ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ROGER DESQ

Construction des demi-groupes ayant tous leurs sous-demi-groupes homomorphiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 29 (1965), p. 35-52
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1965_4_29__35_0>

Construction des demi-groupes ayant tous leurs sous-demi-groupes homomorphiques

par Roger DESQ

Un demi-groupe est appelé H_d-demi-groupe [resp. H-demi-groupe] si et seulement si tous ses sous-demi-groupes sont homomorphiques à droite [resp. homomorphiques]. Ces demi-groupes sont caractérisés dans [1]. Le but du présent travail est d'en donner une construction effective.

Les ρ-demi-groupes étudiés par Kimura, Tamura et Merkel [2] sont évidemment des H_d-demi-groupes particuliers. Rappelons qu'un demi-groupe D est un ρ-demi-groupe si et seulement si tous les sous-demi-groupes de D sont des idéaux à droite. Il est donc naturel que les constructions de cette étude généralisent celles de [2].

1. H_d-demi-groupes unipotents.

Soient F un demi-groupe unipotent, e son idempotent, Γ son sous-groupe maximum. D'après la propriété 3.1 et le théorème 3.6 de [1], F est un H_d-demi-groupe si et seulement si Γ est un groupe périodique et si le produit de deux éléments a, b de F est égal à a^2 ou appartient à Γ; dans ce dernier cas, $ab = abe = ae \,.\, be$.

Considérons les sous-ensembles suivants de F,

$M = \{x \in F - \Gamma;\ x^2 \notin \Gamma\}$, $N = (F - \Gamma) \cap F^2$, $P = \{x \in F - \Gamma;\ x \notin F^2,\ x^2 \in \Gamma\}$

D'après la remarque qui suit la propriété 3.1 de [1], $F^3 = \Gamma$, d'où

$$F = M + N + P + \Gamma.$$

Si $x \in N$, $x = yz$ et comme $x \notin \Gamma$, $yz = y^2$ et de plus $y \in M$. Si nous appelons α l'application de M dans F définie par $\alpha(x) = \alpha x = x^2$, α est une surjection de M sur N.

Soient x et y deux éléments de F, supposons que le produit xy n'appartienne pas à Γ. On a alors $xy = x^2 \notin \Gamma$, d'où $x \in M$, d'autre part, comme $F^3 = \Gamma$, on en déduit $y \in M + P$.

Définissons les applications suivantes :

$\beta \;:\; M \times (M + P) \to \{0,1\}$, $\beta\,(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ si } xy \notin \Gamma \\ 0 \text{ si } xy \in \Gamma \end{cases}$

$\gamma \;:\; F \to \Gamma \quad , \quad \gamma x = xe.$

Théorème 1. — Soient F un H_d-demi-groupe, e son idempotent, Γ son sous-groupe maximum. Il existe une famille M, N, P de sous-ensembles disjoints de F, une application γ de F dans Γ et si M n'est pas vide deux applications, α de M dans N, β de $M \times (M+P)$ dans $\{0,1\}$ telles que :

1) $F = M + N + P + \Gamma$;
2) α soit une surjection;
3) $\forall\ a \in M,\ \beta(a, a) = 1$;
4) $\beta(x, y) = 1$ implique $\gamma x = \gamma y$;
5) $\gamma(\alpha x) = (\gamma x)^2$;
6) $\forall\ x \in \Gamma,\ \gamma x = x$.

Inversement, soient M, N, P, Γ des ensembles deux à deux disjoints tels que Γ soit un groupe périodique. Soit $F = M + N + P + \Gamma$, considérons

$$\gamma : F \to \Gamma, \quad \text{et si } M \neq \varnothing, \quad \alpha : M \to N, \quad \beta : M \times (M + P)\ \{0,1\}$$

des applications vérifiant les propriétés 2, 3, 4, 5, 6. L'ensemble F muni de la loi interne suivante :

$$x, y \in F, \qquad x * y = \begin{cases} \alpha x \text{ si } \beta(x, y) = 1, \\ \gamma x \,.\, \gamma y \text{ autrement,} \end{cases}$$

est un H_d-demi-groupe.

Pour la partie directe du théorème, il reste seulement à vérifier les propriétés 4 et 5.

$\beta(x, y) = 1$ implique $xy = x^2$, on en déduit $xe \,.\, ye = (xe)^2$ ce qui dans Γ donne $xe = ye$.

$\alpha x = x^2$ implique $(\alpha x)\, e = (xe)^2$.

Pour démontrer la partie réciproque, vérifions d'abord que F est un demi-groupe. Soient x, y, z trois éléments de F.
Si $x * y = \gamma x \,.\, \gamma y$, on en déduit $(x * y) * z = (\gamma x\ \gamma y)\ \gamma z$.
Si $x * y = \alpha x$, alors $\beta(x, y) = 1$ et d'après 4, $\gamma x = \gamma y$; en utilisant successivement 5 et 4, on en déduit

$$(x * y) * z = \alpha x * z = \gamma(\alpha x)\ \gamma z = (\gamma x)^2\ \gamma z = (\gamma x\ \gamma y)\ \gamma z.$$

On vérifie de même que $x * (y * z) = \gamma x (\gamma y\ \gamma z)$.

F est unipotent, en effet, supposons $x * x = x$, alors $x = x * x * x = (\gamma x)^2$ est donc un idempotent de Γ, c'est-à-dire e.

D'après le théorème 3.6 de [1], pour vérifier que F est un H_d-demi-groupe, il suffit de montrer que l'on a $x * y = x * x$ ou $x * y = (x * e) * (y * e)$

Or si $x * y = \alpha x$, $x \in M$, $\beta(x, x) = 1$, $x * x = \alpha x$; de plus, $x * e = \gamma x\ \gamma e = \gamma x$, ceci complète la démonstration.

Précisons la construction des applications données. Il faut évidemment que la puissance de M soit égale ou supérieure à celle de N, on prend pour α une surjection quelconque. De même, on définit une application β arbitraire en tenant compte seulement de la condition 3.

Dans $M + P$, considérons la relation $\mathcal{R}$ suivante, $a \mathcal{R} b$ s'il existe $x_0, x_1, \ldots, x_n \in M + P$ tels que

$a = x_0$, $b = x_n$, pour $i \in \{0,1, \ldots, n-1\}$, $\beta(x_i, x_{i+1}) = 1$ ou $\beta(x_{i+1}, x_i) = 1$. La restriction $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{R}$ à M est une réelation d'équivalence, désignons par R l'ensemble $M/\mathcal{R}'$ et par φ la surjection canonique de M sur R.

Dans R considérons la fermeture transitive $\mathcal{S}$ de la relation ρ, $\overline{x}$, $\overline{y} \in R$, $\overline{x}\, \rho\, \overline{y} <=> \exists\, x \in \overline{x}$, $y \in \overline{y}$ tels que $\alpha x = \alpha y$. Désignons par S l'ensemble $R/\mathcal{S}$ et par ψ l'application canonique de R sur S.

Soient $\overline{\gamma}$ une application quelconque de S dans l'ensemble des carrés des éléments de Γ, γ' une application de R dans Γ telle que, $\forall\ \overline{x} \in R$, $[\gamma'(\overline{x})]^2 = \overline{\gamma}(\psi\, \overline{x})$. L'application $\gamma = \gamma' \circ \varphi$ de M dans Γ remplit la condition 4, les conditions 5 et 6 permettent de prolonger γ à $N + \Gamma$ et ceci d'une manière unique puisque $\alpha x = \alpha y$ implique $(\gamma x)^2 = (\gamma y)^2$. Si l'élément y de P est lié par la relation $\mathcal{R}$ avec un élément x de M, on pose $\gamma y = \gamma x$, si y n'est lié avec aucun élément de M on peut choisir arbitrairement γy. Les applications α, β, γ ainsi construites vérifient les conditions du théorème.

Corollaire 1. — Si $\Gamma = \{e\}$, on obtient le théorème 2 de [2].

Corollaire 2. — F est un H-demi-groupe si et seulement si les hypothèses du théorème 1 sont précisées de la façon suivante :

— Γ est un groupe abélien périodique ou un groupe hamiltonien;

— β n'est définie que sur $M \times M$ et $\beta(x, y) = 1$ implique $\gamma x = \gamma y$, $\alpha x = \alpha y$.

Au sujet de ce corollaire, remarquons qu'il y a une imprécision dans le théorème 3.7 de [1]. Pour la définition du produit on doit écrire :

$$\text{si } e = f \in B,\ ab = a^2 = b^2 \quad \text{ou} \quad ab = ae.be,$$
$$\text{si } e \in B,\ f \in B,\ e \neq f,\ ab = ae.bf,$$

le reste du théorème est inchangé. Cet oubli se répercute dans le corollaire 3.6, où l'on doit écrire :

$$\text{si } e = f = o, \text{ on a } ab = ao.ob \text{ ou } ab = a^2 = b^2.$$

Le corollaire 2 résulte alors du théorème 1 et du théorème 3.7 de [1]. La construction des applications α, β, γ peut être modifiée de la façon suivante : α est toujours une surjection quelconque, β application de $M \times M$ dans $\{0, 1\}$ est telle que, pour tout x de M, $\beta(x, x) = 1$, et $\beta(x, y) = 0$ si $\alpha x \neq \alpha y$. Rien n'est changé pour la construction de γ, la restriction de γ à P est arbitraire.

Corollaire 3. — F est un H-demi-groupe abélien si et seulement si les hypothèses du théorème 1 sont précisées de la façon suivante :

— Γ est un groupe abélien périodique,

— β n'est définie que sur $M \times M$ et $\beta(x, y) =$ implique

$$\beta(y, x) = 1, \quad \gamma x = \gamma y, \quad \alpha x = \alpha y.$$

En effet $xy = x^2$ doit entraîner $yx = x^2$.

Le demi-groupe unipotent F est donc caractérisé par la suite (M, N, P, Γ, α, β, γ) que nous appellerons suite caractéristique de F.

Théorème 2. — Soient (M, N, P, Γ, α, β, γ) et (M′, N′, P′, Γ', α', β' γ') les suites caractéristiques de deux H_d-demi-groupes unipotents F et F′. Une application φ de F dans F′ est un homorphisme si et seulement si,

1) $\varphi^{-1}(M') \leqslant M$; (1)
2) $\varphi^{-1}(N') \leqslant M + N + P$;
3) $\varphi^{-1}(P') \leqslant M + P$;
4) $\varphi(\gamma x \gamma y) = \gamma' \varphi x . \gamma' \varphi y$;
5) $\forall x \in \varphi^{-1}(M')$, $\varphi \alpha x = \alpha' \varphi x$;
6) $\forall x \in M - \varphi^{-1}(M')$, $\varphi \alpha x \in \Gamma'$;
7) $\forall\ x \in \varphi^{-1}(M')$ et $\forall\ y \in \varphi^{-1}(M' + P')$, $\beta(x, y) = \beta'(\varphi x, \varphi y)$;
8) $\forall\ x \in \varphi^{-1}(M')$ et $\forall\ y \in (M + P) - \varphi^{-1}(M' + P')$, $\beta(x, y) = 0$.

Remarque. — Les propriétés 1, 2, 3 sont équivalentes aux propriétés suivantes :
1′) $\varphi(\Gamma) \leqslant \Gamma'$;
2′) $\varphi(N) \leqslant N' + \Gamma'$;
3′) $\varphi(P) \leqslant N' + P' + \Gamma$.

Démonstration du théorème. — Supposons que φ soit un homorphisme, vérifions successivement les propriétés :

1′) $\varphi(\Gamma)$ est un sous-groupe du demi-groupe F′ qui ne contient qu'un seul idempotent, donc $\varphi(\Gamma) \leqslant \Gamma'$.

2′) si $x \in N$, $\exists\ y \in F$ avec $x = y^2$, d'où $\varphi x = (\varphi y)^2 \in N' + \Gamma'$.

3′) si $x \in P$, $x^2 \in \Gamma$ donc $\varphi(x^2) = (\varphi x)^2 \in \Gamma'$ et $\varphi x \in N' + P' + \Gamma'$.

4) $\varphi(xe . ye) = \varphi x \varphi e \varphi y \varphi e = \varphi x e' \varphi y e' = \gamma' \varphi x\ \gamma' \varphi y$.

5) si $x \in \varphi^{-1}(M') \leqslant M$, $\alpha x = x^2$, $\varphi(\alpha x) = (\varphi x)^2 = \alpha' \varphi x$ car $\varphi x \in M'$.

6) si $x \in M - \varphi^{-1}(M')$, $\alpha x = x^2$, $\varphi(\alpha x) = (\varphi x)^2 \in N' + \Gamma'$, mais $(\varphi x)^2 \in N'$ implique $\varphi x \in M'$ ce qui est impossible.

7) $\varphi^{-1}(M' + P') = \varphi^{-1}(M') \cup \varphi^{-1}(P') \leqslant M + P$, $\beta(x, y)$ est donc défini.

Si $\beta(x, y) = 1$, $xy = x^2$, $\varphi x\ \varphi y = (\varphi x)^2 \in N'$ car par hypothèse $\varphi x \in M'$ et par suite $\beta'(\varphi x, \varphi y) = 1$. Si $\beta(x, y) = 0$, $xy \in \Gamma$ d'où $\varphi x\ \varphi y \in \Gamma'$ et $\beta'(\varphi x, \varphi y) = 0$.

8) Supposons, dans ces hypothèses, $\beta(x, y) = 1$, on en déduit $\varphi x\ \varphi y = (\varphi x)^2 \in N'$, ceci est impossible, car $\varphi y \in N' + \Gamma'$ ce qui, d'après le théo-rème 1, implique $\varphi x\ \varphi y \in \Gamma'$.

Inversement, soit φ une application de F dans F′ qui vérifie les conditions du théorème. Prenons deux éléments x, y de F. Nous avons les possibilités suivantes :

---

(1) $\leqslant$ est le signe d'inclusion.

a) $x \notin$ M, alors, d'après 1, $\varphi x \notin$ M', le théorème 1 donne $xy = \gamma x . \gamma y$, $\varphi x \varphi y = \gamma' \varphi x \gamma' \varphi y$; d'où $\varphi(xy) = \varphi x \varphi y$ d'après 4.

b) $x \in$ M, $y \notin$ M + P, d'après 1 et 3, $\varphi y \in$ M' + P'. On a comme dans a) $xy = \gamma x \gamma y$, $\varphi x \varphi y = \gamma' \varphi x \gamma' \varphi y$.

c) $x \in$ M, $y \in$ M + P, $\beta(x, y) = 0$, alors, d'après 7, $\beta'(\varphi x, \varphi y) = 0$ ou n'est pas défini; il en résulte $xy = \gamma x \gamma y$, $\varphi x \varphi y = \gamma' \varphi x \gamma' \varphi y$.

d) $x \in$ M, $y \in$ M + P, $\beta(x, y) = 1$, d'après 8, ceci n'est possible que dans les deux cas suivants :

d') $x \in \varphi^{-1}$(M'), $y \in \varphi^{-1}$(M' + P'), alors, d'après 7, $\beta'(\varphi x, \varphi y) = 1$; d'où $xy = \alpha x$, $\varphi x \varphi y = \alpha'(\varphi x)$ et, d'après 5,

$$\varphi(xy) = \varphi(\alpha x) = \alpha'(\varphi x) = \varphi x \varphi y;$$

d'') $x \in$ M $- \varphi^{-1}$(M'), alors $xy = \alpha x$, $\varphi x \varphi y = \gamma' \varphi x \gamma' \varphi y$, d'où, d'après 6, $\varphi(xy) = \varphi(\alpha x)$ et $\varphi(xy) = \gamma' \varphi(\alpha x)$.

L'étude du cas a montré que φe est égal à l'idempotent e' de F', on déduit alors de 4, $\varphi(\gamma \alpha x \gamma e) = \gamma' \varphi \alpha x . \gamma' \varphi e$, c'est-à-dire $\varphi(\gamma \alpha x) = \gamma' \varphi \alpha x$. D'autre part, d'après le théorème 1, la relation $xy = \alpha x$ implique $\gamma x = \gamma y$ et $\gamma \alpha x = (\gamma x)^2 = \gamma x \gamma y$. On a donc $\varphi(xy) = \gamma' \varphi \alpha x = \varphi(\gamma \alpha x) = \varphi(\gamma x \gamma y) = \gamma' \varphi x \gamma' \varphi y = \varphi x \varphi y$.

φ est bien un homomorphisme.

Corollaire 4. — Soient $(M, N, P, \Gamma, \alpha, \beta, \gamma)$ et $(M', N', P', \Gamma', \alpha', \beta', \gamma')$ les suites caractéristiques de deux H_d-demi-groupes unipotents F et F'. Une bijection φ de F sur F' est un isomorphisme si et seulement si :

1) $\varphi(\Gamma) = \Gamma'$;
2) $\varphi(M) = M'$;
3) $\varphi(N) = N'$;
4) $\varphi(P) = P'$;
5) $\forall \; x, y \in F$, $\varphi(\gamma x . \gamma y) = \gamma' \varphi x . \gamma' \varphi y$;
6) $\forall \; x \in M$, $\varphi \alpha x = \alpha' \varphi x$;
7) $\forall \; x \in M$, $\forall \; y \in M + P$, $\beta(x, y) = \beta'(\varphi x, \varphi y)$.

Si φ est un isomorphisme, les conditions 1', 2', 3' de la remarque qui suit le théorème 2 appliquées à φ et les conditions 1, 2, 3, du théorème appliquées à l'homomorphisme réciproque φ^{-1} donnent respectivement :

$\varphi(\Gamma) \leqslant \Gamma'$, $\varphi(N) \leqslant N' + \Gamma'$,
$\varphi(P) \leqslant N' + P' + \Gamma'$,
$\varphi(M) \leqslant M'$, $\varphi(N) \leqslant M' + N' + P'$, $\varphi(P) \leqslant M' + P'$.

On en déduit $\varphi(\Gamma) \leqslant \Gamma'$, $\varphi(M) \leqslant M'$, $\varphi(N) \leqslant N'$, $\varphi(P) \leqslant P'$, comme φ est est surjective, les conditions 1, 2, 3, 4 du corollaire sont bien remplies. Les propositions 5, 6, 7 du corollaire résultent alors des conditions 4, 5, 7 du théorème.

Inversement, si φ est une bijection de F sur F′ vérifiant les propriétés du corollaire 4, les conditions du théorème 2 sont remplies car les ensembles $M - \varphi^{-1}(M')$ et $(M + P) - \varphi^{-1}(M' + P')$ sont vides.

Remarque. — On obtient comme cas particuliers du théorème 2 et du corollaire 4 les théorèmes 3 et 4 de [2]. Dans le théorème 4 de [2], la condition 7 est superflue, en effet, avec les notations de [2], si Σ est une bijection qui vérifie 1, $x\Sigma \notin A'$ implique $x \notin A$ d'où $x^2 = e$ et $x^2\Sigma = e'$ d'après 4.

2. H_d-demi-groupes dont le demi-groupe des idempotents est rectangulaire.

Soit D un H_d-demi-groupe quelconque, l'ensemble E des idempotents de D à la structure indiquée par le théorème 2.2 de [1]; $E = B + \bigcup_{i \in I} B_i$, où B est un demi-groupe rectangulaire et les B_i, $i \in I$, sont des zéro-demi-groupes à gauche. D'après le théorème 3.5 de [1], les ensembles $\mathcal{B} = \bigcup_{e \in B} F_e$, $\mathcal{B}_i = \bigcup_{e \in B_i} F_e$ sont des sous-demi-groupes de D. Nous allons d'abord indiquer le moyen de construire ces demi-groupes.

Considérons $\mathcal{B} = \bigcup_{e \in B} F_e$. D'après les théorèmes 3.5 et 3.6 de [1], les fuseaux F_e sont des H_d-demi-groupes unipotents dont la structure est déterminée par les suites caractéristiques $(M_e, N_e, P_e, \Gamma_e, \alpha_e, \beta_e, \gamma_e)$ (théorème 1). D'après un théorème de Miller-Clifford, rappelé dans [1], $\bigcup_{e \in B} \Gamma_e$ est un sous-demi-groupe de $\mathcal{B}$ isomorphe au produit direct de B par un groupe Γ. Pour chaque $e \in B$, il existe un isomorphisme δ_e de Γ_e sur Γ. L'ensemble des applications $\delta_e \circ \gamma_e$ définit une application γ de $\mathcal{B}$ dans Γ.

Soient a, b deux éléments de $\mathcal{B}$, d'après les propriétés déduites du théorème 3.5 dans [1], si $a \in F_e$, si $b \in F_f$ et si $ab \notin \Gamma_{ef}$, $ab = a^2 = \alpha_e\, a$. Ceci n'est possible que si $\{e, f\}$ est un zéro-demi-groupe à gauche et si $a \in M_e$, $b \in M_f + P_f$. En effet, si $a \notin M_e$, $a^2 \in \Gamma_e = \Gamma_{ef}$, si $b \notin M_f + P_f$, $b = cd$, $ab = (ac)\, d \in \Gamma_e$ car $ac \notin M_e$.

Si $ef = e$, nous pouvons définir une application

$$\beta_{e,f} \text{ de } M_e \times (M_f + P_f) \text{ dans } \{0, 1\} \text{ par } \beta_{e,f}(a, b) = \begin{cases} 1 \text{ si } ab \notin \Gamma_e \\ 0 \text{ si } ab \in \Gamma_e. \end{cases}$$

On a $\beta_{e,e} = \beta_e$, si $\beta_{e,f}(a, b) = 1$ on en déduit

$$ab = a^2,\ ae \,.\, efb = (ae)^2 \text{ dans } \Gamma_e, \text{ d'où } efb = ea \text{ et } \gamma(b) = \gamma(a).$$

On obtient donc le théorème suivant :

Théorème 3. — Soit un H_d-demi-groupe ayant comme ensemble d'idempotens un demi-groupe rectangulaire B. Il existe des familles de sous-ensembles de $\mathcal{B}$ disjoints deux à deux, indexées par les éléments de B,

$\{M_e,\ e \in B\}$, $\{N_e,\ e \in B\}$, $\{P_e,\ e \in B\}$, $\{\Gamma_e,\ e \in B\}$, un groupe périodique Γ et des familles de fonctions :

$\{\alpha_e, e \in B\}$, $\{\beta_{e,f}, e, f \in B, ef = e\}$, $\{\gamma_e, e \in B\}$, $\{\delta_e, e \in B\}$

tels que, pour tout $e \in B$, tout $f \in B$ avec $ef = e$, α_e soit une surjection de M_e sur N_e, $\beta_{e,f}$ envoie $M_e \times (M_f + P_f)$ dans $\{0, 1\}$, γ_e applique $F_e = M_e + N_e + P_e + \Gamma_e$ sur Γ_e, δ_e soit un isomorphisme de Γ_e sur Γ. Soit γ l'application de $\mathcal{B}$ dans Γ définie par l'ensemble des $\delta_e \circ \gamma_e$. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

1) $\forall\ e \in B, \forall x \in M_e, \beta_{e,e}(x, x) = 1$;
2) $\beta_{e,f}(x, y) = 1$ implique $\gamma x = \gamma y$;
3) $\gamma(\alpha_e x) = (\gamma x)^2$;
4) $\forall\ e \in B, \forall\ x \in \Gamma_e, \gamma_e(x) = x$.

Si $x \in F_e$, $y \in F_f$, le produit xy est égal à $\alpha_e x$ si $\beta_{e,f}(x, y) = 1$, à $\delta_{ef}^{-1}(\gamma x . \gamma y)$ autrement.

Théorème 4. — Soient B un demi-groupe rectangulaire, Γ un groupe périodique, $\{M_e, e \in B\}$, $\{N_e, e \in B\}$, $\{P_e, e \in B\}$ des familles d'ensembles disjoints deux à deux et tels que, pour tout $e \in B$, la puissance de N_e soit inférieure ou égale à celle de M_e. Donnons-nous de plus, pour tout $e \in B$, une surjection α_e de M_e sur N_e, pour tout couple e, f d'éléments de B tels que $ef = e$ une application $B_{e,f}$ de $M_e \times (M_f + P_f)$ dans $\{0, 1\}$, et une application γ de $A = \bigcup_{e \in B} M_e + \bigcup_{e \in B} N_e + \bigcup_{e \in B} P_e$ dans Γ. Imposons à ces applications les propriétés suivantes :

1) $\forall\ x \in M_e, \beta_{e,e}(x, x) = 1$;
2) $\beta_{e,f}(x, y) = 1$ entraîne $\gamma x = \gamma y$;
3) $\gamma(\alpha_e x) = (\gamma x)^2$.

Considérons $\mathcal{B} = A + B \times \Gamma$, prolongeons γ à $\mathcal{B}$ tout entier en posant $\forall (e, x) \in B \times \Gamma$, $\gamma(e, x) = x$; désignons par F_e la somme $M_e + N_e + P_e + \{e\} \times \Gamma$.

L'ensemble β muni de la loi interne suivante :

$$x \in F_e,\quad y \in F_f,\quad x * y = \begin{cases} \alpha_e x \text{ si } \beta_{e,f}(x, y) = 1, \\ (ef,\ \gamma x\, \gamma y) \text{ autrement,} \end{cases}$$

est un H_a-demi-groupe.

Prenons trois éléments x, y z de β, $x \in F_e$, $y \in F_f$, $z \in F_g$.

Si $x * y = (ef,\ \gamma x\ \gamma y)$, on a $(x * y) * z = (efg,\ \gamma x\ \gamma y\ \gamma z)$.
Si $x * y = \alpha_e x$, $\beta_{e'f}(x, y) = 1$, $ef = e$, $\gamma x = \gamma y$, alors on en déduit $(x * y) * z = (\alpha_e x) * z = (eg,\ \gamma(\alpha_e x)\ \gamma z) = (efg,\ \gamma x\ \gamma y\ \gamma z)$.
De même on a toujours $x * (y * z) = (efg,\ \gamma x\ \gamma y\ \gamma z)$.

On vérifie que β est un H_a-demi-groupe en utilisant le théorème 3.6 de [1] par une démonstration analogue à celle du théorème 1.

Les théorèmes 3 et 4 donnent la forme générale des H_a-demi-groupes ayant comme ensemble d'idempotents un sous-demi-groupe rectangulaire.

Dans le théorème 4, on a identifié tout élément $x \in \Gamma_e$ avec son image $(e, \delta_e x)$ dans $B \times \Gamma$. Les applications α_e, $\beta_{e,f}$ étant données, γ peut être construite par le procédé indiqué après le théorème 1.

Corollaire 5. — Si B est un zéro-demi-groupe à gauche et si $\Gamma = \{1\}$, le théorème 4 donne la construction des demi-groupes $\mathcal{B}_i$ définis au début du 2e. Dans ce cas on retrouve également les théorèmes 5 et 6 de [2].

On peut remarquer directement, d'après le théorème 3.6 de [1], que les $\mathcal{B}_i$ sont des ρ-demi-groupes [2] puisque le poduit ab appartient à (a). Dans $\mathcal{B}_i$ on identifie $B_i \times \Gamma$ avec B_i, l'application constante γ ne joue plus aucun rôle.

Corollaire 6. — $\mathcal{B}$ est un H-demi-groupe si et seulement si les hypothèses des théorèmes 3 et 4 sont précisées de la manière suivante :

— Γ est un groupe abélien périodique ou un groupe hamiltonien.

$\beta_{e,f}$ n'est défini que pour $e = f$, $\beta_{e,e}$ envoie $M_e \times M_e$ dans $\{0, 1\}$, $\beta_{e,e}(x, y) = 1$ entraine $\gamma x = \gamma y$, $\alpha_e x = \alpha_e y$.

Ce corollaire est une conséquence directe du théorème précédent et du corollaire 3.

Théorème 5. — Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux demi-groupes ayant une structure décrite par le théorème 4 (on utilise pour $\mathcal{B}'$ les notations de $\mathcal{B}$ accentuées). Une application φ de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ est un homomorphisme si et seulement si,

1) la restriction de φ à $B \times \Gamma$ est de la forme $\psi \times \xi$, où ψ est un homomosphisme de B dans B', ξ une application de Γ dans Γ';

2) $\forall\ x, y \in \mathcal{B}$, $\xi(\gamma x\, \gamma y) = \gamma' \varphi x . \gamma' \varphi y$;
3) $\forall\ e \in B$, $\varphi(F_e) \leqslant F'_{\psi e}$;
4) $\forall\ e \in B$, $\varphi(N_e) \leqslant N'_{\psi e} + \{\psi e\} \times \Gamma$;
5) $\forall\ e \in B$, $\varphi(P_e) \leqslant F'_{\psi e} - M'_{\psi e}$;
6) $\forall\ x \in M_e \cap \varphi^{-1}(M'_{\psi e})$, $\varphi \alpha_e x = \alpha'_{\psi e}(\varphi x)$;
7) $\forall\ x \in M_e\, \varphi^{-1}(M'_{\psi e})$, $\varphi \alpha_e x \in \{\psi e\} \times \Gamma'$;
8) si $ef = e, \forall\, x \in M_e \cap \varphi^{-1}(M'_{\psi e}), \forall\, y \in (M_f + P_f) \cap \varphi^{-1}(M'_{\psi f} + P'_{\psi f}$
$\beta_{e,f}(x, y) = \beta_{\psi e, \psi f}(\varphi x, \varphi y)$;
9) si $ef = e$, $\forall\ x \in M_e \cap \varphi^{-1}(M'_{\psi e})$, $\forall\ y \in (M_f + P_f)\varphi^{-1}(M'_{\psi f} + P'_{\psi f})$
$\beta_{e\,f}(x, y) = 0$.

Supposons que φ soit un homomorphisme, $\varphi\,(e, 1)$ est un idempotent de $\mathcal{B}'$ dont $\varphi(e, 1) = (\psi e, 1)$; la restriction de φ à $B \times \{1\}$ définit un homomorphisme ψ de B dans B'. L'image par φ de $\{e\} \times \Gamma$ est un sous-groupe de $\mathcal{B}'$ ayant $\varphi(e, 1)$ comme élément unité, $\varphi(\{e\} \times \Gamma) \leqslant \{\psi e\} \times \Gamma'$. On peut poser $\varphi(e, x) = (\psi e, \xi_e x)$, ξ_e est un homomorphisme de Γ dans Γ'. Si $ef = e$, on a $\varphi\,[(e,x)\ (f, y)] = \varphi\,(e, xy)$, $(\psi e, \xi_e x)(\psi f, \xi_f y)^e = (\psi e, \xi_e(xy))$, $(\psi e, \xi_e x\ .\ \xi_f y) = (\psi e, \xi_e x\ .\ \xi_e y)$ d'où $\xi_f y = \xi_e y$.

De même, si $eg = g$, on en déduit $\xi_e x = \xi_g x$, B étant un demi-groupe rectangulaire, il en résulte, $\forall\ x \in \Gamma$, $\forall\ e \in B, \forall\ f \in B$, $\xi_e x = \xi_f x = \xi x$.

Pour $a = (e, x)$, $b = (f, y)$ on a $\gamma a = x$, $\gamma b = y$, on en déduit $\xi(\gamma a \,.\, \gamma b) = \xi(xy) = \xi x \xi y = \gamma' \varphi a \,.\, \gamma' \varphi b$. Pour $a \in F_e$, $b \in F_f$, on a $(e, 1)\, a = (e, \gamma a)$, $(f, 1)\, b = (f, \gamma b)$, $(\varphi e, 1)\, \varphi a = (\psi e, \gamma' \varphi a)$ $(\psi f, 1)\, \varphi b = (\psi f, \gamma' \varphi b)$, on en déduit $\varphi\, [(e, 1)\, a\, (f, 1)\, b] = (\psi e, 1)\, \varphi a\, (\psi f, 1)\, \varphi b$, d'où $\xi(\gamma\, a\, \gamma\, b) = \gamma' \varphi a \,.\, \gamma' \varphi b$.

Si x est un élément de F_e, il existe un entier n tel que $x^n = (e, 1)$ ce qui donne $(\varphi x)^n = (\psi e, 1)$ et $\varphi x \in F'_{\psi e}$.

On vérifie les autres propriétés de la partie directe et la réciproque de ce théorème par une démonstration analogue à celle du théorème 2.

Précisions l'homomorphisme ψ de B dans B' ; si on écrit $B = L \times R$, $B' = L' \times R'$ où L, L' sont des zéro-demi-groupes à gauche, R et R' des zéro-demi-groupes à droite, ψ est de la forme $\psi_1 \times \psi_2$, ψ_1 [resp. ψ_2] étant une application quelconque de L dans L' [resp. de R dans R']. En effet, posons $\psi(l, r) = (l', r')$, $\psi(l_1, r) = (l'_1, r'_1)$, on obtient $\psi(l_1, r) = \psi[(l_1, r)\,(l, r)] = (l'_1, r'_1)\,(l', r') = l'_1, r')$; $\psi(L \times \{r\}) \leqslant L' \times \{r'\}$, on peut écrire $r' = \psi_2 r$, ψ_2 est une application de R dans R'. On a de même $\psi\,(\{l\} \times R) \leqslant \{l'\} \times R'$, d'où une application ψ_1 de L dans L', $\psi_1(l) = l'$. En définitive, $\psi\,(l, r) = (\psi_1\, l, \psi_2\, r)$.

Inversement, considérons deux applications quelconques, ψ_1 de L dans L', ψ_2 de R dans R', $\psi = \psi_1 \times \psi_2$ est un homomorphisme de $L \times R$ dans $L' \times R'$. En effet, $\psi(l, r)\, \psi(l_1, r_1) = (\psi_1 l, \psi_2 r)\,(\psi_1 l_1, \psi_2 r_1) = \psi_2 l, \psi_2 r_1) = \psi(l, r_1)$
$= \psi\, [(l, r)\, (l_1, r_1)]$.

Corollaire 7. — Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux demi-groupes ayant une structure décrite par le théorème 4. Une bijection φ de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$ est un isomorphisme si et seulement si,

1) la restriction de φ à $B \times \Gamma$ est de la forme $\psi \times \xi$ où ψ [resp. ξ] est un isomorphisme de B sur B' [resp. Γ sur Γ'] ;
2) $\forall\ x, y \in B$, $\xi(\gamma\, x\, \gamma\, y) = \gamma' \varphi\, x . \gamma' \varphi\, y$;
3) $\forall\ e \in B$, $\varphi(M_e) = M'_{\psi e}$;
4) $\forall\ e \in B$, $\varphi(N_e) = N'_{\psi e}$;
5) $\forall\ e \in B$, $\varphi(P_e) = P'_{\psi e}$;
6) $\forall\ e \in B$, $\forall\ x \in M_e$, $\varphi\, \alpha_e\, x = \alpha'_{\psi e}\, \varphi\, x$;
7) si $e f = e$, $\forall\ x \in M_e$, $\forall\ y \in M_f + P_f$, $\beta_{e, f}(x, y) = \beta'_{\psi e, \psi f}\ (\varphi\, x, \varphi\, y)$

Ce corollaire est une conséquence du théorème précédent et du corollaire 4 si l'on remarque que la troisième condition du théorème jointe au fait que φ est surjectif montre que la restriction de φ à F_e est un isomorphisme de F_e sur $F'_{\psi e}$.

3. H_d-demi-groupes quelconques.

Soit D un H_d-demi-groupe quelconque, $D = \mathcal{B} + \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$, notations du début du 2. La structure de $\mathcal{B}$ est définie par le théorème 3, celle des $\mathcal{B}_i$ par le par le corollaire 5. Dans la suite de cet exposé, on identifiera B avec $B \times \{1\}$, on écrira donc arbitrairement e ou $(e, 1)$ pour désigner le même idempotent de $\mathcal{B}$. D'après le théorème 3.5 de [1], le produit de deux éléments de D est bien déterminé, sauf dans le cas où $a \in F_e$, $b \in F_f$, $e \in B$, $f \in B_i$, $ef = e$; on a alors $ab \in (a)$. En particulier, $eb \in (e) = \{e\}$; si $ab \in \Gamma_e$, $ab = eab = aeb = ae$.

Supposons $af = a \notin \Gamma_e$, soit g un élément de B_i, c un élément de F_g, on a $fg = f$, $ac = af.c = af.gc = af.g = af = a$ car $gc \in \Gamma_g = \{g\}$. Inversement, la relation $ac = a$ donne $ac^n = a$ d'où $ag = a$ et $af = a$. De $af = a$, on déduit $a^2 = af.a = a.fa$, mais $fa = ea$, d'où $a^2 = a.ea = ea^2$, $a^2 \in \Gamma_e$, $a \in N_e + P_e$. Si $a \in N_e$, $a = a'^2$ avec $a' \in M_e$, mais alors $a'f = a'^2$ ou $a'f \in \Gamma_e$ ce qui dans les deux cas donne $af = a'^2 f \in \Gamma_e$. La relation $af = a \notin \Gamma_e$ n'est possible que si a appartient à P_e. Pour un couple (e, i), $e \in B$, $i \in I$, tel que $e.B_i = e$, on peut définir une application $\mu_{e,i}$ de P_e dans $\{0, 1\}$ par

$$\mu_{e,i}(a) = 1 \quad \text{si } af \notin \Gamma_e \text{ pour un élément } f \text{ de } B_i,$$
$$\mu_{e,i}(a) = 0 \quad \text{si } af \in \Gamma_e \text{ pour un élément } f \text{ de } B_i.$$

Si $b \in \mathcal{B}_i$, $ab = a$ si $\mu_{e,i}(a) = 1$, $ab = ae$ si $\mu_{e,i}(a) = 0$.
Si j est un indice différent de i et tel que $e.B_j = e$, prenons $f \in B_i$, $g \in B_j$, le produit fg appartient à B; les relations $af = a$ et $ag = a$ ne peuvent avoir lieu simultanément pour le même élément a de P_e, en effet, on en déduirait $afg = a$, alors que $a.fg = ae.fg \in \Gamma_{efg}$. Donc, si $i \neq j$, $\mu_{e,i}^{-1}(1) \cap \mu_{e,j}^{-}(1)$ est vide.

Soient a un élément de F_e, b un élément de F_f, supposons $ab = a^2 \notin \Gamma_e$, ceci n'est possible que si $a \in M_e$, $b \in M_f + P_f$; en effet, si $b \in N_f + \Gamma_f$, $b = cd$, or $ac = a^2$ ou $ac \in \Gamma_e$ ce qui donne $ab \in \Gamma_e$. En particulier, $af = ae$, la relation $ab = a^2$ donne alors $abf = a^2 f = a^2 e = (ae)^2$, d'autre part $abf = a.bf = af = ae$, d'où $ae = (ae)^2$ et $ae = e$.

On peut définir pour $e \in B$, $f \in B_i$ tels que $ef = e$, une application $\beta_{e,f}$ de $M_e \cap \gamma_e^{-1}(e) \times (M_f + P_f)$ dans $\{0, 1\}$ par

$$\beta_{e,f}(a, b) = \begin{cases} 1 \text{ si } ab \notin \Gamma_e, \\ 0 \text{ si } ab \in \Gamma_e. \end{cases}$$

Si $a \in M_e$, $b \in M_f + P_f$, $ab = a^2$ si $\beta_{e,f}(a, b) = 1$, $ab = ae$ dans les autres cas.

Des remarques précédentes et du théorème 3.6 de [1] on déduit le :

Théorème 7. — Soient D un H_d-demi-groupe, $E = B + \bigcup_{i \in I} B_i$ l'ensemble de ses idempotents, $\mathcal{B} = \bigcup_{e \in B} F_e$, $\mathcal{B}_i = \bigcup_{e \in B_i} F_e$ (F_e est le fuseau contenant l'idempotent e). Le demi-groupe D est la réunion de $\mathcal{B}$ et des $\mathcal{B}_i$ $(i \in I)$, $\mathcal{B}$ et les $\mathcal{B}_i$ sont des H_d-demi-groupes dont la structure est décrite par le théorème 3. Pour chaque couple $(e, i) \in B \times I$, tel que $e.B_i = e$, il existe une application $\mu_{e,i}$ de P_e dans $\{0, 1\}$, si $i \neq j$, $\mu_{e,i}^{-1}(1) \cap \mu_{e,j}^{-1}(1) = \varnothing$. Pour chaque couple $(e, f) \in B \times \bigcup_{i \in I} B_i$ tel que $ef = e$, il existe une application $\beta_{e,f}$ de $M_e \cap \gamma_e^{-1}(e) \times (M_f + P_f)$ dans $\{0, 1\}$.

Soient $a \in F_e$, $b \in F_f$ deux éléments de D, leur produit est donné par les règles suivantes :

— si e et f appartiennent à B ou au même B_i, ab est défini par le théorème 3;
— si $e \in B_i$, $f \in B_j$, $i \neq j$, $ab = ef$;
— si $e \in B$, $f \in B_i$ et si $ef \neq e$, $ab = \gamma_e a . fef$, $ba = fef . \gamma_e a$;
— si $e \in B$, $f \in B_i$ et si $ef = e$,

si $\mu_{e,i}(a) = 1$, $ab = a$,
si $\beta_{e,f}(a, b) = 1$, $ab = \alpha_e a$,
$ab = \gamma_e a$ dans les autres cas,
$ba = fe . \gamma_e a$ dans tous les cas.

Théorème 8. — Considérons un demi-groupe $\mathcal{B}$ décrit par le théoréme 4 (on identifie $B \times \{1\}$ avec B) et une collection $\mathcal{B}_i$, $i \in I$, de demi-groupes disjoints décrits par le corollaire 5. Soit $D = \mathcal{B} + \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$. Désignons par 1 un indice de I, munissons $E = B + B_1 + \bigcup_{i \in -\{1\}} B_i$ d'une structure de demi-groupes d'idempotents décrite par le théorème 2.2 b de [1]. Donnons-nous de plus :

— pour tout couple $(e, i) \in B \times I$, tel que $e.B_i = e$, une application $\mu_{e,i}$ de P_e dans $\{0, 1\}$, imposons à ces applications la relation suivante : $i \neq j$ implique $\mu_{e,i}^{-1}(1) \cap \mu_{e,j}^{-1}(1) = \phi$;
— pour tout couple $(e, f) \in B \times \bigcup_{i \in I} B_i$, tel que $ef = e$, une application $\beta_{e,f}$ de $M_e \cap \gamma^{-1}(1) \times (M_f + P_f)$ dans $\{0, 1\}$.

Soient a, b deux éléments de D, $a \in F_e$, $b \in F_f$,

— si $e \in B$, $f \in B$, ou si $e \in B_i$, $f \in B_i$, $a * b$ est défini par le théorème 4 ;
— si $e \in B_i$, $f \in B_j$, $i \neq j$, posons $a * b = ef$ (calculé dans E);
— si $e \in B$, $f \in B_i$, $ef \neq e$, posons $a * b = (ef, \gamma a)$, $b * a = (fe, \gamma a)$;
— si $e \in B$, $f \in B_i$, $ef = e$, *posons* $b * a = (fe, \gamma a)$, et

$a * b = a$ si $\mu_{e,i}(a) = 1$,
$a * b = \alpha_e a$ *si* $\beta_{e,f}(a, b) = 1$,
$a * b = (e, \gamma a)$ dans les autres cas.

L'ensemble D muni de cette loi interne est un H_d-demi-groupe.

D'après le théorème 3.6 de [1], il suffit de vérifier que D est un demi-groupe. Soient a, b, c trois éléments de D, appartenant respectivement aux fuseaux F_e, F_f, F_g, seuls les cas suivants sont à envisager :

— $e \in B$, $f \in B$, $g \in B_i$.

$$a * b = \begin{cases} (ef, \gamma a \, \gamma b) \\ \alpha_e a, \ \gamma a = \gamma b, \ \gamma(\alpha_e a) = (\gamma a)^2 \end{cases} \qquad (a * b) * c = \begin{cases} (efg, \gamma a \, \gamma b) \\ (eg, \gamma(\alpha_e a)) = (efg, \gamma a \, \gamma b) \end{cases}$$

$$b * c = \begin{cases} b, \text{ si } \mu_{f,i}(b) = 1, \\ \alpha_f b, \text{ si } \beta_{f,g}(b, c) = 1, \\ (fg, \gamma b) \end{cases} \qquad a * (b * c) = \begin{cases} (ef, \gamma a \, \gamma b) = (efg, \gamma a \, \gamma b) \quad \text{car } fg = g \\ (ef, \gamma a (\gamma b)^2) = (efg, \gamma a \, \gamma b) \quad \text{car } \gamma b = 1 \\ (efg, \gamma a \, \gamma b) \end{cases}$$

— $e \in B$, $f \in B_i$, $g \in B$.

$$a * b = \begin{cases} a \text{ si } \mu_{e,i}(a) = 1 \\ \alpha_e\, a, \text{ si } \beta_{e,f}(a, b) = 1, \\ (ef, \gamma\, a) \end{cases} \qquad (a * b) * c = \begin{cases} (eg, \gamma\, a\ \gamma\, c) = (efg, \gamma\, a\ \gamma\, c) \\ (eg, \gamma\, c) = (efg, \gamma\, a\ \gamma\, c) \text{ car } \gamma\, a = 1 \\ (efg, \gamma\, a\ \gamma\, c) \end{cases}$$

$b * c = (fg, \gamma\, c)$, $a * (b * c) = (efg, \gamma\, a\ \gamma\, c)$.

— $e \in B$, $f \in B_i$, $g \in B_j$.

$$a * b = \begin{cases} a \text{ si } \mu_{e,i}(a) = 1 \\ \alpha_e\, a \text{ si } \beta_{e,f}(a, b) = 1, \\ (ef, \gamma\, a) \end{cases} \qquad (a * b) * c = \begin{cases} \begin{cases} a \text{ si } i = j \\ (eg, \gamma\, a) \text{ si } i \neq j \text{ car } \mu_{e,i}^{-1}(1) \cap \mu_{e,j}^{-1}(1) = \varnothing \end{cases} \\ (eg, \gamma\, \alpha_e\, a) = (efg, \gamma\, a) \\ (efg, \gamma\, a) \end{cases}$$

$b * c = fg$ et $a * (b * c) = (efg, \gamma\, a)$ ou
$b * c = \alpha_f b$ si $i = j$ et si $\beta_{f,g}(b, c) = 1$,

$$a * (b * c) = a * \alpha_f b = \begin{cases} a \text{ si } \mu_{e,i}(a) = 1 \\ (ef, \gamma\, a) = (efg, \gamma\, a) \text{ autrement.} \end{cases}$$

— $e \in B_i$, $f \in B$, $g \in B$.

$a * b = (ef, \gamma\, b)$, $(a * b) * c = (efg, \gamma\, b\, \gamma\, c)$,

$$b * c = \begin{cases} \alpha_f\, b \text{ si } \beta_{f,g}(b, c) = 1 \\ (fg, \gamma\, b\ \gamma\, c) \end{cases}, \quad a * (b * c) = \begin{cases} (efg, (\gamma\, b)^2) = (efg, \gamma\, b\ \gamma\, c) \\ (efg, \gamma b\ \gamma\, c) \end{cases}$$

— $e \in B_i$, $f \in B$, $g \in B_j$.

$a * b = (ef, \gamma\, b)$, $(a * b) * c = (efg, \gamma\, b)$

$$b * c = \begin{cases} b \text{ si } \mu_{f,j}(b) = 1 \\ \alpha_f\, b \text{ si } \beta_{f,g}(b, c) = 1, \\ (fg, c) \end{cases} \qquad a * (b * c) = \begin{cases} (ef, \gamma\, b) = (efg, \gamma\, b) \\ (ef, 1) = (efg, \gamma\, b) \\ (efg, \gamma\, b) \end{cases}$$

— $e \in B_i$, $f \in B_j$, $g \in B$.

$$a * b = \begin{cases} \alpha_e\, a, \text{ si } i = j \text{ et } \beta_{e,f}(a, b) = 1, \\ ef \end{cases} \qquad (a * b) * c = (efg, \gamma\, c)$$

$b * c = (fg, \gamma\, c)$, $a * (b * c) = (efg, \gamma\, c)$

— $e \in B_i$, $f \in B_j$, $g \in B_k$.

$$a * b = \begin{cases} \alpha_e\, a, \text{ si } i = j \text{ et } \beta_{e,f}(a, b) = 1, \\ ef \end{cases} \qquad (a * b) * c = efg$$

$$b * c = \begin{cases} \alpha_f\, b, \text{ si } j = k \text{ et } \beta_{f,g}(b, c) = 1, \\ gf \end{cases} \qquad a * (b * c) = efg.$$

Corollaire 8. — Considérons un demi-groupe $\mathcal{B}$ décrit par le corollaire 6, une collection $\mathcal{B}_i$, $i \in I$, de demi-groupes disjoints décrits par le corollaire 2 dans lequel on prend $\Gamma_i = \{e_i\}$. Soit $D = \mathcal{B} + \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$. Posons $C = \bigcup_{i \in I} e_i$, munissons $E = B + C$ d'une structure de demi-groupe d'idempotents décrite par le corollaire 2.1 de [1].

Soient a et b deux éléments de D,

— si $a, b \in \mathcal{B}$ ou si a, $b \in \mathcal{B}_i$, $a * b$ est défini;

— si $a \in F_e \leqslant \mathcal{B}$, $b \in \mathcal{B}_i$, posons $a * b = (e\, e_i, \gamma\, a)$, $b * a = (e_i e, \gamma\, a)$;

— si $a \in \mathcal{B}_i$, $b \in \mathcal{B}_j$, $i \neq j$, posons $a * b = e_i\, e_j$.

L'ensemble D muni de cette loi est un H-demi-groupe.

Inversement, ceci décrit la structure d'un H-demi-groupe quelconque. En effet, si D vérifie les conditions du corollaire, d'après le théorème 8, D est un demi-groupe. Le théorème 3.7 de [1] complète la démonstration.

4. Homomorphismes entre H_d-demi-groupes.

Soit φ un homomorphisme d'un H_d-demi-groupe D dans un demi-groupe quelconque D', $\varphi(D)$ est un H_d-demi-groupe, nous supposerons donc que D' est un H_d-demi-groupe. Soit E [resp. E'] l'ensemble des idempotents de D [resp. D'], $E = B + \bigcup_{i \in I} B_i$, $E' = B' + \bigcup_{i' \in I'} B'_{i'}$, la structure de ces demi-groupes est déterminée par le théorème 2.2 de [1] dont nous conservons les notations; $\varphi(E) \leqslant E'$.

Lemme 1. — Une application φ de E dans E', telle que $\varphi(B)$ rencontre B', est un homomorphisme si et seulement si,

1) Il existe deux applications φ' de L dans L', φ'' de R dans R', telles que, $\forall\ (l, r) \in B$, $\varphi(l, r) = (\varphi' l, \varphi'' r)$;

2) Il existe une injection ξ d'une partie J de I dans I', telle que,
— si φ'' n'est pas constante, $1 \in J$, $\xi 1 = 1$; $\forall\ i \in J - \{1\}$, $r'_{\xi_i} = \varphi'' r_i$;
— $\varphi''(R) = \{r'\}$, $\forall i \in J$, $\xi i = 1$ ou $r'_{\xi i} = r'$.

On a, $\forall\ i \in J$, $\varphi(B_i) \leqslant B'_{\xi i}$,
$\forall\ i \in I - J$, $i \neq 1$, $\varphi(B_i) \leqslant L' \times \{\varphi'' r_i\} \leqslant B'$,
si $1 \notin J$, $\varphi''(R) = \{r'\}$, $\varphi(B_1) \leqslant L' \times \{r'\} \leqslant B'$.

3) Pour tout élément e de E, $l'_{\varphi e} = \varphi' l_e$

Soit φ un homomorphisme, si $\varphi(B_i)$ rencontre B', prenons $e \in B_i$ avec $\varphi\, e \in B'$, pour un autre élément f de B_i, on a $f = fef$, d'où $\varphi f = \varphi f\ \varphi e\ \varphi f \in B'$ et par suite $\varphi(B_i) \leqslant B'$. Le même calcul est valable pour B, donc $\varphi(B) \leqslant B'$, les précisions qui suivent le théorème 5 démontrent la première condition du lemme.

Si $\varphi(B_i)$ ne rencontre pas B', il existe $i' \in I'$ tel que, $\varphi(B_i) \leqslant B'_{i'}$; en effet, si $e \in B_i$ et si $\varphi\, e \in B'_{i'}$, pour un élément f de B_i, on ne peut avoir $\varphi f \in B'_{i'}$ car on en déduirait $\varphi(ef) = \varphi e\ \ \varphi f \in \varphi(B_i) \cap B'$. Posons $i' = \xi\, i$, ξ

est une application définie sur une partie J de I. Soient $i \in J$, $j \in J$, $i \neq j$, $e \in B_i$, $f \in B_j$, on a $ef \in B$, donc $\xi i \neq \xi j$, ξ est une injection.

Soit e un élément de B_i, $i \neq 1$, pour tout $(l, r) \in B$, on a $(l, r)\ e = (l, r_i)$, d'où il résulte $(\varphi' l, \varphi'' r)\ \varphi e = (\varphi' l, \varphi'' r_i)$, donc si $i \in J$, $r'_{\xi i} = \varphi'' r_i$, si $i \notin J$, $\varphi(B_i) \leqslant L' \times \{\varphi'' r_i\}$.

Soit e un élément de B_1, pour tout $(l, r) \in B$, on a $(l, r)\ e = (l, r)$, d'où il résulte $(\varphi' l, \varphi'' r)\ \varphi e = (\varphi' l, \varphi'' r)$, donc si φ'' n'est pas constante $\varphi e \in B'_1$, $1 \in J$, $\xi 1 = 1$, si $\varphi''(R) = \{r'\}$, on peut avoir $\varphi(B_1) \leqslant L' \times \{r'\} \leqslant B'$.

Soit e un élément quelconque de E, pour tout $(l, r) \in B$, on a $e \,.\, (l, r) = (l_e, r)$, d'où il résulte $\varphi e \,.\, (\varphi' l, \varphi'' r) = (\varphi' l_e, \varphi'' r)$ et $l'_{\varphi e} = \varphi' l_e$.

Inversement, soient deux applications quelconques φ' de L dans L', φ'' de R dans R', J une partie de I, ξ une injection de J dans I', supposons ces éléments liés par les conditions du lemme où ils interviennent. Pour $i \in J$, soit ψ_i une application de B_i dans $B'_{\xi i}$ telle que, $\forall\ e \in B_i$, $l'_{\psi_i e} = \varphi' l_e$. On vérifie que l'application φ de E dans E' définie par :

$\forall\ (l, r) \in B, \varphi(l, r) = (\varphi' l, \varphi'' r)$,

$\forall\ i \in J, \forall e \in B_i,\ \varphi e = \psi_i e$,

$\forall i \in I - J,\ i \neq 1,\ \forall\ e \in B_i,\ \varphi e = (\varphi' l_e, \varphi'' r_i)$,

si $1 \notin J$, $\varphi''(R) = \{r'\}$, $\forall\ e \in B_1$, $\varphi e = (\varphi' l_e, r')$, est un homomorphisme.

Lemme 1'. — Une application φ de E dans E', telle que $\varphi(B)$ ne rencontre pas B', est un homomorphisme, si et seulement si, il existe un indice $i' \in I'$ et une application φ' de L dans $B'_{i'}$, telle que,

$$\forall\ e \in E,\ \varphi e = \varphi' l_e.$$

En effet, le début de la démonstration du lemme 1 montre que $\varphi(B)$ est contenu dans un B'_i; $\varphi(l, r)$ ne dépend pas de r, on peut poser $\varphi(l, r) = \varphi' l$. Supposons qu'il existe un élément f de E tel que φf n'appartienne pas à B'_i, prenons $e \in B$, on a $ef \in B$, $\varphi(ef) = \varphi e \,.\, \varphi f \in B'$, $\varphi(B)$ rencontre B', ce qui contredit l'hypothèse, donc $\varphi(E) \leqslant B'_{i'}$. Pour un élément quelconque e de E, on a $e(l, r) = (l_e, r)$, d'où $\varphi e\, \varphi(l, r) = \varphi e = \varphi' l_e$.

Inversement, pour une application quelconque φ' de L dans $B'_{i'}$, la relation $\varphi e = \varphi' l_e$ définit un homomorphisme φ de E dans $B'_{i'}$.

Lemme 2. — Une bijection φ de E sur E' est un isomorphisme si et seulement si,

1) Il existe deux bijections φ' de L dans L', φ'' de R dans R', telles que, $\forall\ (l, r) \in B$, $\varphi(l, r) = (\varphi' l, \varphi'' r)$.

2) Il existe une bijection ξ de I sur I', telle que,

$$\xi 1 = 1, \forall i \in I - \{1\},\ r'_{\xi i} = \varphi'' r_i,\ \varphi(B_i) = B'_{\xi i}\ .$$

3) Pour tout élément e de E, $l'_{\varphi e} = \varphi' l_e$.

Si une bijection φ vérifie ces propriétés, d'après le lemme 1, φ est un homomorphisme. Inversement, supposons que φ soit un isomorphisme.

D'après les lemmes 1 et 1', φ étant surjectif, $\varphi(\mathrm{B})$ est contenu dans B'. Si $\mathrm{J} \neq \mathrm{I}$, prenons $i \in \mathrm{I} - \mathrm{J}$, $\varphi(\mathrm{B}_i) \leqslant \mathrm{L}' \times \{r'\}$, avec $r' = \varphi'' r_i$ ou $r' = \varphi''(\mathrm{R})$ si $i = 1$, soit e un élément de B_i, on a $\varphi e = (\varphi' l_e, r') = (\varphi' l_e, \varphi'' r_i) = \varphi(l_e, r_i)$, ce qui est impossible puisque l'application φ est injective. Donc $\mathrm{J} = \mathrm{I}$, $\forall\ i \in \mathrm{I}$, $\varphi(\mathrm{B}_i) \leqslant \mathrm{B}'_{\xi i}$, de plus comme φ est sujective, ξ est une surjection, $\varphi(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$, $\forall\ i \in \mathrm{I}$, $\varphi(\mathrm{B}_i) = \mathrm{B}'_{\xi i}$. Les autres propriétés résultent alors du lemme 1.

Considérons à nouveau un homomorphisme φ de D dans D', supposons $\varphi(\mathrm{B}) \leqslant \mathrm{B}'$. D'après les propriétés de la décomposition en fuseaux, $\varphi(\mathcal{B}) \leqslant \mathcal{B}'$; si $\varphi(\mathrm{B}_i) \leqslant \mathrm{B}'_{\xi i}$ $\varphi(\mathcal{B}_i) \leqslant \mathcal{B}'_{\xi i}$; si $\varphi(\mathrm{B}_i) \leqslant \mathrm{B}'$, $\varphi\mathcal{B}_i) \leqslant \mathcal{B}'$. La restriction de φ à $\mathcal{B}$ ou à $\mathcal{B}_i$ est un homomorphisme et vérifie donc les conditions du théorème 5. Soit a un élément d'un $\mathcal{B}_i$ qui est envoyé dans $\mathcal{B}'$, on a $a \in \mathrm{F}_e$, $ae = e$, d'où $\varphi a \varphi e = (\varphi e, \gamma' \varphi a) = \varphi e$ et $\gamma' \varphi a = 1$.

Prenons deux éléments a, b de D, $a \in \mathrm{F}_e$, $b \in \mathrm{F}_f$, considérons les divers cas qui peuvent se présenter.

Premier cas : $e \in \mathrm{B}$, $f \in \mathrm{B}_j$, $ef \neq e$.

$ab = ef$ ou $(ef, \gamma a)$, $\varphi(ab) = \varphi e \varphi f$ ou $\varphi(ab) = (\varphi e \varphi f, \gamma' \varphi a)$. Si $\varphi e \in \mathrm{B}'$, $\varphi(\mathrm{B}_j) \leqslant \mathrm{B}'_{\xi j}$, on ne peut avoir $\mu'_{\varphi e, \xi j}(\varphi a) = 1$ ni $\beta'_{\varphi e, \varphi f}(\varphi a, \varphi b) = 1$. En effet, $\mu'_{\varphi e, \xi j}(\varphi a) = 1$ implique $\varphi a \in \mathrm{P}'_{\varphi e}$, $\varphi a \varphi b = \varphi a$, $\varphi e \varphi f = \varphi e$, d'où l'on déduit $\varphi(ab) = \varphi a \in \Gamma'_{\varphi e}$ ce qui est impossible; $\beta'_{\varphi e, \varphi f}(\varphi a, \varphi b) = 1$ implique $\varphi a \in \mathrm{M}'_{\varphi e}$, $\varphi a \varphi b = (\varphi a)^2$, $\varphi e \varphi f = \varphi e$ d'où lon déduit $\varphi(ab) = (\varphi a)^2 \in \Gamma'_{\varphi e}$, ce qui est encore une contradiction. On vérifie de même que si $\varphi(e) \in \mathrm{B}'$, $\varphi(\mathrm{B}_j) \leqslant \mathrm{B}'$, on ne peut avoir $\beta'_{\varphi e, \varphi f}(\varphi a, \varphi b) = 1$.

Deuxième cas : $e \in \mathrm{B}$, $f \in \mathrm{B}_i$, $ef = e$, d'où $\varphi e \varphi f = \varphi e$.

a) $\mu_{e,i}(a) = 1$, $ab = a$, $\varphi(ab) = \varphi a$.

Si $\varphi(\mathrm{B}_i) \leqslant \mathrm{B}'_{\xi i}$, on a $\mu'_{\varphi e, \xi i}(\varphi a) = 1$ ou $\varphi a \in \Gamma'_{\varphi e}$: en effet, $\varphi a \varphi b = (\varphi a)^2$ implique $\varphi a = (\varphi a)^2$ et $\varphi a \in \Gamma'_{\varphi e}$. Si $\varphi(\mathrm{B}_i) \leqslant \mathrm{B}'$, on a $\varphi a \in \Gamma'_{\varphi e}$, en effet, $\varphi a \varphi b = (\varphi a)^2$ ou $\varphi a \varphi b = (\varphi e, \gamma' \varphi a \gamma' \varphi b)$, d'où le résultat.

b) $\beta_{e,f}(a, b) = 1$, $ab = a^2$, $\varphi(ab) = \varphi(a)^2 = (\varphi a)^2$, $\gamma a = 1$.

Si $\varphi(\mathrm{B}_i) \leqslant \mathrm{B}'_{\xi i}$, on ne peut avoir $\mu'_{\varphi e, \xi i}(\varphi a) = 1$, car il en résulterait $\varphi(ab) = \varphi a \varphi b = \varphi a$ et $\varphi a \in \Gamma'_{\varphi e}$. D'autre part, si $\varphi a \varphi b = (\varphi e, \gamma' \varphi a)$, on a $\varphi a \varphi b = \varphi e$ car $\gamma' \varphi a = 1$ et $(\varphi a)^2 = e$.

Si $\varphi(\mathrm{B}_i) \leqslant \mathrm{B}'$ et si $\beta'_{\varphi e, \varphi f}(\varphi a, \varphi b)$ est égal à 0 ou n'est pas défini, on a $\varphi a \varphi b = (\varphi e, \gamma' \varphi a) = \varphi e$, d'où $(\varphi a)^2 = \varphi e$.

c) $ab = (e, \gamma a)$, $\varphi(ab) = (\varphi e, \gamma' \varphi a)$.

Si $\varphi(\mathrm{B}_i) \leqslant \mathrm{B}'_{\xi i}$, on ne peut avoir $\mu'_{\varphi e, \xi i}(\varphi a) = 1$ car il en résulterait $\varphi a \varphi b = \varphi a = (\varphi e, \gamma' \varphi a)$. De même la condition $\beta'_{\varphi e, \varphi f}(\varphi a, \varphi b) = 1$ entraîne $\varphi a \in \mathrm{M}'_{\varphi e}$ et $(\varphi a)^2 \in \Gamma'_{\varphi e} \cap \mathrm{N}'_{\varphi e}$, ce qui est impossible.

Ces considérations démontrent la partie directe du théorème suivant.

Théorème 9. — Une application φ d'un H_d-demi-groupe D dans un H_d-demi-groupe D', telle que $\varphi(\mathrm{B})$ rencontre B', est un homomorphisme, si et seulement si, elle vérifie les conditions suivantes :

1) $\varphi(E) \leqslant E'$, la restriction de φ à E vérifie le lemme 1.

2) $\varphi(\mathcal{B}) \leqslant \mathcal{B}$; si $i \in J$, $\varphi(\mathcal{B}_i) \leqslant \mathcal{B}_{\xi i}$; si $i \notin I$, $\varphi(\mathcal{B}_i) \leqslant \mathcal{B}'$; les restrictions de φ à $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}_i$ vérifient le théorème 5.

3) Soient a et b deux éléments de D appartenant respectivement aux fuseaux F_e, F_f, avec $e \in B$, $f \in B_i$ ou $e \in B_i$, $f \in B$, ou $e \in B_i$, $f \in B_j$, $i \neq j$;

a) si $\mu_{e,i}(a) = 1$, $\mu'_{\varphi e, \xi i}(\varphi a) = 1$ ou $\varphi a \in \Gamma'_{\varphi e}$;

b) si $\beta_{e,f}(a, b) = 1$, $\beta'_{\varphi e, \varphi f}(\varphi a, \varphi b) = 1$ ou $(\varphi a)^2 = \varphi e$;

c) dans les autres cas, les fonctions $\mu'_{\varphi e, \xi i}(\varphi a)$, $\beta'_{\varphi e, \varphi f}(\varphi a, \varphi b)$ ne sont pas définies ou sont différentes de 1.

Soit φ une application vérifiant les conditions du théorème, d'après 1 et 2 la restriction de φ à E, à $\mathcal{B}$ et à $\mathcal{B}_i$ est un homomorphisme. Soient a, b deux éléments de D, $a \in F_e$, $b \in F_f$, posons $\varphi a = a'$, $\varphi b = b'$, $\varphi e = e'$, $\varphi f = f'$; on a $\varphi(ef) = e'f'$. Considérons les divers cas qui peuvent se présenter.

$\underline{e \in B_i,\ f \in B_j,\ i \neq j,\ ab = ef,\ \varphi(ab) = e'f'}$.

Si $\varphi(B_i) \leqslant B'_{\xi i}$, $\varphi(B_j) \leqslant B'_{\xi i}$, d'après le lemme 1, $a'b' = e'f'$

Si $\varphi(B_i) \leqslant B$, $\varphi(B_j) \leqslant B'_{\xi j}$ ou $\varphi(B_j) \leqslant B'$, d'après 3c, $a'b' = (e'f', \gamma' a')$ ou $a'b' = (e'f', \gamma' a' . \gamma' b')$. Comme la restriction de φ à $\mathcal{B}_i$ ou $\mathcal{B}_j$ est un homomorphisme, on a $\gamma' a' = \gamma' b' = 1$ et $a'b' = e'f'$.

$\underline{e \in B,\ f \in B_i,\ ef \neq e,\ ab = (ef, \gamma a),\ \varphi(ab) = (e'f', \gamma' a')}$.

D'après la condition 3c, on a $a'b' = (e'f', \gamma' a')$ ou $a'b' = (e'f', \gamma' a' \gamma' b')$, mais dans ce cas $\gamma' b' = 1$. On vérifie de même la relation $\varphi(ba) = b'a'$.

$\underline{e \in B,\ f \in B_i,\ ef = e}$.

— Si $\mu_{e,i}(a) = 1$, $ab = a$, la condition 3a entraîne $\mu'_{e', \xi i}(a') = 1$ et alors $a'b' = a'$, ou $a' \in \Gamma'_{e'}$, ce qui donne $a' = (e', \gamma' a')$, $a'b' = (e'f', \gamma' a' . \gamma' b') = (e', \gamma' a') = a'$, car $e'f' = e'$, $\gamma' b' = 1$.

— Si $\beta_{e,f}(a, b) = 1$, $ab = a^2$, la condition 3.b entraîne $\beta'_{e',f'}(a', b') = 1$ et alors $a'b' = a'^2 = \varphi(a^2)$, ou $a'^2 = e'$ ce qui donne
$a'b' = (e'f', \gamma' a' \ \gamma' b') = e'$ car $\beta_{e,f}(a, b) = 1$ implique $ef = e$, $\gamma a = 1$, $\gamma' a' = 1$.

Pour les autres cas et pour le produit ba, la démonstration est identique à celle donnée pour $ef \neq e$.

Théorème 9'. — Une application φ d'un H_d-demi-groupe D dans un H_d-demi-groupe D', telle que $\varphi(B)$ ne rencontre pas B', est un homomorphisme, si et seulement si, elle vérifie les conditions suivantes :

1) Il existe un indice $i' \in I'$ et une application φ' de L dans $B'_{i'}$, telle que, $\forall\ e \in E$, on ait $\varphi e = \varphi' l_e$.

2) $\varphi(D) \leqslant \mathcal{B}'_{i'}$, les restrictions de φ à $\mathcal{B}$ et aux $\mathcal{B}_i$ vérifient le théorème 5.

3) Soient a et b deux éléments de D appartenant respectivement aux fuseaux F_e, F_f, avec $e \in B$, $f \in B_i$, ou $e \in B_i$, $f \in B$, ou $e \in B_i$, $f \in B_j$, $i \neq j$,

a) si $\mu_{e,i}(a) = 1$, $\varphi a = \varphi e$,

b) si $\beta_{e,f}(a, b) = 1$, $\beta'_{\varphi e, \varphi f}$ $(\varphi a, \varphi b) = 1$ ou $(\varphi a)^2 = \varphi e$;

c) dans les autres cas, la fonctions $\beta'_{\varphi e, \varphi f}$ $(\varphi a, \varphi b)$ n'est pas définie ou est différente de 1.

Ce théorème est une conséquence du lemme 1', de la structure de $\mathcal{B}'_{i'}$, et du théorème précédent.

Corollaire 9. — Une bijection φ d'un H_d-demi-groupe D sur un H_d-demi-groupe D' est un isomorphisme, si et seulement si, elle vérifie les conditions suivantes :

1) $\varphi(E) = E'$, la restriction de φ à E vérifie le lemme 2;

2) $\varphi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$, φ $(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}'_{\xi i}$, les restrictions de φ à $\mathcal{B}$ et aux $\mathcal{B}_i$ vérifient le corollaire 7;

3) a) les relations $\mu_{e,i}(a) = 1$, $\mu'_{\varphi e, \xi i}$ $(\varphi a, \varphi b) = 1$ sont équivalentes.

b) les relations $\beta_{e,f}(a, b) = 1$, $\beta'_{\varphi e \varphi f}$ $(\varphi a, \varphi b) = 1$ sont équivalentes.

Si φ est un isomorphisme, la restriction de φ à E est un isomorphisme de E sur l'ensemble E' des idempotents de D' et vérifie donc le lemme 2. On en déduit φ $(\mathcal{B}) \leqslant \mathcal{B}'$ et $\forall$ $i \in I$, φ $(\mathcal{B}_i) \leqslant \mathcal{B}'_{\xi i}$, ces inclusions sont des égalités puisque φ est surjectif; la restriction de φ à $\mathcal{B}$ ou à $\mathcal{B}_i$ est un isomorphisme et vérifie le corollaire 7. D'après le théorème 9, la relation $\mu_{e,i}(a) = 1$ entraine $\mu'_{\varphi e, \xi i}$ $(\varphi a) = 1$ ou $\varphi a \in \Gamma'_{\varphi e}$, mais $\Gamma'_{\varphi e} = \varphi(\Gamma_e)$ et comme φ est une application injective φa ne peut appartenir à $\Gamma'_{\varphi e}$. De même, puisque φ^{-1} est un homomorphisme injectif, la relation $\mu'_{\varphi e, \xi i}$ $(\varphi b) = 1$ implique $\mu_{e,i}(a) = 1$. On vérifie la condition $3b$ d'une manière analogue.

Inversement, si une bijection φ vérifie les conditions du corollaire, le théorème 9 montre que φ est un homomorphisme.

Soient D un H demi-groupe, $E = B + C$ l'ensemble de ses idempotents.

La structure de D est décrite par le corollaire 8. Pour $c \in C$, on désigne par $\mathcal{B}_c$ le plus grand sous-demi-groupe unipotent de D contenant c.

Théorème 10. — Une application φ d'un H-demi-groupe D dans un H-demi-groupe D', telle que $\varphi(E)$ contienne plusieurs éléments, est un homomorphisme, si et seulement si,

1) Il existe une application φ' de L dans L', une application φ'' de R dans R', une injection ξ d'une partie C_1 de C dans C', telles que, pour tout élément c de C_1, on ait $(\varphi' l_c, \varphi'' r_c) = (l'_{\xi c}, r'_{\xi c})$.

On a, $\forall$ $(l, r) \in B$, $\varphi(l, r) = (\varphi' l, \varphi'' r)$,

$\forall$ $c \in C_1$, $\varphi c = \xi c$,

$\forall$ $c \in C - C_1$, $\varphi c = \varphi(l_c, r_c)$.

2) $\varphi(\mathcal{B}) \leqslant \mathcal{B}'$; $\forall c \in C_1$, $\varphi(\mathcal{B}_c) \leqslant \mathcal{B}_{\xi c}$; $\forall$ $c \in C - C_1$, $\varphi(\mathcal{B}_c) \leqslant \mathcal{B}'$; les restrictions de φ à $\mathcal{B}$ et aux $\mathcal{B}_c$ vérifient le théorème 5.

3) Pour $e, f \in E$, $e \neq f$, $a \in F_e$, $b \in F_f$, $\beta'_{\xi e, \xi f}$ $(\varphi a, \varphi b)$ n'est pas défini ou est différent de 1.

Comme $\varphi(E)$ contient plusieurs éléments, $\varphi(E) \cap B'$ n'est pas vide. Le corollaire 8 montre alors que les hypothèses du théorème 9 sont remplies, φ est bien un homomorphisme. On déduit de ce théorème le résultat suivant :

Corollaire 10. — Une bijection φ d'un H-demi-groupe D sur un H-demi-groupe D′ est un isomorphisme si et seulement si,

1) Il existe des bijections φ', φ'', ξ respectivement de L, R. C sur L′, R′, C′, telles que, $\forall\, c \in C$, $(\varphi' l_c, \varphi'' r_c) = (l'_{\xi c}, r'_{\xi c})$.
On a, $\forall\, (l, r) \in B$, $\varphi(l, r) = (\varphi' l, \varphi'' r)$; $\forall\, c \in C$, $\varphi c = \xi c$.

2) $\varphi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$; $\forall\, c \in C$; $\varphi(\mathcal{B}_c) = \mathcal{B}'_{\xi c}$; les restrictions de φ à $\mathcal{B}$ et et aux $\mathcal{B}_c$ vérifient le corollaire 7.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Desq (Roger). Structure des demi-groupes ayant tous les sous-demi-groupes homomorphiques, J. Math. pures et appliquées, 45, 1966, p. 119 à 142. Voir aussi Séminaire Dubreil-Pisot (Algèbre et Théorie des nombres), 1re année, 1964-65, n° 3 (23 novembre 1964).

[2] Kimura, Tamura, Merkel. Semigroups in wich all semigroups are left ideals. Canad. J. Math., 17 (1965), p. 52-62.