si et seulement si G' est sous-groupe distingué de G puisque d'après la propriété 1.1., $G' = \varphi^{-1}(e)$, où e est un élément unité à droite d'un demi-groupe homomorphe à G (ce demi-groupe est un groupe qui admet e pour élément unité).

<u>Corollaire 1.1.-</u>

Tous les sous-demi-groupes d'un demi-groupe D sont U-h si et seulement si D est un groupe périodique ayant tous ses sous-groupes distingués. (23).

Si $S = E' \times G'$, E' doit être U-h dans E donc en particulier unitaire, mais alors E est réduit à un seul élément.

Nous pouvons remarquer que la condition obtenue est identique à celle qui détermine les demi-groupes ayant tous leurs sous-demi-groupes (-1,-1) forts (corollaire II.3.8).

La propriété 1.1. nous amène à étudier les demi-groupes ayant des éléments unités à droite.

2) Demi-groupes ayant des éléments neutres.

Soit D un demi-groupe ayant un élément unité à droite e. Désignons par E l'ensemble des éléments a de D tels que e $\in$ aD et e $\in$ Da , et par G le groupe maximum associé à l'idempotent e.

Lemme 2.1.- $G = E$.

G est l'ensemble des éléments inversibles par rapport à e qui admettent e comme élément unité, G est donc inclus dans E .

Si a appartient à E, il existe b, c $\in$ D avec $ab = e$, $ca = e$; nous avons donc $cab = c.ae.b = ca.eb = e.eb = eb$, $cab = c.ab = ce = c$, d'où $c = eb$. c admet e comme élément unité, $ca = e$, $ac = a.eb = ab = e$, c appartient donc à G, son inverse dans G est ea ; mais $ac = e$ donne $aca = ea$, d'où $ae = ea$, $a = ea$; a appartient à G qui est donc égal à E .

Ce lemme montre que le radical de G est égal à G, en effet, si x appartient au radical de G, il existe un entier n avec $x^n \in G$, donc il existe $g \in G$ avec $x^n.g = g.x^n = e$, ce qui donne $x \in E$, c'est-à-dire $x \in G$.

Soient $A = \{a \in D \,;\, e \notin Da\}$, $B = \{b \in D \,;\, e \notin bD\}$, $C = A \cap B$

$A' = A - C$, $\overline{B'} = B - C$.

Lemme 2.2.-

Si les ensembles indiqués ne sont pas vides, alors :

- A est un idéal à gauche maximum de D ;
- B est un idéal à droite de D ;
- A' , $\overline{B'}$, C sont des sous-demi-groupes de D ; C contient tous les idéaux bilatères propres de D .

Si a est un élément de A, pour tout $x \in D$, xa appartient à A, en effet, Dxa est contenu dans Da. On voit de même que B est un idéal à droite. Soit I un idéal à gauche contenant un élément i de D - A, e appartient à Di, Di est contenu dans I, donc I contient De et par suite I est égal à D . A est bien l'idéal à gauche maximum de D. C étant l'intersection de A et de B est un sous-demi-groupe ; si x appartient à D - C , Dx (ou xD) contient e, l'idéal bilatère engendré par x est égal à D, C contient tous les idéaux bilatères propres de D.

$G + A' = \{ a \in D \, ; \, e \in aD \}$, $G + \overline{B'} = \{ b \in D \, ; e \in Db \}$.

$G + A'$ est un sous-demi-groupe de D, en effet, si a_1, a_2 appartiennent à $G+A'$, il existe a'_1, a'_2 avec $a_1 a'_1 = a_2 a'_2 = e$, d'où $a_1 a_2 a'_2 a'_1 = a_1 e a'_1 = a_1 a'_1 = e$ donc $a_1 a_2$ appartient à $G + A'$. $A' = (G + A') \cap A$ est un sous-demi-groupe de D; de même $G + \overline{B'}$ et $\overline{B'}$ sont des sous-demi-groupes de D .

Considérons le complexe $G.^{\bullet}e$, si a appartient à $G.^{\bullet}e$, ea est dans G, il existe donc un élément g de G tel que $gea = e$, a appartient donc à $G + \overline{B'}$. $G.^{\bullet}e$ contient G et est contenu dans $G + \overline{B'}$; posons $B' = \overline{B'} \cap (G.^{\bullet}e)$, $B'' = \overline{B'} - B'$.

<u>Lemme 2.3.</u>-

Si B' et B'' ne sont pas vides, ce sont des sous-demi-groupes.

Soient b_1, b_2 deux éléments de $G.^{\bullet}e$, on a

$eb_1 \in G$, $eb_2 \in G$, d'où $eb_1 . eb_2 \in G$, mais $eb_1 eb_2 = eb_1 b_2$, donc $b_1 b_2 \in G.^{\bullet}e$. Comme B' est égal à $\overline{B'} \cap G.^{\bullet}e$, B' est un sous-demi-groupe de D.

Soient b_1, b_2 deux éléments quelconques de B'', $b_1 b_2$ appartient à $\overline{B'}$ car $\overline{B'}$ est un sous-demi-groupe. D'autre part, il existe $a_1, a_2 \in G + A'$ tels que $a_1 b_1 = a_2 b_2 = e$; supposons que $eb_1 b_2$ appartienne à G, posons $eb_1 b_2 = g$; $a_2 a_1 b_1 b_2 = a_2 a_1 e b_1 b_2 = a_2 a_1 g$, mais $a_2 a_1 b_1 b_2 = e$; multiplions à droite par g' l'inverse de g dans G, il vient $a_2 a_1 = g'$. Nous en déduisons que a_1 est dans G, car si a_1 appartenait à A', $a_2 a_1$ serait dans A qui est un idéal à gauche. Les relations $a_1 \in G$, $a_1 b_1 = e$ impliquent $eb_1 \in G$, contrairement à l'hypothèse $b_1 \in B''$. B'' est donc un sous-demi-groupe de D .

<u>Théorème 2.1.</u>-

Un demi-groupe D ayant un élément unité à droite e est la somme de cinq sous-demi-groupes (certains peut-être vides),

$$D = G + A' + B' + B'' + C \, .$$

G est le sous-groupe maximum associé à l'idempotent e, G est aussi l'ensemble des éléments inversibles (à droite et à gauche) par rapport à e .

G + A' est un sous-demi-groupe égal à l'ensemble des éléments inversibles à droite par rapport à e.

G + B' + B'' est un sous-demi-groupe égal à l'ensemble des éléments de D inversibles à gauche.

A' + C est un idéal à gauche propre maximum de D égal à l'ensemble des éléments non inversibles à gauche de D .

B' + B'' + C est un idéal à droite égal à l'ensemble des éléments non inversibles à droite par rapport à e .

C contient tous les idéaux bilatères propres de D .

G + B' est un sous-demi-groupe égal à G $\dot{.}$ e .

Ces complexes se multiplient de la façon suivante :

	G	A'	B'	B''	C
G	G	A'	G	B''	C + A'
A'	A'	A'	A'	D	C + A'
B'	B'	C	B'	B''	C
B''	B''	C	B''	B''	C
C	C	C	C	B' + B'' + C	C

Un élément inversible à gauche est évidemment inversible à gauche par rapport à e , inversement, si b est inversible à gauche par rapport à e, il existe a $\in$ D avec ab = e , Db contient Dab qui est égal à D, b est donc inversible à gauche . Cette remarque et les lemmes 2.1., 2.2., 2.3. démontrent la partie du théorème qui précède la table de multiplication. Pour vérifier celle-ci, désignons par g [resp. a',b',b'',c] , un élément de G [resp. A',B',B'',C] .

1) GA' ; GA' est contenu dans A car A est un idéal à gauche, GA' est contenu dans G + A' car G + A' est un sous-demi-groupe, on a donc GA' $\subseteq$ A' .

2) A'G ; a'g appartient à G + A', si a'g appartenait à G, a appartiendrait à G, donc A'G est contenu dans A'.

3) GB' ; GB' = GeB' qui est contenu dans GG c'est-à-dire G.

4) $B'G$; $B'G$ est contenu dans B car B est un idéal à droite ; $eB'G$ est contenu dans G, donc $B'G$ est contenu dans B' .

5) GB'' ; GB'' est contenu dans le sous-demi-groupe $G + B' + B''$; si egb'' appartenait à G, eb serait dans G ce qui est impossible, donc GB'' est inclus dans B'' .

6) $B''G$; le raisonnement de 5) montre que $B''G$ est inclus dans B'' .

7) GC ; GC est contenu dans l'idéal à gauche A qui est égal à $A' + C$.

Si e est un élément unité bilatère, GC est contenu dans C, en effet, si gc appartenait à A', il existerait $b \in D$ avec $gcb = e$, ce qui donnerait $cb \in G$, or ceci est impossible car B est un idéal à droite qui contient c.

8) CG ; CG est contenu dans l'idéal à droite B ; si cg appartenait à $B' + B''$, il existerait $a \in D$ avec $acg = e$, mais alors ac appartiendrait à G et c serait inversible à gauche ce qui est impossible ; CG est contenu dans C .

9) $A'B'$; $A'B' = A'eB'$, $A'B'$ est contenu dans $A'G$ donc dans A' .

10) $B'A'$; $B'A'$ est contenu dans $A \cap B$ c'est-à-dire C car A est un idéal à gauche et B un idéal à droite. On a de même :

11) $B''A' \subseteq C$; 12) $CA' \subseteq C$; 13) $B'C \subseteq C$; 14) $B''C \subseteq C$.

15) $B'B''$; $B'B''$ est inclus dans le sous-demi-groupe $B' + B''$; si $b'b''$ appartenait à B', eb' et $eb'b''$ seraient dans G , mais alors eb'' serait dans G ce qui est impossible ; $B'B''$ est contenu dans B''.

16) $B''B'$; $B''B' = B''eB'$, et par suite $B''B'$ est contenu dans $B''G$ donc dans B'' .

17) $A'C$; $A'C$ est inclus dans l'idéal à gauche $A' + C$.

18) CB' ; $CB' = C\,eB'$, CB' est donc contenu dans C .

19) CB'' ; CB'' est contenu dans le sous-demi-groupe $B' + B'' + C$.

<u>Corollaire 2.1.</u>-

Si e est un élément unité bilatère, la décomposition de D est la décomposition en éléments inversibles donnée par Ljapin (22).
B' est alors vide, de plus nous avons remarqué que dans ce cas GC est contenu dans C .

Théorème 2.2.-

A' est vide si et seulement si B'' est vide.

Si le demi-groupe D est o-simple et si A' est vide, $D = G.^{\bullet}e + \{O\}$.

Si A' n'est pas vide, soit a un de ses éléments, il existe $b \in G+B'+B''$ avec $ab = e$; si b appartenait à $G + B'$, eb serait dans G, mais alors la relation $ab = e$ impliquerait $a \in G$ ce qui est impossible ; b appartient donc à B'' et B'' n'est pas vide. Inversement, si B'' n'est pas vide, soit b un de ses éléments, il existe $a \in G + A'$ avec $ab = e$, si a appartenait à G, eb serait dans G ce qui est impossible, a appartient donc à A' qui n'est pas vide.

Supposons maintenant D o-simple, si C est différent de $\{O\}$, soit c un élément de $C - \{O\}$. L'idéal bilatère engendré par c est égal à D, il existe donc $a, b \in D^*$ avec $acb = e$, d'après la définition de C, a et b sont dans D ; b étant inversible à gauche par rapport à e appartient à $G + B' + B''$. Si b était dans $G + B'$, eb appartiendrait à G, mais alors la relation $acb = e$ impliquerait $ac \in G$, c serait inversible à gauche ce qui est impossible, donc b appartient à B'' qui n'est pas vide. Ceci finit de démontrer le théorème.

Définition 2.1.- (Ljapin (22)).

Un élément x d'un demi-groupe D est dit grossissant à droite, s'il existe un complexe D' dans D, D' différent de D, tel que l'on ait

$$D'x = D .$$

Soit $\mathcal{B}$ le demi-groupe bicyclique (4), c'est-à-dire le demi-groupe engendré par deux éléments u, v liés par les relations :

$$vu = e_{\mathcal{B}} \quad , \quad e_{\mathcal{B}}\, u = ue_{\mathcal{B}} = u \quad , \quad e_{\mathcal{B}}\, v = ve_{\mathcal{B}} = v \; .$$

Théorème 2.3.-

Soit D un demi-groupe ayant un élément unité à droite e. Pour qu'un élément x de D soit grossissant à droite, il faut et il suffit qu'il existe un monomorphisme φ de $\mathcal{B}$ dans D tel que l'on ait

$$\varphi(e_{\mathcal{B}}) = e \quad , \quad \varphi(u) = ex \; .$$

Remarquons d'abord que x est grossissant à droite si et seulement si ex est grossissant à droite puisque $D'x = D'ex$.

1) Soit x un élément grossissant à droite de D ; il existe $y \in D$ avec $yx = e$, ce qui donne $ey \circ x = e$, nous pouvons donc choisir y tel que $ey = y$.

Soit $\mathcal{C}$ le sous-demi-groupe de D engendré par $x_1 = ex$ et y, $\mathcal{C} = \{x_1, y\}$.

Comme $yx_1 = e$, $ex_1 = x_1 e = x_1$, $ey = ye = y$, les éléments de $\mathcal{C}$ se mettant sous la forme :

$$x_1^p y^q \text{ , avec } \quad x_1 = y = e \text{ ,} \qquad p,q \text{ entiers } \geqslant 0 \text{ .}$$

Si nous avons $x_1^{p'} y^{q'} = x_1^{p''} y^{q''}$ avec $p' \geqslant p''$; multiplions à gauche par $y^{p''}$, il vient $x_1^{p'-p''} y^{q'} = y^{q''}$.

Si $p' = p''$, $q' \neq q''$, soit $r = \sup(q', q'')$, $y^{q'} x_1^r = y^{q''} x_1^r$ ce qui donne $x_1^d = e$ avec $d = |q' - q''|$, mais ceci est impossible car un élément grossissant à droite est sans torsion (22).

Si $p' > p''$, $x_1 D \geqslant x_1 \; x_1^{p'-p''-1} y^{q'} D = y^{q''} D \geqslant y^{q''} x_1^{q''} D = eD$; en particulier, il existe $z \in D$ avec $x_1 z = e$; x_1 est inversible à gauche et à droite par rapport à e, d'après le théorème 2.1., x_1 appartient à G, il existe $x'_1 \in G$ avec $x_1 x'_1 = x'_1 x_1 = e$; x_1 étant un élément grossissant à droite, il existe $D' \subset D$ avec $D' x_1 = D$; on a $D' = D'e = D' x_1 x'_1 = D x'_1 \geqslant D x_1 x'_1 = De = D$; ce qui donne $D' = D$, d'où une contradiction.

$x_1^p y^q$ est donc la forme canonique des éléments de $\mathcal{C}$. L'application φ de $\mathcal{B}$ dans D définie par $\varphi(u^p v^q) = x_1^p \; y^q$ est un isomorphisme de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{C}$ tel que $\varphi(u) = x_1 = ex$, $\varphi(e_{\mathcal{B}}) = e$.

Cette démonstration montre de plus que si x est un élément grossissant à droite de D, x appartient à B'', en effet, x appartient à $G + B' + B''$, mais x ne peut appartenir à $G + B'$ car $x_1 = ex$ n'appartient pas à G.

2) Inversement, soit φ un monomorphisme du demi-groupe bicyclique $\mathcal{B}$ dans D tel que $\varphi(e_{\mathcal{B}}) = e$; soit x un élément de D vérifiant $ex = \varphi(u)$. On a

$$\varphi(u) \circ \varphi(v) = \varphi(uv) \neq \varphi(e_{\mathcal{B}}) = e \quad , \qquad \varphi(v) \cdot \varphi(u) = \varphi(vu) = \varphi(e_{\mathcal{B}}) = e \quad .$$

$\varphi(v)$ n'est pas inversible à gauche par rapport à e car s'il existait a avec $a \,.\, \varphi(v) = e$, nous aurions $a = a\,\varphi(v).\,\varphi(u) = \varphi(u)$, mais ceci est impossible, car $\varphi(u).\varphi(v)$ est différent de e.

$D\ \varphi(v) \subset D$, car e n'appartient pas à $D.\varphi(v)$, or $\left[D\ \varphi(v)\right] x = \left[D\ \varphi(v)\right] ex = D.\,\varphi(v).\,\varphi(u) = De = D$, x est bien un élément grossissant à droite de D .

Théorème 2.4.-

Soient D un demi-groupe ayant un élément unité à droite e, et $D = G + A' + B' + B'' + C$ sa décomposition du théorème 2.1. Les éléments de B'' et seulement eux sont grossissants à droite.

Nous avons déjà vu dans la démonstration précédente que les éléments grossissants à droite appartenaient à B''. Inversement, soit b un élément de B'' il existe $a \in A'$ avec $ab = e$, nous pouvons supposer que ea est égal à a.

Soit c = eb , considérons $\mathcal{C}$ le sous-demi-groupe de D qui est engendré par a et c. Comme ac = e , ae = ea = a, ce = ec = c, les éléments de $\mathcal{C}$ sont de la forme $c^p a^q$, p , q entiers $\geqslant 0$, avec $a = c = e$.

Soit $c^p a^q = c^{p'} a^{q'}$, avec $p \geqslant p'$, on en déduit $c^{p-p'} a^q = a^{q'}$.

Si p = p', posons $r = \inf(q,q')$, $s = |q - q'|$, nous avons

$a^q c^r = a^{q'} c^r$, d'où $a^s = e$, mais ceci est impossible car a est dans A' et e dans G (A et G sont des sous-demi-groupes disjoints).

Si $p > p'$, $cD \geqslant c\ c^{p-p'-1} a^q D = a^{q'} D \geqslant a^{q'}\ c^{q'} D = eD$, il existe $d \in D$ avec $cd = e$, d'après le théorème 2.1., c appartient à G, donc b appartient à G + B' , d'où une contradiction. L'application φ de $\mathcal{B}$ dans D définie par $\varphi(u^p v^q) = c^p a^q$ est donc un monomorphisme de $\mathcal{B}$ dans D , de plus $\varphi(e_{\mathcal{B}}) = e$, $\varphi(u) = eb$, b est un élément grossissant à droite (théorème 2.3.) .

Corollaire 2.2.-

A' et B'' sont des sous-demi-groupes sans torsion.

Pour B'' ceci résulte du théorème 2.4. et des propriétés des éléments grossissants (22) .

Soit a un élément de A', il existe $b \in B''$ avec ab = e , eb = b ; supposons qu'il existe deux entiers m,n, $n > m$ tels que $a^m = a^n$, alors ,

$a^m b^m = a^n b^m$ donne $e = b^{n-m}$, ce qui est impossible puisque b est un élément sans torsion.

Corollaire 2.3.-

Un demi-groupe périodique D ayant un élément unité à droite e, est de la forme $D = G + B' + C$, où
G est le groupe maximum associé à l'idempotent e, $G + B'$ est égal à $G \,.^{\bullet}\, e$,
C est un idéal bilatère maximum de D ; en particulier, si D est o-simple,
$C = \{O\}$.

En effet, si D est périodique, A' et B'' sont vides.

Corollaire 2.4.-

Un demi-groupe périodique, o- simple [simple] D est un groupe avec zéro [groupe] si et seulement si D contient un élément unité bilatère.

Supposons maintenant que D ait plusieurs éléments unités à droite. Soient e et f deux de ces éléments. D'après le théorème 2.1., il correspond à e et f deux décompositions de D que nous notons avec e et f en indice.

Théorème 2.5.-

Soit D un demi-groupe ayant plusieurs éléments unités à droite. Soient e et f deux de ces éléments, soient :

$$D = G_e + B'_e + B''_e + C_e + A'_e \; ; \qquad D = G_f + B'_f + B''_f + A'_f + C_f$$

les décompositions correspondantes. On a

a) $G_e + B'_e = G_f + B'_f$, $B''_e = B''_f$, $A'_e + C_e = A'_f + C_f$.

b) $G_e \approx G_f$, $e A'_e \approx f A'_f$, si $e \neq f$, $G_e \cap G_f = \emptyset$, $A'_e \cap f A'_f = \emptyset$.

c) $f \in B'_e$, inversement si g est un idempotent appartenant à B'_e, g est un élément unité à droite de D.

(a) $G_e + B'_e + B''_e$ est l'ensemble des éléments de D inversibles à gauche, donc cet ensemble et son complémentaire $A'_e + C_e$ sont indépendants de e. B''_e est l'ensemble des éléments grossissants à droite de D (théorème 2.4.), donc cet ensemble est indépendant de e, on pose $B''_e = B''$.

b) $a \in G_e \Longleftrightarrow \exists b, c \in D$ avec $ab = e$, $ca = e$ (théorème 2.1.) .

Soit a un élément de G_e , considérons fa , $fab = fe = f$, $fc.fa = fca = fe = f$, donc fa appartient à G_f . Soient φ et ψ les applications de D dans D définies respectivement par, $\forall a \in D$, $\varphi(a) = fa$, $\psi(a) = ea$. $\varphi(ab) = fab = fafb$, φ et ψ sont donc des homomorphismes. Si a appartient à eD , $\psi \circ \varphi(a) = e.fa = ef.a = ea = a$, de même si b appartient à fD, $\varphi \circ \psi(b) = b$. En particulier, la restriction de φ à G_e établit un isomorphisme de G_e sur G_f .

$G_e \cap G_f$ est vide car G_e et G_f sont les sous-groupes maximaux associés à deux idempotents distincts.

$a \in A'_e \Longleftrightarrow \exists b \in B''$ avec $ab = e$ (théorème 2.2.) .

Si a appartient à A'_e , $fab = fe = f$, donc fa appartient à A'_f , plus précisément à fA'_f qui est un sous-demi-groupe de A'_f . φ est un isomorphisme de eA'_e sur fA'_f .

Si $A'_e \cap fA'_f$ n'est pas vide, soit a un de ses éléments, il existe $b \in B''$ avec $ab = e$, en outre $fa = a$ car a appartient à fA'_f , on en déduit $fab = ab = e$, $fab = fe = f$, donc si f est différent de e, $A'_e \cap fA'_f$ est vide.

c) $G_f + B'_f = G_e + B'_e$, f étant dans G_f appartient donc à $G_e + B'_e$ et même à B'_e car G_e ne contient qu'un seul idempotent e. Inversement, soit g un idempotent inclus dans B'_e, eg appartient à G_e , mais eg est un idempotent, en effet, $eg.eg = egg = eg$, donc $eg = e$; $Dg = Deg = De = D$, g est bien un élément unité à droite de D.

<u>Corollaire 2.5.</u>-

Soit E l'ensemble des unités à droite de D, si E n'est pas vide,

$$D = \sum_{e \in E} G_e + R + B'' + A ,$$

où les G_e sont des groupes isomorphes, R, B'' des sous-demi-groupes sans torsion, A un idéal à gauche maximum, de plus on a

$\forall e, f \in E$, $G_e G_f = G_e$, $G_e R \leq G_e$, $R G_e = R$.

$\forall f \in E$, G_f est inclus dans $G_e + B'_e$ et par suite on peut écrire,

$G_e + B'_e = \sum_{f \in E} G_f + R$; R est égal à $\bigcap_{f \in E} B'_f$, en effet, $\forall f \in E$, R est contenu dans B'_f , d'autre part si x est un élément de $\bigcap_{f \in E} B'_f$, x n'appartient à aucun G_f , donc x appartient à R.

R est donc un sous-demi-groupe, R est sans torsion, autrement R contiendrait au moins un idempotent, mais ceci est impossible car, d'après le théorème 2.5, un idempotent de B'_e est un élément unité à droite de D. On a

$\forall e,f \in E$, $G_e.G_f = G_e.eG_f = G_e.G_e = G_e$, $G_e.R \leq G_e.B'_e \leq G_e$ (théorème 2.1.), $R.G_e \leq B'_f.G_e = B'_f.fG_e = B'_f.G_f \leq B'_f$ (théorème 2.1.); d'où

$R.G_e \leq \bigcap_{f \in E} B'_f = R$, mais $R.G_e \geq Re = R$ et par suite $R.G_e = R$,

$A = A'_e + C_e$, donc A est un idéal à gauche maximum (théorème 2.1.).

Posons $eA'_e = U_e$, $A'_e - U_e = V_e$, $\overline{C} = \bigcap_{e \in E} C_e$

Corollaire 2.6.-

$A = \sum_{e \in E} U_e + \bigcup_{e \in E} V_e + \overline{C}$, où

U_e , V_e , $\sum_{e \in E} U_e$, $\bigcup_{e \in E} V_e$ sont des sous-demi-groupes sans torsion,

$\overline{C}$ est un sous-demi-groupe qui contient tous les idéaux bilatères propres de D ;

$\forall e, f \in E$, $U_e.U_f \leq U_e$, $V_e.V_f \leq V_e$, $V_e.U_f \leq V_e$, $U_e.V_f \leq U_e$.

D'après le théorème 2.5., $fA'_f \cap A'_e$ est vide, on peut donc écrire

$A = \sum_{e \in E} U_e + \bigcup_{e \in E} V_e + C'$; $\forall e \in E$, A est égal à $U_e + V_e + C_e$, donc C' est inclus dans C_e ; d'autre part si x est un élément de $\overline{C}$, x n'appartient à aucun A'_e donc x appartient à C' et C' est égal à $\overline{C}$. $\forall e \in E$, C_e est un sous-demi-groupe qui contient tous les idéaux bilatères propres de D, $\overline{C}$ vérifie les mêmes propriétés.

Pour établir les autres résultats montrons d'abord que V_e est un idéal à droite dans A'_e. Si a appartient à V_e, a' à A'_e, alors aa' est dans A'_e puisque A'_e est un sous-demi-groupe. Il existe $b \in B''$ avec a'b = e, si aa' appartenait à U_e, on aurait aa'b = eaa'b d'où a = ea, mais ceci contredirait l'hypothèse $a \in V_e$; donc aa' appartient à V_e. Pour tout élément e de E, V_e est un sous-demi-groupe de D. On a

$$U_e . U_f = U_e . eU_f = U_e . U_e \subseteq U_e \quad , \quad V_e . V_f = V_e . eV_f \subseteq V_e . U_e \subseteq V_e \quad ,$$

$$V_e . U_f = V_e . eU_f = V_e . U_e \subseteq V_e \quad , \quad U_e . V_f = U_e . fV_f \subseteq U_e . U_f \subseteq U_e \; .$$

Ces relations montrent en particulier que $\sum_{e \in E} U_e$ et $\bigcup_{e \in E} V_e$ sont des sous-demi-groupes de D, sans torsion ainsi que les sous-demi-groupes U_e, V_e, d'après le corollaire 2.2.

Théorème 2.6.-

Soient D un demi-groupe ayant des unités à droite, E l'ensemble de ces éléments unités, alors

$$D = \sum_{e \in E} G_e + R + B'' + \sum_{e \in E} U_e + \bigcup_{e \in E} V_e + \overline{C} \text{ , où } R, B'', U_e,$$

V_e sont des sous-demi-groupes sans torsion ;

B'' est l'ensemble des éléments grossissants à droite de D ;

$\overline{C}$ est un sous-demi-groupe contenant tous les idéaux bilatères propres de D ;

$A = \sum_{e \in E} U_e + \bigcup_{e \in E} V_e + \overline{C}$ est un idéal à gauche maximum;

G_e est le sous-groupe maximum associé à l'idempotent e ;

$$\forall e,f \in E \quad , \quad G_e \approx G_f \quad , \quad U_e \approx U_f \quad ;$$

Ces sous-demi-groupes vérifient la table de multiplication suivante :

	G_f	R	B''	U_f	V_f	$\overline{C}$
G_e	G_e	G_e	B''	U_e	U_e	$A - V_e$
R	R	R	B''	$\overline{C}$	$\overline{C}$	$\overline{C}$
B''	B''	B''	B''	$\overline{C}$	$\overline{C}$	$\overline{C}$
U_e	U_e	U_e	$e\,D$	U_e	U_e	$A - V_e$
V_e	V_e	V_e	D	V_e	V_e	A
$\overline{C}$	$\overline{C}$	$\overline{C}$	$R+B''+\overline{C}$	$\overline{C}$	$\overline{C}$	$\overline{C}$

Remarque : Pour G_e, G_f ceci est un cas particulier d'un théorème dû à Miller et Clifford (4).

En tenant compte des théorèmes 2.1., 2.4., 2.5., des corollaires 2.5., 2.6., il nous reste seulement à vérifier quelques cases de la table de multiplication. On a

1) $G_e . U_f = G_e . eU_f = G_e . U_e = G_e . A'_e \subsetneq A'_e, G_e . A'_e = e\, G_e . A'_e \subsetneq e\, A'_e = U_e$;

2) $U_f . G_e = U_f . f\, G_e = U_f . G_f = f\, A'_f . G_f \subsetneq f\, A'_f = U_f$;

3) $G_e . V_f = G_e . f\, V_f \subsetneq G_e . U_f \subsetneq U_e$;

4) $V_f . G_e = V_f . f\, G_e \subsetneq A'_f . G_f \subsetneq A'_f$, soient $a \in V_f$, $g \in G_f$, g' = inverse de g dans G_f , $ag = a' \in A'_f$ donne $a = a'g'$; donc $a' \in U_f$ donnerait $a \in U_f$

et par suite $V_f . G_f = V_f$;

5) $R . U_e \subsetneq B'_e . A'_e \subsetneq C_e$; $\forall f \in E$, $R . U_e = R . f\, U_e \subsetneq R . U_f \subsetneq C_f$, $R . U_e \subsetneq \overline{C}$;

6) $U_e . R = e\, A'_e . R \subsetneq eA'_e . B'_e \subsetneq eA'_e = U_e$;

7) $R . V_e = R . e\, V_e \subsetneq R . U_e \subsetneq \overline{C}$;

8) $V_e . R \subsetneq V_e . B'_e = V_e . eB'_e \subsetneq V_e . G_e \subsetneq V_e$;

9) $B'' . U_e \subsetneq B'' . A'_e \subsetneq C_e$, $B'' . U_e = B'' . f\, U_e = B'' . U_f \subsetneq C_f$, $B'' . U_e \subsetneq \overline{C}$;

10) $B'' . V_e \subsetneq B'' . U_e \subsetneq \overline{C}$

11) $\overline{C}.G_e = \overline{C}.G_f \subsetneq C_f.G_f = C_f$, $\overline{C}.G_e = \overline{C}$;

12) $\forall e \in E$, $\overline{C}.R \subsetneq \overline{C}.B'_e \subsetneq C_e.B'_e \subsetneq C_e$, $\overline{C}.R \subsetneq \overline{C}$;

13) $\forall f \in E$, $\overline{C}.U_e = \overline{C}.U_f \subsetneq C_f.A'_f \subsetneq C_f$, $\overline{C}.U_e \subsetneq \overline{C}$, de même $\overline{C}.V_e \subsetneq \overline{C}$;

14) $\forall e \in E$, $\overline{C}.B'' \subsetneq C_e.B'' \subsetneq B'_e + B'' + C_e$, $\overline{C}.B'' \subsetneq \bigcap_{e \in E}(B'_e + B'' + C_e)$,
$R + B'' + \overline{C} \subsetneq \bigcap_{e \in E}(B'_e + B'' + C_e)$, si $x \notin R + B'' + \overline{C}$, $\exists e , f \in E$
avec $x \notin B'$ et $x \notin C_f$, mais $(B'_e + B'' + C_e) \cap (B'_f + B'' + C_f) =$

$B'_e \cap B'_f + B'' + C_e \cap C_f$, donc $x \notin \bigcap_{e \in E} (B'_e + B'' + C_e)$, d'où

$$\bigcap_{e \in E}(B'_e + B'' + C_e) = R + B'' + \overline{C} ;$$

15) $G_e.\overline{C} \subsetneq G_e.C_e = e\, G_e.C_e \subsetneq e\,(C_e + A'_e) \subsetneq C_e + U_e = A - V_e$;

16) $\forall e \in E$, $R.\overline{C} \subsetneq R.C_e \subsetneq B'_e.C_e \subsetneq C_e$, $R.\overline{C} \subsetneq \overline{C}$;

17) $\forall e \in E$, $B''.\overline{C} \subsetneq B''.C_e \subsetneq C_e$, $B''.\overline{C} \subsetneq \overline{C}$;

18) $U_e.\overline{C} \subsetneq e\, A'_e.C_e \subsetneq C_e + U_e = A - V_e$;

19) $V_e.\overline{C} \subsetneq A'_e.C_e \subsetneq A$.

<u>Corollaire 2.7.</u>-

Soient D un demi-groupe périodique, E l'ensemble des éléments unités à droite de D, si E n'est pas vide,

$$D = \sum_{e \in E} G_e + C , \quad \text{où}$$

les G_e sont des groupes isomorphes , $\forall e,f \in E$, $G_e.G_f = G_e$; C est l'idéal bilatère maximum de D.

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent et du corollaire 2.3.

Thierrin a étudié les demi-groupes limitatifs (28). Un demi-groupe D est limitatif à droite si, $\forall a, b , x \in D$, les relations $ax = bx = a$ entraînent $a = b$, D est limitatif s'il est limitatif à gauche et limitatif à droite.

Corollaire 2.8.-

a) Tout demi-groupe limitatif à droite et périodique est une somme de groupes.

b) Si D est périodique, D est simple et a un élément unité à droite au moins si et seulement si D est limitatif à droite.

c) Tout demi-groupe limitatif et périodique est un groupe.

a) Tout idempotent d'un demi-groupe limitatif à droite est un élément unité à droite du demi-groupe. Dans la décomposition du théorème 2.6., $\overline{C}$ est donc un demi-groupe sans torsion. Si D est périodique et limitatif à droite, nous avons

$$D = \sum_{e \in E} G_e \text{ , avec } \forall e,f \in E \text{ , } G_e \simeq G_f \text{ et } G_e . G_f = G_e$$

b) Si D est périodique et limitatif à droite, D a des éléments idempotents, d'après a, D a des éléments unités à droite et D est simple.

Si D est périodique, simple et a des éléments unités à droite, d'après le corollaire 2.7., $D = \sum_{e \in E} G_e$, avec $G_e . G_f = G_e$. Soient a, b, x des éléments de D tels que $ax = bx$, soit G_e le sous-groupe de D contenant a, ax, bx, b, ex appartiennent à G_e , dans G_e on a

$a.ex = b.ex$, ce qui entraîne $a = b$. D est simplifiable à droite donc à fortiori limitatif à droite.

c) C'est une conséquence directe du a) (ce résultat généralise le corollaire 2 du théorème 2 de (27)).

Nous allons maintenant préciser la position des éléments potentiellement inversibles par rapport à la décomposition du demi-groupe D donnée par le théorème 2.6.

Définition 2.2.-

Un élément a d'un demi-groupe D est potentiellement inversible à gauche, s'il existe un demi-groupe D' contenant D comme sous-demi-groupe, et tel que a soit inversible à gauche dans D'.

Rappelons deux théorèmes dus à Šutov (22) :

Théorème 1. Pour qu'un élément a appartenant à un demi-groupe D soit potentiellement inversible à gauche, il faut et il suffit que, $\forall s \in D$, $\forall x, y \in D^{*}$, la relation

$$a^2 x = a^2 y \quad \text{entraîne} \quad s x = s y .$$

Théorème 2. Si a est un élément de type fini qui vérifie la condition du théorème 1, a est inversible à gauche dans D et le demi-groupe cyclique engendré par a est un sous-groupe de D .

Théorème 2.7.-

Dans un demi-groupe D, soient L l'ensemble des éléments potentiellement inversibles à gauche, M l'ensemble des éléments inversibles à gauche, M' l'ensemble des éléments grossissants à droite, posons $N = L - M$, $M'' = M - M'$, L, M, M', M'', N sont des sous-demi-groupes de D, M' et N sont sans torsion, D - L est un idéal à gauche de D.

On a $D = M' + M'' + N + (D - L)$, ces 4 sous-demi-groupes vérifient la table de multiplication suivante :

	M'	M''	N	D - L
M'	M'	M'	N	D - L
M''	M	M''	N	D - L
N	L	N	N	D - L
D - L	D	D - M	D - M	D - L

Soient a,b deux éléments de L. Si x,y sont deux éléments de D^{*} qui vérifient la relation $(ab)^2 x = (ab)^2 y$, on a

$$a \in L \Longrightarrow b^2 ab\, x = b^2 ab\, y \;, \quad b \in L \Longrightarrow a^2 bx = a^2 by \;,$$

$$a \in L \Longrightarrow b^2 x = b^2 y \;, \quad b \in L \Longrightarrow \forall s \in D \;, \quad sx = sy \;;$$

ab appartient donc à L.

Soient a un élément de L, b un élément de N, Dab est contenu dans Db , donc Dab est différent de D, ab appartient à N , N est un idéal à gauche dans L ; N est sans torsion d'après le théorème 2 de Sutov.

M et M' sont des sous-demi-groupes de D (22). Soient a, b deux éléments de M'' , ab appartient à M , si D' est différent de D, D'a est différent de D donc D'ab aussi et par suite ab appartient à M''.

D - L est un idéal à gauche de D, en effet, soit b un élément de D - L, si, pour un élément a de D, ab appartenait à L, la relation $b^2x = b^2y$ donnerait successivement : $ab.bx = ab.by$, $abx = aby$ et, $\forall s \in D$, $sx = sy$, b appartiendrait donc à L, ce qui contredirait l'hypothèse.

Pour compléter la table de multiplication, il reste à vérifier :

- $M'M'' \subsetneq M'$; $a \in M' \Longrightarrow \exists D' \subset D$ avec $D'a = D$, $b \in M'' \Longrightarrow D'ab = Db = D$, $ab \in M'$;

- $NM'' \subsetneq N$; $a \in N$, $b \in M'' \Longrightarrow ab \in L$, $a \in N \Longrightarrow Da \neq D$, $b \in M'' \Longrightarrow Dab \neq D$, $ab \notin M$;

- $(D - L) . (M'' + N) \subsetneq D - M$; $a \in D - L \Longrightarrow Da \neq D$, $b \in M'' + N \Longrightarrow Dab \neq D$.

Théorème 2.8.-

a) D est un demi-groupe sans éléments unités à droite si et seulement si L est vide ou si L est un demi-groupe sans torsion.

b) Si D contient au moins un élément unité à droite et si nous prenons la décomposition du théorème 2.6., nous avons

$$M' = B'' \quad , \quad M'' = \sum_{e \in E} G_e + R \quad , \quad N \subsetneq \overline{C}$$

a) Supposons que L contienne un élément a de type fini, d'après le théorème 2 de Sutov, a appartient à M. Il existe un idempotent e appartenant au demi-groupe cyclique engendré par a ; M étant un sous-demi-groupe de D, e appartient à M, d'où De = D , e est un élément unité à droite de D .

Réciproquement, si e est un élément unité à droite de D, e appartient à L, L n'est pas vide et n'est pas sans torsion.

b) Si D a un élément unité à droite, d'après le théorème 2.6., on a

$$M' = B'' \quad , \quad M'' = \sum_{e \in E} G_e + R \ \text{ et, } \forall e \in E, \ N \subsetneq A'_e + C_e .$$

Si $N \cap A'_e$ n'est pas vide, soit a un de ses éléments, a appartient à A'_e donc il existe $b \in D$ tel que ab = e, a appartenant à N et e à M'', ea appartient à N, il existe donc, dans un sur-demi-groupe D' de D, un élément a' tel que a'ea = e.

Dans D' on a

$a'e.ab = a'e.e = a'e$, $a'ea.b = eb$, d'où $a'e = eb$ et $eba = a'ea = e$,

a est donc inversible à gauche dans D ce qui contredit l'hypothèse $a \in N$.

Pour tout $e \in E$, N est donc contenu dans C_e et par suite N est contenu dans $\overline{C}$.

Théorème 2.9.-

Dans un demi-groupe D qui contient un élément unité à droite, mais pas d'élément unité bilatère, un élément a est potentiellement inversible à droite si et seulement si a est simplifiable à droite et si a n'appartient pas à Da . L'ensemble de ces éléments est inclus dans $(\bigcup_{e \in E} V_e + \overline{C}) \setminus \bigcup_{e \in E} eD$.

Soit e un élément unité à droite de D, soit a un élément potentiellement inversible à droite, si x, y appartiennent à D, la relation $xa = ya$ donne $xe = ye$, c'est-à-dire $x = y$, a est simplifiable à droite dans D . S'il existe $x \in D$ avec $xa = a$, alors $xe = e$, $x = e$, $ea = a$. Soit D' le sur-demi-groupe de D dans lequel a est inversible à droite, on a

$$eaD' = aD' = D' \quad , \quad eD' \geqslant eaD' \quad , \quad eD' = D' ,$$

ce qui montre que e est un élément unité à gauche de D', e est donc un élément unité bilatère de D contrairement à l'hypothèse. Il en résulte que a n'appartient pas à Da, en particulier, a n'est pas inversible à gauche dans D et a est différent de ea, donc a appartient à $(V_e + C_e) \setminus eD$.

Inversement, soit b un élément simplifiable à droite qui n'appartient pas à Db , $\forall x, y \in D^*$, la relation $xb^2 = yb^2$ entraîne $xb = yb$, si x, y appartiennent à D, on en déduit $x = y$ et, $\forall s \in D$, $xs = ys$, si $y = 1_{D^*}$, $xb = b$ contredit l'hypothèse, b est donc un élément potentiellement inversible à droite.

Nous avons vu que l'ensemble des éléments potentiellement inversibles à droite était, $\forall e \in E$, inclus dans $(V_e + C_e) \setminus eD$, cet ensemble est donc contenu dans $\bigcap_{e \in E}(V_e + C_e) \setminus \bigcup_{e \in E} eD$. Posons $\bigcap_{e \in E}(V_e + C_e) = K$,

on a

$$\forall e,f \in E \ , \ \overline{C} = \bigcap_{e \in E} C_e \subsetneq K \ , \ U_e + V_e + C_e = U_f + V_f + C_f, \ U_f \cap (U_e + V_e) = \emptyset,$$

(théorèmes 2.5., 2.6.) ce qui donne, $\forall f \in E$, $V_e \subsetneq V_f + C_f$, $V_e \subsetneq K$,

$\bigcup_{e \in E} V_e + \overline{C} \subsetneq K$.

Si a n'appartient pas à $\bigcup_{e \in E} V_e + \overline{C}$, il existe $f \in E$ tel que C_f ne contienne pas a, donc a n'appartient pas à $V_f + C_f$, a n'est pas dans K, $K = \bigcup_{e \in E} V_e + C$.

Exemple 2.1.

Soient $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $E = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ $D = \{$ applications de E dans N $\}$, si α et β appartiennent à D, $\beta(E) \subsetneq N$ donne $\alpha \circ \beta(E) \subsetneq \alpha(N) \subsetneq N$.

D est un demi-groupe pour la composition des applications.

L'élément e_n de D défini par $e_n(0) = n$, $\forall p \in N$, $e_n(p) = p$, est un élément unité à gauche de D, en effet, $\forall p \in E$, $e_n \circ \alpha(p) = \alpha(p)$ puisque $\alpha(p) \in N$. Inversement, soit e un élément unité à gauche de D, nous avons en particulier $e\, e_1 = e_1$, d'où $\forall p \in N$, $e(p) = p$, si $e(0) = q$, $e = e_q$.

Considérons la décomposition de D (théorème 2.1.) liée à l'élément unité à gauche e_n. Nous noterons ses éléments avec n en indice.

$G_n = \{$ éléments inversibles à gauche et à droite par rapport à $e_n \}$. Si $a \in G_n$ $\exists b$, $c \in D$ avec $ab = e_n$, $ca = e_n$, soient a', b', c', I, les restrictions respectives de a, b, c, e_n à N. Nous avons $a'b' = c'a' = I$, I étant l'identité sur N, a' induit une permutation dans N. D'autre part $a\, e_n = a$ donne $a(0) = a\, e_n(0) = a(n)$.

Inversement, soit a un élément de D qui induit sur N une permutation et tel que $a(0) = a(n)$; il existe b' avec $a'b' = b'a' = I$ (a' restriction). Posons $b(0) = b'(n)$, $\forall p \in N$, $b(p) = b'(p)$, b est un élément de D et nous avons si $p \neq 0$, $ab(p) = ba(p) = p$, $ab(0) = ab'(n) = a'b'(n) = n$, $ba(0) = ba'(n) = b'a'(n) = n$, donc $ab = ba = e_n$ et $a \in G_n$.

$G_n^{\bullet} . e_n = G_n + A'_n$; $a \in A'_n \Longleftrightarrow a\, e_n \in G_n$ et $a \notin G_n$. Sur N, a induit une permutation , en effet $a(p) = a\, e_n(p)$, $a \notin G_n$ implique donc $a(O) \neq a(n)$. Inversement, si a induit sur N une permutation et si $a(O) \neq a(n)$, $a\, e_n \in G_n$ et $a \notin G_n$.

$a \in G_n + A'_n \Longleftrightarrow a'$ permutation de N ; si p est l'élément de N défini par $a(0) = a(p)$, a appartient à G_p , nous avons donc $G_n + A'_n = \sum_{p \in N} G_p$, dans cet exemple R est vide. Nous poserons $G_1 + A'_1 = G + A'$.

$A'' = \{$ éléments grossissants à gauche de D$\}$. $a \in A'' \Longleftrightarrow \exists b \in D$ avec $a\, b = e_1$ et $a \notin G + A'$ (théorème 2.1.) , ceci donne $a'b' = I$, c'est à dire a' application surjective de N sur N , $a \notin G + A'$ donne a' non injective. Inversement, si un élément a de D admet une restriction sur N surjective mais non injective, il existe b' avec $a'b' = I$, définissons b en posant, $\forall p \in N$, $b(p) = b'(p)$ et en prenant $b(0) \in a'^{-1}(1)$, $ab(p) = p$, $ab(O) = 1$, donc $ab = e_1$,

$A'' = \{a \in D$; a' surjective mais non injective$\}$.

$B'_n = \{$éléments inversibles à gauche par rapport à e_n mais non inversibles à droite dans D$\}$. Si $b \in B'_n$, il existe $a \in D$ avec $ab = e_n$, d'où

$a'b' = I$, b' est donc une application injective de N dans N, b' n'est pas surjective puisque b n'est pas inversible à droite. D'autre part, nous avons $ab(O) = n$, soit $b(O) = i$, si $i \in b(N)$, désignons par j l'élément de N égal à $b^{-1}(i)$; on a $ab(O) = a(i) = ab(j) = j$, d'où $j = n$; par suite $b(O) = b(n)$ ou $b(O) \notin b(N)$.

Inversement, soit $b \in D$, tel que $b(O) = b(n)$ ou $b(O) \notin b(N)$, et tel que b' soit injectif mais non surjectif. b' étant injectif, il existe a' avec $a'b' = I$, définissons a par $\forall p \in N$, $a(p) = a'(p)$, $a(O) = q$, q élément quelconque. $\forall p \in N$, $ab(p) = a'b'(p) = p$; si $b(O) = b(n)$, $ab(O) = ab(n) = n$; si $b(O) = i \notin b(N)$, on peut choisir a' avec $a'(i) = n$, car $a'(i)$ est arbitraire, nous avons alors $ab(O) = a(i) = a'(i) = n$.

$B'_n = \{b \in D$; b' injectif, non surjectif ; $b(O) = b(n)$ ou $b(O) \notin b(N)\}$.

$U_n = B'_n . e_n = \{b \in D$; b' injectif, non surjectif ; $b(O) = b(n)\}$.

$V_n = B'_n - U_n = \{ b \in D$; b' injectif, non surjectif ; $b(O) \notin b(N)\}$, V_n est indépendant de n.

$$C_n = \left\{ a \in D \text{ , a' non surjective et si a' est injective, } a(O) \in a(N) \text{ , } a(O) \neq a(n) \right\}$$

$$\overline{C} = \bigcap_{n \in N} C_n = \left\{ a \in D \text{ ; a' non injective et non surjective} \right\} .$$

Pour tout $n \in N$, G_n est isomorphe au demi-groupe des permutations de N, U_n est isomorphe au demi-groupe des applications de N injectives mais non surjectives.

Posons $e = e_1$, la table de multiplication du théorème symétrique du théorème 2.1. donne : $A''B'' \subsetneq D$, $A''C \subsetneq A' + A'' + C$, $C\,G \subsetneq C + B'$, $C\,B' \leq C + B'$, montrons que le nombre des éléments figurant dans ces cases ne peut être réduit. Soient :

a_1 défini par : $a_1(O) = 1$, $a_1(1) = 1$, $\forall n > 1$, $a_1(n) = n - 1$,

a_2 : pour $i = O, 1, 2$, $a_2(i) = 1$, pour $n > 2$, $a_2(n) = n - 2$,

a_3 : $a_3(O) = a_3(1) = 1$, $a_3(2) = 2$, pour $n > 2$, $a_3(n) = n - 1$,

a_4 : $a_4(O) = 1$, $a_4(1) = a_4(2) = 2$, pour $n > 2$, $a_4(n) = n - 2$,

$a_i \in A''$, $(i = 1 , 2, 3, 4)$;

b_1 : $b_1(O) = 2$, $\forall n \in N$, $b_1(n) = n + 1$,

b_2 : $b_2(O) = 2$, $\forall n \in N$, $b_2(n) = n + 2$; b_1 et $b_2 \in B'$;

c_1 : $c_1(O) = 3$, $\forall n \in N$, $c_1(n) = n + 1$;

c_2 : $c_2(O) = c_2(1) = 2$, pour $n > 1$, $c_2(n) = n$;

c_3 : $\forall n \geq O$, $c_3(n) = 1$; $c_i \in C$, $(i = 1, 2, 3)$.

$A''B'$: $a_1 b_1 = e \in G$, $a_2 b_1 = a_1 \in A''$, $a_4 b_2 = e_2 \in A'$, $a_3 b_1 = c_2 \in C$,

$a_3 b_2 = b_1 \in B'$.

$A''C$: $a_1c_2 = a_1 \in A''$, $a_1c_3 = c_3 \in C$, $a_1c_1 = e_2 \in A'$;

$C\,G$: $c_1e = b_1 \in B'$, $c_3e = c_3 \in C$.

$C\,B'$: $c_1b_1 = b_3$, avec : $b_3(O) = 3$, pour $n \in N$, $b_3(n) = n + 2$, $b_3 \in B'$;
$c_3b_1 = c_3 \in C$.

Exemple 2.2.-

Considérons les deux demi-groupes d'ordre 4 donnés par les tables suivantes :

D

	e	f	a	b
e	e	e	a	a
f	f	f	b	b
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b

D'

	e	f	a	b
e	e	e	a	b
f	f	f	a	b
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b

$D = \{e\} + \{f\} + \{a, b\}$ $D' = \{e\} + \{f\} + \{a, b\}$

les sous-demi-groupes $\{a, b\}$ de D et de D' sont isomorphes, les deux demi-groupes D et D' admettent deux décompositions définies par le théorème 2.6. identiques mais D et D' ne sont pas isomorphes.

3) Demi-groupes X_p , X'_p .

Dans cette partie nous allons construire des demi-groupes qui nous permettront de préciser le théorème 2.3.

Construction du demi-groupe X .

Soit X l'ensemble des triplets (a,b,c) , avec $a = 0$ ou 1 ; b , c nombres entiers positifs ou nuls , $a + b + c \neq 0$. Soit h l'application de Z dans Z définie par : $h(x) = x$, si $x \geqslant 0$; $h(x) = 0$, si $x < 0$.

Considérons la loi de composition suivante :

$$(a,b,c).(a',b',c') = (a\ ,\ b + h\ (b' - c)\ ,\ c' + h\ (c - b')\ ) \quad \text{si } a + b > 0$$

$$(0,0,c).(a',b',c') = (1,\ (b' - c)\ ,\ c'\ ) \quad \text{si } b' - c \geqslant 0$$

$$= (0\ ,\ 0\ ,\ c' + (c - b')\ ) \quad \text{si } b' - c < 0 ,$$

c'est bien une application de $X \times X$ dans X , de plus on vérifie aisément que, muni de cette loi, X est un demi-groupe .

Posons : $(1,0,0) = e$, $(0,1,0) = u$, $(0,0,1) = v$. Nous avons $(1,a,b) = (1,0,0).(0,a,b)$, $(0,a,b) = (0,a,0).(0,0,b)$, $(0,a,0) = (0,1,0)^a$, $(0,0,b) = (0,0,1)^b$, les éléments de X se mettent donc sous l'une des formes canoniques suivantes : $u^a v^b$ avec $a + b > 0$ ou $e\, u^a v^b$, avec la convention $u = v = 1_{X^*}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Nous avons de plus, $e^2 = (1,0,0).(1,0,0) = (1,0,0) = e$,

$ue = (0,1,0).(1,0,0) = u$, $ve = (0,0,1).(1,0,0) = v$, $vu = (0,0,1)(0,1,0) = e$

X est donc engendré par les deux éléments u, v liés par les relations :

$vu = e$, $ue = u$, $ve = v$; e est un élément unité à droite de X . La décomposition du théorème 2.1. associée à e donne :

$$G = \{e\} ,\quad A' = \{v^b ,\ e\, v^b\ ;\ b > 0\} ,\quad B' = \emptyset ,\quad B'' = \{u^a ,\ e\, u^a\ ;\ a > 0\} ,$$

$$C = \{ u^a v^b ,\ e\, u^a v^b\ ;\ a > 0 ,\ b > 0\} .$$

Construction des demi-groupes X_p , X'_p , $p \geqslant 1$.

Considérons dans X la relation d'équivalence P_p définie par la partition suivante : $(1,a,b)$ et $(0,a,b)$ appartiennent à la même classe si et seulement si a est supérieur ou égal à p, b quelconque, les autres éléments forment chacun une classe. P_p est une relation d'équivalence régulière,

à gauche : $(a',b',c').(1,a,b) = (a',b',c').(1,O,O).(O,a,b) = (a',b',c').(O,a,b)$,

à droite : $(1,a,b).(a',b',c') = (1,a + h(b'-b)\ ,\ c' + h(b - b'))$,

$(O,a,b).(a',b',c') = (O,a + h(b'-b)\ ,\ c' + h(b - b'))$,

les deuxièmes membres sont équivalents mod. P_p puisque $a \geqslant p$.

Posons $X_p = X/ P_p$, X_p est engendré par u et v liés par les relations $vu = e$, $ue = u$, $ve = v$, $e\,u^p = u^p$. La forme canonique des mots de X_p est $u^a\, v^b$, $e\,u^{a'}\, v^{b'}$, avec $u^{\ } = v^{\ } = 1_{X_p^*}$, $a + b > O$, $a' < p$.

Nous poserons également $X_\infty = X$.

Considérons maintenant dans X la relation d'équivalence P'_p définie par la partition suivante : (1,a,b) et (O,a,b) appartiennent à la même classe si et seulement si a est supérieur ou égal à p , (1,O,b) et (O,O,b) appartiennent à la même classe ; les autres éléments forment chacun une classe. P'_p est régulière ; pour les classes du premier type, ceci résulte de l'étude de P_p. De plus, on a

$(a',b',c').(1,O,b) = (a',b',c').(O,O,b)$, car $(1,O,b) = (1,O,O).(O,O,b)$

si $b' - b \geqslant O$, $(1,O,b).(a',b',c') = (1,\ b'-b,\ c')$,

$(O,O,b).(a',b',c') = (1,\ b'-b,\ c')$;

si $b'- b < O$, $(1,O,b).(a',b',c') = (1,\ O,\ c' + b - b')$,

$(O,O,b).(a',b',c') = (O,O,\ c' + b - b')$.

Posons $P'_\infty = \bigcap_{p=1}^{p=\infty} P'_p$, $X'_p = X / P'_p$. X'_p est engendré par deux éléments u et v liés par les relations de définition :

$vu = e$, $ev = ve = v$, $ue = u$, $e\,u^p = u^p$. La forme canonique des mots de X'_p est $u^a\, v^b$, $e\,u^{a'}\, v^{b'}$, avec $u^{\ } = 1_{X_p'^*}$, $v^{\ } = e$, $O < a' < p$.

En particulier X'_1 est isomorphe au demi-groupe bicyclique .

Propriétés des demi-groupes X_p , X'_p .

Régularité des éléments :

$$a > O \ , \quad u^a v^b = u^a v^b \circ u^b v^a \circ u^a v^b = u^a v^b \cdot e\, u^b v^a \cdot u^a v^b \ ,$$

$$e\, u^a v^b = e\, u^a v^b \cdot u^b v^a \circ e\, u^a v^b = e\, u^a v^b \cdot e\, u^b v^a \circ e\, u^a v^b \ ;$$

$$a = O \ , \quad v^b \circ u^b \circ v^b = e\, v^b \ ; \ e\, v^b = e\, v^b \cdot u^b \cdot ev^b = ev^b \cdot eu^b \cdot ev^b \ .$$

Dans X_p ou X'_p les éléments $u^a v^b$, $a > O$, $e\, u^a v^b$ admettent un inverse au moins. Tous les éléments de X'_p sont réguliers, mais seul $\mathcal{B} = X'_1$ est un demi-groupe inverse car si $p > 1$, $u^a v^b$ admet deux inverses distincts pour $b < p$.

Eléments idempotents :

$u^a v^b \cdot u^a v^b = u^{a + h(a - b)} \cdot v^{b + h\,(b - a)}$, $u^a v^b$ est idempotent si et seulement si $h(a - b) = O$ et si $h(b - a) = O$, c'est-à-dire si et seulement si on a $a = b$; de même $e\, u^a v^b$ idempotent si et seulement si on a $a = b$.

$$u^a v^a \circ u^b v^b = u^b v^b \cdot u^a v^a = u^c v^c \ , \text{ avec } c = \sup.\ (a,b) \ ,$$

$$e\, u^a v^a \cdot e\, u^b v^b = e\, u^b v^b \cdot e\, u^a v^a = e\, u^c v^c \ ,$$

$$e\, u^a v^a \cdot u^b v^b = e\, u^c v^c \ , \quad u^a v^a \cdot e\, u^b v^b = u^c v^c \ .$$

L'ensemble E_p $[E'_p]$ des idempotents de X_p $[X'_p]$ est un sous-demi-groupe.

E_p et E'_p sont isomorphes ; pour la relation d'ordre de Rees ($e \leqslant f \Longleftrightarrow ef = fe = e$) nous avons :

$$E_\infty = \begin{cases} uv > u^2v^2 > \ldots\ldots\ldots > u^n v^n > \ldots\ldots\ldots \\ e > euv > e\,u^2v^2 > \ldots\ldots\ldots > e\,u^n v^n > \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$E_p = \left.\begin{cases} uv > u^2v^2 > \ldots\ldots > u^{p-1}v^{p-1} \\ e > euv > e\,u^2v^2 > \ldots\ldots > e\,u^{p-1}v^{p-1} \end{cases}\right\rangle\ u^p v^p > \ldots\ldots > u^n v^n > \ldots$$

Equivalences de Green.

Soient x et y deux éléments d'un demi-groupe D ,

$x \equiv y\ (\mathcal{L}) \Longleftrightarrow$ x et y engendrent le même idéal à gauche dans D,

$x \equiv y\ (\mathcal{R}) \Longleftrightarrow$ x et y engendrent le même idéal à droite dans D .

Disposons les éléments de X selon le tableau suivant :

	v	v^2	......	v^b	......
e	$e\,v$	$e\,v^2$	......	$e\,v^b$	......
u	$u\,v$	$u\,v^2$	......	$u\,v^b$	......
eu	$eu\,v$	$eu\,v^2$	......	$eu\,v^b$	......
....	....	....	....	....	....
u^a	$u^a v$	$u^a v^2$	......	$u^a v^b$	......
$e\,u^a$	$e\,u^a v$	$e\,u^a v^2$	......	$e\,u^a v^b$	......
....	....	....	....	....	....

Pour X_p les lignes $e\,u^a$ .... sont supprimées si a est supérieur ou égal à p, pour X'_p la première ligne et les lignes $e\,u^a$, pour a supérieur ou égal à p, sont supprimées.

Dans ce tableau les classes mod. $\mathcal{R}$ sont constituées par les différentes lignes, les classes mod. $\mathcal{L}$ par chaque élément de la première ligne et par chaque colonne moins le premier élément. Les classes mod. $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ sont donc constituées par un seul élément, en particulier les groupes maximaux associés aux idempotents sont réduits à ces idempotents.

Les X_p , X'_p sont simples car, $X_p . e\,u^a v^b . X_p = X_p . u^a v^b . X_p$ contient $X_p . v^a u^a v^b u^b = X_p\, e = X_p$, même calcul pour X'_p .

Soit $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$, d'après la forme des $\mathcal{L}$- classes et des $\mathcal{R}$-classes, X_p est formé de deux classes mod. $\mathcal{D}$, ce sont :

$D_1 = \{ v , v^2 , \ldots\ldots , v^n , \ldots. \}$, et $D_2 = X_p - D_1$; D_1 est un demi-groupe cyclique infini, D_2 est un sous-demi-groupe engendré par u, ev ; D_2 est isomorphe à X'_p ; X'_p est un demi-groupe bi-simple (4) et régulier .

Equivalence ρ'_e .

W'_c est vide car les X_p , X'_p sont simples. Soient $x = e\,u^a v^b$, $y = u^c v^d$, tels que l'on ait $x \equiv y\ (\rho'_e)$, $v^a x u^b = e$ implique $v^a y u^b = e$, d'où

- si $a \leqslant c$, $b > d$, $u^{c-a} v^{d-b} = e$ et $c = a$, $d = b$;
- si $a > c$, $b \leqslant d$, $u^{c-a+b-d} = e$, ce qui est impossible ;
- si $a > c$, $b \leqslant d$, $v^{a-c+d-b} = e$, ce qui est impossible ;
- si $a > c$, $b > d$, $v^{a-c} u^{b-d} = e$, ce qui donne $a-c = b-d = r$,

$x = eu^{c+r} v^{d+r}$, $y = u^c v^d$; mais $v^c y u^d = e$ implique $v^c x u^d = e$ soit $u^r v^r = e$ ce qui est impossible, donc si $x \equiv y\ (\rho'_e)$, alors $x = e\,u^a v^b$, $y = u^a v^b$, ou $x = y$.

D'autre part, $\forall d > O$, $e \mathbin{.\dot{}.} u^a = e \mathbin{.\dot{}.} eu^a = \{ (v^a , e) , (ev^a , e) \}$; $\forall b > O$, $e \mathbin{.\dot{}.} v^b = e \mathbin{.\dot{}.} ev^b = \{ (e, u^b) , (e, eu^b) \}$; nous avons donc $v^b \equiv ev^b\ (\rho'_e)$, $u^a = eu^a\ (\rho'_e)$, d'où $u^a v^b \equiv e\,u^a v^b\ (\rho'_e)$ puisque ρ'_e est régulière à droite.

Cette étude montre que ρ'_e n'est l'égalité que dans $X'_1 = \mathcal{B}$ (demi-groupe bicyclique) et que $\forall p$, X_p / ρ'_e et X'_p / ρ'_e sont isomorphes à $\mathcal{B}$.

<u>Lemme 3.1.</u>-

Pour tout élément x de X_p ou de X'_p , si x est différent de u, v, eu, ev il existe un élément x' different de e qui n'est pas une puissance de x ou de ex et qui commute avec x.

1) Si $x = u^a v^b$, $a > O$, $b > O$, $a+b > 2$, prenons $x' = uv$; on a $x\,x' = u^a v^b\,uv = x$, $x'x = x$, $x' \neq x^n$ et $x' \neq e\,x^n$ car $x^n = u^c v^d$ avec $c \geqslant a$, $d \geqslant b$, donc $c+d > 2$.

2) Si $y = ex$, x donné par 1), prenons $y' = ex'$; on a $y\,y' = ex\,ex' = ex\,x' = ex = y$, $y'y = ex'ex = ex'x = ex = y$, $e\,y^n = y^n = e\,x^n \neq y'$.

3) Si $x = uv$, prenons $x' = u^2 v^2$, d'après 1, $x\,x' = x'\,x = x'$. $x^2 = x$ donc $\forall n$, $x' \neq x^n$ et $x' \neq e\,x^n$. De même si $y = euv$, $y' = e\,u^2 v^2$.

4) Si $x = u^a$, $a > 1$, $x' = u$. Si $y = e\,u^a$, $a > 1$, $y' = eu$.

5) Si $x = v^b$, $b > 1$, $x' = v$. Si $y = e\, v^b$, $b > 1$, $y' = ev$.

6) Si $x = u$, si $x' = u^a v^b$, avec $b > 1$, on a $x\,x' = u^{a+1} v^b$, $x'x = u^a v^{b-1}$,

si $x' = e\, u^a v^b$, avec $b > 1$, on a $x\,x' = u^{a+1} v^b$, $x'x = e\, u^a v^{b-1}$.

7) Si $x = eu$, v ou ev, un calcul analogue montre qu'il est impossible de trouver x' différent de e , x^n , $e\,x^n$ qui commute avec x.

Théorème 3.1.-

Les demi-groupes X_p , X'_p n'admettent pas d'automorphisme distinct de l'automorphisme identique.

Soit φ un automorphisme de X_p ou X'_p . e est le seul élément unité à droite, donc $\varphi(e) = e$. La propriété indiquée par le lemme 3.1. est conservée par φ, il en résulte que $\varphi(u)$ est égal à u , eu , v ou ev.
Si $\varphi(u) = eu$ ou ev , $\varphi(u) = e$. $\varphi(u) = \varphi(e)$. $\varphi(u) = \varphi(eu)$, si $u \neq eu$ ceci est impossible.

Soit $u \neq eu$, $v \neq ev$, alors $\varphi(u) = u$ ou v , $\varphi(v) = u$ ou v,
$\varphi(u) = u$ donne $\varphi(v) = v$, φ est l'automorphisme identique ;
$\varphi(u) = v$ donne $\varphi(v) = u$, mais alors $\varphi(u^2 v) = \varphi^2(u).\varphi(v) = v^2 u = v = \varphi(u)$ ce qui est impossible.

Soit $u \neq eu$, $v = ev$, alors en plus des hypothèses précédentes nous pouvons avoir : $\varphi(u) = u$, $\varphi(v) = eu$, ce qui donne $\varphi(v) = \varphi(eu)$, impossible,
ou $\varphi(u) = v$, $\varphi(v) = eu$, ce qui donne $\varphi(u^2 v) = \varphi(u)$, impossible.

Soit $u = eu$, $v \neq ev$, cas symétrique du précédent.

Soit $u = eu$, $v = ev$, u et v engendrent alors le demi-groupe bicyclique, dans ce cas le théorème est démontré dans (22).
En conclusion, $\varphi(u) = u$, $\varphi(v) = v$, φ est l'automorphisme identique.

Corollaire 3.1.-

Si un demi-groupe D est isomorphe à X_p (ou à X'_p), il n'existe qu'un seul isomorphisme entre D et X_p (ou entre D et X'_p).

Soient ψ et ψ' deux isomorphismes de X_p $[$ou de $X'_p]$ dans D, $\psi^{-1} \circ \psi'$ est un automorphisme de X_p , $[X'_p]$, donc est l'identité.

Théorème 3.2.-

Soit D un demi-groupe ayant un élément unité à droite e.

a) Si x est un élément grossissant à droite de D et si p est le plus petit entier vérifiant $x^p = e\,x^p$ (si aucun entier q ne vérifie $x^q = e\,x^q$, nous posons $p = \infty$) il existe un monomorphisme φ de X'_p dans D tel que l'on ait

$\varphi(e') = e$, $\varphi(u) = x$. (e' est l'élément unité à droite de X'_p).

b) Si nous avons de plus un élément y de D différent de ey, tel que $yx = e$, il existe un monomorphisme ψ de X_p dans D tel que $\psi(u) = x$, $\psi(v) = y$.

c) Inversement, s'il existe un monomorphisme φ de X'_p $[$ou de $X_p]$ dans D tel que $\varphi(e') = e$, l'élément $x = \varphi(u)$ est grossissant à droite dans D et p est égal à la borne inférieure des q vérifiant $x^q = e\,x^q$.

Démontrons d'abord b). Considérons le sous-demi-groupe de D engendré par x et y, soit $C = \{ x,y \}$; on a $yx = e$, $xe = x$, $ye = y$, donc les éléments de C sont de la forme $x^a y^b$, $a+b > 0$, et $e\,x^{a'} y^{b'}$ avec $x = y = 1_{D^*}$, $a' < p$. Supposons que nous ayons $x^a y^b = x^{a'} y^{b'}$ $(= e\,x^{a'} y^{b'})$, ceci entraîne $(ex)^a (ey)^b = (ex)^{a'} (ey)^{b'}$, mais alors le théorème 2.3. donne $a = a'$, $b = b'$. Il reste $x^a y^b = e\,x^a y^b$, si a est différent de O, multiplions à droite par x^b, nous obtenons $x^a = e\,x^a$ ce qui est impossible si a est plus petit que p ; si $a = O$, $y^b = e\,y^b$ multiplions à droite par x^{b-1}, il vient $y = ey$, ce qui contredit l'hypothèse, la forme donnée pour les éléments de C est bien canonique. L'application Ψ de X_p dans D définie par $\Psi(u^a v^b) = x^a y^b$ et $\Psi(e'u^a v^b) = e\,x^a y^b$ est donc un isomorphisme de X_p sur C.

a) x étant un élément grossissant, il existe un élément y tel que $yx = e$, nous pouvons supposer que $y = ey$, une démonstration analogue à celle de b montre que x et y engendrent un sous-demi-groupe de D isomorphe à X'_p .

c) Soit φ [ψ] un monomorphisme de X'_p $[X_p]$ dans D tel que $\varphi(e') = e$ $[\psi(e') = e]$, considérons la restriction de ce monomorphisme au sous-demi-groupe de X'_p $[X_p]$ engendré par e'u, e'v , ce sous-demi-groupe est isomorphe au demi-groupe bicyclique, d'autre part $\varphi(e'u) = e.\ \varphi(u) = ex$ $[\psi(e'u)=ex]$, x est donc un élément grossissant à droite d'après le théorème 2.3. De plus

$u^p = e'u$ donne $x^p = e\,x^p$, $u^q \neq e'u^q$ donne $x^q \neq e\,x^q$; ces relations finissent de démontrer le théorème.

Nous allons maintenant utiliser les résultats de la deuxième partie de ce chapitre pour poursuivre l'étude des sous-demi-groupes U-h et U_d-h d'un demi-groupe quelconque.

Signalons encore le résultat suivant :

Tout demi-groupe U - simple holomorphe à un idéal bilatère d'un demi-groupe D est holomorphe à D.

Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance à M. P. Dubreil qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury de ma thèse. Ses encouragements m'ont été d'un très grand secours pendant toute la durée de mes recherches. Je suis également très heureux de remercier M. R. Croisot, rapporteur de cette thèse, pour les précieux conseils qu'il m'a donnés pendant sa rédaction. M. le Professeur Deheuvels a bien voulu s'intéresser à mon travail et me donner un second sujet ; je l'en remercie très vivement.

4) <u>Homomorphismes d'un demi-groupe sur un demi-groupe admettant des éléments neutres.</u>

Soient D un demi-groupe, φ un homomorphisme de D sur un demi-groupe E ayant un élément unité à droite e, posons $S = \varphi^{-1}(e)$. La décomposition du théorème 2.1. donne $E = G + A' + B' + B'' + C$. Alors ,

$a \in \varphi^{-1}(G) \Longleftrightarrow \varphi(a) \in G \Longleftrightarrow \exists b, c \in D$ avec $\varphi(a)\,\varphi(b) = e,\ \varphi(c)\,\varphi(a) = e$ $\Longleftrightarrow \varphi(ab) = \varphi(ca) = e \Longleftrightarrow ab\ ,\ ca \in S \Longleftrightarrow a \notin W_S \cup {}_SW$.

Nous en déduisons $\varphi^{-1}(G) = D - W_S \cup {}_SW$ et $\varphi(D - W_S \cup {}_SW) = G$, car φ est surjective.

$B = B' + B'' + C$ est l'ensemble des éléments de E non inversibles à droite par rapport à e ; d'où

$b \in \varphi^{-1}(B) \Longleftrightarrow e \notin \varphi(b).E \Longleftrightarrow bD \cap S = \emptyset \Longleftrightarrow b \in W_S$; $\varphi^{-1}(B) = W_S$.

De même, pour $A = A' + C$, nous avons $\varphi^{-1}(A) = {}_SW$.

Nous en déduisons $\varphi^{-1}(C) = W_S \cap {}_SW$, $\varphi^{-1}(B' + B'') = W_S \setminus {}_SW$,

$\varphi^{-1}(A') = {}_SW \setminus W_S$. Pour B', nous avons

$e B' \subsetneq G \Longrightarrow \varphi[S\ \varphi^{-1}(B')] \subsetneq e B' \subsetneq G \Longrightarrow S\,\varphi^{-1}(B') \subsetneq \varphi^{-1}(G) = D - W_S \cup {}_SW$

$\Longrightarrow \varphi^{-1}(B') \subsetneq [(D - W_S \cup {}_SW) .^{\cdot}\, S] \cap (W_S \setminus {}_SW)$, mais inversement,

$b \in [(D - W_S \cup {}_SW) .^{\cdot}\, S] \cap (W_S \setminus {}_SW) \Longrightarrow b \in W_S \setminus {}_SW \Longrightarrow \varphi(b) \in B' + B''$,

$S b \subsetneq D - W_S \cup {}_SW \Longrightarrow e\ \varphi(b) \subsetneq G \Longrightarrow \varphi(b) \in B' + G$.

Nous en déduisons $\varphi^{-1}(B') = [(D - W_S \cup {}_SW) .^{\cdot}\, S] \cap (W_S \setminus {}_SW)$; nous avons également $\varphi^{-1}(B') = [(D - W_S \cup {}_SW) .^{\cdot}\, S] - (D - W_S \cup {}_SW)$ car

$\varphi^{-1}(G + B') = (D - W_S \cup {}_SW) .^{\cdot}\, S$; en effet, $\varphi[S\ \varphi^{-1}(G + B')] = e(G + B') = G$

d'où $\varphi^{-1}(G + B') \subsetneq (D - W_S \cup {}_SW) .^{\cdot}\, S$, inversement, nous avons vu que la relation $b \in (D - W_S \cup {}_SW) .^{\cdot}\, S$ implique $b \in \varphi^{-1}(G + B')$.

Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 4.1.-

Soit D un demi-groupe,

a) Soient φ un homomorphisme de D sur un demi-groupe E ayant un élément unité à droite e, $E = G + A' + B' + B'' + C$ la décomposition de E définie par le théorème 2.1. ; alors,

$S = \varphi^{-1}(e)$ est un sous-demi-groupe U_d-h de D, nous avons

$\varphi^{-1}(G) = D - W_S \cup {}_SW$, $\varphi^{-1}(G + B') = (D - W_S \cup {}_SW) .^{\cdot} S$, $\varphi^{-1}(A'+C) = {}_SW$

$\varphi^{-1}(B'+B''+C) = W_S$, $\varphi^{-1}(C) = W_S \cap {}_SW$, $\varphi^{-1}(A') = {}_SW \setminus W_S$, $\varphi^{-1}(B'+B'') = W_S \setminus {}_SW$,

$\varphi^{-1}(B') = \left[(D - W_S \cup {}_SW) .^{\cdot} S\right] \cap (W_S \setminus {}_SW) = \left[(D - W_S \cup {}_SW) .^{\cdot} S\right] - (D - W_S \cup {}_SW)$.

b) Soit S un sous-demi-groupe U_d-h de D, il existe au moins un demi-groupe E ayant un élément unité à droite e et un homomorphisme φ de D sur E tel que l'on ait $S = \varphi^{-1}(e)$, en définissant G, B' , B'' , A', C par :

$G = \varphi(D - W_S \cup {}_SW)$, $G + B' = \varphi\left[(D - W_S \cup {}_SW) .^{\cdot} S\right]$, $C = \varphi(W_S \cap {}_SW)$,

$A' + C = \varphi({}_SW)$, $B' + B'' + C = \varphi(W_S)$, nous avons $E = G + B' + B'' + A' + C$,

cette décomposition de E est identique à celle donnée par le théorème 2.1.

Corollaire 4.1.-

Si S est un sous-demi-groupe U_d-h de D, il existe un sous-demi-groupe F de D maximum pour la propriété suivante :

F contient S et S est réflectif net et unitaire dans F.

Considérons $F = D - W_S \cup {}_SW$, d'après le théorème 4.1., $F = \varphi^{-1}(G)$, $S = \varphi^{-1}(e)$, e étant l'élément unité du groupe G, S est un sous-demi-groupe réflectif net et unitaire de F. F est bien maximum car si S est net dans un demi-groupe F', $F' \cap (W_S \cup {}_SW)$ est vide et F' est contenu dans F. Nous en déduisons :

Corollaire 4.2.-

Un sous-demi-groupe U_d-h et net de D est réflectif et unitaire.

Lemme 4.1.-

Si S est un sous-demi-groupe U_d-h de D, D/ρ'_S est simple ou o-simple.

Soient φ l'homomorphisme canonique de D sur $E = D/\rho'_S$, et $\bar{a}$ un élément de E. Soit a un élément de D, tel que $\varphi(a) = \bar{a}$, si $\bar{a}$ est non nul, il existe u, v $\in D^*$ avec uav $\in$ S, ce qui donne $\varphi(u)\,\bar{a}\,.\,\varphi(v) = \varphi(S) = e$, $E^*\bar{a}\,E^*$ contient $E\ \varphi(u)\,\bar{a}\,\varphi(v)$, c'est-à-dire E.

Théorème 4.2.-

a) Si S est un sous-demi-groupe U_d-h et si ${}_SW \subsetneq W_S$, alors

$$D = (D - W_S).^{\cdot} S + {}_SW .$$

b) Si S est un sous-demi-groupe U-h et si ${}_SW \leqslant W_S$ (ou $W_S \leqslant {}_SW$), S est réflectif, unitaire et équirésiduel dans D.

a) Considérons le demi-groupe $E = D/\rho'_S$, d'après le lemme 4.1., E est o-simple, E a un élément unité à droite (propriété 1.2.) d'où $E = G + B' + B'' + A' + C$ (théorème 2.1.), d'autre part, A' est vide, donc d'après le théorème 2.2., $E = G + B' + \{O\}$. Il en résulte $D = \varphi^{-1}(G + B') + \varphi^{-1}(O)$, mais $\varphi^{-1}(O) = \varphi^{-1}(C) = W_S \cap {}_SW = {}_SW$, d'où $D = (D - W_S).^{\cdot} S + {}_SW$.

b) Si S est U-h, E a un élément unité, $E = G + \{O\}$, $S = \varphi^{-1}(e)$ est donc réflectif et unitaire dans D. De plus $\varphi^{-1}(O) = W_S = {}_SW$.

Théorème 4.3.-

Dans un demi-groupe périodique, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-demi-groupe soit U-h est qu'il soit réflectif et unitaire.

Dans un demi-groupe quelconque, un sous-demi-groupe réflectif et unitaire S est U-h, en effet S est égal à $\varphi^{-1}(e)$ où φ est un homomorphisme de

D sur un groupe avec zéro et e l'élément unité du groupe.

Si D est périodique et si S est un sous-demi-groupe U-h, D/ρ'_S est un demi-groupe périodique, o-simple ayant un élément unité, donc d'après le corollaire 2.4., D/ρ'_S est un groupe avec zéro et S est un sous-demi-groupe réflectif et unitaire de D.

Lemme 4.2.-

Soit H un complexe homomorphique d'un demi-groupe D, pour qu'il existe un homomorphisme φ de D sur un demi-groupe E ayant un élément unité à droite [bilatère] , et que φ admette H comme classe d'équivalence, il faut et il suffit qu'il existe $s \in D$ tel que l'on ait

$$\forall x \in D \ , \ \forall y \in D^* \ [\forall x,y \in D^*], \ xy \in H \Longleftrightarrow xsy \in H \ .$$

Soit φ un homomorphisme de D sur un demi-groupe E ayant un élément unité e, si H est une classe d'équivalence, il existe $k \in E$, tel que H soit égal à $\varphi^{-1}(k)$, posons $S = \varphi^{-1}(e)$. Alors, si x est un élément de D, y un élément de D^*, on a

$$xy \in H \Longleftrightarrow \varphi(x).\varphi(y) = k \Longleftrightarrow \varphi(x).e.\varphi(y) = k \Longleftrightarrow \forall s \in S, \ \varphi(xsy) = k$$

$$\Longleftrightarrow xsy \in H \ .$$

Si e est un élément unité bilatère, x peut être égal à 1_{D^*} .

Réciproquement, s'il existe un élément s de D tel que l'on ait

$$\forall x \in D \ , \ \forall y \in D^* \ , \quad xy \in H \Longleftrightarrow xsy \in H \ ,$$

considérons $E = D/\rho'_H$; H forme une classe mod. ρ'_H puisqu'il est homomorphique (propriété II.2.3), de plus

$$\forall a \in D \ , \ \forall u \in D^* \ , \ \forall v \in D^* \ , \quad uav \in H \Longleftrightarrow uasv \in H \ ,$$

donc a et as sont congrus mod. ρ'_H . La classe S mod. ρ'_H contenant s est un élément unité à droite de E. Si on a

$$\forall x,y \in D^* \ , \quad xy \in H \Longleftrightarrow xsy \in H \ , \text{ alors } \forall a \in D \ , \ \forall u,v \in D^*,$$

$$uav \in H \Longleftrightarrow usav \in H \ ,$$

S est un élément unité bilatère dans E.

Théorème 4.4.-

Soit H un complexe homomorphique d'un demi-groupe D, pour qu'il existe un homomorphisme φ de D sur un demi-groupe E ayant un élément unité à droite, tel que φ admette H comme classe d'équivalence et que $\varphi(H)$ soit inversible à gauche dans E, il faut et il suffit que l'ensemble S des éléments s de D qui vérifient la condition

$$\forall x \in D \ , \ \forall y \in D^{*} \ , \qquad xy \in H \Longleftrightarrow x s y \in H$$

ne soit pas vide et que H ne soit pas contenu dans ${}_{S}W$.

Si φ existe, l'ensemble S contient $\varphi^{-1}(e)$ (e étant l'élément unité à droite de E), d'autre part il existe un élément k' de E tel que k'. $\varphi(H)$ soit égal à e. Soit h' un élément de $\varphi^{-1}(k')$, h'H est inclus dans $\varphi^{-1}(e)$ donc dans S.

Inversement, si H n'est pas contenu dans ${}_{S}W$, il existe $h \in H$, $h' \in D$, $s \in S$ avec $h'h = s$. D'après le lemme 4.2., l'image de s dans E = D/ρ'_{H} est un élément unité à droite e . Si φ est l'homomorphisme canonique de D sur E , on a

$$\varphi(h').\varphi(h) = e \ , \quad \varphi(h').\varphi(H) = e \ , \quad E.\varphi(H) \supseteq E.\varphi(h').\varphi(H) = Ee = E \ .$$

Théorème 4.5.-

Soit H un complexe homomorphique d'un demi-groupe D, pour qu'il existe un homomorphisme φ de D sur un demi-groupe E, admettant H comme classe d'équivalence et tel que $\varphi(H)$ soit inversible dans E, il faut et il suffit que l'ensemble S des éléments s de D qui vérifient la condition

$$\text{(i)} \qquad \forall x,y \in D^{*} \ , \qquad xy \in H \Longleftrightarrow xsy \in H$$

ne soit pas vide et que H ne soit contenu ni dans ${}_{S}W$, ni dans W_{S} . Alors S est un sous-demi-groupe U-h , $S = H.{}^{\cdot}H = H^{\cdot}.H$, $\rho'_{H} = \rho'_{S}$.

Si $\varphi(H)$ est inversible dans E, E a un élément unité e, la condition nécessaire et suffisante du théorème résulte alors du théorème 4.4. et de son symétrique.

Posons $\varphi(H) = k$, k est inversible dans E, il existe donc un élément k' tel que kk' et k'k soient égaux à e. Si s appartient à S, d'après la condition (i), sH est inclus dans H , donc S est contenu dans $H^{\bullet}.H$; inversement, si xH est contenu dans H, appliquons φ, on obtient $\varphi(x)k = k$, d'où

$\varphi(x).kk' = kk' = e$, x appartient à $\varphi^{-1}(e)$. On a donc
$H^{\bullet}.H \leqslant \varphi^{-1}(e) \leqslant S \leqslant H^{\bullet}.H$, d'où $H^{\bullet}.H = \varphi^{-1}(e) = S$, de même $H.^{\bullet}H=S$.

Soient h un élément de H , h' un élément de $\varphi^{-1}(k')$, alors

$x \in H \Longrightarrow h'x \in S$, $h'x \in S \Longrightarrow hh'x \in H \Longrightarrow x \in H$,

$y \in S \Longrightarrow hy \in H$, $hy \in H \Longrightarrow h'hy \in S \Longrightarrow y \in S$;

d'où

$(u,v) \in H .^{\bullet}. a \Longleftrightarrow (h'u,v) \in S .^{\bullet}. a$,

$(u,v) \in S .^{\bullet}. a \Longleftrightarrow (hu,v) \in H .^{\bullet}. a$;

et par suite, $\rho'_H = \rho'_S$.

Théorème 4.6.-

Soient S un sous-demi-groupe U_d-h de D, S' un sous demi-groupe quelconque de D, pour qu'il existe un homomorphisme φ de D sur un demi-groupe E et deux éléments unités à droite distincts e et f de E, tels que

$$S = \varphi^{-1}(e) \quad , \quad \varphi(S') = f \quad ,$$

il faut et il suffit que l'on ait

$S' \leqslant W_S \setminus {}_S W$; $\forall x \in D$, $\forall y \in D^*$, $\forall s \in S'$, $\forall s' \in S'$,

$$xsy \in S \Longleftrightarrow xs'y \in S .$$

Supposons que φ existe, alors

$xsy \in S \Longleftrightarrow \varphi(xsy) = e \Longleftrightarrow \varphi(x).f.\ \varphi(y) = e \Longleftrightarrow \varphi(xs'y) = e \Longleftrightarrow xs'y \in S$.

D'autre part, si G + B' + B'' + A' + C est la décomposition de E relative à e, f appartient à B' (théorème 2.5.) , $\varphi^{-1}(B' + B'') = W_S \setminus {}_S W$ (théorème 4.1.), donc S' est contenu dans $W_S \setminus {}_S W$.

Réciproquement, supposons que S et S' vérifient les conditions du théorème. Considérons $E = D/\rho'_S$ et φ l'homomorphisme canonique de D sur E. S étant U_d-h , $\varphi(S)$ est un élément unité à droite e de E.

Soit s un élément de S', u,v des éléments de D^*, si usv appartient à S, u appartient à D, en effet, l'hypothèse S' inclus dans W_S montre que sv ne peut être contenu dans S, mais alors,

$$\forall s' \in S' \ , \quad usv \in S \Longleftrightarrow us'v \in S \qquad \text{et} \quad s \equiv s' \ (\rho'_S) \ ;$$

S' est donc inclus dans une classe mod. ρ'_S. Posons $\varphi(S') = f$, f est un élément idempotent puisque S' est un sous-demi-groupe de D, f appartient à B' + B" car S' est contenu dans $W_S \setminus {}_SW$ (théorème 4.1.), f est donc un élément unité à droite de E (théorème 2.5.) .

Théorème 4.7.-

Soient S un sous-demi-groupe U-h de D, H un complexe, pour qu'il existe un homomorphisme φ de D sur un demi-groupe E ayant un élément unité e, tel que S soit égal à $\overset{-1}{\varphi}(e)$ et que $\varphi(H)$ soit un élément inversible de E, il faut et il suffit que H soit indivisible mod. R'_S et que H soit contenu dans $D - W_S \cup {}_SW$.

Si φ existe, H est contenu dans $D - W_S \cup {}_SW$ d'après le théorème 4.1. ; H est indivisible mod. l'équivalence d'homomorphisme de φ, H est aussi indivisible mod. ρ'_S, car ρ'_S est la moins fine des équivalences régulières qui laissent S saturé. D'autre part, d'après la remarque 1.1.c et le théorème I.5.2., ρ'_S est égal à R'_S.

Réciproquement, considérons $E = D/\rho'_S$ et φ l'homomorphisme canonique de D sur E, $\varphi(S)$ est l'élément unité e de E, S est égal à $\overset{-1}{\varphi}(e)$, $\varphi(H)$ est réduit à un élément k puisque H est indivisible mod. R'_S, k est inversible dans E d'après le théorème 4.1.

Lemme 4.3.-

Soient D un demi-groupe, E un demi-groupe o-simple ayant un élément unité à droite e, φ un homomorphisme de D sur E, R_φ l'équivalence d'homomorphisme de φ. Posons $S = \overset{-1}{\varphi}(e)$, alors

$R_\varphi \leqslant \rho'_S$, R_φ et ρ'_S coïncident sur $(D - W_S \cup {}_SW) + W'_S$.

R_φ est plus fine que ρ'_S car S est saturé mod. R_φ .

Si a appartient à W'_S et si $\varphi(a)$ est différent de O, il existe $x, y \in E$ avec $x.\varphi(a).y = e$ car E est O-simple, si u est un élément de $\overset{-1}{\varphi}(x)$, v un élément de $\overset{-1}{\varphi}(y)$, uav appartient à S contrairement à l'hypothèse, $\varphi(W'_S)$ est donc égal à O. Si a n'appartient pas à W'_S , il existe $u, v \in D$ avec $uav \in S$, on en déduit $\varphi(u).\varphi(a).\varphi(v) = e$, $\varphi(a)$ est donc différent de O et par suite W'_S est égal à $\overset{-1}{\varphi}(O)$.

Soient a et b deux éléments de $D - W_S \cup {}_SW$ congrus mod. ρ'_S , il existe a', a'' tels que aa', ba', a''a, a''b soient dans S. En appliquant φ on obtient

$$\varphi(a).\varphi(a') = \varphi(b).\varphi(a') = \varphi(a'').\varphi(a) = \varphi(a'').\varphi(b) = e ,$$

d'après le lemme 2.1., $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(a'')$ appartiennent au groupe maximum associé à e , $\varphi(a)$ est égal à $\varphi(b)$ car dans ce groupe, ces deux éléments ont même inverse $\varphi(a'')$; a et b sont donc congrus mod. R .

Exemple 4.1.-

Prenons D = E = X (X est le demi-groupe construit dans 3) , φ égal à l'application identique . X est engendré par deux éléments u et v liés par les relations : vu = e , ue = u , ve = v . On a

$$\overset{-1}{\varphi}(e) = e , \quad W_e = \{u^a v^b , eu^a v^b ; a > O\} , \quad {}_eW = \{u^a v^b , eu^a v^b ; b > O\} ,$$

$$W'_e = \emptyset , \quad D - W_e \cup {}_eW = e , \quad u^a v^b \equiv eu^a v^b \quad (\rho'_e) ,$$

donc R_φ est strictement plus fine que ρ'_e sur $W_e \cup {}_eW$.

Définition 4.1.-

Un demi-groupe est dit U_d-simple [U-simple] , s'il a un élément unité à droite [bilatère] e tel que ρ'_e soit l'égalité.

Exemple 4.2.-

Un groupe ou un groupe avec zéro est un demi-groupe U-simple. D'après l'étude des X_p , le demi-groupe bicyclique est un demi-groupe U-simple.

Propriété 4.1.-

Un demi-groupe U_d-simple est simple où O-simple.

L'élément unité e de D est un sous-demi-groupe U_d-h , d'après le lemme 4.1., D/ρ'_e est simple ou O-simple, la propriété en résulte puisque D/ρ'_e est égal à D.

Théorème 4.8.-

Si S est un sous-demi-groupe U_d-h [U-h] de D, D/ρ'_S est un demi-groupe U_d-simple [U-simple] .

Inversement, un demi-groupe U_d-simple [U-simple] homomorphe au demi-groupe D est isomorphe à un demi-groupe de la forme D/ρ'_S où S est un sous-demi-groupe U_d-h [U-h] de D .

Soient S un sous-demi-groupe U_d-h de D , $E = D/\rho'_S$, φ l'homomorphisme canonique de D sur E . $\varphi(S)$ est un élément unité à droite e de E. Si x, y sont deux éléments de E congrus mod. ρ'_e et si a appartient à $\varphi^{-1}(x)$, b à $\varphi^{-1}(y)$, a est congru à b mod. ρ'_S car S est égal à $\varphi^{-1}(e)$; $\varphi(a)$ est donc égal à $\varphi(b)$, ρ'_e est l'égalité, E est un demi-groupe U_d-simple.

Inversement, soit φ un homomorphisme de D sur un demi-groupe U_d-simple E . Soit e l'élément unité à droite de E pour lequel ρ'_e est l'égalité, posons $S = \varphi^{-1}(e)$, S est un sous-demi-groupe U_d-h de D ; d'après le lemme 4.3., R_φ est plus fine que ρ'_S , mais

$$a \equiv b\ (\rho'_S) \Longleftrightarrow \varphi(a) \equiv \varphi(b)\ (\rho'_e) \Longleftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Longleftrightarrow a \equiv b\ (R_\varphi) .$$

E est donc isomorphe à D/ρ'_S .

Considérons un demi-groupe D, S un sous-demi-groupe U_d-h , φ l'homomorphisme canonique de D sur $E = D/\rho'_S$. Soit X un complexe de D, alors $X \cap W'_S \neq \emptyset \Longleftrightarrow O \in \varphi(X)$, $\varphi(X \setminus W'_S) = \varphi(X) \setminus \{O\}$.

Lemme 4.4.-

Pour que $\varphi(X)$ soit un sous-groupe de E ayant $\varphi(S)$ comme élément unité, il faut et il suffit que le complexe X vérifie la condition suivante :

$$(G) \begin{cases} (G_1) & \forall u, u' \in X, \quad \exists u'' \in X \text{ avec } u u' \equiv u'' \ (\rho'_S) \\ (G_2) & \forall u \in X, \quad u X \cap S \neq \emptyset . \end{cases}$$

(G_1) est vérifiée si et seulement si $\varphi(X)$ est un sous-demi-groupe de E. Si de plus $\varphi(X)$ est un groupe d'élément unité $e = \varphi(S)$, $\forall u \in X$, $\varphi(u)$ admet un inverse x appartenant à $\varphi(X)$, si u' est un élément de $\varphi^{-1}(x) \cap X$, uu' appartient à S.

Inversement, supposons que X vérifie la condition G . $\varphi(X)$ est un sous-demi-groupe. Soient x un élément de $\varphi(X)$, u un élément de $\varphi^{-1}(x) \cap X$, d'après G_2 , il existe u', u'' $\in$ X avec uu' $\in$ S , u'u'' $\in$ S, on en déduit

$x.\varphi(u') = e$, $\varphi(u').\varphi(u'') = e$, $x.\varphi(u').\varphi(u'') = xe = x = e.\varphi(u'')$, il en résulte que tout élément de $\varphi(X)$ admet e comme élément unité et a un inverse relativement à e dans $\varphi(X)$; $\varphi(X)$ est donc un groupe.

Lemme 4.5.-

Pour que $\varphi(X)$ soit un sous-demi-groupe simple contenant e, il faut et il suffit que le complexe X vérifie la condition suivante :

$$(G') \begin{cases} (G_1) & \\ (G'_2) & \forall u \in X, \quad X.u.X \cap S \neq \emptyset . \end{cases}$$

Si $\varphi(X)$ est un sous-demi-groupe simple qui contient e, $\forall u \in X$, il existe x', x'' $\in \varphi(X)$ avec $x'.\varphi(u).x'' = e$, si u' [resp. u''] est un élément de $\varphi^{-1}(x') \cap X$ [resp. $\varphi^{-1}(x'') \cap X$] , u'u u'' appartient à S. Réciproquement, si X vérifie la condition G'_2 , $X^3 \cap S$ n'est pas vide, donc e appartient au sous-demi-groupe $\varphi(X)$; d'autre part, $\forall u \in X$, $\varphi(X).\ \varphi(u).\ \varphi(X)$ contient e, donc $\varphi(X)$ est simple.

Si S est réflectif et unitaire les conditions G et G' sont équivalentes ; en effet, puisque un groupe est un demi-groupe simple G entraîne G' ; inversement si X vérifie G', $\forall u \in X$, il existe u', u'' $\in$ X avec u'u u'' $\in$ S , S étant réflectif on en déduit u u''u' $\in$ S , mais d'après G_1 , il existe v $\in$ X congru à u''u' mod. ρ'_S , cette congruence montre que uv appartient à S.

Théorème 4.9.-

Soit S un sous-demi-groupe U_d-h du demi-groupe D. Tout sous-demi-groupe X de D tel que S $\cap$ X soit net à droite [resp. bilatèrement net] dans X , a pour image canonique dans D/ρ'_S un sous-groupe [resp. sous-demi-groupe simple].

X étant un sous-demi-groupe, G_1 est vérifiée, G_2 est équivalente à la condition : S $\cap$ X net à droite dans X et G'_2 à la condition : S $\cap$ X bilatèrement net dans X.

Nous allons maintenant considérer les relations entre les sous-demi-groupes U_d-h ou U-h de D et ceux d'un idéal bilatère I de D. Soient S un sous-demi-groupe U_d-h de D et φ l'homomorphisme canonique de D sur $E = D/\rho'_S$.

$\varphi(I)$ est un idéal bilatère de E donc, d'après la propriété 4.1., $\varphi(I)$ est nul ou égal à E. $\varphi(I)$ est nul si et seulement si I $\cap$ S est vide. Si $\varphi(I)$ est égal à E, appelons φ_1 la restriction de φ à I, posons $\overset{-1}{\varphi_1}\left[\varphi(S)\right] = S'$, S' est un sous-demi-groupe U_d-h de I, S' est égal à S $\cap$ I . Nous avons,

Lemme 4.6.-

Soient D un demi-groupe, I un idéal bilatère de D, S un sous-demi-groupe U_d-h [U-h] tel que S' = S $\cap$ I ne soit pas vide, φ l'homomorphisme canonique de D sur $E = D/\rho'_S$. La restriction φ_1 de φ à I applique I sur E et le sous-demi-groupe U_d-h [U-h] correspondant à I est S'.

Inversement, si S' est un sous-demi-groupe U_d-h [U-h] de I, il existe un plus petit sous-demi-groupe U_d-h [U-h] S de D contenant S' car les sous-demi-groupes U_d-h [U-h] de D forment une famille de Moore.

Lemme 4.7.-

Soient D un demi-groupe , I un idéal bilatère de D, S' un sous-demi-groupe U-h de I. Le sous-demi-groupe U-h S engendré par S' dans D est tel que $S' = S \cap I$.

Soit $A = \{a,\ a \in D\ ;\ S'aS' \cap S' \neq \emptyset\}$.

1) A = S . Montrons d'abord que A est contenu dans S, en effet,

$a \in A \Longleftrightarrow S'aS' \cap S' \neq \emptyset \Longrightarrow SaS \cap S \neq \emptyset \Longrightarrow a \in S$ car S est unitaire dans D.

Soit a un élément de A, si x,y sont des éléments de D^* tels que xy soit dans A, il existe $s, s', t, t' \in S'$ avec $sas' \in S'$, $txyt' \in S'$. Comme S' est un sous-demi-groupe U-h de l'idéal bilatère I on a

$tx \in I,\ yt' \in I,\ sas' \in S',\ tx.yt' \in S' \Longrightarrow tx.sas'.yt' \in S'$,

$txsa \in I\ ,\ yt' \in I,\ s' \in S',\ txsa.s'.yt \in S' \Longrightarrow txsa.yt' \in S'$,

$tx \in I,\ ayt' \in I,\ s \in S',\ tx.s.ayt' \in S' \Longrightarrow tx.ayt' \in S'$,

donc xay appartient à A .

En prenant x égal à 1_{D^*} , ceci montre, en particulier, que A est un sous-demi-groupe de D ; de plus un calcul analogue montre que les conditions

$a \in A\ ,\ x,y \in D^*\ ,\ xy \in D\ ,\ xay \in A$ entraînent $xy \in A$;

A est bien U-h dans le demi-groupe D , et par suite A est égal à S .

2) On a évidemment $S' \leqslant A \cap I$; soit a un élément de $A \cap I$, il existe $s, s' \in S'$ avec $sas' \in S'$, mais dans I, S' est unitaire donc a appartient à S', on a bien $S' = A \cap I$.

Exemple 4.2.-

Soit D le demi-groupe défini par la table de multiplication suivante :

	i	s	a
i	i	i	i
s	s	s	s
a	i	s	a

$I = \{ i , s \}$ est un idéal bilatère de D, $S' = \{s\}$ est un sous-demi-groupe U_d-h de I, puisque s est un élément unité à droite de I. Soit S le plus petit sous-demi-groupe U_d-h de D contenant S'.

$asi = si = s \in S$, $s \in S \Longrightarrow ai \in S$ puisque S est U_d-h , d'où $i \in S$ et $a \in S$; $S = D$, $D \cap I = I \neq S'$,

le lemme 4.7. ne s'applique donc pas aux sous-demi-groupes U_d-h de l'idéal bilatère I.

Propriété 4.2.-

Avec les notations du lemme 4.7., nous avons :

a) S est le plus petit complexe unitaire contenant S'.

b) Si de plus S' est réflectif dans I, S est réflectif dans D, S est alors le plus petit sous-demi-groupe de D réflectif et unitaire contenant S'.

a) Soit B le plus petit complexe unitaire de D contenant S', B est contenu dans S car S est unitaire. D'autre part, si a est un élément de S, il existe $s, s' \in S'$ avec $sas' \in S'$, $s, s', sas' \in B$, donc $a \in B$; $B = S$.

b) Supposons que S' soit réflectif dans I ; si ab appartient à S, il existe $s,s' \in S'$ avec $sabs' \in S'$; sa, bs' appartiennent à I , S' est réflectif dans I , donc bs' sa , sb.s's.as appartiennent à S', S' étant réflectif et unitaire dans I est en particulier U-h , on en déduit $sbas' \in S'$ et $ba \in S$.

S est réflectif dans D, comme S est le plus petit sous-demi-groupe U-h de D contenant S' , c'est aussi le plus petit sous-demi-groupe réflectif et unitaire ayant cette propriété.

Théorème 4.10.-

Tout demi-groupe U-simple homomorphe à un idéal bilatère I d'un demi-groupe D est homomorphe à D .

Soient φ un homomorphisme de I sur un demi-groupe U-simple E, e l'élément unité de E , S' l'image inverse de e par φ.

Soit S le sous-demi-groupe U-h de D engendré par S', d'après le lemme 4.7., S' est égal à $S \cap I$. Considérons $E' = D /\rho'_S$ et ψ l'homomorphisme canonique de D sur E', d'après le lemme 4.6., la restriction de ψ à I applique I sur E', le sous-demi-groupe U-h correspondant étant $S \cap I$, c'est-à-dire S'. Il résulte donc du théorème 4.8. que E' et E sont isomorphes.

Théorème 4.11.-

Il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés par l'inclusion entre l'ensemble $\mathcal{S}$ des sous-demi-groupes U-h d'un demi-groupe D coupant un idéal bilatère I de D et l'ensemble $\mathcal{S}'$ des sous-demi-groupes U-h de cet idéal.

Soit Φ l'application de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$ qui à $S' \in \mathcal{S}'$ fait correspondre l'élément S de $\mathcal{S}$ défini dans le lemme 4.7.

Φ est une application surjective ; en effet, soit T un élément de $\mathcal{S}$, posons $S' = T \cap I$, S' n'est pas vide par hypothèse, d'après le lemme 4.6., S' appartient à $\mathcal{S}'$. Posons $\Phi(S') = S$, désignons par $\rho_1{}'_{S'}$ l'équivalence principale bilatère définie par S' dans I, d'après le lemme 4.6. et le théorème 4.10., D/ρ'_S, $I/\rho_1{}'_{S'}$, D/ρ'_T sont des demi-groupes isomorphes.

Si φ, ψ, η sont, respectivement, les homomorphismes canoniques de D dans D/ρ'_S, D dans D/ρ'_T, D/ρ'_S dans D/ρ'_T, η est un isomorphisme, ψ est égal à $\eta \circ \varphi$. Si e et f sont, respectivement, les éléments unités de D/ρ'_S, D/ρ'_T, on a

$$S = \varphi^{-1}(e) \quad , \quad T = \psi^{-1}(f) \quad , \quad \psi^{-1}(f) = \varphi^{-1}\left[\eta^{-1}(f)\right] = \varphi^{-1}(e) \text{ , d'où } S = T \text{ .}$$

Φ est une application injective ; en effet, si S', S'' sont deux éléments de $\mathcal{S}'$, $\Phi(S') = \Phi(S'') = S$ implique $S' = S \cap I$, $S'' = S \cap I$, d'où $S' = S''$.

Φ est donc une bijection entre les ensembles $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}$, d'autre part, il est évident que Φ conserve l'ordre, Φ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

Corollaire 4.3.-

La relation d'ordre étant l'inclusion, l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des sous-demi-groupes U-h, bilatèrement nets, d'un demi-groupe et celui $\mathcal{S}'_1$ des sous-demi-groupes U-h, bilatèrement nets, d'un idéal bilatère quelconque I de D, sont deux ensembles isomorphes.

$\mathcal{S}'_1$ est contenu dans $\mathcal{S}'$, soit Φ_1 la restriction de Φ à $\mathcal{S}'_1$.

Si S' appartient à $\mathcal{S}'_1$, S' est bilatèrement net dans I donc S' et Φ_1 (S') sont bilatèrement nets dans D , on en déduit que $\Phi_1 (\mathcal{S}'_1)$ est contenu dans $\mathcal{S}_1$.

Inversement, soit S un élément de $\mathcal{S}_1$, I $\cap$ S n'est pas vide, sinon I serait inclus dans W'_S , $\Phi^{-1}(S)$ est bilatèrement net dans I , on a donc $\Phi_1 (\mathcal{S}'_1) = \mathcal{S}_1$.

<u>Corollaire 4.4.</u>-

Un demi-groupe D et un idéal bilatère quelconque I de D admettent les mêmes demi-groupes U-simples sans zéro homomorphes.

Ce corollaire est une conséquence du théorème 4.8., du lemme 4.6. et du corollaire 4.3.

La propriété 4.2.b) montre que les résultats précédents s'appliquent aux sous-demi-groupes réflectifs et unitaires de D et de I, dans ce cas ces propriétés ont été données par P. Lefebvre (20) .

Si le demi-groupe D contient un élément unité e, tout sous demi-groupe S U-h de D contient e. Nous allons étudier les relations entre les décompositions en éléments inversibles de D et de S (corollaire 2.1.) . Cette décomposition pour D sera notée : D = G + A' + B' + C , où :

G est l'ensemble des éléments inversibles dans D,

B' est l'ensemble des éléments inversibles à gauche mais non inversibles à droite ,

A' est l'ensemble des éléments inversibles à droite mais non inversibles à gauche ,

C est l'ensemble des éléments non inversibles .

G n'est pas vide si et seulement si D contient un élément unité, ce que nous supposerons.

Soit S un sous-demi-groupe de D, posons $S = G_1 + A'_1 + B'_1 + C_1$, avec :

$G_1 = S \cap G$, $A'_1 = S \cap A'$, $B'_1 = S \cap B'$, $C_1 = S \cap C$.

Lemme 4.8.-

Si le sous-demi-groupe S est unitaire, $S = G_1 + A'_1 + B'_1 + C_1$ est la décomposition de S en éléments inversibles.

Le sous-demi-groupe S étant unitaire contient l'élément unité e de D. Soit s un élément de S, s est inversible à gauche dans S si et seulement si s est inversible à gauche dans D ; en effet, si s est inversible dans S, il l'est évidemment dans D, inversement, si s est inversible dans D, il existe $b \in D$ avec $sb = e$, mais alors b appartient à S car S est unitaire, s est donc inversible à gauche dans S .

Le lemme est une conséquence directe de cette propriété et de la propriété symétrique.

Lemme 4.9.-

Soient D un demi-groupe, A un sous-demi-groupe de D, S un sous-demi-groupe U_d-h [U-h] de D, si $S \cap A$ n'est pas vide, c'est un sous-demi-groupe U_d-h [U-h] de A.

En effet, soient $x, y \in A^*$, $s \in S \cap A$; d'après la définition de S on a

$$xy \in S \cap A \Longleftrightarrow xsy \in S \cap A .$$

Lemme 4.10.-

Soient $D = G + A' + B' + C$ un demi-groupe ayant un élément unité e , $S = G_1 + A'_1 + B'_1 + C_1$ un sous-demi-groupe U-h de D (notations du lemme 4.8.) , φ un homomorphisme de D sur un demi-groupe $\overline{D}$ ayant un élément unité $\overline{e}$, tel que $\varphi^{-1}(\overline{e}) = S$. Alors $\varphi(G)$ et G / G_1 sont isomorphes .

D'après le lemme 4.9., G_1 est un sous-demi-groupe U-h de G, G_1 est donc un sous-groupe distingué de G .

Soit g un élément de G , $\varphi(gG_1)$ est égal à $\varphi(g)$ car $\varphi(G_1)$ est égal à $\overline{e}$, inversement, soit a un élément de G , b son inverse dans G , gb appartient à G , si $\varphi(a)$ est égal à $\varphi(g)$, alors

$\varphi(ba) = \varphi(e) = \bar{e} \Longrightarrow \varphi(bg) = \bar{e} \Longrightarrow bg \in S \cap G = G_1 \Longrightarrow a \in g\, G_1$.

L'équivalence d'homomorphisme de φ décompose donc G en classes mod. G_1 .

Lemme 4.11.-

Avec les notations du lemme précédent, soit de plus $\overline{D} = \overline{G} + \overline{A'} + \overline{B'} + \overline{C}$, alors, si $\varphi(A' + C)$ est différent de $\overline{D}$, on a

$$\varphi(G) = \overline{G} \ , \quad \varphi(A') = \overline{A'} \ , \quad \varphi(B') = \overline{B'} \ , \quad \varphi(C) = \overline{C} \ .$$

$\overline{A} = \overline{A'} + \overline{C}$ est un idéal à gauche maximum de $\overline{D}$, $\varphi^{-1}(\overline{A})$ est un idéal à gauche de D . Comme $\bar{e}$ n'appartient pas à $\bar{A}$, $\varphi^{-1}(\overline{A})$ est différent de D , $\varphi^{-1}(\overline{A})$ est donc inclus dans $A = A' + C$, car A est un idéal à gauche maximum de D. Alors ,

$\varphi^{-1}(A) \leqslant A \Longrightarrow \overline{A} \leqslant \varphi(A)$, comme $\varphi(A)$ est un idéal à gauche nous avons

$\varphi(A) = \overline{D}$, ou $\varphi(A) = \overline{A}$;

$\varphi(A) = \overline{D} \Longleftrightarrow A \cap S \neq \emptyset \Longleftrightarrow A'_1 + C_1 \neq \emptyset$;

$\varphi(A) \neq \overline{D} \Longleftrightarrow A'_1 + C_1 = \emptyset \Longleftrightarrow B'_1 + C_1 = \emptyset$ (lemme 4.8. et théorème 2.2.)

$\Longleftrightarrow \varphi(B' + C) \neq \overline{D}$.

$\varphi(A) \neq \overline{D} \Longrightarrow \varphi(A'+C) = \overline{A'} + \overline{C}$, $\varphi(B' + C) = \overline{B'} + \overline{C} \Longrightarrow$

$\varphi(C) \leqslant \overline{C}$, $\varphi(A') \geqslant \overline{A'}$, $\varphi(B') \geqslant \overline{B'}$.

Mais si un élément a de D est inversible d'un côté, $\varphi(a)$ est inversible du même côté, d'où

$\varphi(A') \leqslant \overline{A'} + \overline{G}$, $\varphi(B') \leqslant \overline{B'} + \overline{G}$, $\varphi(G) \leqslant \overline{G}$, ce qui donne

$\varphi(A') = \overline{A'}$, $\varphi(B') = \overline{B'}$, $\varphi(C) = \overline{C}$, $\varphi(G) = \overline{G}$.

Lemme 4.12.-

Soit D un demi-groupe non simple ayant un élément unité e, D contient un idéal bilatère maximum.

Puisque D n'est pas simple, il contient au moins un idéal bilatère propre X . Si x est un élément de X, DxD est inclus dans **X** et est donc différent de D.

Soit I l'ensemble des éléments a de D pour lesquels DaD est différent de D.

D'après ce qui précède, I n'est pas vide et contient tous les idéaux bilatères propres de D . I est un idéal bilatère car, $\forall a \in D$, D.DaD.D = DaD , d'autre part , I ne contient pas e, I est bien un idéal bilatère maximum de D .

Théorème 4.12.-

Soit φ un homomorphisme d'un demi-groupe D ayant un élément unité e sur un demi-groupe $\overline{D}$ ayant un élément unité $\overline{e}$. Posons $\varphi^{-1}(\overline{e}) = S$, considérons : $D = G + A' + B' + C$, $\overline{D} = \overline{G} + \overline{A'} + \overline{B'} + \overline{C}$, $S = G_1 + A'_1 + B'_1 + C_1$ les décompositions en éléments inversibles. Nous avons :

1) $G_1 = S \cap G$, $A'_1 = S \cap B'$, $B'_1 = S \cap B'$, $C_1 = S \cap C$, de plus si ces sous-demi-groupes ne sont pas vides ce sont des sous-demi-groupes U-h, respectivement, dans G , A' , B' , C .

2) $\varphi(G) \approx G / G_1$

3) a) $\varphi(A'+C) = \overline{A'} + \overline{C}$ ou $\varphi(A' + C) = \overline{D}$,

b) $\varphi(A'+C) = \overline{D} \Longleftrightarrow \varphi(B'+C) = \overline{D} \Longleftrightarrow A'_1+C_1 \neq \emptyset \Longleftrightarrow B_1+C_1 \neq \emptyset$,

c) $\varphi(A'+C) = \overline{A'}+\overline{C} \Longleftrightarrow \varphi(B'+C) = \overline{B'}+\overline{C} \Longleftrightarrow A'_1+C_1 = \emptyset \Longleftrightarrow$ $B'_1+C_1 = \emptyset$; alors $\varphi(G) = \overline{G}$, $\varphi(A') = \overline{A'}$, $\varphi(B') = \overline{B'}$, $\varphi(C) = \overline{C}$.

Ce théorème rappelle les résultats obtenus dans les lemmes 4.8., 4.9., 4.10., 4.11. Si $\overline{D}$ est O-simple dans le cas 3.c. nous pouvons supposer que D est aussi O-simple. En effet soit I l'idéal maximum de D (lemme 4.12.), I est inclus dans C (théorème 2.1.) donc $I \cap S$ est vide et $\varphi(I)$ est égal à O (lemme 4.3.) ; φ est égal au produit de l'homomorphisme canonique de D sur $D/_I$, par un homomorphisme $\overline{\varphi}$ de $D/_I$ sur $\overline{D}$, si $\overline{a}$ est un élément quelconque de $D/_I$ et si a est un représentant de la classe $\overline{a}$ mod. I, on a

$$\overline{\varphi}(\overline{a}) = \varphi(a) .$$

Corollaire 4.5.-

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe qui a un élément unité soit la somme d'un groupe et d'un idéal bilatère est qu'il contienne un sous-groupe réflectif et unitaire.

Si D est la somme d'un groupe G et d'un idéal bilatère C, tout sous-groupe distingué G_1 de G est réflectif et unitaire dans D , en effet, $D /_{\rho'_{G_1}}$ est isomorphe à $G / G_1 + \{O\}$.

Inversement, soit D un demi-groupe qui a un élément unité e et qui contient un sous-groupe réflectif et unitaire G_1 , posons $\overline{D} = D/\rho'_{G_1}$; soient $D = G + A' + B' + C$, $\overline{D} = \overline{G} + \overline{A'} + \overline{B'} + \overline{C}$ les décompositions en éléments inversibles. $\overline{D}$ est un groupe avec zéro donc $\overline{A'}$ et $\overline{B'}$ sont vides, $\overline{C}$ est égal à $\{0\}$. D'autre part, G_1 étant unitaire contient l'élément unité e de D, G_1 est contenu dans G car G est le sous-groupe maximum de D associé à l'idempotent e . Les hypothèses du cas 3.c sont vérifiées et par suite A' et B' sont vides, C est un idéal bilatère maximum de D .

Si l'on suppose de plus que le demi-groupe est O-simple, ce corollaire donne une condition nécessaire et suffisante pour obtenir un groupe avec zéro.

BIBLIOGRAPHIE

(1) CALAIS Josette : Equivalences principales généralisées dans les demi-groupes,
C.R.Acad. Sc. T.254, 1962, p. 3802 .

(2) CALAIS Josette : Propriété des équivalences principales généralisées,
C.R.Acad. Sc. T.254, 1962, p. 4410 .

(3) CALAIS Josette : Propriétés des équivalences principales généralisées,
C.R.Acad. Sc. T.256, 1963, p. 1420 .

(4) CLIFFORD A.H. and PRESTON G.B. : The algebraic theory of semi-groups,
American Mathematical Society (1961).

(5) CROISOT Robert : Propriétés des complexes forts et symétriques des demi-groupes,
Bull. Soc. Math. France T. 80, 1952, p. 217-223.

(6) CROISOT Robert : Equivalences principales bilatères définies dans un demi-groupe,
Journal de mathématiques pures et appliquées T. 36, 1957,
p. 373-417 .

(7) DUBREIL Paul : Contribution à la théorie des demi-groupes,
I, Mémoires Acad. Sc. Inst. de France, T. 63, 1941, p.1-52.

(8) DUBREIL Paul : Contribution à la théorie des demi-groupes,
III, Bull. Soc. Math. France, T. 81, 1953, P. 289-306 .

(9) DUBREIL Paul : Remarques sur les théorèmes d'isomorphismes,
C.R.Acad. Sc. T. 215, 1942, p. 239 .

(10) DUBREIL Paul : Algèbre .
Equivalences, Opérations, Groupes, Anneaux, Corps
2ème éd., Paris, Gauthiers-Villars, 1954 .

(11) DUBREIL Paul : Quelques problèmes d'Algèbre liés à la théorie des demi-groupes,
Colloque d'Algèbre supérieure, Bruxelles, 1956, Louvain,
Ceuterik, 1957, p. 29-44.

(12) DUBREIL Paul et CROISOT Robert : Propriétés générales de la résiduation en liaison avec les correspondances de Galois,
Collectanea mathematica, Seminario matematico de Barcelona,
t. 7, 1954, p. 193-203 .

(13) DUBREIL-JACOTIN M.L., LESIEUR L., et CROISOT R. : Théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques .
Paris, Gauthiers-Villars, 1953 .

(14) GOOD R.A. and HUGHES D.R. : Associated groups for a semi-group ,
Bull. Amer. Math. Soc. t. 58, 1952, p. 624-625 .

(15) GRILLET Pierre : La résiduation faible ,
C.R.Acad. Sc. t. 253, 1961, p. 2448 .

(16) GRILLET Pierre : Les applications de préfermeture ,
C.R. Acad. Sc. t. 253, 1961, p. 2824 .

(17) GRILLET Pierre : Equivalences compatibles, Séminaire Dubreil-Pisot ,
Algèbre et Théorie des Nombres, 1961, N°2 .

(18) GRILLET Pierre : Sur l'équivalence F de Green, Séminaire Dubreil-Pisot ,
Algèbre et Théorie des Nombres, 1962, N°2 .

(19) LAJOS S. : Generalised ideals in semi-groups ,
Acta Sci. Math. Szeged, t. 22, 1961, p. 217-222 .

(20) LEFEBVRE Pierre : Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes ,
Annali di Matematica pura ed applicata, t. 59, 1962, p. 77-164 (Thèse Sc. Math. Paris) .

(21) LEVI F.W. : On semi-groups
Bull. Calcutta Math. Soc. t. 36, 1944, p. 141-146
t. 38, 1946, p. 123-124 .

(22) LJAPIN E.S. : Demi-groupes .
Moscou, 1960 .

(23) MILLER D.W. : Hamiltonian semigroups ,
Portugaliae Mathematica, t. 21, fasc.3, 1962 .

(24) SCHUTZENBERGER Marcel Paul : Sur les homomorphismes d'un demi-groupe sur un groupe ,
C.R.Acad.Sc. t.246, 1958, p. 2442 .

(25) STEINFELD O. : Uber die Quasiideale von Halgruppen ,
Publ. Math. Debrecen, t. 4, 1955-1956, p. 262-275 .

(26) STOLL R.R. : Homomorphisms of a semigroup onto a group ,
Amer. Math. J., t. 73, 1951, p. 475-481 .

(27) TESSIER Marianne : Sur les équivalences régulières dans un demi-groupe ,
C.R.Acad. Sc. t. 232, 1951, p. 1987 .

(28) THIERRIN Gabriel : Sur quelques classes de demi-groupes possédant certaines propriétés des semi-groupes ,
C.R.Acad. Sc. t.238, 1954, p. 1765 .

(29) THIERRIN Gabriel : Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes ,
Bull. Soc. Math. France, t. 83, 1955, p. 103-159 (Thèse) .

Certains résultats de ce travail ont été résumés en quelques notes de l'auteur aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

(1) Etude dans un demi-groupe D d'une relation d'équivalence liée à un complexe H,
C.R.Acad. Sc., t. 254, 1962, p. 2117.

(2) Idéaux d'un demi-groupe D associés à certaines relations d'équivalence,
C.R.Acad. Sc., t. 254, 1962, p. 2271.

(3) Sur certaines relations d'équivalences dans un demi-groupe,
C.R.Acad. Sc., t. 255, 1962, p. 2348.

(4) Sur les demi-groupes ayant des éléments unités d'un côté,
C.R.Acad. Sc., t. 256, 1963, p. 567.

(5) Sur les demi-groupes ayant un élément unité homomorphes à un demi-groupe donné,
C.R.Acad. Sc. t. 256, 1963, p. 845.

SOMMAIRE

RELATIONS D'ÉQUIVALENCE PRINCIPALES EN THÉORIE DES DEMI-GROUPES

par R. DESQ

Résumé. — Ce travail est constitué par l'étude de certaines relations d'équivalences dans un demi-groupe D, relations voisines des équivalences principales introduites par P. DUBREIL et R. CROISOT.

Les relations les plus fines permettent de préciser les propriétés des équivalences régulières et des classes de ces équivalences. La notion de résidu étend aux idéaux quelconques certains résultats de la thèse de P. LEFEBVRE concernant les idéaux fortement larges.

Considérons un homomorphisme φ de D sur un demi-groupe E ayant un élément unité e, φ^{-1} (e) est un sous-demi-groupe particulier de D appelé U homomorphisme. Inversement, si S est un sous-demi-groupe U-homomorphique de D, on peut lui associer un triplet E, e, φ, tel que S soit égal à φ^{-1} (e). Pour préciser les propriétés de ces sous-demi-groupes, nous sommes d'abord amenés à étudier les demi-groupes ayant des éléments neutres. Nous obtenons des théorèmes de décomposition qui, pour un demi-groupe quelconque, donnent par exemple :

Si S est un sous-demi-groupe U-homomorphique de D et si $_SW$ est contenu dans W_S, S est réflectif, unitaire et équirésiduel.

Enfin, pour les propriétés des homomorphismes, la notion de demi-groupe U-simple généralise celle de groupe.