

LAURENT VÉRON

**Effets régularisants de semi-groupes non linéaires dans
des espaces de Banach**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 1, n° 2 (1979), p. 171-200

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1979_5_1_2_171_0

© Université Paul Sabatier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EFFETS REGULARISANTS DE SEMI-GROUPES NON LINEAIRES DANS DES ESPACES DE BANACH

Laurent Véron ⁽¹⁾

(1) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France.

Résumé : Nous étudions les effets régularisants de semi-groupes de contractions d'un espace de Banach réel en introduisant la notion de φ_j -coercivité. Nous montrons en particulier que les solutions des équations suivantes (obtenues par la formule de Crandall et Liggett)

$$\frac{du}{dt} - \operatorname{div}.\partial J(\operatorname{grad}.u) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt} - \Delta \beta(u) = 0$$

à donnée initiale $u(0)$ dans L^1 appartiennent à L^∞ pour $t > 0$ si on fait sur ∂J et β des hypothèses de croissance suffisantes.

Summary : We study regularizing effects of nonlinear semi-groups of contractions of a real Banach space by introducing the notion of φ_j -coercivity. In particular we prove that the solutions of the following equations (obtained by the Crandall-Liggett formula)

$$\frac{du}{dt} - \operatorname{div}.\partial J(\operatorname{grad}.u) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{du}{dt} - \Delta \beta(u) = 0$$

with initial data $u(0)$ in L^1 belong to L^∞ for $t > 0$ if we make sufficient assumptions of growing on ∂J and β .

Introduction

Les semi-groupes de contractions non linéaires d'un espace de Hilbert réel ont des propriétés régularisantes bien connues lorsqu'ils sont engendrés par le sous-différentiel d'une fonction convexe semi-continue

inférieurement (s.c.i.) (cf. H. Brézis [6]). Il n'y a pour l'instant aucun résultat général connu dans le cadre des espaces de Banach.

Depuis peu, quelques résultats de régularité ont été obtenus par L.C. Evans [9] et F.J. Massey [12] pour des équations non linéaires de la chaleur et par Ph. Bénilan [4] et L.C. Evans [10] pour des équations de type diffusion des gaz.

Nous donnons ici une généralisation abstraite des méthodes employées par ces différents auteurs en introduisant la notion de φ -coercivité.

L'auteur remercie Ph. Bénilan pour les discussions qu'il a eues avec lui et pour les conseils qu'il lui a prodigués.

I - PRELIMINAIRES

X désigne un espace de Banach réel de dual X' , $\| \cdot \|_X$ la norme dans X et (\cdot, \cdot) la dualité entre X et X' . Si A est un sous-ensemble de $X \times X$, nous définissons

$$(1) \quad \begin{cases} Ax = \{ y : [x, y] \in A \} \\ D(A) = \{ x : Ax \neq \emptyset \} \\ R(A) = \cup \{ Ax : x \in D(A) \} \end{cases}$$

L'opérateur A est dit accréatif si

$$(2) \quad \begin{cases} \forall [x_1, y_1], [x_2, y_2] \in A, \forall \lambda \geq 0 \\ \|x_1 - x_2\|_X \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|_X \end{cases}$$

il est m -accréatif si $R(I + \lambda A) = X$ pour $\lambda \geq 0$; la résolvante de A est définie par : $J_\lambda u = (I + \lambda A)^{-1} u$ pour $\lambda \geq 0$ et $u \in R(I + \lambda A)$.

Le théorème suivant dû à M.G. Crandall et T. Liggett [8] est fondamental dans notre étude.

THEOREME 1.1. *Soit A un opérateur accréatif de X tel que $D(A) \subset R(I + \lambda A)$ pour $0 \leq \lambda < \lambda_0$, alors la limite suivante existe pour $t \geq 0$ et $x \in \overline{D(A)}$*

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (I + \frac{t}{n} A)^{-n} x$$

Soit φ une fonction convexe de X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, le domaine $D(\varphi)$ de φ est l'ensemble des x tels que $\varphi(x)$ soit fini. Pour (x, y) appartenant à $D(\varphi) \times X$, la fonction

$$t \rightarrow t^{-1} (\varphi(x + ty) - \varphi(x))$$

est croissante sur $]0, +\infty[$. On définit alors

$$(4) \quad \langle y, x \rangle_{\varphi} = \lim_{t \downarrow 0^+} t^{-1} (\varphi(x + ty) - \varphi(x))$$

La fonction $(x, y) \rightarrow \langle y, x \rangle_{\varphi}$ est positivement homogène en y , semi-continue supérieurement (s.c.s.) si φ l'est aussi et si φ est continue, on a

$$(5) \quad \langle y, x \rangle_{\varphi} = \text{Max} \{ (w, y) : w \in \partial\varphi(x) \}$$

où $\partial\varphi$ désigne le sous-différentiel de φ , c'est-à-dire

$$\partial\varphi(x) = \{ w \in X' : \forall y \in X, \varphi(y) - \varphi(x) \geq (w, y-x) \}$$

II - RESULTATS ABSTRAITS

Soient X un espace de Banach réel de norme $\| \cdot \|_X$ et A un opérateur accréitif de X . On se donne quatre fonctions φ et $(\varphi_i)_{i=1}^3$ définies sur X à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et on considère les hypothèses suivantes

$$H1 \quad \overline{D(A)} \subset R(I+\lambda A) \text{ pour } 0 \leq \lambda < \lambda_0$$

$$H2 \quad \varphi_1 \text{ et } \varphi_3 \text{ sont s.c.i. et } \varphi_1 \text{ est en outre convexe}$$

$$H3 \quad \varphi_i((I+\lambda A)^{-1}x) \leq \varphi_i(x), \forall x \in \overline{D(A)} \cap D(\varphi_i), i = 1, 2, 3$$

$$H4 \quad A \text{ est } \varphi_1\text{-coercif à savoir}$$

$$(6) \quad \begin{cases} \forall u \in D(A) \cap (\bigcap_{i=1}^3 D(\varphi_i)), \forall v \in Au \\ \langle v, u \rangle_{\varphi_1} + \varphi_2(u) \geq \varphi_3(u) \end{cases}$$

$$H5 \quad \varphi((I+\lambda A)^{-1}x) \leq \varphi(x), \forall x \in \overline{D(A)} \cap D(\varphi)$$

$$H6 \quad \text{Les fonctions } \varphi \text{ et } (\varphi_i)_{i=1}^3 \text{ sont à valeurs non négatives}$$

$$H7 \quad \text{Il existe } \rho > 1 \text{ et } \sigma > 1 \text{ tels que}$$

$$\varphi_1^{\rho} \leq \varphi \cdot \varphi_3, \varphi_2^{\sigma} \leq \varphi \cdot \varphi_3 \text{ et } \varphi_2 \text{ est s.c.i.}$$

Les inégalités suivantes jouent un rôle important dans notre étude.

THEOREME II.1. Sous les hypothèses H1...H4, pour tout $x \in \overline{D(A)} \cap (\bigcap_{i=1}^3 D(\varphi_i))$ et tout $0 \leq s \leq t$ on a l'inégalité suivante

$$(7) \quad \varphi_1(S(s)x) - \varphi_1(S(t)x) + (t-s) \varphi_2(S(s)x) \geq \int_s^t \varphi_3(S(\sigma)x) d\sigma$$

Sous les hypothèses H1...H7, il existe une constante C telle que pour tout

$x \in D(\varphi) \cap \overline{D(A)} \cap (\bigcap_{i=1}^3 D(\varphi_i))$ et tout $0 \leq s \leq t$, on ait

$$(8) \quad \frac{C}{(t-s)^{\frac{\rho}{\rho-1}}} (\varphi(S(s)x))^{\frac{\rho}{\rho-1}} + C\alpha (\varphi(S(s)x))^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \geq (\varphi_1(S(t)x))^{\rho} + (\varphi_2(S(t)x))^{\sigma}$$

où $\alpha = 0$ si $\varphi_2 \equiv 0$, 1 sinon.

Démonstration de l'inégalité (7). Soient $x \in \overline{D(A)} \cap (\bigcap_{i=1}^3 D(\varphi_i))$ et $N \in \mathbb{N}$, on construit la fonction en escalier u^N

$$u^N(t) = u_n \text{ pour } t \in [n \frac{T}{N+1}, (n+1) \frac{T}{N+1}[, \quad 0 \leq n \leq N, \text{ où la suite } u_n \text{ est déterminée par}$$

$$(9) \quad u_{n+1} - u_n + \frac{T}{N+1} A u_{n+1} \ni 0, \quad 0 \leq n \leq N \text{ et } u_0 = x$$

donc $u_n \in D(A) \cap (\bigcap_{i=1}^3 D(\varphi_i))$ pour $n \geq 1$. En utilisant H4 on en déduit

$$\frac{N+1}{T} \langle -u_{n+1} + u_n, u_{n+1} \rangle_{\varphi_1} + \varphi_2(u_{n+1}) \geq \varphi_3(u_{n+1}) \quad 0 \leq n \leq N$$

$$\text{d'où} \quad \varphi_1(x) - \varphi_1(u_{n+1}) + \frac{T + \frac{T}{N+1}}{\frac{T}{N+1}} \int_{\frac{T}{N+1}}^{T + \frac{T}{N+1}} \varphi_2(u^N(\sigma)) d\sigma \geq \frac{T + \frac{T}{N+1}}{\frac{T}{N+1}} \int_{\frac{T}{N+1}}^{T + \frac{T}{N+1}} \varphi_3(u^N(\sigma)) d\sigma$$

Comme $\int_{\frac{T}{N+1}}^{T + \frac{T}{N+1}} \varphi_2(u^N(\sigma)) d\sigma \leq T \varphi_2(x)$ et φ_1 et φ_3 sont s.c.i., on peut passer à la limite en N et on obtient :

$$(10) \quad \varphi_1(x) - \varphi_1(S(T)x) + T \varphi_2(x) \geq \int_0^T \varphi_3(S(\sigma)x) d\sigma$$

d'où (7).

Démonstration de l'inégalité (8). Pour $x \in D(\varphi) \cap \overline{D(A)} \cap (\bigcap_{i=1}^3 D(\varphi_i))$ on construit la même fonction en escalier u^N que précédemment, d'où

$$\varphi_1(u_n) - \varphi_1(u_{n+1}) + \frac{T}{N+1} \varphi_2(u_{n+1}) \geq \frac{T}{N+1} \varphi_3(u_{n+1}) \quad 0 \leq n \leq N$$

On multiplie cette inégalité par $(\frac{n+1}{N+1} T)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \varphi(u_{n+1})$ et on pose $a_n = \varphi_1(u_n)$, $b_n = \varphi(u_n)$, $c_n = (\frac{n}{N+1} T)^{\frac{\rho}{\rho-1}}$, $d_n = \varphi_2(u_n)$, $e_n = \varphi_3(u_n)$, ce qui donne après sommation

$$\sum_{n=0}^N (a_n - a_{n+1}) b_{n+1} c_{n+1} + \frac{T}{N+1} \sum_{n=0}^N d_{n+1} b_{n+1} c_{n+1} \geq \frac{T}{N+1} \sum_{n=0}^N e_{n+1} b_{n+1} c_{n+1}$$

et, après transformation d'Abel et en utilisant H5 et H6,

$$(11) \quad a_0 b_0 c_1 + \sum_{n=1}^N (c_{n+1} - c_n) a_n b_n + \frac{T}{N+1} \sum_{n=1}^{N+1} d_n b_n c_n \geq \frac{T}{N+1} \sum_{n=1}^{N+1} e_n b_n c_n$$

Or, pour $n \geq 1$, $c_{n+1} - c_n \leq K \frac{T}{N+1} c_n^{\frac{1}{\rho}}$ avec $K = \frac{\rho}{\rho-1} 2^{\frac{1}{\rho-1}}$.

En utilisant l'inégalité de Young on a donc : $\forall \epsilon > 0, \exists C(\epsilon) > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} (c_{n+1} - c_n) a_n b_n \leq \epsilon c_n a_n^\rho + C(\epsilon) b_n^{\frac{\rho}{\rho-1}} \\ d_n b_n c_n \leq \epsilon c_n d_n^\sigma + \alpha C(\epsilon) c_n b_n^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \end{array} \right. , \quad \forall n \geq 0$$

où $\alpha = 0$ si $\varphi_2 = 0$, 1 sinon. On reporte ces inégalités dans (11) et on obtient

$$(12) \quad a_0 b_0 c_1 + \epsilon \frac{T}{N+1} \sum_{n=1}^N c_n a_n^\rho + C(\epsilon) \frac{T}{N+1} \sum_{n=1}^N b_n^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \epsilon \frac{T}{N+1} \sum_{n=1}^N c_n d_n^\sigma \\ \dots + C(\epsilon) \frac{T}{N+1} \alpha \sum_{n=1}^N c_n b_n^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + \frac{T}{N+1} d_{N+1} b_{N+1} c_{N+1} \geq \frac{T}{N+1} \sum_{n=1}^N c_n b_n e_n$$

Or, d'après H7, $a_n^\rho \leq b_n e_n$ et $d_n^\sigma \leq b_n e_n$. En prenant $\epsilon = \frac{1}{4}$ et en utilisant H3 et H5, on en déduit

$$(13) \quad a_0 b_0 c_1 + \frac{T}{N+1} d_0 b_0 + C(\epsilon) \left(\frac{T}{N+1} \sum_{n=1}^N b_n^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \alpha \frac{T}{N+1} \sum_{n=1}^N c_n b_n^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \right) \\ \dots \geq \frac{1}{2} \left(\frac{T}{N+1} \sum_{n=1}^N c_n a_n^\rho + \frac{T}{N+1} \sum_{n=1}^N c_n d_n^\sigma \right)$$

$$\text{Or } \frac{T}{N+1} \sum_{n=1}^N b_n^{\frac{\rho}{\rho-1}} \leq T b_0^{\frac{\rho}{\rho-1}} \quad \text{et} \quad \frac{T}{N+1} \sum_{n=1}^N c_n b_n^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \leq b_0^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \frac{T}{N+1} \sum_{n=1}^N c_n$$

$$\frac{T}{N+1} \sum_{n=1}^N c_n a_n^{\rho} \geq a_{N+1}^{\rho} \frac{T}{N+1} \sum_{n=1}^N c_n \quad \text{et} \quad \frac{T}{N+1} \sum_{n=1}^N c_n d_n^{\sigma} \geq d_{N+1}^{\sigma} \frac{T}{N+1} \sum_{n=1}^N c_n$$

En transformant l'inégalité (13) grâce à ces dernières relations et en utilisant la semi-continuité des fonctions $(\varphi_i)_{i=1}^3$, on en déduit

$$(14) \quad \frac{C'}{\frac{\rho}{T^{\rho-1}}} (\varphi(x))^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \alpha C' (\varphi(x))^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \geq (\varphi_1(S(T)x))^{\rho} + (\varphi_2(S(T)x))^{\sigma}$$

où C' ne dépend ni de T ni de x , d'où la relation (8).

REMARQUE II.2. Si on suppose que la fonction φ_2 est s.c.s., l'inégalité (7) devient

$$(15) \quad \varphi_1(S(s)x) - \varphi_1(S(t)x) + \int_s^t \varphi_2(S(\sigma)x) d\sigma \geq \int_s^t \varphi_3(S(\sigma)x) d\sigma$$

et si on suppose que la fonction φ est s.c.s., l'inégalité (8) devient

$$(16) \quad C \int_s^t \left\{ (\varphi(S(\sigma)x))^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \alpha (\sigma-s)^{\frac{\rho}{\rho-1}} (\varphi(S(\sigma)x))^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \right\} d\sigma$$

$$\dots \geq \int_s^t (\sigma-s)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \left\{ (\varphi_1(S(\sigma)x))^{\rho} + (\varphi_2(S(\sigma)x))^{\sigma} \right\} d\sigma$$

EXEMPLE II.3. Soient $X_2 \subset X_1 \subset X$ trois espaces de Banach réels de normes respectives $\| \cdot \|_{X_2}$, $\| \cdot \|_{X_1}$ et $\| \cdot \|_X$ et A un opérateur accréatif de X . On définit l'application de dualité J_1 de X_1 dans l'ensemble des parties de son dual X_1' par

$$J_1(u) = \left\{ v \in X' : \|v\|_{X_1'} = \|u\|_{X_1} \quad \text{et} \quad (v, u) = \|u\|_{X_1}^2 \right\}$$

et on suppose que

h1 A vérifie H1

h2 $\| \cdot \|_{X_1}$ et $\| \cdot \|_{X_2}$ sont s.c.i. dans X

h3 $\|(1+\lambda A)^{-1} x\|_{X_i} \leq \|x\|_{X_i}$, $\forall \lambda \geq 0$, $\forall x \in \overline{D(A)}^X \cap X_i$ $i=1,2$

h4 A est φ_i -coercif avec $\varphi_1 = \| \cdot \|_{X_1}^{\rho_1}$ ($\rho_1 \geq 1$), $\varphi_2 \equiv 0$, $\varphi_3 = \beta \| \cdot \|_{X_2}^{\rho_2}$ avec $\rho_2 > 0$ et $\beta > 0$, c'est-à-dire en utilisant l'application de dualité J_1 .

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall u \in D(A) \cap X_1, \forall v \in Au \\ \rho_1 \|u\|_{X_1}^{\rho_1-2} \max_{w \in J_1(u)} (w,v) \geq \beta \|u\|_{X_2}^{\rho_2} \end{array} \right.$$

$$h5 \quad \|(I+\lambda A)^{-1} x\|_X \leq \|x\|_X, \quad \forall 0 \leq \lambda < \lambda_0, \quad \forall x \in \overline{D(A)}^X$$

$$h6 \quad \|x\|_{X_1}^{\rho\rho_1} \leq \|x\|_{X_2}^{\rho_2} \|x\|_X^{\rho\rho_1-\rho_2}, \quad \forall x \in X_2, \quad (\rho > 1)$$

En utilisant le théorème II.1 et la décroissance de $t \rightarrow \|S(t)x\|_X$ et $t \rightarrow \|S(t)x\|_{X_i}$ ($i = 1,2$), on en déduit

$$\begin{aligned} \text{pour } x \in \overline{D(A)} \cap X_2 : \|S(t)x\|_{X_2} &\leq \left(\frac{1}{\beta t}\right)^{\frac{1}{\rho_2}} \|x\|_{X_1}^{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \\ \text{pour } x \in \overline{D(A)} \cap X_1 : \|S(t)x\|_{X_1} &\leq \frac{K'}{\frac{\rho}{\rho_1(\rho-1)}} \|x\|_X^{\frac{\rho\rho_1-\rho_2}{\rho\rho_2-\rho_2}} \end{aligned}$$

d'où par h2, $\forall t > 0, \forall x \in \overline{D(A)}^X \cap X_2, S(t)x \in \overline{D(A)}^X \cap X_2$ et en outre

$$\|S(t)x\|_{X_2} \leq \frac{K'}{\frac{\rho}{\rho_2(\rho-1)}} \|x\|_X^{\frac{\rho\rho_1-\rho_2}{\rho\rho_2-\rho_2}}$$

On peut remarquer que lorsque l'opérateur A est linéaire, on a $\rho_1 = \rho_2$ et par suite

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho\rho_1-\rho_2}{\rho\rho_1-\rho_1} = \frac{\rho\rho_1-\rho_2}{\rho\rho_2-\rho_2} = 1.$$

Quant à l'hypothèse h6 elle signifie en théorie de l'interpolation linéaire (Cf. J.L. Lions et J. Peetre [11]) que

l'espace X_1 est de classe $\mathcal{X}_\theta(X_2, X)$ avec $\theta = 1 - \frac{\rho_2}{\rho\rho_1}$ à condition que $\rho_2 < \rho\rho_1$.

Nous allons maintenant développer deux méthodes essentiellement techniques permettant de réitérer dénombrablement l'estimation (7) du théorème II.1.

Soient X un espace de Banach réel et A un opérateur accréatif de X, on considère les hypothèses suivantes

$$A1 \quad \overline{D(A)} \subset R(I+\lambda A) \quad \text{pour } 0 \leq \lambda < \lambda_0$$

A2 $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions convexes s.c.i. non négatives sur X vérifiant :

$$\varphi_n((I+\lambda A)^{-1} x) \leq \varphi_n(x) \quad \forall n \geq 1, \quad \forall x \in \overline{D(A)} \cap D(\varphi_n)$$

A3 Il existe une suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ strictement positive et $\beta \geq 0$ telle que A est $(\varphi_n, \beta \varphi_n, \alpha_n \varphi_{n+1})$ -coercif.

A4
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \left(\frac{n^n}{\prod_{i=1}^n \alpha_i} \right)^{\frac{1}{n}} < +\infty$$

A5 Il existe une suite $(r_n)_{n \geq 1}$ $r_n > 1$ et $r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et des constantes $K > 0, \beta \geq 0$ et α telles que A soit $(\varphi_n^{r_n}, \beta \varphi_n^{r_n}, K^n \varphi_{n+1}^{r_n+\alpha})$ -coercif.

A6 Si on pose $\mu_n = \frac{r_n}{r_n+\alpha}$, les suites suivantes sont convergentes

$$R_n = n \frac{\mu_n}{r_n} + (n-1) \frac{\mu_n \mu_{n-1}}{r_{n-1}} + \dots + \frac{1 \cdot \mu_n \cdot \mu_{n-1} \dots \mu_1}{r_1}$$

$$S_n = \mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1$$

PROPOSITION II.4. Sous les hypothèses A1...A4, on a pour tout $t > 0$ et tout $x \in \overline{D(A)}^X \cap (\bigcap_{n \geq 1} D(\varphi_n))$

(18)
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup. (\varphi_n(S(t)x))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{t} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup. \left(\frac{n^n}{\prod_{i=1}^n \alpha_i} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Sous les hypothèses A1, A2, A5, A6, il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $x \in \overline{D(A)}^X \cap (\bigcap_{n \geq 1} D(\varphi_n))$ et tout $t > 0$ on ait :

(19)
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup. \varphi_n(S(t)x) \leq C \left(\beta + \frac{1}{t} \right)^T (\varphi_1(x))^S$$

où $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ et $T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_n \dots \mu_i}{r_i}$

Démonstration de l'inégalité (18). L'hypothèse A3 signifie que $\forall x \in D(A) \cap D(\varphi_n) \cap D(\varphi_{n+1}), \forall y \in Ax, \langle y, x \rangle_{\varphi_n} + \beta \varphi_n(x) \geq \alpha_n \varphi_{n+1}(x)$, d'où par (7)

$$(1 + \beta \frac{t}{n}) \varphi_i(S(\frac{i-1}{n} t)x) \geq \alpha_i \frac{t}{n} \varphi_{i+1}(S(\frac{it}{n})x) \quad 1 \leq i \leq n$$

d'où $\varphi_1(x) \geq \frac{\prod_{i=1}^n \alpha_i}{n^n} \left(\frac{t}{1 + \beta \frac{t}{n}} \right)^n \varphi_{n+1}(S(t)x)$ d'où (18).

Démonstration de l'inégalité (19). L'hypothèse A5 signifie que $\forall x \in D(A) \cap D(\varphi_n) \cap D(\varphi_{n+1}), \forall y \in Ax, \langle y, x \rangle_{\varphi_n^{r_n}} + \beta \varphi_n^{r_n}(x) \geq \alpha_n \varphi_{n+1}^{r_n+\alpha}(x)$.

Considérons la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ déterminée par $t_0 = 0$ et $t_{n+1} = t_n + 2^{-n-1} t$, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$. En appliquant l'inégalité (7) on obtient

$$(1 + \beta(t_n - t_{n-1}))(\varphi_n(S(t_{n-1})x))^{r_n} \geq \alpha_n(t_n - t_{n-1})(\varphi_{n+1}(S(t_n)x))^{r_n + \alpha}$$

Posons $a_n = \varphi_n(S(t_{n-1})x)$, $\mu_n = \frac{r_n}{r_n + \alpha}$, $n \geq 1$, d'où

$$a_{n+1} \leq \left(\frac{2^n}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{r_n + \alpha}} \left(2^{-n} \beta + \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{r_n + \alpha}} \mu_n a_n, \text{ d'où}$$

$$\varphi_{n+1}(S(t)x) \leq a_{n+1} \leq \left(\frac{2}{K}\right)^{R_n} \left(\beta + \frac{1}{t}\right)^{T_n} (\varphi_1(x))^{S_n}$$

où $T_n = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_n \cdots \mu_i}{r_i}$, d'où (19) en passant à la limite.

REMARQUE II.5. L'hypothèse A4 et l'inégalité (18) sont liées à la formule de Stirling ; on obtient alors une majoration de $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup (\varphi_n(S(t)x))^{\frac{1}{n}}$ remarquable car indépendante de toute donnée initiale.

Les hypothèses A5 et A6 servent à l'étude des effets régularisants lorsque l'opérateur A est un opérateur différentiel du second ordre ainsi que le montreront les applications.

Nous allons maintenant introduire la notion de φ_i -bicoercivité afin d'obtenir des résultats de régularité höldérienne sur la fonction $x \rightarrow S(t)x$.

Soient X un espace de Banach réel et A un opérateur accréitif de X. On se donne quatre fonctions φ et $\{\varphi_i\}_{i=1}^3$ définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et on fait les hypothèses suivantes

$$H'1 \quad \overline{D(A)} \subset \mathbb{R}(I + \lambda A) \text{ pour } 0 \leq \lambda < \lambda_0$$

$$H'2 \quad \varphi_1 \text{ et } \varphi_3 \text{ sont s.c.i. et } \varphi_1 \text{ est convexe}$$

$$H'3 \quad \varphi_i((I + \lambda A)^{-1} x - (I + \lambda A)^{-1} y) \leq \varphi_i(x - y), \quad \forall x, y \in \overline{D(A)} \text{ vérifiant } x - y \in D(\varphi_i) \quad i = 1, 2, 3.$$

$$H'4 \quad A \text{ est } \varphi_i\text{-bicoercif, c'est-à-dire}$$

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall u, u' \in D(A) \text{ tels que } u - u' \in \bigcap_{i=1}^3 D(\varphi_i), \quad \forall v \in Au, \quad \forall v' \in Au' \\ \langle v - v', u - u' \rangle \geq \varphi_1 + \varphi_2(u - u') \geq \varphi_3(u - u') \end{array} \right.$$

H'5 $\varphi((I+\lambda A)^{-1}x - (I+\lambda A)^{-1}y) \leq \varphi(x-y), \forall x,y \in \overline{D(A)}$ vérifiant $x-y \in D(\varphi)$

H'6 Les fonctions φ et φ_i sont à valeurs non négatives

H'7 Il existe $\rho > 1$ et $\sigma > 1$ tels que

$$\varphi_1^\rho \leq \varphi \cdot \varphi_3, \quad \varphi_2^\sigma \leq \varphi \cdot \varphi_3 \quad \text{et} \quad \varphi_2 \text{ est s.c.i.}$$

THEOREME II.6. Sous les hypothèses H'1...H'4, pour tout couple $x,x' \in \overline{D(A)}$ tel que $x-x' \in \bigcap_{i=1}^3 D(\varphi_i)$, et tout $0 \leq s \leq t$ on a l'inégalité suivante :

$$(21) \quad \varphi_1(S(s)x - S(s)x') - \varphi_1(S(t)x - S(t)x') + (t-s) \varphi_2(S(s)x - S(s)x') \geq \int_s^t \varphi_3(S(\sigma)x - S(\sigma)x') d\sigma$$

Sous les hypothèses H'1...H'7, il existe une constante C telle que pour tout couple x,x' tel que $x-x' \in D(\varphi) \cap (\bigcap_{i=1}^3 D(\varphi_i))$ et tout $0 \leq s \leq t$, on ait :

$$(22) \quad \frac{C}{(t-s)^{\frac{\rho}{\rho-1}}} (\varphi(S(s)x - S(s)x'))^{\frac{\rho}{\rho-1}} + C \alpha (\varphi(S(s)x - S(s)x'))^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \geq (\varphi_1(S(t)x - S(t)x'))^\rho + (\varphi_2(S(t)x - S(t)x'))^\sigma$$

où $\alpha = 0$ si $\varphi_2 = 0$, 1 sinon.

Démonstration de l'inégalité (21). Selon une idée bien classique (Cf. par ex. [6]) on se ramène au théorème II.1 en se plaçant dans l'espace de Banach $\chi = X \times X$ muni de la norme habituelle $\|(x,x')\|_\chi = \|x\|_X + \|x'\|_X$.

On définit l'opérateur @ dans χ par

$$@ (x,x') = \{ (y,y') : y \in Ax \text{ et } y' \in Ax' \}$$

et les fonctions $\tilde{\varphi}_i$ ($i = 1,2,3$) par $\tilde{\varphi}_i(x,x') = \varphi_i(x-x')$.

L'opérateur @ est accréatif dans χ et $(I+\lambda @)^{-1}(x,x') = ((I+\lambda A)^{-1}x, (I+\lambda A)^{-1}x')$. En outre

$\lim_{n \rightarrow \infty} (I + \frac{t}{n} @)^{-n} (x,x') = (S(t)x, S(t)x')$. Les hypothèses H1...H7 du théorème II.1 sont vérifiées et on en déduit (21).

La démonstration de l'inégalité (22) se fait de la même façon.

Le résultat suivant d'itérations asymptotiques se démontre de la même façon en introduisant les hypothèses suivantes.

A'1 $D(A) \subset R(I+\lambda A)$ pour $0 \leq \lambda < \lambda_0$

A'2 $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions convexes s.c.i. non négatives vérifiant

$$\varphi((1+\lambda A)^{-1}x - (1+\lambda A)^{-1}x') \leq \varphi_n(x-x'), \quad \forall x, x' \in \overline{D(A)} \text{ et } x-x' \in D(\varphi_n)$$

A'3 Il existe une suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ strictement positive et $\beta \geq 0$ telle que A est $(\varphi_n, \beta \varphi_n, \alpha_n \varphi_{n+1})$ -bicoercif

A'4 (α_n) vérifie A4

A'5 Il existe une suite $(r_n)_{n \geq 1}$, $r_n > 1$ et $r_n \rightarrow +\infty$ et des constantes $K > 0$, $\beta \geq 0$ et $\alpha \geq 0$ telles que

$$A \text{ soit } (\varphi_n^{r_n}, \beta \varphi_n^{r_n}, K^n \varphi_n^{r_n+\alpha})\text{-bicoercif.}$$

A'6 r_n vérifie A6.

PROPOSITION II.7. Sous les hypothèses A'1...A'4, on a pour tout $t > 0$ et tout couple $(x, x') \in \overline{D(A)}$ tel que $x-x' \in \bigcap_{n \geq 1} D(\varphi_n)$

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup (\varphi_n(S(t)x - S(t)x'))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{t} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \left(\frac{n^n}{\prod_{i=1}^n \alpha_i} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Sous les hypothèses A'1, A'2, A'5, A'6 il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour $t > 0$ et tout couple $(x, x') \in \overline{D(A)}$ vérifiant $x-x' \in \bigcap_{n \geq 1} D(\varphi_n)$, on ait

$$(24) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \varphi_n(S(t)x - S(t)x') \leq C \left(\beta + \frac{1}{t} \right)^T (\varphi_1(x-x'))^S$$

où S et T sont donnés au théorème II.5.

III - APPLICATIONS

Soit Ω un ouvert borné (en général) de \mathbb{R}^N ($N \geq 2$) de frontière Γ régulière. Nous noterons $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω et $W^{k,p}(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$) les espaces de Sobolev usuels (cf. [1]).

$W^{\sigma,p}(\Omega)$ ($0 < \sigma < 1$) est l'espace des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles que

$$\int_{\Omega} \int_{X\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+\sigma p}} dx dy < +\infty$$

$W^{s,p}(\Omega)$ ($s = k + \sigma$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \sigma < 1$) est l'espace des fonctions de $W^{k,p}(\Omega)$ dont les dérivés à l'ordre k sont dans $W^{\sigma,p}(\Omega)$.

$W_0^{s,p}(\Omega)$ est l'adhérence dans $W^{s,p}(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Nous appliquerons nos résultats abstraits à des opérateurs du type $-\operatorname{div} \cdot \partial_j(\operatorname{grad}(\cdot))$, $-\Delta \beta(\cdot)$ et $-\Delta(\cdot) + \beta(\cdot)$.

Montrons tout d'abord quelques résultats techniques.

LEMME III.1. Soient $p, q \in [1, +\infty]$, $q \neq +\infty$, $\theta \in [0, 1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ liés par les relations suivantes

$$(25) \quad \theta + \alpha(1-\theta) > 0; \alpha + p(1 - \frac{1}{q}) > 0; \frac{\theta}{p} + (1-\theta)(\frac{1}{q} - \frac{1}{N}) > 0$$

Il existe une constante $C > 0$ (dépendant de $\alpha, p, q, \theta, \Omega$) telle que pour toute fonction $u \in L^p(\Omega)$ vérifiant $|u|^\alpha \in W^{1,p}(\Omega)$, on ait

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|u\|_{L^p(\Omega)}^\theta (\| |u|^\alpha \|_{L^p(\Omega)} + \|\operatorname{grad} \cdot |u|^\alpha \|_{L^q(\Omega)})^{1-\theta} \geq C \|u\|_{L^r(\Omega)}^{\theta + \alpha(1-\theta)} \\ \text{avec } \frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha(1-\theta) + \theta} \left(\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q} - \frac{1-\theta}{N} \right) \end{array} \right.$$

Démonstration. Si $\theta = 0$ ou 1 l'inégalité est immédiate, supposons donc $0 < \theta < 1$ et soit β tel que

$$(27) \quad \operatorname{Min} \left(\frac{\theta}{1-\theta} + \alpha, p(1 - \frac{1}{q}) + \alpha \right) \geq \beta > \operatorname{Max} \left(0, \alpha, \alpha + p(\frac{1}{N} - \frac{1}{q}) \right)$$

Soit $v = |u|^\beta$, on a presque partout : $\operatorname{grad} \cdot |u|^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} |v|^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}} \operatorname{grad} \cdot v$.

Considérons s tel que $0 < s < 1$ et $s' = \frac{s-1}{s} < 0$, on a par Hölder

$$\int_{\Omega} |\operatorname{grad} |u|^\alpha|^q dx \geq \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^q \left(\int_{\Omega} |\operatorname{grad} \cdot v|^{qs} dx \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\Omega} |v|^{\frac{\alpha-\beta}{\beta} qs'} dx \right)^{\frac{1}{s'}}$$

Choisissons s' tel que $\frac{\alpha-\beta}{\beta} qs' = \frac{p}{\beta}$, d'où $1 + (\beta-\alpha) \frac{q}{p} = \frac{1}{s}$ et $\int_{\Omega} |v|^{\frac{\alpha-\beta}{\beta} qs'} dx = \int_{\Omega} |u|^p dx$ et par suite

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^\theta \|\operatorname{grad} |u|^\alpha\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta} \geq \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^{1-\theta} \|\operatorname{grad} \cdot v\|_{L^{qs}(\Omega)}^{1-\theta} \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\theta + (1-\theta)(\alpha-\beta)}$$

et par Hölder

$$\int_{\Omega} |u|^{qs\beta} dx \leq \left(\int_{\Omega} |u|^{\alpha q} dx \right)^s \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1-s}$$

et par suite

$$\| |u|^\alpha \|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta} \|u\|_{L^p(\Omega)}^\theta \geq \|v\|_{L^{qs}(\Omega)}^{1-\theta} \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\theta + (1-\theta)(\alpha-\beta)}$$

Le terme de gauche de (26) est donc minoré par

$$K_\theta \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\theta + (1-\theta)(\alpha-\beta)} (\|v\|_{L^{qs}(\Omega)} + \|\text{grad} \cdot v\|_{L^{qs}(\Omega)})^{1-\theta}$$

avec $K_\theta = \text{Min} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^\theta, \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1-\theta} \right)$.

Fixons s tel que $1 \leq qs < N \Leftrightarrow p(1 - \frac{1}{q}) + \alpha \geq \beta > p(\frac{1}{N} - \frac{1}{q}) + \alpha$, il existe alors une constante C_1 telle que l'on a (Cf. [1])

$$\|v\|_{L^{qs}(\Omega)} + \|\text{grad} \cdot v\|_{L^{qs}(\Omega)} \geq C_1 \|v\|_{L^{qs^*}(\Omega)} \text{ où } \frac{1}{qs^*} = \frac{1}{qs} - \frac{1}{N}$$

on en déduit que le terme de gauche de l'inégalité (26) est minoré par

$$K_\theta C_1^{1-\theta} \|v\|_{L^{qs^*}(\Omega)}^{1-\theta} \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\theta + (1-\theta)(\alpha-\beta)}$$

et on achève par Hölder.

REMARQUE III.2. Si $|u|^\alpha \in W_0^{1,q}(\Omega)$, on peut remplacer l'inégalité (26) par

$$(28) \quad \|u\|_{L^p(\Omega)}^\theta \|\text{grad} \cdot |u|^\alpha\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta} \geq C \|u\|_{L^r(\Omega)}^{\theta + \alpha(1-\theta)}$$

En outre, en utilisant la définition directe d'une trace sur Γ selon presque toutes les normales à Γ on déduit du théorème 4.10, Chap. 2 de J. Necas [13] que si $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ et $\text{grad} |u|^\alpha \in L^q(\Omega)$ alors $|u|^\alpha \in W_0^{1,q}(\Omega)$ ($\alpha > 0, q \geq 1$).

A. Opérateur $-\text{div} \cdot \partial j(\text{grad}(\cdot))$

Soit j une application de $\Omega \times \mathbb{R}^N$ dans \mathbb{R} vérifiant

e1 Pour presque tout $x \in \Omega, s \rightarrow j(x,s)$ est une application convexe continue de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} et $j(x,0) = 0$

e2 $\forall s \in \mathbb{R}^N, j(\cdot, s) \in L^1(\Omega)$ et il existe deux constantes C_1 et C_2 positives et C_0 une fonction de $L^1(\Omega)$ telles que $\forall (x,y) \in \Omega \times \Omega, \forall s \in \mathbb{R}^N$

$$j(x,s) \leq C_1 \{ j(y,s) + C_0(x) + C_0(y) + C_2 |s|_N \}$$

où $| \cdot |_N$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^N et $(\cdot)_N$ le produit scalaire

e3 Il existe deux constantes $C_3 > 0$ et $q \geq 2$ telles que pour presque tout $x \in \Omega$, on ait

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (u,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \forall U \in \partial j(x,u), \forall V \in \partial j(x,v) \\ (V-U | v-u)_N \geq C_3 |v-u|_N^q \end{array} \right.$$

e4 Il existe deux constantes $C_3 > 0$ et $q > 1$ telles que pour presque tout $x \in \Omega$, on ait

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall u \in \mathbb{R}^N, \forall U \in \partial j(x,u) \\ (U | u)_N \geq C_3 |u|_N^q \end{array} \right.$$

Soit γ un graphe maximal monotone de \mathbb{R} et $j'(r) = \int_0^r \gamma(\sigma) d\sigma$, on définit alors J par

$$(31) \quad J(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} j(x, \text{grad}.u) dx + \int_{\Omega} j'(u) dx & \text{si } \begin{cases} u \in W_0^{1,1}(\Omega) \\ j(x, \text{grad}.u) \in L^1(\Omega) \\ j'(u) \in L^1(\Omega) \end{cases} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

J est une fonction convexe s.c.i. dans $L^2(\Omega)$ (Cf. [2]) dont le sous-différentiel ∂J est donné par :

$$(32) \quad \begin{aligned} f \in \partial J(u) &\Leftrightarrow u \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega), \exists g \in (L^1(\Omega))^N \text{ avec } \text{div}.g \in L^1(\Omega) \\ &\int_{\Omega} (u \cdot \text{div}.g + g \cdot \text{grad}.u) dx = 0 \quad \text{et} \\ &\left\{ \begin{array}{l} g(x) \in \partial j(x, \text{grad}.u(x)) \text{ p.p. sur } \Omega \\ f(x) + \text{div}.g(x) \in \gamma(u(x)) \text{ p.p. sur } \Omega \end{array} \right. \end{aligned}$$

On notera par la suite $f(x) \in \gamma(u(x)) - \text{div} \cdot \partial j(x, \text{grad} \cdot u(x))$ et sous les hypothèses e1, e2, e4 la fermeture dans $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ de ∂J pour $1 \leq p \leq 2$ (resp. la restriction de ∂J à $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ pour $p > 2$) est un opérateur m-accréatif de $L^p(\Omega)$, soit A_p (Cf. [2]).

Pour r et $p \geq 1$ nous noterons pour u et $v \in L^p(\Omega)$

$$\langle v, u \rangle_{r,p} = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (\|u+tv\|_{L^p(\Omega)}^r - \|u\|_{L^p(\Omega)}^r) = r \|u\|_{L^p(\Omega)}^{r-p} \int_{\Omega} v \cdot u |u|^{p-2} dx$$

LEMME III.3. Soient $r \geq p > 1$, sous les hypothèses (e1, e2, e3) (*) il existe une constante C telle que l'on ait pour $rN - pq > 0$

(*) sous (e1, e2, e4) on obtient (33) avec $v = V = 0$, en supposant $p+q-2 > 0$.

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall u, v \in D(A_p), \forall U \in A_p u, \forall V \in A_p v \\ \langle U-V, u-v \rangle_{r,p} \geq C \|u-v\|_{L^p(\Omega)}^{r+q-2} \\ \text{où } \frac{r+q-2}{p} = \frac{r}{p} - \frac{q}{N} \end{array} \right.$$

Démonstration. Nous supposons tout d'abord que $\gamma(\cdot)$ est lipschitzienne, partout définie sur \mathbb{R} et par suite, si $U \in \partial J(u)$, il existe $g \in (L^1(\Omega))^N$ avec $\text{div} \cdot g \in L^2(\Omega)$ et

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(x) \in \partial j(x, \text{grad} \cdot u) \quad \text{p.p. sur } \Omega, \\ U(x) + \text{div} \cdot g(x) = \gamma(u(x)) \quad \text{p.p. sur } \Omega \end{array} \right.$$

Soient $1 < p < 2$ et (v, V) un autre élément de $G(\partial j)$ et g' la fonction de $(L^1(\Omega))^N$ associée. On a

$$\langle U-V, u-v \rangle_{r,p} = r \|u-v\|_{L^p(\Omega)}^{r-p} \int_{\Omega} (U-V)(u-v) |u-v|^{p-2} dx$$

et cette expression est minorée par

$$r \|u-v\|_{L^p(\Omega)}^{r-p} \int_{\Omega} -\text{div}(g-g')(u-v) |u-v|^{p-2} dx$$

Pour m et $n \in \mathbb{N}$, on considère $\varphi_{m,n}$ la fonction définie par

$$\varphi_{m,n}(r) = \begin{cases} m^{2-p} r & \text{si } |r| \leq m^{-1} \\ r |r|^{p-2} & \text{si } m^{-1} \leq |r| \leq n \\ n^{p-1} \text{sign}(r) & \text{si } |r| \geq n \end{cases}$$

Du fait de la condition d'intégration par partie associée au sous-différentiel, $(g-g') \cdot \text{grad}(u-v)$ est intégrable et par suite il en est de même de $(g-g') \cdot \text{grad} \varphi_{m,n}(u-v)$. On établit alors que

$$\int_{\Omega} -\text{div}(g-g') \varphi_{m,n}(u-v) dx = \int_{\Omega} (g-g') \cdot \text{grad} \varphi_{m,n}(u-v) dx$$

En passant à la limite successivement en n (par le théorème de Lebesgue) et en m (par le théorème de Fatou) on en déduit que

$$\int_{\Omega} -\text{div}(g-g')(u-v) |u-v|^{p-2} dx \geq \int_{\Omega} (g-g') \cdot \text{grad} ((u-v) |u-v|^{p-2}) dx,$$

d'où

$$(35) \quad \langle U-v, u-v \rangle_{r,p} \geq C r^{(p-1)} \left(\frac{q}{p+q-2} \right)^q \|u-v\|_{L^p(\Omega)}^{r-p} \|\text{grad} |u-v|^{p-2}\|_{L^q(\Omega)}^q$$

où C ne dépend que de J, d'où (33) en utilisant le lemme III.3 .

Lorsque γ est quelconque, on le remplace par sa régularisée Yosida γ_λ ($\lambda > 0$) Cf. [6] et on passe à la limite en λ en utilisant la semi-continuité supérieure de $(x,y) \rightarrow \langle x,y \rangle_{r,p}$. Par fermeture de ∂J dans $L^p(\Omega)$, on en déduit (33) pour A_p $1 < p \leq 2$. Lorsque $2 \leq p < +\infty$, on procède de même en remarquant que la fonction g associée à 34 vérifie $\text{div}.g \in L^p(\Omega)$.

Considérons maintenant l'équation suivante

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div} . \partial j(x, \text{grad} . u) + \gamma(u) \ni 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(.,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ u(.,t) = 0 & \text{dans } \Gamma \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$$

Pour $u_0 \in \overline{D(A_p)}^{L^p}$ la solution (36) dans $L^p(\Omega)$ est la limite ($n \rightarrow +\infty$) de $(I + \frac{t}{n} A_p)^{-n} u_0$.

THEOREME III.4. *Sous les hypothèses (e1, e2, e4), pour $p_0 \geq 1, q > \frac{2N}{N+p_0}$ la solution $u(.,t)$ de (36) à donnée initiale u_0 dans $\overline{D(A_{p_0})}^{L^{p_0}}$ appartient à $L^\infty(\Omega)$ pour $t > 0$ et il existe C, ne dépendant que de Ω et du graphe ∂j telle que pour $p_0 \leq p \leq +\infty$:*

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \| u(.,t) \|_{L^p(\Omega)} \leq C t^{-\delta} \| u_0(.) \|_{L^{p_0}(\Omega)}^\sigma, \quad \forall t > 0 \\ \delta = \frac{N(p-p_0)}{p(p_0q+N(q-2))}, \quad \sigma = \frac{p_0(pq+N(q-2))}{p(p_0q+N(q-2))} \end{array} \right.$$

Sous les hypothèses e1, e2, e3, la formule (37) devient

$$(38) \quad \| u(.,t) - v(.,t) \|_{L^p(\Omega)} \leq C t^{-\delta} \| u_0(.) - v_0(.) \|_{L^{p_0}(\Omega)}^\sigma$$

pour tout $t > 0, 1 \leq p_0 \leq p \leq +\infty$, formule où $v(.,t)$ désigne la solution de (36) à donnée initiale v_0 dans $\overline{D(A_{p_0})}^{L^{p_0}}$ et où δ, σ et C sont inchangés.

Démonstration. Nous distinguerons selon que $p_0 = 1, p = +\infty$ et $1 < p_0 \leq p < +\infty$

1) $1 < p_0 < p < +\infty$. Il existe $r \geq p, n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{r+n(q-2)}{p} = \frac{r}{p_0} - n \frac{q}{N}$. On construit la suite $(p_i)_{i=0}^{i=n}$ telle que $\frac{r+i(q-2)}{p_i} = \frac{r+(i-1)(q-2)}{p_{i-1}} - \frac{q}{N}, 1 \leq i \leq n$ et cette suite est strictement croissante dès

que $q > \frac{2N}{N+p_0}$, en outre $p_n = p$. En appliquant (7), on en déduit que pour u_0 dans $\overline{D(A_{p_0})}^{p_0}$, on a

$$\forall 1 \leq i \leq n, \|u_{(\cdot, i)} \frac{t}{n}\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{r+i(q-2)} \leq C_i \frac{n}{t} \|u_{(\cdot, (i+1))} \frac{t}{n}\|_{L^{p_{i-1}}(\Omega)}^{r+(i-1)(q-2)}$$

d'où $\|u_{(\cdot, t)}\|_{L^p(\Omega)}^{r+n(q-2)} \leq \frac{C'}{t^n} \|u_0(\cdot)\|_{L^{p_0}(\Omega)}^r$, d'où (37).

2) $p_0 = 1$. Soient $r \geq \lambda > 1$ tels que $rN - \lambda q > 0$ et $\tilde{\lambda}$ déterminé par $\frac{r+(q-2)}{\tilde{\lambda}} = \frac{r}{\lambda} - \frac{q}{N}$. Pour $\rho = 1 + (\frac{q}{N} + (q-2))(r(1 - \frac{1}{\lambda}))^{-1}$, $\rho > 1$ puisque $q > \frac{2N}{N+1}$ (par hypothèse) et par Hölder

$$\| \cdot \|_{L^{\lambda}(\Omega)}^{r\rho} \leq \| \cdot \|_{L^{\tilde{\lambda}}(\Omega)}^{r+q-2} \cdot \| \cdot \|_{L^1(\Omega)}^{r\rho-(r+q-2)}$$

En appliquant alors (8), on en déduit

$$\|u_{(\cdot, t)}\|_{L^{\lambda}(\Omega)} \leq \frac{C}{t^{\delta'}} \|u_0(\cdot)\|_{L^1(\Omega)}^{\sigma'}$$
 avec $\delta' = \frac{1}{\rho\rho_1 - \rho_1}$ et $\sigma' = \frac{\rho\rho_1 - \rho_2}{\rho\rho_1 - \rho_1}$

d'où (37) en explicitant.

3) $p = +\infty$. Soit a tel que $\frac{N}{N-1} > a > 1$; on considère les suites $(p_n)_{n \geq 0}$ et $(r_n)_{n \geq 1}$ telles que $p_n = a^n p_0$ et $\frac{r_n + q - 2}{p_n} = \frac{r_n}{p_{n-1}} - \frac{q}{N}$ d'où $r_n = \frac{a q}{N(a-1)} p_{n-1} + \frac{q-2}{a-1}$, donc asymptotiquement $r_n > q p_{n-1}$ en choisissant p_0 assez grand (en itérant un nombre fini de fois), on peut supposer : $r_n \geq p_{n-1} \quad \forall n \geq 1$.

On applique alors le lemme III.3 entre $L^{p_{n-1}}(\Omega)$ et $L^{p_n}(\Omega)$ en prenant $r = r_n$ et la constante C_n obtenue est de la forme

$$C_n = C_1 C_{2,n} (p_{n-1} - 1) r_n \left(\frac{q}{p_{n-1} + q - 2}\right)^q$$

où C_1 ne dépend que du graphe ∂j et où $C_{2,n}^{-1}$ désigne la norme de l'injection de $W^{1, q s_n}(\Omega)$ dans $L^{q s_n^*}(\Omega)$ avec les notations du lemme III.1. ($\frac{1}{q s_n^*} = \frac{1}{q s_n} - \frac{1}{N}$). On peut alors choisir s_n tel que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q s_n^*} \geq 1 - \frac{1}{N}$ (Cf. [14]) par suite $C_{2,n}^{-1}$ demeure borné et il existe C tel que $C_n \geq C(a^{2-q})^n$.

Avec les notations du théorème II.5, on a $\mu_n = \frac{r_n}{r_n + q - 2}$, c'est-à-dire $\mu_n = \frac{p_n q + N(q-2)}{p_n} \cdot \frac{p_{n-1}}{p_{n-1} q + N(q-2)}$.

$S_n = \mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1$ converge vers $\frac{p_0 q}{p_0 q + N(q-2)}$ si n tend vers $+\infty$. Comme les produits $\mu_n \dots \mu_k$ demeurent bornés et $r_n \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_0 q}{N(a-1)} a^n$ la suite $R_n = n \frac{\mu_n}{r_n} + (n-1) \frac{\mu_n \mu_{n-1}}{r_{n-1}} + \dots + 1 \cdot \frac{\mu_n \dots \mu_1}{r_1}$ converge.

En appliquant le théorème II.5, on a

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^{p_n}(\Omega)} \leq \frac{C}{t^T} \|u_0(\cdot)\|_{L^{p_0}(\Omega)}^S$$

$$S = \frac{p_0 q}{p_0 q + N(q-2)}, \quad T = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu_n}{r_n} + \frac{\mu_n \mu_{n-1}}{r_{n-1}} + \dots + \frac{\mu_n \dots \mu_1}{r_1} \right)$$

en explicitant on obtient $T = \frac{N}{p_0 q + N(q-2)}$.

La démonstration de (38) est identique.

REMARQUE III.5. En utilisant l'effet régularisant dans $L^2(\Omega)$ du semi-groupe engendré par ∂J , il existe pour $q \geq 2$ une constante C telle que

$$(39) \quad \|u(\cdot, t+h) - u(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C h^\lambda \cdot t^{-\mu} \|u_0(\cdot)\|_{L^{p_0}(\Omega)}^\sigma \quad h, t \geq 0$$

pour $1 \leq p_0 \leq 2 \leq p \leq +\infty$ où λ et μ sont des nombres positifs aisément calculables ($0 < \lambda < 1$).

Dans le cas particulier où $q = 2$ (par exemple si ∂J est linéaire) on obtient :

$$(40) \quad \delta = \frac{N}{2} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} \right), \quad \sigma = 1, \quad \lambda = 1, \quad \mu = 1 + \frac{N}{2} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} \right)$$

Nous retrouvons ainsi les résultats de L.C. Evans [9] et F.J. Massey [12]. Le lecteur trouvera quelques généralisations dans L. Véron [14] (Ω non borné, données non nulles sur Γ).

THEOREME III.6. Sous les hypothèses (e_1, e_2, e_3) , avec $q > 2$, il existe une constante $C = C(\Omega, j)$ telle que la solution $u(\cdot, t)$ de (36) à donnée initiale dans $L^1(\Omega)$ vérifie

$$(41) \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C t^{-\frac{1}{q-2}}, \quad \forall t > 0$$

Démonstration. Soient $|\Omega| = \text{mes}(\Omega)$, $\sigma = \frac{q}{q+N(q-2)}$ ($0 < \sigma < 1$) et $\delta = \frac{N}{q+N(q-2)}$. En appliquant l'inégalité (36) on obtient pour $n \in \mathbb{N}$

$$(42) \quad \|u(\cdot, \frac{t}{2^{n-1}})\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C 2^{n\delta}}{t^\delta} \|u(\cdot, \frac{t}{2^n})\|_{L^1(\Omega)}^\sigma \leq \frac{C |\Omega|^\sigma 2^{n\delta}}{t^\delta} \|u(\cdot, \frac{t}{2^n})\|_{L^\infty(\Omega)}^\sigma$$

En combinant ces n inégalités, on obtient

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\frac{C |\Omega|^\sigma}{t^\delta} \right)^{R_n} 2^{-T_n} \|u(\cdot, \frac{t}{2^n})\|_{L^\infty(\Omega)}^{\sigma^{n-1}}$$

avec $R_n = 1 + \sigma + \dots + \sigma^{n-1} = \frac{1 - \sigma^n}{1 - \sigma} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \sigma} = \frac{q + N(q-2)}{N(q-2)}$

et $T_n = \delta(1 + 2\sigma + \dots + n\sigma^{n-1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\delta}{(1 - \sigma)^2}$

En outre $\|u(\cdot, \frac{t}{2^n})\|_{L^\infty(\Omega)}^{\sigma^{n-1}} \leq (\frac{C 2^{n\delta}}{t^\delta} \|u_0(\cdot)\|_{L^1(\Omega)}^\sigma)^{\sigma^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

d'où (41) puisque $\frac{\delta}{1 - \sigma} = \frac{1}{q-2}$.

REMARQUE III.7. La relation (41) a cela de remarquable qu'elle donne une majoration de $u(\cdot, t)$ dans $L^\infty(\Omega)$ indépendante de toute donnée initiale dans $L^1(\Omega)$, phénomène que l'on retrouvera dans d'autres équations.

B. Opérateur $-\Delta \beta(\cdot)$

Soit β un graphe maximal monotone de \mathbb{R} tel que $0 \in \beta(0)$ et A_p l'opérateur défini par

$$D(A_p) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists g \in W_0^{1,p}(\Omega), g(x) \in \beta(u(x)) \text{ p.p. sur } \Omega$$

$$\text{et } \Delta g \in L^p(\Omega)\} \quad (1 \leq p \leq +\infty)$$

$$A_p u = -\Delta g \text{ pour } u \in D(A_p) \text{ et } g \text{ associé.}$$

L'opérateur A_1 ainsi défini est m-accréatif dans $L^1(\Omega)$ (Cf. P. Bénilan [4]) mais sa restriction A_p à $L^p(\Omega)$ ($p > 1$) n'est accréative dans $L^p(\Omega)$ que si $\beta = \alpha \cdot \text{Id}$ ($\alpha \in \mathbb{R}^+$).

Considérons l'équation d'évolution

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta \beta u \ni 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \beta(u(\cdot, t)) = 0 & \text{dans } \Gamma \times \mathbb{R}^+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Cette équation a été étudiée dans $H^{-1}(\Omega)$ par H. Brézis [7] et dans $L^1(\Omega)$ par P. Bénilan [3] et L.C. Evans [10]. Tout récemment et indépendamment de l'auteur, P. Bénilan a mis en évidence un effet régularisant de $L^1(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$ sous des hypothèses faibles sur β à savoir $\beta(r) \geq C |r|^\mu$ avec $\mu > \frac{N-2}{2}$.

L'hypothèse que nous ferons est la suivante :

e1 Il existe $k \geq 0$, $C > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$(44) \quad \beta'(r) \geq C |r|^{\mu-1} \quad \text{p.p. pour } |r| > k.$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $r \geq p \geq 1$, pour $f, g \in L^p(\Omega)$ on pose

$$(45) \quad \begin{aligned} \langle f, g \rangle_{r, p_\lambda^+} &= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (\| (g+tf-\lambda)^+ \|_{L^p(\Omega)}^r - \| (g-\lambda)^+ \|_{L^p(\Omega)}^r) \\ \langle f, g \rangle_{r, p_\lambda^+} &= r \| (g-\lambda)^+ \|_{L^p(\Omega)}^{r-p} \int_{\Omega} f (g-\lambda)^{+p-1} dx \end{aligned}$$

LEMME III.8. Soient $r > p > 1$ vérifiant $rN - 2p > 0$ et $p + \mu - 1 > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(46) \quad \begin{aligned} \forall u \in D(A_p), \forall U \in A_p u, \forall \epsilon > 0 \\ \langle U, u \rangle_{r, p_k^+} \geq C \text{Min}(1, (\frac{\epsilon}{k+\epsilon})^{1-\mu}) \| (u-k-\epsilon)^+ \|_{L^{\tilde{p}}(\Omega)}^{r+\mu-1} \\ \frac{r+\mu-1}{\tilde{p}} = \frac{r}{p} - \frac{2}{N} \end{aligned}$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que dans la formule (46) la valeur de $\text{Min}(1, (\frac{\epsilon}{k+\epsilon})^{1-\mu})$ dépend du signe de $1-\mu$ et vaut 1 si $\mu \geq 1$ ou $k=0$.

Soit $\eta > 0$, on pose $\beta_\eta = \beta + \eta \text{Id}$, β_η^{-1} est une fonction lipschitzienne définie sur \mathbb{R} . Soient $u \in D(-\Delta \beta_\eta)$ dans $L^p(\Omega)$, $g \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $g(\cdot) \in \beta(u(\cdot))$ p.p. dans Ω et $U = -\Delta g$; comme β_η^{-1} est lipschitzienne, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et par suite

$$\langle U, u \rangle_{r, p_k^+} = r \| (u-k)^+ \|_{L^p(\Omega)}^{r-p} \int_{\Omega} -\Delta g \cdot (u-k)^{+p-1} dx$$

et l'intégrale du membre de droite vaut :

$$(p-1) \int_{\Omega} \beta'_\eta(u) (u-k)^{+p-2} |\text{grad} \cdot u|^2 dx.$$

Supposons $\mu \geq 1$, on a alors $\beta'(r)(r-k)^{p-2} \geq C(r-k)^{p+\mu-3}$ pour $|r| \geq k$, d'où

$$\langle U, u \rangle_{r, p_k^+} \geq C(p-1)r \| (u-k)^+ \|_{L^p(\Omega)}^{r-p} \int_{\Omega} (u-k)^{+p+\mu-3} |\text{grad}(u-k)^+|^2 dx$$

ce que l'on minore par :

$$C \frac{4r(p-1)}{(p+\mu-1)^2} \| (u-k)^+ \|_{L^p(\Omega)}^{r-p} \| \text{grad}(u-k)^+ \|^{\frac{p+\mu-1}{2}} \| \cdot \|_{L^2(\Omega)}^2$$

d'où le résultat par le lemme III.1.

Supposons $\mu < 1$, alors pour $\epsilon > 0$ et $r \geq k + \epsilon$, on a

$$(47) \quad \beta'_\eta(r)(r-k)^{p-2} \geq C \left(\frac{\epsilon}{k+\epsilon}\right)^{1-\mu} (r-k)^{p+\mu-3}$$

Si $p+\mu-3 \geq 0$, cette dernière expression est minorée par $C \left(\frac{\epsilon}{k+\epsilon}\right)^{1-\mu} (r-k-\epsilon)^{p+\mu-3}$ pour $r \geq k + \epsilon$, d'où le résultat comme précédemment, en considérant $w = (u-k-\epsilon)^+$.

Si $-2 < p+\mu-3 < 0$, posons $\lambda = \frac{p+\mu-1}{2}$ et pour $\ell \in \mathbb{R}$, $\Omega_\ell = \{x \in \Omega : u(x) \geq \ell\}$; on a donc

$$\langle U, u \rangle_{r, p_k^+} \geq C r \frac{p-1}{\lambda^2} \left(\frac{\epsilon}{k+\epsilon}\right)^{1-\mu} \|u-k\|_{L^p(\Omega_{k+\epsilon})}^{r-p} \int_{\Omega_{k+\epsilon}} |\text{grad}(u-k)^\lambda|^2 dx$$

expression que l'on minore par

$$C r \frac{p-1}{\lambda^2} \left(\frac{\epsilon}{k+\epsilon}\right)^{1-\mu} \|u-k\|_{L^p(\Omega_{k+\epsilon})}^{r-p} \int_{\Omega} |\text{grad}((u-k)^{\lambda} - \epsilon^\lambda)^+|^2 dx$$

d'où, en posant $w = ((u-k)^{\lambda} - \epsilon^\lambda)^+ \frac{1}{\lambda}$,

$$\langle U, u \rangle_{r, p_k^+} \geq C r \frac{p-1}{\lambda^2} \left(\frac{\epsilon}{k+\epsilon}\right)^{1-\mu} \|w\|_{L^p(\Omega)}^{r-p} \|\text{grad} |w|^\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2$$

En appliquant le lemme III.1 à cette dernière expression et en remarquant que sur $\Omega_{k+2\epsilon}$,

$$((u-k)^\lambda - \epsilon^\lambda) \frac{1}{\lambda} \geq (2^\lambda - 1) \frac{1}{\lambda} (u-k-2\epsilon), \text{ on a}$$

$$\langle U, u \rangle_{r, p_k^+} \geq (2^\lambda - 1) \frac{4r C C'(p-1)}{(p+\mu-1)^2} \left(\frac{\epsilon}{k+\epsilon}\right)^{1-\mu} \|(u-k-2\epsilon)^+\|_{L^{\hat{p}}(\Omega)}^{r+\mu-1}$$

d'où le résultat.

Lorsque $\eta \rightarrow 0$, $-\Delta \beta_\eta$ converge au sens des graphes de $L^p(\Omega)$ vers $-\Delta \beta$, on en déduit (46) par semi-continuité.

THEOREME III.9. *Sous l'hypothèse e1, pour $p_0 \geq 1$ et $\mu > \frac{N-2p_0}{N}$, la solution $u(.,t)$ de (43) à donnée initiale u_0 dans $\overline{D(A_{p_0})}^{p_0}$ appartient à $L^\infty(\Omega)$ pour $t > 0$ et il existe C ne dépendant que de Ω et de β tel que pour tous $\epsilon > 0$, $t > 0$ et $u_0 \in \overline{D(A_{p_0})}^{p_0}$, on ait pour $p_0 \leq p \leq +\infty$*

$$(48) \quad \|(|u(.,t)| - k - \epsilon)^+ \|_{L^p(\Omega)} \leq C t^{-\delta} \text{Max}(1, \left(\frac{k+\epsilon}{\epsilon}\right)^{(1-\mu)\delta}) \| (|u_0(.)| - k)^+ \|_{L^{p_0}(\Omega)}^\sigma$$

$$\delta = \frac{N(p-p_0)}{p(2p_0+N(\mu-1))}, \quad \sigma = \frac{p_0(2p+N(\mu-1))}{p(2p_0+N(\mu-1))}$$

Démonstration. Dans le cas $1 < p_0 \leq p < +\infty$, on considère $r \geq p$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{r+n(\mu-1)}{p} = \frac{r}{p_0} - n \frac{2}{N}$.

On construit la suite $(p_i)_{i=0}^{j=n}$ définie par $\frac{r+i(\mu-1)}{p_i} = \frac{r+(i-1)(\mu-1)}{p_{i-1}} - \frac{2}{N}$ et on applique le théorème II.1 avec

$$\varphi_2 = 0, \quad \varphi_1(x) = \left\| \left(x - k - \frac{i-1}{n} \epsilon\right)^+ \right\|_{L^{p_{i-1}}(\Omega)}^{r+(i-1)(\mu-1)}, \quad \varphi_3(x) = \left\| \left(x - k - \frac{i}{n} \epsilon\right)^+ \right\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{\delta+i(\mu-1)}, \text{ d'où}$$

$$\| (u(\cdot, t) - k - \epsilon)^+ \|_{L^p(\Omega)} \leq C t^{-\delta} \text{Max}\left(1, \left(\frac{k+\epsilon}{\epsilon}\right)^{(1-\mu)\delta}\right) \| (u_0(\cdot) - k)^+ \|_{L^{p_0}(\Omega)}^\sigma$$

Dans le cas où $p_0 = 1$, si $\mu \geq 0$ ou $k = 0$ la démonstration est semblable à celle du théorème III.4 ; si on a $-\frac{2}{N} < \mu - 1 < 0$ et $k > 0$, la démonstration se complique considérablement, on peut cependant obtenir l'estimation suivante

$$(49) \quad \| (u(\cdot, t) - k)^+ \|_{L^p(\Omega)} \leq K \left\{ t^{-\delta} \left(\frac{k+\epsilon}{\epsilon}\right)^{(1-\mu)\delta} \| (u_0(\cdot) - k)^+ \|_{L^1(\Omega)}^\sigma + \epsilon \| (u_0(\cdot) - k)^+ \|_{L^1(\Omega)}^\theta \right\}$$

où δ et σ sont donnés en (48) (avec $p_0 = 1$), où K dépend de p et où $\theta = \frac{2p+N(\mu-1)}{p(2+N(p+\mu-2))}$ (pour cela on remarque que l'on a

$$\| (u-k)^+ \|_{L^p(\Omega)} \leq \| (u-k-\epsilon)^+ \|_{L^p(\Omega)} + \epsilon (\text{mes}(\Omega))^{\frac{1}{p}}$$

Dans le cas où $p = +\infty$ (et $\mu < 1$) on considère les suites $(p_n)_{n \geq 0}$, $(r_n)_{n \geq 0}$ et $(k_n)_{n \geq 0}$ telles que $p_n = a^n p_0$,

$$\frac{r_n + \mu - 1}{p_n} = \frac{r_n}{p_{n-1}} - \frac{2}{N}, \quad k_n = k_{n-1} + \frac{a-1}{a^n} \epsilon, \quad a \text{ étant choisi de sorte que } \frac{N}{N-1} > a > 1. \text{ On a alors}$$

$$\langle U, u \rangle_{r_n p_n^+ k_{n-1}} \geq 4C \frac{r_n (p_{n-1}^{-1})}{(p_{n-1} + \mu - 1)^2} \left(\frac{k_n}{\epsilon (a-1) a^{-n}}\right)^{\mu-1} C_n \| (u - k_n)^+ \|_{L^{p_n}(\Omega)}^{r_n + \mu - 1}$$

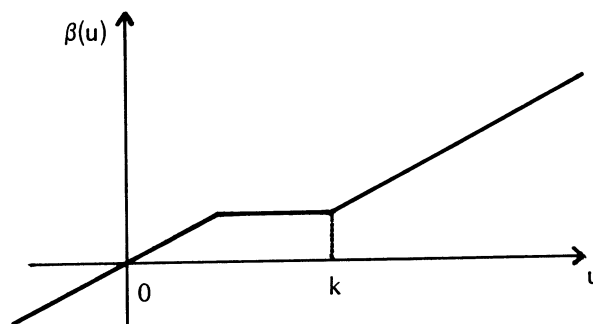
où C_n^{-1} désigne la norme de l'injection de $W_0^{1,2s_n}(\Omega)$ dans $L^{2s_n^*}(\Omega)$ (notation du lemme III.1).

Comme $\frac{\epsilon (a-1) a^{-n}}{k_n} \geq C_1 \left(\frac{\epsilon}{k+\epsilon}\right)^{1-\mu} a^{n(\mu-1)}$, on en déduit en imitant la démonstration du théorème III.4,

$$\| (u(\cdot, t) - k - \epsilon)^+ \|_{L^\infty(\Omega)} \leq C t^{-\delta} \left(\frac{k+\epsilon}{\epsilon}\right)^{(1-\mu)\delta} \| (u_0(\cdot) - k)^+ \|_{L^{p_0}(\Omega)}^\sigma$$

On en déduit (48) en remplaçant $\beta(u)$ par $-\beta(-u)$.

REMARQUE III.10. Dans le cas du problème à deux phases de Stéfan dans un domaine borné Ω de \mathbb{R}^3 , on se ramène à une équation de la forme (43) où le graphe β a l'allure suivante



Par suite $\mu = 1$ et on peut prendre $\epsilon = 0$ dans (46). On obtient donc pour $t > 0$ et $1 \leq p_0 \leq p \leq +\infty$

$$(48) \quad \| (|u(\cdot, t)| - k)^+ \|_{L^p(\Omega)} \leq C t^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p})} \| (|u_0(\cdot)| - k)^+ \|_{L^{p_0}(\Omega)}$$

REMARQUE III.11. Les conclusions du théorème III.9 demeurent valides si $\Omega = \mathbb{R}^N$.

On démontre de la même façon que le théorème III.6 le résultat suivant

THEOREME III.12. *Sous l'hypothèse e1 avec $\mu > 1$, il existe une constante $C = C(\Omega, \beta)$ telle que la solution $u(\cdot, t)$ de (43) à donnée initiale u_0 dans $L^1(\Omega)$ vérifie*

$$(51) \quad \| (|u(\cdot, t)| - k)^+ \|_{L^\infty(\Omega)} \leq C t^{-\frac{1}{\mu-1}}, \quad \forall t > 0$$

On peut en outre développer une autre méthode de majoration pour étudier l'équation (43).

Pour $p > 1$, on pose $j_p(r) = \int_0^r \beta(s) |\beta(s)|^{p-2} ds$ et

$$j_p(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} j_p(u) dx & \text{si } j_p(u) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

J_p est une fonction convexe positive, s.c.i. dans tout espace $L^r(\Omega)$ $1 \leq r < +\infty$ et par extension, nous avons $J_1(u) \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}$. Nous supposons β univoque, continue pour simplifier et $N > 2$. Nous avons

$$\langle v, u \rangle_{J_p} = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (J_p(u+tv) - J_p(u)) = \int_{\Omega} v \beta(u) |\beta(u)|^{p-2} dx$$

Considérons l'hypothèse suivante

e2 Il existe C et $\mu > 0$ tels que

$$(52) \quad |\beta(r)| \geq C |r|^\mu \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

et posons $\phi_p(u) = (j_p(u))^{\frac{1}{p}}$. On vérifie aisément que

$$(53) \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \phi_p(u) = \|\beta(u)\|_{L^\infty(\Omega)}$$

THEOREME III.13. *Sous l'hypothèse e2, pour $p_0 \geq 1$ et $\mu > \frac{N-2}{N-2+2p_0}$, la solution $u(\cdot, t)$ de (43) à donnée initiale u_0 dans $D(j_{p_0})$ appartient à $L^\infty(\Omega)$ et on a l'estimation suivante*

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\beta(u(\cdot, t))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq t^{-\delta} (\phi_{p_0}(u_0))^\sigma, \quad \forall t > 0 \\ \delta = \frac{N\mu}{2p_0\mu + (N-2)(\mu-1)}, \quad \sigma = \frac{2p_0\mu}{2p_0\mu + (N-2)(\mu-1)} \end{array} \right.$$

Si on suppose en outre que $\mu > 1$, il existe $C = C(\Omega, \beta)$ tel que pour tout u_0 dans $L^1(\Omega)$, on ait

$$(55) \quad \|\beta(u(\cdot, t))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C t^{-\frac{\mu}{\mu-1}}, \quad \forall t > 0$$

Démonstration. Soit $p > 1$ et $u \in D(A_p)$, on a

$$\langle A_p u, u \rangle_{J_p} = \int_{\Omega} -\Delta \beta(u) \beta(u) |\beta(u)|^{p-2} dx = 4 \frac{p-1}{p^2} \int_{\Omega} |\text{grad } \beta(u)|^2 |\beta(u)|^{\frac{p}{2}} dx$$

comme $\beta(u)|_{\Gamma} = 0$, on en déduit en utilisant l'inégalité de Sobolev

$$\langle A_p u, u \rangle_{J_p} \geq C' \frac{p-1}{p^2} \|\beta(u)\|_{L^{\tilde{p}}(\Omega)}^p \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1}{p} - \frac{2}{Np}$$

Comme $\beta(r) \geq Cr |r|^{\mu-1}$ on a

$$C \frac{1}{\mu} \int_0^r \beta(s) |\beta(s)|^{\tilde{q}-2} dx \leq |\beta(r)|^{\tilde{p}} \quad \text{avec} \quad \tilde{q} = \tilde{p} + 1 - \frac{1}{\mu}$$

d'où, en posant $\alpha = (1 - \frac{1}{\mu})(1 - \frac{2}{N})$, et en utilisant le théorème II.1

$$(56) \quad (\phi_p(u(s)))^p \geq C'' \frac{p-1}{p^2} (t-s) (\phi_{\tilde{q}}(u(t)))^{p+\alpha}, \quad \tilde{q} = \frac{N}{N-2} (p+\alpha)$$

Considérons la suite $(p_n)_{n \geq 0}$ déterminée par $p_n = \frac{N}{N-2} (p_{n-1} + \alpha)$ ($n \geq 1$) et p_0 , ce qui donne

$$p_n = \left(\frac{N}{N-2}\right)^n \left(p_0 + \frac{N\alpha}{2}\right) - \frac{N\alpha}{2} \quad (n \geq 0).$$

Le relation (56) devient donc

$$(\phi_{p_{n-1}}(u(s)))^{p_{n-1}} \geq C'' \frac{p_{n-1}-1}{p_{n-1}^2} (t-s) (\phi_{p_n}(u(t)))^{p_{n-1} + \alpha}$$

On vérifie aisément que

$$S_n = \frac{p_n}{p_n + \alpha} \cdot \frac{p_{n-1}}{p_{n-1} + \alpha} \cdots \frac{p_0}{p_0 + \alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{p_0}{p_0 + N \frac{\alpha}{2}} = \sigma$$

$$T_n = \sum_{i=0}^n \frac{p_n}{p_n + \alpha} \cdot \frac{p_{n-1}}{p_{n-1} + \alpha} \cdots \frac{p_i}{p_i + \alpha} \frac{1}{p_i} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{N}{2p_0 + N\alpha} = \delta$$

Comme $\frac{p_n-1}{p_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{N-2}{2}\right)^n \left(p_0 + N \frac{\alpha}{2}\right)^{-1}$, on applique la proposition II.4 d'où (54).

Si $p_0 = 1$, soient $p > 1$, $q = \frac{\frac{N}{p+\alpha}-1}{N-2}$, on a par Hölder

$$\int_0^u \beta(s) |\beta(s)|^{p-2} ds \leq |u|^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^u \beta(s) |\beta(s)|^{q(p-1)-1} ds \right)^{\frac{1}{q}}$$

d'où

$$J_p(u) \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}^{1-\frac{1}{q}} (J_{q(p-1)+1}(u))^{\frac{1}{q}}$$

Par le théorème II.1, on en déduit (54).

Si $\mu > 1$, on a $\|\beta(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C |\Omega|^\sigma 2^\delta}{t^\delta} \|\beta(u(\frac{t}{2}))\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{\sigma}{\mu}}$ or $\frac{\sigma}{\mu} = \frac{2}{2+N(\mu-1)} < 1$. En suivant l'esprit de la démonstration du théorème III.6 et $\frac{\delta}{1-\frac{\sigma}{\mu}} = \frac{\mu}{1-\mu}$, on en déduit (55).

REMARQUE III.14. La méthode présentée ne nécessite que des hypothèses sur β et non sur β' .

Sous l'hypothèse e_2 , la fonction $M_p = \beta(\cdot) |\beta(\cdot)|^{p-2}$ ($p > 1$) est une fonction de Young. Si on désigne par $\mathcal{L}_{M_p}(\Omega)$ la classe d'Orlicz des fonctions v mesurables telles que $\int_\Omega M_p(v) dx < +\infty$, nous avons mis en évidence un effet régularisant de $\mathcal{L}_{M_p}(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$ pourvu que $\mu > \frac{N-2}{N-2+2p}$, ce qui généralise [4] puisque $\mathcal{L}_{M_1}(\Omega) = \overline{D(A_1)}^{L^1}$.

C. Opérateur $\beta(\cdot)$

Les effets régularisants rencontrés jusque là étaient dus à un opérateur différentiel du second ordre, ceux que nous allons voir maintenant proviennent d'un opérateur non différentiel monotone. Les résultats s'appliqueront à $A = -\Delta + \beta$ où β est un graphe maximal monotone de \mathbb{R}^2 . Considérons pour cela l'équation différentielle

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) + \beta(u(\cdot, t)) \ni 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

(Ω espace mesuré positif) et faisons l'hypothèse suivante

$$(58) \quad \forall a \in D(\beta), \forall f \in \beta(a) \quad a f \geq C |a|^q$$

où C et q sont deux constantes positives, $q > 2$, et $0 \in \beta(0)$ pour simplifier.

On définit l'opérateur A_p dans $L^p(\Omega)$ $1 \leq p \leq +\infty$ par

$$A_p u(\cdot) = \left\{ g \in L^p(\Omega) : g(\cdot) \in \beta(u(\cdot)) \text{ p.p. sur } \Omega \right\}$$

L'opérateur A_p est m-accréatif dans $L^p(\Omega)$ et on a pour tout $p \geq 1$ et tout $[u, U] \in A_p$ et $r \geq p$

$$(59) \quad \langle U, u \rangle_{r,p} \geq C r \|u\|_{L^{\tilde{p}}(\Omega)}^{r+q-2} \quad \text{avec } \tilde{p} = \left(1 + \frac{q-2}{r}\right) p$$

THEOREME III.15. Pour tout $p_0 \geq 1$ et tout u_0 dans $\overline{D(A_{p_0})}^{L^{p_0}}$, la solution $u(\cdot, t)$ de l'équation (57) appartient pour $t > 0$ à $\bigcap_{p \geq p_0} L^p(\Omega)$ et il existe $C > 0$ telle que pour $1 \leq p_0 \leq p \leq +\infty$, on ait :

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C t^{-\delta} \|u_0(\cdot)\|_{L^{p_0}(\Omega)}^\sigma \\ \delta = \frac{p-p_0}{p(q-2)} \quad ; \quad \sigma = \frac{p_0}{p} \end{array} \right.$$

Démonstration. Il suffit de la faire pour $p = +\infty$. On considère $p_n = p_0 + n(q-2)$ ($n \geq 0$) et

$$\varphi_n(x) = \|x\|_{L^{p_n}(\Omega)}^{p_n}. \text{ L'opérateur } A_1 \text{ est } (\varphi_n, C p_n \varphi_{n+1})\text{-régularisant.}$$

Posons $\alpha_n = C p_n$, on a $\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C n(q-2)$, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n}{\prod_{i=1}^n \alpha_i} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{q-2}{C} e$$

d'après la formule de Stirling. On en déduit (60) par le théorème II.5.

REMARQUE III.16. Dans le cas où $p = +\infty$, l'inégalité (60) a ceci de remarquable qu'elle donne une majoration de $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ indépendante de la donnée initiale. On peut obtenir une généralisation de ce résultat en suivant une idée de Ph. Bénilan. Pour cela notons $\beta^0(\cdot)$ la section minimale du graphe $\beta : \beta^0(r) =$ projection de 0 sur $\beta(r)$ ($r \in D(\beta)$) et $(S(t))_{t \geq 0}$ le semi-groupe associé à l'équation (57). On a alors

PROPOSITION III.17. Il y a équivalence entre

$$i) \quad \text{Il existe } R \geq 0 \text{ tel que : (61) } \int_R^{+\infty} \left(\frac{1}{\beta^0(s)} - \frac{1}{\beta^0(-s)} \right) ds < +\infty$$

$$ii) \quad \forall t > 0, \forall p \geq 1, S(t) \overline{D(A_p)}^{L^p} \text{ est borné dans } L^\infty(\Omega), \text{ (uniformément par rapport à } p).$$

Démonstration. Tout d'abord remarquons que sous les hypothèses i) ou ii) on a $\text{Min } \beta^{-1}(0) > -\infty$ et $\text{Max } \beta^{-1}(0) < +\infty$

$i \Rightarrow ii$ Soit $R^+ = \text{Max } \beta^{-1}(0)$, $T^+ = \int_{R^+}^{+\infty} \frac{ds}{\beta^0(s)}$, $T^+ \in]0, +\infty[$.

D'après l'hypothèse (61) $r \rightarrow \int_r^{+\infty} \frac{ds}{\beta^0(s)}$ est un homéomorphisme décroissant de $[R^+, +\infty[$ sur $]0, T^+]$, soit \tilde{h} l'homéomorphisme réciproque, défini sur $]0, T^+]$ à valeur dans $[R^+, +\infty[$. On définit h de la manière suivante

$$h(t) = \begin{cases} \tilde{h}(t) & t \in]0, T^+] \\ R^+ & t > T^+ \end{cases}$$

Pour $0 < t \leq T^+$, $t = \int_{h(t)}^{+\infty} \frac{ds}{\beta^0(s)}$ et pour $t > T^+$ $h(t) = \text{Max } \beta^{-1}(0)$. Par suite

$$(62) \quad \begin{cases} h'(t) + \beta(h(t)) \ni 0 & \text{p.p. sur } \mathbb{R}^+ \\ \bar{h}(0) = \text{Sup } D(\beta) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \end{cases}$$

Comme $\overline{D(A_p)}L^p = \{f \in L^p(\Omega) : f(x) \in \overline{D(\beta)} \text{ p.p. sur } \Omega\}$

$$u_0(x) \in \overline{D(\beta)} \Rightarrow S(t)u_0(x) \leq h(t)$$

De même si \bar{h} désigne la solution de

$$\begin{cases} \bar{h}'(t) + \beta(\bar{h}(t)) \ni 0 & \text{p.p. sur } \mathbb{R}^+ \\ h(0) = \text{Inf } D(\beta) \in \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\} \end{cases}$$

$$u_0(x) \in \overline{D(\beta)} \Rightarrow S(t)u_0(x) \geq \bar{h}(t), \text{ d'où } \forall t > 0$$

$$\|S(t)u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \text{Max}(h(t), -\bar{h}(t))$$

$ii \Rightarrow i$ Soit $u_0 > R^+$, on vérifie comme précédemment que $t = \int_{\tilde{u}(t)}^{u_0} \frac{ds}{\beta^0(s)}$ définit de façon unique une fonction u de $[0, T^+]$ à valeur dans $[R^+, u_0]$ ($T^+ = \int_{R^+}^{u_0} \frac{ds}{\beta^0(s)}$). Si on prolonge \tilde{u} sur $]T^+, +\infty[$ par la valeur $R^+ = \text{Max } \beta^{-1}(0)$, la fonction u obtenue vérifie

$$\begin{cases} u' + \beta(u(t)) \ni 0 & \text{p.p. sur } \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Si pour t fixé $S(t) \overline{D(A_p)}^{L^p}$ est borné uniformément par rapport à p dans $L^\infty(\Omega)$, faisons tendre u_0 vers $\text{Sup } D(\beta)$.

Comme $u(t)$ reste borné par $K(t)$, on en déduit en prolongeant β par $+\infty$ au-delà de $\text{Sup } D(\beta)$

$$t \geq \int_{K(t)}^{+\infty} \frac{ds}{\beta^0(s)}$$

De même $\exists K'(t)$ et $\int_{K'(t)}^{+\infty} \frac{ds}{-\beta^0(-s)} \leq t$ d'où i) et (61).

REMARQUE III.18. Si on remplace $\beta(\cdot)$ par $-\Delta + \beta(\cdot)$ on a encore $i \Rightarrow ii$ et sans doute $ii \Rightarrow i$.

REMARQUE III.19. Tous les effets régularisants dans les équations d'évolution ne sont pas instantanés comme le montre l'exemple suivant. Soit $\beta(u) = u(\text{Log } |u|)^+$, β est un graphe maximal monotone de \mathbb{R} . La solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) + u(\cdot, t) (\text{Log } |u(\cdot, t)|)^+ \ni 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \end{cases}$$

s'écrit

$$(63) \quad u(x, t) = \begin{cases} \text{Max}(u_0(x), (u_0(x))e^{-t}) & \text{si } u_0(x) \geq 0 \\ \text{Min}(u_0(x), -(u_0(x))e^{-t}) & \text{si } u_0(x) \leq 0 \end{cases}$$

Par suite, pour $1 \leq p < +\infty$, il existe des fonctions u_0 telles que $u_0 \in L^p(\Omega)$ et $u(t) \in L^{pe^t}(\Omega)$ et rien d'autre. L'effet régularisant obtenu est lent.

REMARQUE III.20. Si on remplace l'hypothèse (58) par

$$(64) \quad \begin{cases} \forall (a, a') \in D(\beta), \forall f \in \beta(a), \forall f' \in \beta(a') \\ (a-a')(f-f') \geq C |a-a'|^q \quad q > 2 \end{cases}$$

l'inégalité (60) devient pour u_0 et v_0 dans $\overline{D(A_{p_0})}^{L^{p_0}}$

$$(65) \quad \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C t^{-\delta} \|u_0(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{L^{p_0}(\Omega)}^\sigma$$

REFERENCES

- [1] R.A. ADAMS. «*Sobolev spaces*». Academic Press. New-York. London. 1975.
- [2] H. ATTOUCH et A. DAMLAMIAN. «*Applications des méthodes de convexité et monotonie à l'étude de certaines équations quasi-linéaires*». Orsay. 1976.
- [3] P. BENILAN. «*Equations d'évolutions dans un espace de Banach quelconque et applications*». Thèse Orsay 1972.
- [4] P. BENILAN. «*Opérateurs accréatifs et semi-groupes dans les espaces L^p , $1 \leq p \leq +\infty$* ». Publications de l'Université de Besançon. 1977.
- [5] P. BENILAN. Cours de troisième cycle. Paris VI. 1974-1975.
- [6] H. BREZIS. «*Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*». Amsterdam. North-Holland. 1977.
- [7] H. BREZIS. «*Monotonicity methods, in contribution to nonlinear functional analysis*». E. Zarantonello ed. Academic Press. New-York. 1971.
- [8] M.G. CRANDALL and T. LIGGETT. «*Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces*». Amer. J. Math. 93 (1971). 265-298.
- [9] L.C. EVANS. «*Regularity properties for the heat equation subject to nonlinear boundary constraints*». (to appear).
- [10] L.C. EVANS. «*Differentiability of a nonlinear semi-group in L^1* ». (to appear).
- [11] J.L. LIONS et J. PEETRE. «*Sur une classe d'espaces d'interpolation*». Publications mathématiques de l'I.H.E.S. n° 19. 1964.
- [12] F.J. MASSEY III. «*Semilinear parabolic equations with L^1 initial data*». (to appear).

- [13] J. NECAS. «*Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*». Masson. Paris. 1967.
- [14] L. VERON. «*Coercivité et propriétés régularisantes des semi-groupes non linéaires dans les espaces de Banach*». A paraître aux Publications de l'Université de Besançon.

(Manuscrit reçu le 18 mai 1978)