ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

RADU ROSCA

Sur les couples conformes de Tichoski dans l'espace elliptique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 30 (1966), p. 95-120
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1966_4_30__95_0>

Sur les couples conformes de Tichoski dans l'espace elliptique

par RADU ROSCA

Conformément à la définition de S. FINIKOFF [1a.] deux congruences $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^*$ de l'espace ordinaire E^3, forment un couple conforme de TICHOSKI si deux rayons homologues $R \in \mathfrak{L}^*$, $R^* \in \mathfrak{L}^*$ sont dans une correspondance telle, qu'il existe un mouvement pour lequel $R \equiv R^*$. Le principe de dualité, fondamental dans l'espace elliptique, nous a suggéré d'étendre cette définition à un pareil espace, soit $P^3{}_e$, et de chercher s'il existe (dans cet espace) des congruences $\mathfrak{L}$ formant avec leurs supplémentaires (ou duales) $\mathfrak{L}^*$ un couple conforme de TICHOSKI. En utilisant la méthode des systèmes en involution, nous montrons que les congruences répondant à cette propriété sont déterminées par un système de PFAFF en involution et dépendent *d'une fonction arbitraire de deux arguments.* Nous désignerons pour abréger les congruences du type précédent par *congruence C.T.;* ces congruences jouissent d'une propriété géométrique, qui leur est caractéristique, à savoir : l'angle focal $2\,\varphi$ et la distance focale $2\,\delta$ sont liés par la relation : $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\delta$. La grande généralité de la solution du système qui détermine les congruences C.T laisse prévoir la possibilité d'obtenir des types divers de congruences possédant la qualité C.T. Nous considérons uniquement, dans la présente recherche, les congruences C.T qui sont aussi des congruences W, ce qui nous conduira à deux types de telles congruences que nous désignerons respectivement par *congruences* $C.T.W_1$ et *congruences* $C.T.W_2$.

En ce qui concerne le tétraèdre rectangle $\mathfrak{T}$ (normé) attaché aux rayons d'une congruence $\mathfrak{L}$, nous conviendrons d'appeler *arêtes secondaires* les deux arêtes incidentes à celle (dite arête principale) qui porte les rayons de $\mathfrak{L}$. Cela étant, l'étude des congruences $C.T.W_1$ conduit au résultat général suivant : Les *deux arêtes secondaires du tétraèdre* $\mathfrak{T}$ *attaché aux rayons d'une congruence* $C.T.W_1$ *décrivent respectivement une congruence paratactique et une congruence W.* Si on impose à l'une des nappes focales d'une congruence $C.T.W_1$ la condition d'être minimale, la congruence en question devient la congruence la plus générale *de Thybaut-Bianchi* (ces congruences sont spécifiques de l'espace $P^3{}_e$) et l'on démontre que *cette dernière congruence dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument.* Dans ce cas la congruence W décrite par l'arête secondaire de $\mathfrak{T}$ est *une congruence* B_{+1} (congruence de BIANCHI à nappes focales de courbures relatives égales à $+1$), et inversement *si cette dernière congruence est de*

Thybaut (elle ne peut être de THYBAUT-BIANCHI), *la congruence C.T.W_1 correspondante est une congruence B_{+1}.*

De plus en faisant usage de l'image d'une congruence C.T.W_1, dans un espace de KLEIN adapté à une métrique elliptique, nous mettons en évidence le fait que toutes les congruences W décrits par les arêtes du tétraèdre $\mathfrak{T}$ correspondant (elles sont au nombre de quatre en vertu d'une propriété dualistique bien connue) *appartiennent à un même complexe linéaire fixe.*

Les congruences C.T.W_2 sont déterminées par un système de PFAFF en involution qui dépend de trois fonctions arbitraires d'un argument. Elles possèdent en outre la propriété d'être des *congruences B_{-1}* (congruences de BIANCHI dont les nappes focales sont isométriques au plan euclidien) et contiennent comme cas particulier les congruences normales isotropes les plus générales qui rappelons-le sont elles aussi spécifiques de l'espace P^3_e.

Un cas particulièrement intéressant est celui où les deux types précédemment étudiés coïncident et où l'on exige que la congruence en question soit du type (ω) [2a.] à angle constant.

Une pareille congruence, que nous appelerons congruence (ω_c), est déterminée par un système linéaire de PFAFF *complètement intégrable* et possède les propriétés remarquables suivantes : *Les sommets du tétraèdre $\mathfrak{T}$ attaché aux rayons d'une congruence (ω) décrivent tous des surfaces de Clifford, et les copoints correspondants à ces sommets déterminent un second tétraèdre rectangle jouissant de la même propriété. Chacune des 8 surfaces de Clifford ainsi mise en évidence détermine une configuration projective de Vincensini [3a.], dont toutes les congruences sont des congruences C.T, qui possèdent en outre la double qualité d'être du type W et du type (ω).*

1. Soient $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}^*$ deux congruences de l'espace ordinaire E^3 et $R \in \mathfrak{L}$, $R^* \in \mathfrak{L}^*$ deux rayons homologues. On dit [1a.] que $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^*$ forment un couple conforme de TICHOSKI si R et R* sont dans une correspondance univoque telle qu'il existe un mouvement pour lequel $R \equiv R^*$, les surfaces réglées de $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}^*$ issues de R et R* se touchant alors le long de $R \equiv R^*$. Cette définition peut évidemment s'étendre à un espace elliptique P^3_e (dont on peut toujours par une homothétie préalable réduire la courbure à l'unité), et dans ce but nous désignerons par $\mathfrak{T} \equiv \{\mathbf{X}_k\}$ et $\mathfrak{T}^* \equiv \{\mathbf{X}^*_k\}$, $(k = 0, 1, 2, 3)$ les deux tétraèdes rectangles (ou autoduaux) attachés respectivement à $R \equiv \{\mathbf{X}_0\, \mathbf{X}_3\}$ et $R^* \equiv \{\mathbf{X}_0^*\, \mathbf{X}_3^*\}$, $(R \in \mathfrak{L} \subset P^3_e, R^* \in \mathfrak{L} \subset P^3_e)$. En supposant la classe de toutes les grandeurs scalaires et géométriques qui interviendront suffisamment grande pour justifier les calculs, soient u^1, u^2 un système arbitraire de paramètres de R, $\omega^i{}_j$ des formes de PFAFF par rapport à u^1, u^2 et $(\omega^i{}_j) \equiv M_c$ la matrice de CARTAN :

$$(1) \quad M_c \equiv (\omega^i{}_j) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1{}_0 & \omega^2{}_0 & \omega^3{}_0 \\ -\omega^1{}_0 & 0 & \omega^2{}_1 & -\omega^1{}_3 \\ -\omega^2{}_0 & -\omega^2{}_1 & 0 & \omega^3{}_2 \\ -\omega^3{}_0 & \omega^1{}_3 & -\omega^3{}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

On sait que l'on a

$M_c + MT_c = 0$, $DM_c = M^2_c$ (équations de structure), les équations fondamentales de $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}^*$ étant

$$(1')\quad d\,\mathbf{X}_k = (\omega^i{}_K)\,\mathbf{X}_i, \qquad (1'')\quad d\,\mathbf{X}_k^* = (\omega_K{}^{*i})\,\mathbf{X}_i^*.$$

Le plan tangent à la surface réglée $\omega^3{}_2 = \rho\,\omega^1{}_3$ de $\mathfrak{L}$ au point

$$\mathbf{Y} = \cos\lambda\,\mathbf{X}_0 + \sin\lambda\,\mathbf{X}_3$$

étant déterminé par $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}_3$ et

$$d\,\mathbf{Y} = (\cos\lambda\,\mathbf{X}_3 - \sin\lambda\,\mathbf{X}_0)\,d\,\lambda + \cos\lambda\;(\omega^1{}_0\,\mathbf{X}_1 + \omega^2{}_0\;\mathbf{X}_2 + \omega^3{}_0\,\mathbf{X}_3)$$
$$+ \sin\lambda\,(-\,\omega^3{}_0\,\mathbf{X}_0 + \omega^1{}_3\,\mathbf{X}_1 - \omega^3{}_2\,\mathbf{X}_2)$$

le *copoint* de $\mathbf{Y}$ (le pôle de P par rapport à l'absolu Q qui détermine la métrique de $P^3{}_e$) est

$f\,\mathbf{Y}' = \overline{\mathbf{X}_0\,\mathbf{X}_3\,d\,\mathbf{Y}}$, ($f$ = facteur de proportionnalité) où $\overline{}$ est le symbole du *produit extérieur de 3 points* de $P^3{}_e$. Moyennant la règle de permutation [4a.] des sommets de $\mathfrak{T}$, à savoir

$$(2)\qquad \overline{\mathbf{X}_i\,\mathbf{X}_j\,\mathbf{X}_k} = \mathbf{X}_l\,;\; i, j, k, l = 0, 1, 2, 3;\; 1, 0, 3, 2;\; 0, 2, 3, 1;\; 1, 3, 2, 0.$$

on trouve

$$(3)\qquad f\,\mathbf{Y}' = (\omega^1{}_0\;\cos\lambda + \omega^1{}_3\sin)\;\mathbf{X}_2 - (\omega^2{}_0\cos\;\lambda - \omega^3{}_2\;\sin\lambda)\;\mathbf{X}_1,$$

et en procédant d'une manière analogue pour le plan P* homologue à P on trouve

$$(4)\qquad f^*\,\mathbf{Y}^{*\prime} = (\omega_0{}^{*1}\;\cos\;\lambda + \omega_3{}^{*1}\;\sin\;\lambda)\;\mathbf{X}_2^* - (\omega_0{}^{*2}\;\cos\;\lambda - \omega_2{}^{*3}\;\sin\;\lambda)\;\mathbf{X}_1^*.$$

Pour que les deux surfaces réglées homologues $\omega^3{}_2 = \rho\,\omega^1{}_3$ et $\omega^{*3}{}_2 = \rho^*\,\omega^{*1}{}_3$ soient tangentes, il est nécessaire et suffisant qu'après le mouvement qui fait coïncider $\mathbf{X}^i$ et $\mathbf{X}_i^*$, ($i = 1{,}2$) les points $\mathbf{Y}'$ et $\mathbf{Y}^{*\prime}$ coïncident aussi; (3) et (4) donnent alors les relations

$$(5)\qquad \frac{\omega^{*1}{}_0}{\omega^1{}_0} = \frac{\omega^{*3}{}_0}{\omega^2{}_0} = \frac{\omega^{*1}{}_3}{\omega^1{}_3} = \frac{\omega^{*3}{}_2}{\omega^3{}_2}\,.$$

Ainsi la condition géométrique imposée revient à écrire (comme dans l'espace E^3) que les pfaffiens principaux de $(\omega_j{}^i)$ et $(\omega_j{}^{*i})$ sont proportionnels.

Cela étant, et vu l'importance du principe de dualité dans l'espace $P^3{}_e$, nous allons nous proposer de chercher s'il existe dans cet espace, des congruences formant avec leurs supplémentaires des couples conformes de TICHOSKI. Le tétraèdre $\mathfrak{T} \equiv \{\mathbf{X}_k\}$ étant autodual il faudra écrire que les pfaffiens principaux des matrices correspondant aux congruences $\mathfrak{L} \equiv [\mathbf{X}_0\mathbf{X}_3]$ et $\mathfrak{L}^* \equiv [\mathbf{X}_1\,\mathbf{X}_2]$ satisfont la relation (5). De (1) et (1') on déduit qu'a la substitution de tétraèdres

$$\begin{array}{c|cccc|c} & \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_0 & \mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_2 & \\ \downarrow & \mathbf{X}_0^* & \mathbf{X}_1^* & \mathbf{X}_2^* & \mathbf{X}_3^* & \downarrow \end{array}$$

relative à la dualisation $\mathfrak{D}$: $\mathfrak{L} \rightleftarrows \mathfrak{L}^*$, correspond la substitution

$$(6) \qquad \left|\begin{array}{ccccc} \omega^1 & \omega_0{}^2 \ \omega_0{}^3 & \omega^3{}_2 & \omega^1{}_3 \ \omega^2{}_1 \\ -\,\omega_0{}^{*1} & -\,\omega_3{}^{*1} \ \omega_1{}^{*2} & -\,\omega_2{}^{*3} & -\,\omega_0{}^{*2} \ \omega_0{}^{*3} \end{array}\right| \ ;$$

en vertu de (6) les relations (5) donnent alors immédiatement l'équation unique.

$$(6) \qquad \omega^2{}_0 = \omega^1{}_3.$$

Par ailleurs, comme on peut toujours à la suite d'un vissage elliptique convenable s'arranger pour que $\mathcal{T}$ soit *canonique* [5a.] (les sommets $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{X}_3$ et $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ divisent harmoniquement les points focaux des rayons $R \in \mathfrak{L}$ et $R^* \in \mathfrak{L}^*$), on peut poser dans le cas général

$$\omega^1{}_0 = l' \, \omega^3{}_2 \quad \omega^2{}_0 = l'' \, \omega^1{}_3,$$

et par suite, dans le cas qui nous occupe ($l'' = 1$), l'angle focal $2\,\varphi$ et la distance $2\,\delta$ qui sont donnés par [5a.]

$$\begin{aligned} l' &= -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi \\ l'' &= \operatorname{tg}\delta \operatorname{cotg}\varphi \end{aligned}$$

sont liés par la relation

$$(8) \qquad \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\varphi, \quad \text{et } (8') \quad \operatorname{tg}^2\varphi = -\,l'$$

Nous désignerons une congruence de P_{3e} pour laquelle la relation (8) a lieu, par *congruence* $\mathfrak{J}$*;* dans la suite on aura à considérer deux types de telles congruences, suivant que $l'' = \left\{\begin{smallmatrix} +1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right.$. En posant

$$(8'') \qquad -\,l' = l^2, \quad f^2 = 1 + l^2,$$

les foyers $\mathbf{F}_i, (i = 1,2)$ correspondant au rayon $R \equiv \{\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_3\}$ et les foyers $\mathbf{F}_h, (h = 3,4)$ correspondant au rayon $R^* \equiv \{\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2\}$ ont pour expressions

$$(9) \quad f\,\mathbf{F}_1 = \mathbf{X}_0 + l\,\mathbf{X}_3, \; f\,\mathbf{F}_2 = \mathbf{X}_0 - l\,\mathbf{X}_3, \; f\,\mathbf{F}_3 = \mathbf{X}_1 + l\,\mathbf{X}_2, \; f\,\mathbf{F}_4 = \mathbf{X}_1 - l\,\mathbf{X}_2.$$

D'autre part puisque l'équation générale des développables de $\mathfrak{L}$ (on sait que celles-ci se correspondent sur $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}^*$) est

$$(10) \qquad \omega^1{}_0 \, \omega^3{}_2 + \omega^2{}_0 \, \omega^1{}_3 = 0,$$

et puisque dans le problème que nous étudions on a

$$(10') \qquad \omega^2{}_0 = \omega^1{}_3, \quad \omega^1{}_0 = -\,l^2 \, \omega^3{}_2,$$

en désignant par ω_1, ω_2 les pfaffiens des développables on déduit de (10) et (10')

$$(11) \qquad \omega^1{}_3 = -\,\omega_1 - \omega_2, \quad l\,\omega^3{}_2 = \omega_1 - \omega_2.$$

Soient maintenant $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ les points du rayon R qui sont respectivement rectangulaires à $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, et $\mathbf{R}_3$, $\mathbf{R}_4$ les points de rayon R^* qui sont respectivement rectangulaires à $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$.

L'espace P^3_e n'étant pas simplement connexe les expressions (9) permettent d'écrire

(12) $f\,\mathbf{R}_1 = \mathbf{X}_3 - l\,\mathbf{X}_0,\quad f\,\mathbf{R}_2 = \mathbf{X}_3 + l\,\mathbf{X}_0,\quad f\,\mathbf{R}_3 = \mathbf{X}_2 - l\,\mathbf{X}_1,\quad f\,\mathbf{R}_4 = \mathbf{X}_2 + l\,\mathbf{X}_1$

et, compte tenu de (1), (1′), on trouve par différentiation

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
d\,\mathbf{F}_1 &= -2\,\omega_1\,\mathbf{R}_4 - \left(\omega^3{}_0 + \frac{dl}{f^2}\right)\mathbf{R}_1,\\
d\,\mathbf{F}_4 &= \left(\omega^2_1 - \frac{dl}{f^2}\right)\mathbf{R}_4 + 2\,\omega_2\,\mathbf{R}_1,\\
d\,\mathbf{F}_2 &= 2\,\omega_2\,\mathbf{R}_3 + \left(\omega_0^3 - \frac{dl}{f^2}\right)\mathbf{R}_2,\\
d\mathbf{F}_3 &= -\left(\omega^2_1 + \frac{dl}{f^2}\right)\mathbf{R}_3 + 2\,\omega_1\,\mathbf{R}_2.
\end{aligned}
$$

Mais la simple lecture de (9) et (12) montrant que l'on a $<\mathbf{F}_1\,\mathbf{R}_4> = 0$, $<\mathbf{F}_4\,\mathbf{R}_1> = 0$, $<\mathbf{F}_3\,\mathbf{R}_2> = 0$, $<\mathbf{F}_2\,\mathbf{R}_3> = 0$ ($< >$ symbole de produit scalaire), on déduit des équations (13) que les surfaces $(\mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{F}_4)$ et $(\mathbf{F}_2)$, $(\mathbf{F}_3)$ sont supplémentaires (ou duales). Ceci établi, et compte tenu des équations de structure

$$
D\,\omega^j{}_i = [\omega^k{}_i\,\omega^j{}_k]\quad,\quad (i, j = 0, 1, 2, 3)
$$

de l'espace P^3_e [6a.], les deux premières et les deux dernières équations (13) donnent respectivement

$$
(14)\qquad \left[\omega_1,\ \omega^2{}_1 - \frac{dl}{f^2}\right] + \left[\omega_2,\ \omega_0^3 + \frac{dl}{f^2}\right] = 0,
$$

$$
(14')\qquad \left[\omega_2,\ \omega^2{}_1 + \frac{dl}{f^2}\right] + \left[\omega_1,\ \omega_0^3 - \frac{dl}{f^2}\right] = 0.
$$

En invoquant maintenant le lemme bien connu de E. CARTAN, les équations (14) et (14′) permettent d'écrire respectivement

$$
(15)\qquad \omega_1^2 - \frac{dl}{f^2} = A\,\omega_1 + B\omega_2\ ,\qquad \omega_0^3 + \frac{dl}{f^2} = B\,\omega_1 + C\,\omega_2\ ,
$$

$$
(15')\qquad \omega_1^2 + \frac{dl}{f^2} = B'\,\omega_1 + A'\,\omega_2\ ,\qquad \omega_0^3 - \frac{dl}{f^2} = C'\,\omega_1 + B'\,\omega_2\ ,
$$

où A, B, C, A′, B′, C′ sont des fonctions inconnues. L'élimination de $\omega^2{}_1$ et $\omega^3{}_0$ conduit facilement aux deux relations

(16) $A + B = B' + C'$, (16′) $B + C = A' + B'$,

à l'aide desquelles on tire de (15) et (15′)

$$
2\,\frac{dl}{f^2} = (B - C')\,\omega_1 + (C - B')\,\omega_2
$$

$$2\,\omega^3{}_0 = (B + C')\,\omega_1 + (B' + C)\,\omega_2$$

$$(17) \qquad 2\,\omega^2{}_1 = (A + B')\,\omega_1 + (B + A')\,\omega_2.$$

Tenant compte de ces trois équations et de (16), (16′), la différentiation extérieure des équations (11) donne

$$(18) \qquad \begin{aligned} D\,\omega_1 &= \frac{(1-l^2)}{2\,l}(B + C)\,[\omega_2\,\omega_1]\,, \\ D\,\omega_2 &= \frac{(1-l^2)}{2\,l}\,(B + A)\,[\omega_2\,\omega_1]. \end{aligned}$$

En introduisant maintenant les pfaffiens

$$(18') \qquad \Omega_1 \equiv \omega^3{}_0 + \omega^2{}_1 = (A + B)\,\omega_1 + (B + C)\,\omega_2$$

$$(18'') \qquad \Omega_2 \equiv \omega^3{}_0 - \omega^2{}_1 = (B - B')\,(\omega_1 - \omega_2)$$

on aura finalement à considérer le système linéaire

$$(19) \qquad \begin{aligned} &\omega^1{}_0 = l\,(\omega_2 - \omega_1) \\ &\omega^2{}_0 = -\,\omega_1 - \omega_2 \\ &2\,\frac{dl}{l^2} = (B' - A)\,\omega_1 + (A' - B)\,\omega_2, \\ &\Omega_1 = (B - B')\,(\omega_1 - \omega_2), \\ &\Omega_2 = (A + B)\,\omega_1 + (B + C)\,\omega_2, \end{aligned}$$

qui par différentiation extérieure fournit les équations quadratiques

$$(20) \qquad \begin{aligned} &[d\,A'\,\omega_2]+[d\,B'\,\omega_1]-[d\,A\,\omega_1]-[d\,B\omega_2] = \frac{(1-l^2)}{2\,l}\,(B+B')(A+B-A'-B')\;[\omega_2\,\omega_1] \\ &[d\,A'\,\omega_2]+[d\,B'\omega_2]+[dA\,\omega_1]+[dB\,\omega_1] = -\,\frac{(1-l^2)}{2l}\left\{4+(A+B)(A'+B')\right\}[\omega_2\,\omega_1] \\ &[d\,B,\,\omega_1-\omega_2]-[dB',\,\omega_1-\omega_2] = \frac{(1-l^2)}{2\,l}\left\{(B-B')\,(A+B-A'-B')\right\}[\omega_2\,\omega_1] \end{aligned}$$

La matrice polaire M_P du système (20) dont les colonnes correspondent aux formes dA, dB, dA', dB' est

$$M_P = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & -\,\omega_2 & -\,\omega_1 \\ -\,\omega_1 & -\,\omega_1 & -\,\omega_2 & -\,\omega_2 \\ 0 & \omega_2 - \omega_1 & 0 & \omega_1 - \omega_2 \end{pmatrix}$$

son rang 3 étant égal au nombre des équations quadratiques (20), les nombres caractéristiques du système (Σ) formé par (19) et (20) sont $r = 9$ (nombres de formes distinctes) $s_0 = 5$ et $s_1 = 3$. Conformément à la théorie générale des équations de PFAFF, le système (Σ) en question est en involution et sa solution générale dépend *d'une fonction arbitraire de 2 arguments.* De

De l'expression de M_P on déduit encore que les solutions caractéristiques à une dimension qui réduisent à 2 le rang de M_P sont données par les courbes

$$\omega_1 - \omega_2 = 0.$$

On peut donc dire que dans l'espace P^3_e les congruences $\mathfrak{L}$ qui forment avec leur duale $\mathfrak{L}^*$ un couple conforme de TICHOSKI, existent et dépendent *d'une fonction arbitraire de 2 arguments*. Une telle congruence sera désignée par C.T.; le tétraèdre attaché à ses rayons sera dit un *tétraèdre conforme* et noté $\mathcal{T}_e$, les arêtes du tétraèdre $\mathcal{T}_e$ qui sont incidentes à l'arête décrivant la congruence C.T. (arête principale) seront appelées la première et la seconde *arête secondaire* de $\mathcal{T}_e$. La grande généralité de la solution qui détermine les congruences C.T laisse prévoir la possiblité d'obtenir, par l'introduction de conditions géométriques supplémentaires convenables, des types intéressants de pareilles congruences. Nous plaçant à ce point de vue, nous allons commencer par développer quelques considérations sur la double représentation sphérique (de FUBINI-STUDY) des congruences C.T, ainsi que sur un groupe de vissage pour lequel le caractère C.T reste inaltéré. A cet effet, nous rappellant que tout point $\mathbf{X}$ de P^3_e peut être considéré comme un quaternion de norme unité, nous écrirons

$$\mathbf{X} = q^h \mathbf{e}_h, \ (h = 0, 1, 2, 3; \mathbf{e}_0 = 1).$$

Les nombres q^h sont des nombres réels ou complexes et les unités hypercomplexes $\mathbf{e}_k$ ont la table de PYTHAGORE suivante :

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	-1	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	-1

Le quaternion conjugué de $\mathbf{X}$ étant

$$\tilde{\mathbf{X}} \underset{def}{=} q^0 \mathbf{e}_0 - q^i \mathbf{e}_i$$

et un point quelconque rectangulaire à $\mathbf{X}$ (situé dans le plan polaire absolu de $\mathbf{X}$) étant désigné par $\mathbf{X}'$, les deux vecteurs $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ de l'espace E^3 qui définissent respectivement la représentation sphérique *sinistrorum* et *dextrorsum* de la droite orientée $\{\mathbf{X}\ \mathbf{X}'\}$ sont donnés par

$$\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{X}} \diamond \mathbf{X}', \ \mathbf{r}' = \mathbf{X}' \diamond \tilde{\mathbf{X}}$$

($\diamond$ = symbole du produit quarternionien). Comme par dualité la direction de ces vecteurs ne change pas ($\mathbf{r}^* = -\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'^* = +\mathbf{r}'$), en nous rapportant au tétraèdre $\mathcal{T} \equiv \{\mathbf{X}_{)_k}\}$ nous poserons :

$$\mathbf{r}_k = \tilde{\mathbf{X}}_0 \diamond \mathbf{X}_k, \ \mathbf{r}'_k = \mathbf{X}_k \diamond \tilde{\mathbf{X}}_0, \ (k = 1, 2, 3). \tag{21}$$

Rappelons [5a.] qu'en introduisant les pfaffiens

$$
(22) \qquad \begin{aligned}
&\sigma^3{}_2 = \omega^3{}_2 - \omega^1{}_0, \ \sigma^1{}_3 = \omega^1{}_3 - \omega^2{}_0, \ \sigma^2{}_1 = \omega^2{}_1 - \omega^3{}_0 \\
&\sigma'^3{}_2 = \omega^3{}_2 + \omega^1{}_0, \ \sigma'^1{}_3 = \omega^1{}_3 + \omega^2{}_0, \ \sigma'^2{}_1 = \omega^2{}_1 + \omega^3{}_0
\end{aligned}
$$

il vient par dérivation

$$
(23) \qquad \begin{aligned}
&d\,\mathbf{r}_1 = \sigma^2{}_1\,\mathbf{r}_2 - \sigma^1{}_3\,\mathbf{r}_3, \quad d\,\mathbf{r}'_1 = \sigma'^2{}_1\,\mathbf{r}'_2 - \sigma'^1{}_3\,\mathbf{r}'_3, \\
&d\,\mathbf{r}_2 = -\sigma^2{}_1\,\mathbf{r}_1 + \sigma^3{}_2\,\mathbf{r}_3, \ d\,\mathbf{r}'_2 = -\sigma'^2{}_1\,\mathbf{r}'_1 + \sigma'^3{}_2\,\mathbf{r}'_3, \\
&d\,\mathbf{r}_3 = \sigma^1{}_3\,\mathbf{r}_1 - \sigma^3{}_2\,\mathbf{r}_2, \quad d\,\mathbf{r}'_3 = \sigma'^1{}_3\,\mathbf{r}'_1 - \sigma'^3{}_2\,\mathbf{r}'_2;
\end{aligned}
$$

les deux vecteurs différentiels

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \sigma^3{}_2\,\mathbf{r}_1 + \sigma^1{}_3\,\mathbf{r}_2 + \sigma^2{}_1\,\mathbf{r}_3 \\
\mathcal{R}' &= \sigma'^3{}_2\,\mathbf{r}'_1 + \sigma'^1{}_3\,\mathbf{r}'_2 + \sigma'^2{}_1\,\mathbf{r}'_3
\end{aligned}
$$

se nomment, d'après W. Blascke [7a.], *les vecteurs pfaffiens de rotations sinistrorsum* et *dextrorsum* de $\mathcal{T}$. Dans le cas d'une congruence C.T on déduit de (10'), (11) et de la dernière équation (19), que le carré scalaire de $\mathcal{R}$ a pour expression

$$
< \mathcal{R}\mathcal{R} > = \left\{ (\mathrm{B}-\mathrm{B}')^2 + \frac{f^2}{l^2} \right\} (\omega_1 - \omega_2)^2 .
$$

Mais $< \mathcal{R}\mathcal{R} >$ pouvant être considéré comme la forme métrique fondamentale d'une certaine surface de E^3 on peut donc dire qu'à *une congruence* C.T. *il correspond dans* E^3 *une développable isotrope* (circonscrite à la conique absolue de Poncelet).

A propos des formules (22) et (23) de la représentation sphérique, on remarque immédiatement que si l'on a réussi $l' = 1$, alors $\mathbf{r}_3 = \text{const}$, et la congruence $[\mathbf{X}_0\,\mathbf{X}_3]$ est *paratactique sinistrorsum*). On voit donc que cette classe importante de congruences de l'espace P^3_e peut être considérée comme un cas particulier des congruences C.T. Soit maintenant $\hat{\mathcal{T}} \equiv \{\hat{\mathbf{X}}_k\}$ le tétraèdre qui se déduit de $\mathcal{T} \equiv \{\mathbf{X}_k\}$ par un visage elliptique d'axe R et d'angles α, α'. Si

$$
(24) \qquad \mathbf{Q} = \cos\alpha + \mathbf{r}_3 \sin\alpha \,, \ \mathbf{Q}' = \cos\alpha' + \mathbf{r}'_3 \sin\alpha'
$$

sont les deux quaternions déterminant le visage on sait [5a.] que les sommets $\hat{\mathbf{X}}_k$ et les vecteurs sinistrorsum $\hat{\mathbf{r}}_h$ correspondant à $\hat{\mathcal{T}}$ sont donnés par

$$
(25) \qquad \hat{\mathbf{X}}_k = \tilde{\mathbf{Q}} \diamond \mathbf{X}_k \diamond \mathbf{Q}' \ , \ (25') \ \hat{\mathbf{r}}_h = \tilde{\mathbf{Q}} \diamond \mathbf{r}_h \diamond \mathbf{Q}.
$$

En introduisant l'angle de rotation $\psi = \alpha + \alpha'$ et l'angle de glissement $\psi' = \alpha - \alpha'$ du vissage en jeu, il résulte de (24) et (25)

$$(26)\qquad \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_0 \\ \hat{\mathbf{X}}_1 \\ \hat{\mathbf{X}}_2 \\ \hat{\mathbf{X}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi' & 0 & 0 & -\sin\psi' \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \sin\psi' & 0 & 0 & \cos\psi' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 \end{bmatrix}$$

et de (25′)

$$(27)\qquad \begin{aligned} \hat{\sigma}'^1{}_3 &= \sigma'^3{}_2 \sin 2\alpha' + \sigma'^1{}_3 \cos 2\alpha' \\ \hat{\sigma}^1{}_3 &= \sigma^3{}_2 \sin 2\alpha + \sigma^1{}_3 \cos 2\alpha \end{aligned}$$

Grâce à (27) et compte tenu de $\omega^1{}_3 = \omega^2{}_0$ on obtient

$$2\,\hat{\omega}^2{}_0 = \omega^3{}_2 (\sin 2\alpha' - \sin 2\alpha) + \omega^1{}_0 (\sin 2\alpha' + \sin 2\alpha) + 2\,\omega^2{}_0 \cos 2\alpha',$$

$$2\,\hat{\omega}^1{}_0 = \omega^3{}_2 (\cos 2\alpha' + \cos 2\alpha) + \omega^1{}_0 (\sin 2\alpha' - \sin 2\alpha) + 2\,\omega^2{}_0 \cos 2\alpha',$$

et ces deux équations montrent aussitôt que la condition pour $\mathfrak{L}$ d'être une congruence C.T. (ce qui s'exprime par $\hat{\omega}^2{}_0 = \hat{\omega}^1{}_0$) est $\sin 2\alpha = 0$.

On peut donc dire que le vissage qui conserve le caractère conforme du tétraèdre rectangle attaché aux rayons d'une congruence C.T. est *tel que l'angle de rotation est égal et signe contraire à l'angle de glissement*. Un pareil vissage sera désigné par V_c et la matrice de la transformation (26) montre facilement que ces vissages *forment un groupe*.

2. Au N° **1** on a vu que les surfaces $(\mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{F}_4)$, et $(\mathbf{F}_2)$, $(\mathbf{F}_3)$sont **supplé**mentaires, les formules (13), (15) et (15′) permettant immédiatement le calcul de leurs formes symétriques $\mid\,\mid_{i/k}$ (on sait que dans $P^3{}_e$ deux surfaces supplémentaires ont la même forme symétrique). On obtient ainsi respectivement pour les couples $(\mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{F}_4)$ et $(\mathbf{F}_2)$, $(\mathbf{F}_3)$ les formes suivantes :

$$(28)\qquad \mid\,\mid_{1/4} = \,<d\,\mathbf{F}_1\,d\,\mathbf{F}_4> \,= (\omega_1, \omega_2) \begin{pmatrix} -2\,A & 0 \\ 0 & 2C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

$$(28')\qquad \mid\,\mid_{2/3} = \,<d\,\mathbf{F}_2\,d\,\mathbf{F}_3> \,= (\omega_1, \omega_2) \begin{pmatrix} 2\,C' & 0 \\ 0 & -2A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

La simple lecture des expressions de $\mid\,\mid_{1/4}$ et $\mid\,\mid_{2/3}$ montre aussitôt que si

$$(29)\qquad A\,A' = C\,C'$$

les deux congruences $[\mathbf{X}_0\,\mathbf{X}_3]$, $[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2]$ qui forment le couple conforme et supplémentaire de Tichoski, *sont des congruences W*.

La relation (29) ajoutée aux relations (16) et (16′) nous permet de distinguer deux types de solutions :

a) $\qquad A' = C,\ A = C',\ B = B'$

b) $\qquad A = C,\ A' = C',\ A + B = A' + B'$

Considérons en premier lieu la solution a); le système d'équation de Pfaff (Σ) du numéro précédent devient actuellement

$$
(30) \qquad
\begin{aligned}
\omega^1{}_0 &= l\,(\omega_2 - \omega_1), \\
\omega^2{}_0 &= -\,\omega_1 - \omega_2, \\
\Omega_1 &= (A + B)\,\omega_1 + (B + C)\,\omega_2, \\
2\,\frac{d\,l}{l^2} &= (B - A)\,\omega_1 + (C - B)\,\omega_2, \\
[d\,(B - A),\ \omega_1] - [d\,(B - C),\ \omega_2] &= \frac{(1-l^2)}{l}\,B\,(A - C)\,[\omega_2\ \omega_1]\,. \\
[d\,(B + A),\ \omega_1] + [d\,(B + C),\ \omega_2] &= -\frac{(1-l^2)}{l}\left\{4 + (A+B)\,(B+C)\right\}[\omega_2\ \omega_1]
\end{aligned}
$$

Ici la matrice polaire dont les colonnes correspondent aux trois formes $d\,A$, $d\,B$, $d\,C$ est

$$
M_p = \begin{pmatrix} -\,\omega_1 & \omega_2 - \omega_1 & -\,\omega_2 \\ -\,\omega_1 & \omega_2 + \omega_1 & -\,\omega_2 \end{pmatrix}.
$$

Son rang étant 2 (égal au nombre des équations quadratiques) les nombres caractéristiques sont $r = 7$ $s_0 = 4$, $s_1 = 2$ et le système est en involution.

Par conséquent les congruences C.T. du type W en question, que nous noterons pour abréger congruences C.T. W_1, dépendent elles aussi d'une fonction arbitraire de 2 arguments. Si on se rapporte maintenant à l'équation (18″) on constate que l'on a $\omega^2{}_1 = \omega^3{}_0$, d'où il résulte, en vertu de (22) et (23), que l'on a $\mathbf{r}_1 = \text{const.}$ On voit donc que le tétraèdre $\mathcal{T}_c$ attaché aux rayons d'une congruence C.T. W_1 jouit de la propriété importante suivant laquelle sa *première arête secondaire décrit une congruence paratactique.* Il est facile de se rendre compte en se rapportant aux équations [(10′) ...... (22)] et (23), que la première arête secondaire est la seule qui peut décrire une congruence paratactique et que réciproquement si cette propriété a lieu l'arête principale de $\mathcal{T}_c$ décrit une congruence C.T. De plus nous allons montrer que, dans ces conditions, la congruence décrite par la seconde arête secondaire de $\mathcal{T}_c$ est encore une congruence W.

En premier lieu les égalités (13), (15) et (15′) donnent dans le cas de l'hypothèse a)

$$
(31) \quad < d\,\mathbf{F}_1\,d\,\mathbf{F}_1 > = (\omega_1, \omega_2)\begin{pmatrix} 4 + B^2 & B\,C \\ B\,C & 4 + B^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = < d\,\mathbf{F}_4\,d\,\mathbf{F}_4 >.
$$

$$
(31') \quad < d\,\mathbf{F}_2\,d\,\mathbf{F}_2 > = (\omega_1, \omega_2)\begin{pmatrix} A^2 & A\,B \\ A\,B & 4 + B^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = < d\,\mathbf{F}_3\,d\,\mathbf{F}_3 >
$$

En se rappelant que ($\mathbf{F}_4$) et ($\mathbf{F}_3$) sont respectivement les surfaces supplémentaires de ($\mathbf{F}_1$) et ($\mathbf{F}_2$), les formes métriques fondamentales cidessus, permettent d'énoncer la proposition suivante : *Chacune des nappes focales d'une congruence* C.T. W_1 *est isométrique à la surface supplé-*

mentaire de l'autre nappe. Il résulte immédiatement de cette proposition et d'une propriété connue de l'espace P^3_e (dans cet espace les courbures relatives de deux surfaces supplémentaires sont inverses) que les courbures relatives des nappes focales d'une congruence C.T. W_1 *sont inverses.* Cette propriété est d'ailleurs visiblement aussi une conséquence du caractère $\mathfrak{J}$ de toute congruence C.T. (voir relation (8)) et de la formule générale de BIANCHI [8a.] pour les congruences W de P^3_e à savoir

$$K_1 K_2 = \left(\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta}\right)^4$$

(où K_1, K_2 sont les courbures relatives des deux nappes focales).

Abordons maintenant le problème que nous avons en vue.

Soit $\mathfrak{T}' \equiv \{X'_k\}$ le tétraèdre rectangle attaché aux rayons de la congruence $[X_0 X_2]$ et ω'^i_k les pfaffiens correspondant aux équations fondamentales de $\mathfrak{T}'$. A la substitution de tétraèdre

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} X_0 & X_3 & X_1 & X_2 \\ \downarrow X'_0 & X'_3 & X'_2 & X'_3 \downarrow \end{vmatrix}$$

(de manière que $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ ait même orientation) il correspond la substitution

$$(32') \qquad \begin{vmatrix} \omega^1{}_0 & \omega^2{}_0 & \omega^3{}_0 & \omega^3{}_2 & \omega^1{}_3 & \omega^2{}_1 \\ \downarrow \omega'^2{}_0 & \omega'^3{}_0 & \omega'^1{}_0 & \omega'^1{}_3 & \omega'^2{}_1 & \omega'^3{}_2 \downarrow \end{vmatrix}$$

et comme, ainsi qu'on l'a vu $\omega^2{}_1 = \omega^3{}_0$, il résulte de (32′) compte tenu de (10′) que

$$(33) \qquad \omega_0'^1 = \omega_2'^3, \quad \omega_0'^2 = -l^2 \omega_3'^1, \quad \omega_0'^3 = \omega_1'^2.$$

Dans ces conditions, si l'on désigne par $2\delta'$ et $2\varphi'$ respectivement la distance focale et l'angle focal de la congruence $[X_0 X_2]$, les formules générales [5a.]

$$[\omega_0'^1 \omega_0'^2] \cos^2\delta' - \left\{[\omega_9'^1 \omega_2'^3] + [\omega_0'^2 \omega_3'^1]\right\} \cos\delta' \sin\delta' + [\omega_2'^3 \omega_3'^1] \sin^2\delta' = 0$$
$$[\omega_0'^1 \omega_3'^1] \cos^2\varphi' - \left\{[\omega_0'^1 \omega_2'^3] - [\omega_0'^2 \omega_3'^1]\right\} \cos\varphi' \sin\varphi' + [\omega_2'^3 \omega_0'^2] \sin^2\varphi' = 0$$

donnent aussitôt compte tenu de (33)

$$(33') \qquad \operatorname{tg}^2\delta' = l^2 \ , \ \operatorname{tg}^2\varphi' = \frac{1}{l^2}$$

Cela étant et moyennant le changement de tétraèdre (32) on trouve que les foyers F'_k, $(k = 1, 2)$ de l'arête $\{X_0 X_2\}$ et les foyers F'_h, $(h = 3, 4)$ de l'arête $\{X_1 X_3\}$ (qui est la supplémentaire de la précédente) ont pour expressions :

$$(34) \qquad \begin{aligned} f F'_1 &= X_0 + l X_2 \quad , \quad f F'_4 = X_1 + l X_3 \\ f F'_2 &\quad X_0 - l X_2 \quad , \quad f F'_3 = X_1 - l X_3. \end{aligned}$$

Avec l'aide de la matrice M_c donnée par (1) on déduit de la différentiation de (34)

$$
(35) \qquad
\begin{aligned}
f\, d\, \mathbf{F}'_1 &= \left(\omega^1{}_3 + \frac{dl}{f^2}\right)(\mathbf{X}_2 - l\mathbf{X}_0) + (\omega^2{}_1 + l\omega^3{}_2)(\mathbf{X}_2 - l\mathbf{X}_1) \\
f\, d\, \mathbf{F}'_4 &= (\omega^2{}_1 - l\omega^3{}_2)(\mathbf{X}_2 - l\mathbf{X}_0) - \left(\omega^1{}_3 - \frac{dl}{f^2}\right)(\mathbf{X}_3 - l\,\mathbf{X}_1) \\
f\, d\, \mathbf{F}'_2 &= \left(\omega^1{}_3 - \frac{dl}{f^2}\right)(\mathbf{X}_2 + l\mathbf{X}_2) + (\omega^2{}_1 - l\omega^3{}_2)(\mathbf{X}_2 + l\mathbf{X}_1) \\
f\, d\, \mathbf{F}'_3 &= (\omega^2{}_1 + l\,\omega^3{}_2)(\mathbf{X}_2 + l\mathbf{X}_2) - \left(\omega^1{}_3 + \frac{dl}{f^2}\right)(\mathbf{X}_3 + l\mathbf{X}_1)\,;
\end{aligned}
$$

en procédant comme au N° **1** on constate que les surfaces $(\mathbf{F}'_1)$, $(\mathbf{F}'_4)$ et les surfaces $(\mathbf{F}'_2)$, $(\mathbf{F}'_3)$ sont supplémentaires, et leurs formes symétriques étant

$$
\begin{aligned}
\|'_{2/3} &= -\,2\,l\,\omega^3{}_2\,\omega^1{}_3 + 2\,\omega^2{}_1\,\frac{dl}{f^2} \\
\|'_{1/4} &= 2\,l\,\omega^3{}_2\,\omega^1{}_3 - 2\,\omega^2{}_1\,\frac{dl}{f^2}
\end{aligned}
$$

la congruence $[\mathbf{X}_0\,\mathbf{X}_3]$ (de même évidemment que sa supplémentaire) est conformément à l'assertion faite *une congruence W*.

Mais il y a plus. Dans le cas de l'hypothèse a) les équations (13) deviennent

$$
(35) \qquad
\begin{aligned}
d\,\mathbf{F}_1 &= -\,2\,\omega_1\,\mathbf{R}_4 + (C\,\omega_2 + B\,\omega_1)\,\mathbf{R}_1, \\
d\,\mathbf{F}_4 &= (A\,\omega_1 + B\,\omega_2)\,\mathbf{R}_4 + 2\,\omega_2\,\mathbf{R}_1, \\
d\,\mathbf{F}_2 &= 2\,\omega_2\,\mathbf{R}_3 + (A\,\omega_1 + B\,\omega_2)\,\mathbf{R}_2, \\
d\,\mathbf{F}_3 &= -\,(C\,\omega_2 + B\,\omega_1)\,\mathbf{R}_3 + 2\,\omega_1\,\mathbf{R}_2;
\end{aligned}
$$

en introduisant les pfaffiens

$$
(36) \qquad
\begin{aligned}
&\Pi_1 = -\,2\,\omega_1\ ,\ \Pi_2 = C\,\omega_2 + B\,\omega_1\ ,\ \Pi_3 = -\,2\,\omega_2\ ,\ \Pi_4 = A\,\omega_1 + B\,\omega_2 \\
&\Pi'_1 = 2\,\omega_2\ ,\ \Pi'_2 = A\,\omega_1 + B\,\omega_2\ ,\ \Pi'_3 = -\,2\,\omega_1\ ,\ \Pi'_4 = -\,C\,\omega_2 - B\,\omega_1
\end{aligned}
$$

les lignes de courbure sur $(\mathbf{F}_1)$ et $(\mathbf{F}_2)$ sont comme on sait [5a.], respectivement données par

$$
\Pi_1\,\Pi_3 + \Pi_2\,\Pi_4 = 0 \quad , \quad \Pi'_1\,\Pi'_3 + \Pi'_2\,\Pi'_4 = 0,
$$

et en explicitant ces équations moyennant les expressions (36) on constate qu'*elles coïncident* et s'écrivent

$$
(37) \qquad AB\,(\omega_1)^2 + (B^2 + AC + 4)\,\omega_1\,\omega_2 + BC\,(\omega_2)^2 = 0.
$$

Par un calcul analogue on constate que les lignes de courbure se correspondent aussi sur les nappes focales de la congruence $[\mathbf{X}_0\,\mathbf{X}_2]$ et satisfont à la *même* équation (37). Les congruences W que l'on vient d'étudier jouissent donc, quand à leurs lignes de courbure, de la même propriété que les congruences de THYBAUT, et l'on est ainsi conduit à chercher si les nappes focales $(\mathbf{F}_i)$ ou $(\mathbf{F}'_i)$, $(i = 0, 1, 2, 3)$ peuvent devenir minimales (rappelons à ce propos que le caractère minimal dans l'espace P^3_e se conserve par dualité). Les conditions pour que $(\mathbf{F}_1)$ soit minimale sont comme on sait [5a.]

$$[\Pi_1 \Pi_3] + [\Pi_2 \Pi_4] = 0 \quad , \quad [\Pi'_1 \Pi'_3] + [\Pi'_2 \Pi'_4] = 0;$$

en explicitant moyennant (36) on trouve *la même* condition

$$B^2 + 4 - AC = 0. \tag{38}$$

Si on se rapporte maintenant au système d'équations de PFAFF (30) il est aisé de voir que les nombres caractéristiques sont $r = 6$, $s_0 = 4$, $s_1 = 2$ et que par conséquent le système est en involution.

Les congruences C.T. W_1 qui sont aussi des congruences de THYBAUT existent donc et dépendent de *deux fonctions arbitraires d'un argument*, tout comme les congruences de THYBAUT de l'espace E^3 [1a.].

Compte tenu de la relation (38) on vérifie facilement sur les égalités (31) et (31′) que la correspondance entre les nappes focales $(\mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{F}_2)$ et $(\mathbf{F}_3)$, $(\mathbf{F}_4)$ est *conforme* (propriété bien connue des congruences de THYBAUT), et valable tant pour l'espace E^3 que pour l'espace P^3_e. Mais ce qu'il y a de plus important c'est le fait qu'en vertu du caractère minimal des surfaces $(\mathbf{F}_i)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ et de l'isométrie des couples $(\mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{F}_3)$ et $(\mathbf{F}_2)$, $(\mathbf{F}_4)$, les déplacements $\mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{F}_3$ et $\mathbf{F}_2 \rightarrow \mathbf{F}_4$ sont, en vertu d'une proposition de BIANCHI [8a.], des *glissements elliptiques orthogonaux*. Cette propriété appartient comme le montre BIANCHI aux congruences de THYBAUT de l'espace P^3_e (que nous dirons congruences de THYBAUT-BIANCHI) pour lesquelles on a $\delta = \pm \varphi$, c'est-à-dire, suivant notre terminologie, pour celles qui présentent le *caractère* $\mathfrak{J}$.

Par ailleurs les courbures relatives K'_1 et K'_2 des nappes focales $(\mathbf{F}'_1)$ et $(\mathbf{F}'_2)$ ont pour expressions en vertu de (34′)

$$K'_1 = \frac{\left[\omega^1_3 - \dfrac{dl}{f^2}, \omega^2_1 - l\,\omega^3_2\right]}{\left[\omega^1_3 + \dfrac{dl}{f^2}, \omega^2_1 + l\,\omega^3_2\right]} \; , \quad K'_1 = \frac{1}{K'_2} \, .$$

et en explicitant moyennant (11) et compte tenu de l'expression (17) de ω^2_1 dans l'hypothèse a) il vient

$$K' = \frac{2\,A - 2C + AC - 4 - B^2}{2\,A - 2\,C - AC + 4 + B^2}$$

On voit donc que si la relation (38) a lieu la congruence $[\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_2]$ (de même que sa supplémentaire $[\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_3]$) est une congruence B (congruence de BIANCHI) dont les nappes focales ont les *courbures relatives égales à + 1*.

En notant pour abréger par B_{+1} ce type de congruences, on trouve par un calcul analogue mais que nous ne développerons pas, que si l'on a

$$(39) \qquad A + C = 0$$

les deux surfaces (F'_i), $(i = 1, 2)$ sont simultanément minimales.

Or, il est aisé de voir que dans le cas où la relation (39) a lieu, le rang de la matrice polaire du système (30) est encore 2 et par conséquent le système dépend, comme dans le cas précédent, de deux fonctions arbitraires d'un argument. Il convient toutefois de remarquer (33'), que les deux congruences de THYBAUT $[\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_2]$, $[\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_3]$ que l'on vient d'obtenir, ne présentent plus le caractère $\mathfrak{J}$ (autrement dit ne sont plus des congruences de THYBAUT-BIANCHI). En échange, le calcul des courbures relatives des surfaces $(\mathbf{F}_1)$ et $(\mathbf{F}_2)$ donne moyennant (35) et (36)

$$(39') \qquad K_1 = \frac{[\Pi_3 \Pi_4]}{[\Pi_1 \Pi_2]} = -\frac{A}{C}, \quad K_2 = \frac{[\Pi'_3 \Pi'_4]}{[\Pi'_1 \Pi'_2]} = -\frac{C}{A},$$

d'où il résulte que si la relation (39) est satisfaite, la congruence $[\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_3]$ (et évidemment aussi la supplémentaire $[\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2]$) est une congruence B_{+1}. Signalons à ce propos que les surfaces de courbure relative = 1 (ou si l'on préfère de courbure absolue = 2) joue un rôle important dans la construction des *systèmes doublement cycliques* de l'espace P^3_e, [9a.], [3b.], dont l'étude peut ainsi être rattachée à celle des congruences C.T. W_1. Nous n'insisterons pas davantage sur ce problème et pour terminer ce paragraphe nous énoncerons le résultat suivant :

Si la première arête secondaire du tétraèdre $\mathcal{T}_e$ attaché aux rayons d'une congruence C.T. décrit une congruence paratactique (c'est le seul cas possible) *la congruence C.T. en jeu* (congruence C.T. W_1) *et la congruence décrite par la seconde arête secondaire de $\mathcal{T}_e$ sont toutes les deux des congruences W. La qualité pour une congruence C.T. W_1 d'avoir un nappe focale minimale entraîne pour cette congruence la propriété d'être du type de Thybaut-Bianchi* (congruence spécifique à l'espace P^3_e) *et de dépendre de deux fonctions arbitraires d'un argument. Dans ce cas la congruence W décrite par la seconde arête secondaire de $\mathcal{T}_e$ est une congruence B_{+1}* (congruence de Bianchi à nappes focales de courbures relatives égales à + 1), *et inversement si cette dernière congruence est de Thybaut, la congruence C.T.W_1 correspondante est une congruence B_{+1}.*

3. Nous allons compléter ces résultats par quelques considérations de nature projective qui découlent du fait bien connu que le K-espace (espace de KLEIN) osculateur du second ordre à une congruence W est 4-dimensionnel. Pour mieux étudier les propriétés des variétés linéaires qui nous intéressent introduisons le repère réglé associé au repère ponctuel $\mathcal{T}_e \equiv \{\mathbf{X}_k\}$. Dans le but d'adapter l'espace de KLEIN à une métrique elliptique, nous normerons [3c.] les coordonnées plückeriennes p^i, $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ du K-point p de manière à avoir

$$< p\, p> = 1, \quad (< \; > = \text{produit scalaire}).$$

Il est nécessaire de rappeler [3c.] que les coordonnées p^i correspondent au sextuple p^{ji} dans l'ordre

$$p^1 = p^{14},\; p^2 = p^{21}, \qquad p^3 = p^{34},\; p^4 = p^{23}, \qquad p^5 = p^{31},\; p^6 = p^{12},$$

et que le symbole $p \times p$ qui représente le produit géométrique de deux points a pour expression

$$\mathbf{p} \times \bar{\mathbf{p}} = p^1\, p^{-4} + p^2\, p^{-5} + p^2\, p^{-5} + \; p^3\, p^{-6} + p^4\, p^{-6} + p^5\, p^{-2} + p^6\, p^{-3}.$$

Ceci rappelé et en notant comme suit les K-points images des arêtes de $\{\mathbf{X}_k\}$

$$(40) \qquad \begin{array}{l} \mathbf{x}^{(1)} \equiv \{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1\},\; \mathbf{x}^{(2)} \equiv \{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_2\},\; \mathbf{x}^{(3)} \equiv \{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_3\} \\ \mathbf{x}^{*(1)} \equiv \{\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\},\; \mathbf{x}^{*(2)} \equiv \{\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_1\},\; \mathbf{x}^{*(3)} \equiv \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}, \end{array}$$

le repère réglé associé à $\{\mathrm{X}_k\}$ sera le *simplex rectangulaire normé*

$$\mathrm{S}_6 \equiv \{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}, \mathbf{x}^{*(1)}, \mathbf{x}^{*(2)}, \mathbf{x}^{*\,(3)}\}$$

dont les sommets satisfont aux relations

$$(41) \quad \begin{array}{l} \mathbf{x}^{(l)} \times \mathbf{x}^{*(k)} = \begin{cases} 0 \; (l \neq k) \\ 1 \; (l = k) \end{cases} \; <\mathbf{x}^{(l)}\, \mathbf{x}^{(k)}> = \begin{cases} 0 \; (l \neq k) \\ 1 \; (l = k) \end{cases} \; <\mathbf{x}^{*(l)}\, \mathbf{x}^{*(k)}> = \begin{cases} 0 \; (l \neq k) \\ 1 \; (l = k) \end{cases} \\ <\mathbf{x}^{(l)}\, \mathbf{x}^{*(k)}> = 0. \end{array}$$

Si on introduit maintenant les fonctions

$$m_1 = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2} \quad , \quad m_2 = \frac{\mathrm{B} + \mathrm{C}}{2}$$

et les pfaffiens

$$\tilde{\omega}_1 = \omega_1 + \omega_2, \;\; \tilde{\omega}_2 = \omega_1 - \omega_2, \;\; \tilde{\omega}_3 = m_1\, \omega_1 + m_2\, \omega_2,$$

on déduit à partir de (40) et moyennant la matrice M_c de (1)

$$(42) \quad d \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \\ \mathbf{x}^{(3)} \\ \mathbf{x}^{*(1)} \\ \mathbf{x}^{*(2)} \\ \mathbf{x}^{*(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\omega}_3 & \tilde{\omega}_1 & 0 & \tilde{\omega}_3 & \tilde{\omega}_1 \\ -\tilde{\omega}_3 & 0 & \frac{\tilde{\omega}_2}{l} & -\tilde{\omega}_3 & 0 & -l\tilde{\omega}_2 \\ -\tilde{\omega}_1 & -\frac{\tilde{\omega}_2}{l} & 0 & -\tilde{\omega}_1 & l\,\tilde{\omega}_2 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_3 & \tilde{\omega}_1 & 0 & \tilde{\omega}_3 & \tilde{\omega}_1 \\ -\tilde{\omega}_3 & 0 & -l\tilde{\omega}_2 & -\tilde{\omega}_3 & 0 & \frac{\tilde{\omega}_2}{l} \\ -\tilde{\omega}_1 & l\,\tilde{\omega}_2 & 0 & -\tilde{\omega}_1 & -\frac{\tilde{\omega}_2}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \\ \mathbf{x}^{(3)} \\ \mathbf{x}^{*(1)} \\ \mathbf{x}^{*(2)} \\ \mathbf{x}^{*(3)} \end{bmatrix}$$

Remarquons que si l'on note par $\mathfrak{M}_c$ la matrice du second membre de (42) on a

$$\mathfrak{M}_c + \mathfrak{M}_c^{\mathrm{T}} = 0$$

On peut donc considérer le simplex S_6 comme attaché à une certaine variété de l'espace $P^5{}_e$, et l'étude de cette variété ne serait pas dépourvue d'intérêt. Revenons maintenant au problème que nous avons en vue, désignant $\mathbf{x}_{,1}$ les dérivées covariante du 1[er] ordre par rapport à ω_1 et ω_2 on déduit de (42)

$$
(43)\qquad
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{,1}{}^{(3)} &= -\ \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{*(1)} + l\ \mathbf{x}^{*(2)} - \frac{\mathbf{x}^{(2)}}{l} \\
\mathbf{x}_{,2}{}^{(3)} &= -\ \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{*(1)} - l\ \mathbf{x}^{*(2)} + \frac{\mathbf{x}^{(2)}}{l} \\
\mathbf{x}_{,1}{}^{*(3)} &= -\ \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{*(1)} - \frac{\mathbf{x}^{*(2)}}{l} + l\ \mathbf{x}^{(2)} \\
\mathbf{x}_{,2}{}^{*(3)} &= -\ \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{*(1)} + \frac{\mathbf{x}^{*(2)}}{l} - l\ \mathbf{x}^{(2)} \\
\mathbf{x}_{,1}{}^{(2)} &= -\ m_1\ (\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{*(1)}) - l\ \mathbf{x}^{*(3)} + \frac{\mathbf{x}^{(3)}}{l} \\
\mathbf{x}_{,2}{}^{(2)} &= -\ m_2\ (\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{*(1)}) + l\ \mathbf{x}^{*(3)} - \frac{\mathbf{x}^{(3)}}{l} \\
\mathbf{x}_{,1}{}^{*(2)} &= -\ m_1\ (\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{*(1)}) + \frac{\mathbf{x}^{*(3)}}{l} - l\ \mathbf{x}^{(3)} \\
\mathbf{x}_{,2}{}^{*(2)} &= -\ m_2\ (\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{*(1)}) - \frac{\mathbf{x}^{*(3)}}{l} + l\ \mathbf{x}^{(3)} \\
\mathbf{x}_{,1}{}^{(1)} &= -\ \mathbf{x}^{(3)} + \mathbf{x}^{*(3)} + m_1\ (\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{x}^{*(2)}) \\
\mathbf{x}_{,2}{}^{(1)} &= -\ \mathbf{x}^{(3)} + \mathbf{x}^{*(3)} + m_2\ (\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{x}^{*(2)}) \\
\mathbf{x}_{,1}{}^{*(1)} &= -\ \mathbf{x}^{(3)} + \mathbf{x}^{*(3)} + m_1\ (\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{x}^{*(2)}) \\
\mathbf{x}_{,2}{}^{*(1)} &= -\ \mathbf{x}^{(3)} + \mathbf{x}^{*(3)} + m_2\ (\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{x}^{*(2)})
\end{aligned}
$$

Mais l'on sait [10a.] que le complexe $\mathbf{C}$ qui a un contact d'ordre 2 au moins avec une congruence ayant pour K image le point $\mathbf{x}$ est déterminé par

$$(44)\qquad \mathbf{C} \times \mathbf{x} = 0\ ,\ \mathbf{C} \times \mathbf{x}_{,k} = 0\ ,\ \mathbf{C} \times \mathbf{x}_{,ik} = 0$$

où $\mathbf{x}_{,ik}$ sont les dérivées secondes covariantes de $\mathbf{x}$. Cela étant, et en se rapportant aux équations (43), il est aisé de voir que le terme $\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{*(1)}$ figurera aussi dans l'expression des dérivées $\mathbf{x}_{,ik}{}^{(h)}$, $(h = 2, 3)$, et en tenant compte de (41) on constate que les relations (44) sont satisfaites pour $\mathbf{x} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{x}^{(2)} \\ \mathbf{x}^{(3)} \end{matrix} \right.$ et pour $\mathbf{C} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{*(1)}$.

Mais l'expression de la matrice $\mathfrak{M}_c$ montre immédiatement que l'on a $d\,\mathbf{x}^{(1)} = d\,\mathbf{x}^{*(1)}$ et que par conséquent le complexe $\mathbf{C}$ est fixe. On peut donc compléter le résultat de la fin du N° 2 par la propriété suivante : *Toutes les congruences* W *décrites par les arêtes du tétraèdre* $\mathcal{T}$, *attaché aux rayons d'une congruence* C.T. W_1 *appartiennent à un même complexe linéaire fixe.*

4. Considérons maintenant la solution *b*) dont il a été question au début du N° **2**, c'est-à-dire supposons que l'on a

$$A = C \;,\; A' = C' \;,\; A + B = A' + B' \tag{45}$$

Le système d'équation de Pfaff (2) du N° **1** devient actuellement

$$\begin{aligned}
&\omega_0{}^1 = l\,\bar{\omega}_2\\
&\omega_0{}^2 = -\,\bar{\omega}_1\\
&2\frac{dl}{f^2} = (A - B')\,\bar{\omega}_2\\
&\Omega_1 = (A + B)\,\bar{\omega}_1\\
&\Omega_2 = (B' - B)\,\bar{\omega}_2\\
&[\Omega'\,\bar{\omega}_2] = 0\\
&[\Omega''\,\bar{\omega}_1] = \frac{(l^2-1)}{2\,l}\left\{4 + (A+B)^2\right\}[\bar{\omega}_2\,\bar{\omega}_1]\\
&[\Omega'''\,\bar{\omega}_2] = 0,
\end{aligned}\tag{46}$$

où l'on a posé

$$\begin{gathered}\bar{\omega}_1 = \omega_2 + \omega_1, \quad \bar{\omega}_2 = \omega_2 - \omega_1\,,\\
\Omega' = d\,(A - B'),\; \Omega'' = d\,(A + B),\; \Omega''' = d\,(B' - B).\end{gathered}\tag{46'}$$

La matrice polaire des équations quadratiques (46) dont les colonnes correspondent respectivement aux formes Ω', Ω'', Ω''' est

$$\begin{pmatrix} \bar{\omega}_2 & 0 & 0\\ 0 & \bar{\omega}_1 & 0\\ 0 & 0 & \bar{\omega}_2 \end{pmatrix},$$

et son rang étant 3, on conclut que le système (46) est en involution, sa solution générale *dépendant de 3 fonctions arbitraires d'un argument.*

Or nous avons vu au début du N° **2** que les congruences C.T. déterminées par le système (40) sont aussi du type W, et pour les distinguer des précédentes nous les désignerons par *congruences C.T.* W_2.

Une première constatation à faire résulte des formules (39') qui, combinées avec (45), montrent aussitôt que les nappes focales (F_i), $(i = 1, 2, 3, 4)$ sont des surfaces de Bianchi, ou plus brièvement des *surfaces B* (1) (surfaces de courbure relative $= -1$ et par conséquent isométriques au plan euclidien). On peut donc dire que la congruence C.T. W_2 et sa duale sont des *congruences* B_{-1}, et ces congruences fournissent un exemple de congruences B_{-1} qui ne *possèdent pas le caractère normal.* Ces dernières congruences sont comme on le sait normales à des surfaces B_1 et à titre de vérification nous montrerons que les surfaces orthogonales aux congruences normales $[\mathbf{F}_1\,\mathbf{F}_4]$ *et* $[\mathbf{F}_2\,\mathbf{F}_3]$ sont des surfaces B. Les calculs étant analogues considérons p. ex. la congruence $[\mathbf{F}_1\,\mathbf{F}_2]$ sera décrite par le point

$$\mathbf{B} = \cos c\,\mathbf{F}_1 + \sin c\,\mathbf{F}_4 \quad (c = \text{const.})$$

(1) C'est Bianchi qui a considéré la première fois cette classe de surfaces. Voir L. Bianchi, Opere VIII, Roma, 1958.

dont le copoint est

$$\mathbf{B}^* = \sin c\, \mathbf{F}_1 - \cos c\, \mathbf{F}_4,$$

en tenant compte (13), (15), (15′) et (45) la différentiation de **B** et **B*** donne ·

$$d\,\mathbf{B} = \{-2\,\omega_1 \cos c + (A\,\omega_1 + B\,\omega_2) \sin c\}\, \mathbf{R}_4 + \{2\,\omega_2 \sin c + (B\,\omega_1 + A\,\omega_2) \cos c\}\, \mathbf{R}_1$$

$$d\,\mathbf{B}^* = \{-2\,\omega_1 \sin c - (A\,\omega_1 + B\,\omega_2) \cos c\}\, \mathbf{R}_4 + \{-2\,\omega_2 \cos c + (B\,\omega_1 + A\,\omega_2\} \sin c\}\, \mathbf{R}_1$$

En introduisant les pfaffiens

$$(47) \qquad \begin{aligned} \beta_1 &= (A \sin c - 2 \cos c)\, \omega_1 + B\, \omega_2 \sin c, \\ \beta_2 &= B\, \omega_1 \cos c + (A \cos c + 2 \sin c)\, \omega_2, \\ \beta^*_1 &= (2 \cos c - A \sin c)\, \omega_2 - B\, \omega_1 \sin c, \\ \beta^*_2 &= -(2 \sin c + A \cos c)\, \omega_1 - B\, \omega_2 \cos c, \end{aligned}$$

les courbures relatives de (**B**) et (**B***) sont exprimées par

$$K_B = \frac{[\beta_1\, \beta_2]}{[\beta^*_1\, \beta^*_2]}\ , \quad K_{B^*} = \frac{[\beta^*_1\, \beta^*_2]}{[\beta_1\, \beta_2]}\ ;$$

en explicitant moyennant (47) il vient

$$[\beta_1\, \beta_2] = \{(A^2 - B^2 - 4) \cos c\ \sin c - 2\, A \cos c\}\, [\omega_1\, \omega_2] = -[\beta_1^*\, \beta_2^*],$$

et la propriété que nous avions en vue est vérifiée.

En ce qui concerne la première arête secondaire du tétraèdre $\mathcal{T}_e$ attaché aux rayons d'une congruence C.T. W_2, on peut faire la remarque suivante : moyennent les équations (11) et (46′) les deux dernières équations linéaires du système (46) peuvent s'écrire

$$(48) \qquad \omega^3{}_0 + \omega^2{}_1 = -(A + B)\, \omega^1{}_3, \quad \omega^3{}_0 - \omega^2{}_1 = l\,(B - B')\, \omega^3{}_2.$$

Or de (48) résulte immédiatement l'équation quadratique

$$[\omega^2{}_0\, \omega^2{}_1] + [\omega^1{}_3\, \omega^3{}_0] = 0,$$

et l'on constate, à l'aide des équations de structure de l'espace $P^3{}_e$, que $\omega^1{}_0$ est une différentielle totale exacte. Désignons maintenant par $\overline{\mathcal{T}} \equiv \{\overline{\mathbf{X}}_k\}$ le tétraèdre rectangle attaché aux rayons de la congruence $[\mathbf{X}_0\, \mathbf{X}_1]$ et par $\overline{\omega}^i{}_k$ les pfaffiens correspondant aux équations fondamentales de $\overline{\mathcal{T}}$.

A la substitution

$$\left| \begin{matrix} \mathbf{X}_0 & \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_1 \\ \overline{\mathbf{X}}_0 & \overline{\mathbf{X}}_1 & \overline{\mathbf{X}}_2 & \overline{\mathbf{X}}_3 \end{matrix} \right|$$

correspond le changement

$$\left| \begin{matrix} \omega_0{}^2 & \omega_0{}^3 & \omega_0{}^1 & \omega_3{}^1 & \omega_1{}^2 & \omega_2{}^3 \\ \overline{\omega}_0{}^1 & \overline{\omega}_0{}^2 & \overline{\omega}_0{}^3 & \overline{\omega}_2{}^3 & \overline{\omega}_3{}^1 & \overline{\omega}_1{}^2 \end{matrix} \right| ,$$

et en vertu de ce qui vient d'être dit plus haut $\overline{\omega}^3{}_0$ est une diférentielle totale exacte. En invoquant maintenant une propriété connue des équations fondamentales relatives à une congruence de l'espace $P^3{}_e$ [7 b.], on conclut que la congruence $[\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_1]$ est normale et que la congruence $[\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_3]$ est *pseudo-normale*. Montrons maintenant que la classe des congruences C.T. W_2 contient aussi les congruences *isotropes normales,* c'est-à-dire les congruences normales aux surfaces B. Tout d'abord il ressort immédiatement des relations (8), (8′) et (8″) que la condition

$$l^2 = 1 \tag{49}$$

qui exprime que la congruence $\mathfrak{L} \equiv [\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_3]$ est normale exprime la même propriété pour la congruence duale $\mathfrak{L}^* \equiv [\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2]$, et ce fait caractérise les congruences isotropes normales. D'autre part, la condition (48) entraîne, moyennant (16), (16′) et la troisième équation (19), les relations

$$\mathrm{A} = \mathrm{C} = \mathrm{B}', \ \mathrm{A}' = \mathrm{C}' = \mathrm{B}, \tag{50}$$

qui, comparées aux relations (49), montrent aussitôt que la congruence isotrope normale en question fait partie de la classe des congruences C.T.W_2.

Ce résultat qui est conforme à la propriété des congruences normales isotropes d'avoir pour nappes focales des surfaces B est d'ailleurs valable pour les congruences normales isotropes les plus générales. En effet eu égard aux relations (50), le système de Pfaff (46) devient

$$\begin{aligned}
\omega^1{}_0 &= \omega_2 - \omega_1, \\
\omega^2{}_0 &= -\omega_2 - \omega_1, \\
\Omega_1 &= (\mathrm{B}' + \mathrm{B})(\omega_2 + \omega_1), \\
\Omega_2 &= (\mathrm{B}' - \mathrm{B})(\omega_2 - \omega_1), \\
[d(\mathrm{B}' + \mathrm{B}),\ \omega_2 + \omega_1] &= 0, \\
[d(\mathrm{B}' - \mathrm{B}),\ \omega_2 - \omega_1] &= 0.
\end{aligned}$$

Le rang de la matrice polaire des équations quadratiques étant visiblement 2, les nombres caractéristiques sont $r = 6$, $s_0 = 4$, $s = 2$; le système est en involution et sa solution dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument. Le rappel d'un résultat antérieur établi par nous [3 d.] suivant lequel la surface B la plus générale dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument nous conduit donc à la proposition : *La congruence normale isotrope la plus générale s'obtient en imposant le caractère normal à une congruence C. T., et la congruence normale isotrope ainsi obtenue fait partie de la classe des congruences C.T.W_2*

5. La propriété des congruences normales isotropes suivant laquelle les sommets du tétraèdre $\mathfrak{T}$ attachés aux différents rayons décrivent des surfaces B [7 a.] se retrouve dans le cas où les surfaces B sont des surfaces de Clifford, et elle résulte de la résolution du problème suivant : chercher s'il existe des congruences du type C.T.W_2 qui soient aussi des congruences (ω) à angle constant. Rappelons que les congruences (ω) (congruences de Ribaucour dont les angles des réseaux focaux sont égaux aux points homologues), dont la définition et la mise en évidence des propriétés générales dans l'espace E^3 sont dues à P. Vincensini [2 a.], [2 b.], peuvent être évidemment définies de la même manière dans un espace de courbure constante. Tout d'abord les équations (13) et les égalités (15) et (15′) donnent pour les formes métriques fondamentales de $(\mathbf{F}_1)$ et $(\mathbf{F}_2)$ les expressions

$$<d\,\mathbf{F}_1\ d\,\mathbf{F}_1> = (\omega_1, \omega_2)\begin{pmatrix} 4+B^2 & CB \\ CB & C^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix},$$

$$<d\,\mathbf{F}_2\ d\,\mathbf{F}_2> = (\omega_1, \omega_2)\begin{pmatrix} C'^2 & C'B' \\ C'B' & 4+B'^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix},$$

qui montrent aussitôt que l'égalité des angles des réseaux focaux de la congruence $\mathfrak{L} \equiv [\mathbf{X}_0\,\mathbf{X}_3]$, se traduit par

$$B = B' \tag{51}$$

La condition ci-dessus entraîne d'ailleurs la même propriété pour la congruence supplémentaire $\mathfrak{L}^* \equiv [\mathbf{X}_1\,\mathbf{X}_2]$, comme on le voit en faisant usage des mêmes équations que précédemment.

Si on se rapporte maintenant aux relations (45), la condition (51) a pour conséquence

$$A = C = A' = C' \quad , \quad B = B',$$

et moyennant (11) et (46′) les équations (46), dans l'hypothèse $B = \text{const}$, s'écrivent

$$\omega^1{}_0 = -\,l^2\,\omega^3{}_2,$$

$$\omega^2{}_0 = \omega^1{}_3,$$

$$2\,\frac{d\,l}{f^2} = l\,(B - A)\,\omega^3{}_2,$$

$$\Omega_1 = -\,(A + B)\,\omega^1{}_3,$$

$$[d\,A\,\omega^3{}_2] = 0,$$

$$[d\,A\,\omega_3{}^1] = \frac{(1-l^2)}{2}\left\{4 + (A+B)^2\right\}[\omega_2{}^3\ \omega_3{}^1]\,.$$

Or, il est aisé de voir que les deux équations quadratiques ci-dessus sont équivalentes à l'équation linéaire

$$d\,A = g\,\omega^3{}_2,$$

où

$$g = \frac{(1-l^2)}{2}\left\{4 + (A+B)^2\right\}.$$

Remarquons que dans le cas que nous étudions les deux hypothèses *a*) et *b*) coïncident; par conséquent $\omega_0{}^3 = \omega^2{}_1$, et en posant

$$B + A = 2\,m_1\,, \qquad\qquad B - A = 2\,m_2\,,$$

on aura finalement à considérer le système linéaire

$$(52)\qquad \begin{aligned} \omega_0{}^1 &= -l^2\,\omega^3{}_2,\\ \omega^2{}_0 &= \omega^1{}_3\,,\\ \omega^3{}_0 &= -m_1\,\omega^1{}_3,\\ \frac{dl}{f^2} &= l\,m_2\,\omega^3{}_2,\\ d\,A &= g\,\omega^3{}_2. \end{aligned}$$

La différentiation extérieure de (52) n'entraînant aucune équation nouvelle, ce système est complètement intégrable et dépend (en exceptant B) de 5 constantes arbitraires. D'autre part, dans un travail en cours de publication [3 *e.*], nous avons établi que pour une congruence quelconque de l'espace $P_e{}^3$, le caractère de RIBAUCOUR s'exprime par l'équation quadratique

$$(53)\qquad [d\,\zeta - \eta\,\omega^2{}_1,\,\omega^1{}_3] - [d\,\eta + \zeta\,\omega^2{}_1,\,\omega^3{}_2] = 0,$$

où l'on a posé

$$\omega^3{}_0 = l'\,\zeta\,\omega^3{}_2 + l''\,\eta\,\omega^1{}_3.$$

Or pour la congruence définie par les équations (52) on a

$$\zeta = 0,\qquad l'' = 1,\qquad l' = -l^2,\qquad \eta = -m_1;$$

on constate dès lors facilement grâce à ces mêmes équations que la condition (53) est satisfaite, et que par suite la congruence en question est bien du type (ω).

Les congruences C.T.W.$_2$ du type (ω) à angle constant qui viennent de s'introduire, seront désignées par (ω_c), et nous allons développer maintenant quelques propriétés géométriques remarquables dont jouissent ces congruences.

Si $\mathbf{X}_{0;1}$ et $\mathbf{X}_{0;2}$ sont les dérivées covariantes d'ordre 1 de $\mathbf{X}_0$ par rapport à $\omega^3{}_2$ et $\omega^1{}_3$, on déduit de la matrice M_c (qui figure dans l'équation (1)) et du système (52)

$$\mathbf{X}_{0;1} = -l^2\,\mathbf{X}_1\quad,\quad \mathbf{X}_{0;2} = \mathbf{X}_2 - m_1\,\mathbf{X}_3$$

et le copoint $\mathbf{X}^*{}_0$ de $\mathbf{X}_0$ a pour expression

$$(54)\qquad \rho\,\mathbf{X}^*{}_0 = \overline{\mathbf{X}_0\,\mathbf{X}_{0;1}\,\mathbf{X}_{0;2}} = \mathbf{X}_3 + m_1\,\mathbf{X}_2\,,\quad (\rho^2 = 1 + m^2{}_1).$$

La différentiation de (54) compte tenu des équations fondamentales (l') et du système (52), donne

$$(54')\qquad d\,\mathbf{X}^*{}_0 = \rho\,\omega^1{}_3\,\mathbf{X}_1 - l^2\,\omega^3{}_2\,\frac{(\mathbf{X}_2 - m_1\,\mathbf{X}_3)}{\rho}\,.$$

et comme d'autre part on peut écrire

$$d\,\mathbf{X}_0 = -l^2\,\omega^3{}_2\,\mathbf{X}_1 + \rho\,\omega^1{}_3\,\frac{(\mathbf{X}_2 - m_1\,\mathbf{X}_3)}{\rho}\,.$$

les pfaffiens principaux du tétraèdre rectangle

$$\left\{ \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \frac{\mathbf{X}_2 - m_1 \mathbf{X}_3}{\rho} \mathbf{X}^*_0 \right\}$$

sont :

$$\Pi_1 = - l^2 \omega^3{}_2, \quad \Pi_2 = \rho\, \omega^1{}_3, \quad \Pi_3 = l^2 \omega^3{}_2, \quad \Pi_4 = \rho\, \omega^1{}_3. \tag{55}$$

Des expressions [5 a].

$$K = \frac{[\Pi_3 \Pi_4]}{[\Pi_1 \Pi_2]}, \quad H = \frac{[\Pi_1 \Pi_3] + [\Pi_3 \Pi_4]}{2\,[\Pi_1\, \Pi_2]} \tag{55'}$$

de la courbure relative K et de la courbure moyenne H d'une surface quelconque de $P_e{}^3$ on déduit aussitôt, en faisant usage des égalités (55), que $(\mathbf{X}_0)$ est une *surface de Clifford.*

Un calcul analogue effectué pour les autres sommets du tétraèdre $\mathbf{X}_k$ donne pour les copoints respectifs et leurs différentielles les expressions

$$\begin{aligned} \rho\, \mathbf{X}^*_1 &= \mathbf{X}_2 - m_1 \mathbf{X}_3, \\ \rho\, \mathbf{X}^*_2 &= \mathbf{X}_1 + m_1 \mathbf{X}_0, \\ \rho\, \mathbf{X}^*_3 &= \mathbf{X}_0 - m_1 \mathbf{X}_1, \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned} d\,\mathbf{X}^*_1 &= - \rho\, \omega^1{}_3 \mathbf{X}_0 + l^2 \omega^3{}_2 \mathbf{X}^*_0, \\ d\,\mathbf{X}^*_2 &= - \rho\, \omega^1{}_3 \mathbf{X}_3 + \omega^3{}_2 \mathbf{X}^*_3, \\ d\,\mathbf{X}^*_3 &= \rho\, \omega^1{}_3 \mathbf{X}_2 - \omega^3{}_2 \mathbf{X}^*_2. \end{aligned} \tag{56'}$$

D'autre part la matrice M_e et les équations (52) et (56) permettent d'écrire

$$\begin{aligned} d\,\mathbf{X}_1 &= l^2 \omega^3{}_2 \mathbf{X}_0 - \rho\, \omega^1{}_3 \mathbf{X}^*_0, \\ d\,\mathbf{X}_2 &= \omega^3{}_2 \mathbf{X}_3 - \rho\, \omega^1{}_3 \mathbf{X}^*_3, \\ d\,\mathbf{X}_3 &= - \omega^3{}_2 \mathbf{X}_2 + \rho\, \omega^1{}_3 \mathbf{X}^*_2. \end{aligned} \tag{57}$$

Les équations (56′) et (57) montrent facilement, en procédant pour chaque couple $d\,\mathbf{X}_i$, $d\,\mathbf{X}^*_i$, $(i = 1, 2, 3)$ comme pour le couple $d\,\mathbf{X}_0$, $d\,\mathbf{X}^*_0$, que *toutes les surfaces* $(\mathbf{X}_i)$ *sont des surfaces de Clifford.*

Ainsi les sommets du tétraèdre $\mathfrak{T}_e$ attaché aux rayons d'une congruence (ω_e) décrivent tous des surfaces de *Clifford.* Nous appelerons un pareil tétraèdre, un *tétraèdre Clifford,* et il est bon de remarquer que cette propriété ne se présente pas comme un cas particulier des congruences normales isotropes, puisque les congruences (ω_e) *ne possèdent pas le caractère normal.*

De plus, de la propriété bien connue des surfaces de Clifford de se reproduire par dualité, il résulte que le tétraèdre $\{\mathbf{X}^*_k\}$, visiblement lui aussi rectangle et inscrit dans le précédent, jouit des mêmes propriétés. D'ailleurs étant le symbole du produit de quatre points, on a :

$$\widehat{\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 \mathbf{X}_3} = \widehat{\mathbf{X}^*_0 \mathbf{X}^*_1 \mathbf{X}^*_2 \mathbf{X}^*_3} = 1$$

ce qui prouve que $\mathbf{X}_k$ et $\mathbf{X}^*_k$ ont la *même orientation,* et moyennant (54), (56) et (56′) on trouve que la matrice des équations fondamentales de $\mathbf{X}^*_k$ *est la même* que celle de $\mathbf{X}_k$. Mais ce qu'il y a de plus important résulte du caractère de RIBAUCOUR de la congruence (ω_c) en jeu, dont puisque $\mathfrak{T}_e$ est canonique) $(\mathbf{X}_0)$ et $(\mathbf{X}_3)$ sont les deux surfaces moyennes. A cet égard le rappel suivant est nécessaire : nous avons dénommé *configuration projective de Vincensini* [3 a.] une configuration qui, suivant une proposition due à ce géomètre [2 c.], est formée par un faisceau de ∞^1 congruences de RIBAUCOUR de même réseau moyen à rayons homologues coplanaires, et tels que le rapport anharmonique de quatre de ces rayons homologues soit constant. Pour mettre en évidence la propriété que nous avons en vue, nous allons introduire le tétraèdre rectangle $\{\mathbf{Z}_k\}$ défini par la transformation

$$\begin{pmatrix}\mathbf{Z}_0\\ \mathbf{Z}_1\\ \mathbf{Z}_2\\ \mathbf{Z}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sin\theta & -\cos\theta\\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{X}_0\\ \mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_2\\ \mathbf{X}_3\end{pmatrix}$$

où θ est une fonction momentanément arbitraire de u^1, u^2 et $\widehat{\mathbf{Z}_0\,\mathbf{Z}_1\,\mathbf{Z}_2\,\mathbf{Z}_3} =$

$\widehat{\mathbf{X}_0\,\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\,\mathbf{X}_3} = 1$

Dans ces conditions désignons par $\nu^i{}_K$ les pfaffiens des équations fondamentale de $\{\mathbf{Z}_k\}$, c'est-à-dire

(58) $$d\,\mathbf{Z}_k = (\nu^i{}_k)\,\mathbf{Z}_i.$$

On trouve grâce à la matrice $\mathbf{M}_e$ et aux équations (52) les expressions suivantes :

(58′) $\nu^1{}_0 = l^2\,\omega^3{}_2,\ \nu^2{}_0 = q_1\,\omega^1{}_3 = \nu^1{}_3,\ \nu^3{}_0 = \ -q_2\,\omega^1{}_3 = \nu^2{}_1, \nu^3{}_2 = d\,\theta + \omega^3{}_2,$

où l'on a posé

(58″) $$q_1 = m_1 \cos + \sin\theta,\quad q_2 = m_1 \sin\theta - \cos\theta.$$

La deuxième et troisième égalité (58) permettent de voir, en se rapportant à (10′) et (18″), que toute congruence $\mathfrak{L}_z \equiv [\mathbf{Z}_0\,\mathbf{Z}_3]$ (c'est-à-dire quel que soit θ) *est une congruence C.T.* W_1. Mais puisque l'on a déjà $[\nu^2{}_0\,\nu^1{}_3] = 0$, la condition pour $(\mathbf{X}_0) \equiv (\mathbf{Z}_0)$ d'être la surface moyenne de $\mathfrak{L}_z$ se traduit par

$$[\nu^1{}_0\,\nu^3{}_2] = 0,$$

ce qui entraîne

(59) $$d\,\theta = \mu\,\omega^3{}_2.$$

D'autre part les équations de structure et les équations (52) donnent $\mathrm{D}\,\omega^3{}_2 = 0$; on peut donc poser $\omega^3{}_2 = du$, et par suite μ est fonction du seul argument u.

Enfin puisque les développables de $\mathfrak{L}_z \equiv [\mathbf{Z}_0 \mathbf{Z}_3]$ sont

$$l^2 (1 + \mu) (\omega^3{}_2)^2 - q^2{}_1 (\omega^1{}_3)^2 = 0,$$

la congruence sera de Ribaucour et admettra le même réseau moyen que la congruence $\mathfrak{L} \equiv [\mathbf{Z}_0 \mathbf{Z}_3]$ si

$$(60) \qquad 1 + \mu = q^2{}_1.$$

En remplaçant dans (59) μ et q_1 par leurs expressions respectives (60) et (58″), et en remarquant grâce à (52) que m_1 est aussi fonction de u, on obtient une configuration projective de Vincensini (P_0) déterminée par l'équation

$$\frac{d\, tg\theta}{du} = 2\, m_1\, tg\, \theta + m_1{}^2 - 1$$

Mais, ce qu'il y a lieu de noter plus particulièrement c'est la propriété suivant laquelle toutes les congruences de la configuration (P_0) sont des congruences du type (ω). En effet $2\,\delta$ étant la distance focale on a

$$[\nu^1{}_0\, \nu^2{}_0] \cos^2 \delta + [\nu^3{}_2\, \nu^1{}_3] \sin^2 \delta = 0,$$

d'où en vertu de (58

$$tg^2\, \delta = \frac{l^2}{q_1{}^2}$$

et les foyers $\boldsymbol{F}$ du rayon $R_z = \{\mathbf{Z}_0 \mathbf{Z}_3\}$ ont pour expressions

$$\gamma\, \boldsymbol{F}_1 = q_1\, \mathbf{Z}_0 + l\, \mathbf{Z}_1, \quad \gamma\, \boldsymbol{F}_2 = q_1\, \mathbf{Z}_0 - - l\, \mathbf{Z}_1, \; (\gamma^2 = q^2{}_1 + l^2).$$

La différentiation de ces expressions donne, eu égard à (38) et (58′), (59) et (60)

$$(61) \begin{cases} \gamma\, d\boldsymbol{F}_2 = q_2\, \omega^1{}_3 + l\, \lambda\, \omega^3{}_2)\, (l\, \mathbf{Z}_0 - q_1\, \mathbf{Z}_3) + q_1\, (\omega^1{}_3 - l\, \omega^3{}_2)\, (q_1\, \mathbf{Z}_2 + l\, \mathbf{Z}_1), \\ \gamma\, d\boldsymbol{F}_2 = (- q_2\, \omega^1{}_3 + l\, \lambda\, \omega^3{}_2)\, (l\, \mathbf{Z}_0 + q_1\, \mathbf{Z}_3) + q_1\, (\omega^1{}_3 + l\, \omega^3{}_2)\, (q_1\, \mathbf{Z}_2 - l\, \mathbf{Z}_1), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\lambda = \frac{1}{\gamma^2} \left\{ \rho^2\, (1 - l^2) \cos^2 \theta - m_1\, q_1\, q_2 \cos \theta - q_2 \cos \theta - (1 + l^2)\, m_2\, q_1 \right\}.$$

En passant aux pfaffiens ω_1, ω_2 des développables donnés par (11) et en notant par Φ_i l'angle du réseau focal sur la surface $(\boldsymbol{F}_i)$, on obtient à partir de (61)

$$< d\,\boldsymbol{F}_1 \;\; d\,\boldsymbol{F}_1 > = (\omega_1, \omega_2) \begin{pmatrix} (\lambda - q_2)^2 + 4\, q^2{}_1 & q^2{}_2 - \lambda^2 \\ q^2{}_2 - \lambda^2 & (q_2 + \lambda)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix},$$

$$< d\,\boldsymbol{F}_2 \;\; d\,\boldsymbol{F}_2 > = (\omega_1, \omega_2) \begin{pmatrix} (q_2 + \lambda)^2 & q^2{}_2 - \lambda^2 \\ q^2{}_2 - \lambda^2 & (\lambda - q_2)^2 + 4\, q^2{}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix},$$

et l'on a bien

$$\cos \Phi_1 = \frac{q_2 - \lambda}{\sqrt{(\lambda - q_1)^2 + 4 q_1{}^2}} = \cos \Phi_2 \quad ,$$

ce qui démontre la propriété annoncée. Il importe toutefois de remarquer que les congruences (ω) ne *sont plus à angle constant,* et cela tient au fait que le tétraèdre attaché aux rayons $\{\mathbf{Z}_0 \mathbf{Z}_3\}$ n'est plus un tétraèdre de CLIFFORD.

En effet on trouve que le copoint $\mathbf{Z}_3^*$ de $\mathbf{Z}_3$ a pour expression

$$q\, \mathbf{Z}_3^* = q_1 \mathbf{Z}_0 - q_2 \mathbf{Z}_1, \quad (q^2 = q^2_1 + q^2_2),$$

d'où l'on déduit moyennant (58), (58') et (58").

$$d\, \mathbf{Z}_3^* = s\, \omega_2^3\, \frac{(q_2 \mathbf{Z}_0 + q_1 \mathbf{Z}_1)}{q} + q\, \omega_3^1\, \mathbf{Z}_2\,, \tag{62}$$

où l'on a posé

$$s = \frac{(q_2^2 - q_1^2)(q_1^2 - 1) - l^2 q^2 - (1 + m^2)(1 - l^2)}{q^2} .$$

D'autre part on peut écrire

$$d\, \mathbf{Z} = \omega_3^1\, \frac{(q_2 \mathbf{Z}_0 + q_1 \mathbf{Z}_1)}{q} - (1 + q_1^2)\, \omega_2^3\, \mathbf{Z}_2\, ; \tag{62'}$$

par un procédé déjà utilisé on montre à partir de (62) et (62') que la surface $(\mathbf{Z}_3)$ (qui est visiblement minimale) n'est plus une surface de CLIFFORD, et l'assertion faite plus haut est ainsi prouvée.

On a ainsi trouvé une nouvelle propriété des surfaces de CLIFFORD (jouant comme l'on sait un rôle particulièrement important dans l'espace P^3_e) qui peut s'énoncer comme il suit : *Toute surface de Clifford possède un réseau conjugué* (nécessairement à invariante égaux), *qui est le réseau moyen d'une configuration projective de Vincensini, formée par des congruences C.T. possédant en outre les caractères W et* (ω). Ce résultat se complète par la proposition plus générale suivante : *En imposant à une congruence C.T. W_2 le caractère* (ω) *à angle constant, on obtient une congruence déterminée par un système linéaire de Pfaff complètement intégrale et dépendant de 5 constantes arbitaires. Le tétraèdre rectangle* $\mathfrak{T}$ *attaché aux rayons de cette dernière congruence est un tétraèdre de Clifford, et les copoints des sommets de ce tétraèdre déterminent un second tétraèdre de Clifford inscrit dans le précédent.*

Les 8 surfaces de Clifford ainsi mises en évidence déterminent 8 configurations projectives de Vincensini jouissant de la propriété précédemment énoncée.

BIBLIOGRAPHIE

[1 a.] S. FINIKOFF : Théorie der Kongruenzen, Akademie Verlag Berlin, 1959.

[2] P. VINCENSINI :

a. Sur les réseaux et les congruences (ω). Colloque de Géom. diff., Louvain, 1961.
b. Sur les généralisations de quelques problèmes de géométrie différentielle et sur certains cycles de congruences, Acta Mathem., 1939.
c. Sur quelques types spéciaux de réseaux et de congruences conjugués. Ann. Sci. Fc. Norm. Sup., 3, t. 62, fasc. 3.

[3] R. ROSCA :

a. Sur les congruences normales à nappes focales en correspondance pseudo-isométrique. Ann. Sci., Ec. Norm. Sup., 3e Série, t. 83, 1966.
b. Despre o clasă de congruențe dublu ciclice. Analele Ac. Rep. Pop. Române, T. III, 9, 1950.
c. Sur les congruences K_2 du type (ω). Rev. Roum. de Mathem. pures et appliq., n° , 1965.
d. Sur un système fermé formé par des surfaces de courbure riemannienne nulle de l'espace elliptique. Rev. Roum. de Mathem. pures et app., n° 3, 1967 (Sous presse).
e. On isotropic congruences in the elliptic spac. Rev. Roum. de Math. pures et appl., n° 11, 1967 (en cours de parution).

[4 a.] R. GARNIER : Géométrie et cinétique Cayleyennes. Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[5 a.] N. R. MÜLLER : Sphärische kinematik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.

[6 a.] CARTAN : Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques. Hermann, Paris, 1945.

[7] W. BLASHKE :

a. Nicht Euklidische Geometrie und Mechanik I, II, III Hamb. Math. Einzelschr., 34 Heft (1942).
b. Sulle congruenze rettilinee nello spazio ellitico. Ann. Mat. pura appl., IV, 1959.

[8 a.] L. BIANCHI : Sopra alcune classi di congruenze rettilinee negli spazi di curvatura costante. Ann. di Matem. (3), 1964.

[9 a.] R. CALAPSO : Intorno alle reti e congruențe cicliche in uno Spazio ellitico a tre dimensioni. Rend. Circ. Matem. di Palermo, 1927, Fascic. II, Tomo II.

[10 a.] Y. HLAVATY : Differential line geometry. Noordhoff Gronigen, 1953.