

FULBERT MIGNOT

JEAN-PIERRE PUEL

PIERRE-M. SUQUET

**Flambage des plaques élastiques multiperforées**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 3, n° 1 (1981), p. 1-57

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1981\\_5\\_3\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1981_5_3_1_1_0)

© Université Paul Sabatier, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## FLAMBAGE DES PLAQUES ELASTIQUES MULTIPERFOREES

Fulbert Mignot <sup>(1)</sup>, Jean-Pierre Puel <sup>(2)</sup>, Pierre-M. Suquet <sup>(3)</sup>

(1) *Mathématiques, Université Lille I, Domaine Universitaire Scientifique, B.P. 36 - 59650 Villeneuve-d'Ascq France.*

(2) *Mathématiques, Université Paris VI, 4 place Jussieu, Tour 55-65 - 75 230 Paris Cédex 05 France.*

(3) *Mécanique Théorique, Université Paris VI, 4 place Jussieu, Tour 66 - 75230 Paris Cédex 05 France.*

**Résumé :** Le modèle non linéaire de Von Karman est écrit en termes de contraintes déplacements, afin d'étudier le comportement des plaques non simplement connexes. Les résultats classiques de bifurcation sont retrouvés dans cette situation.

Cette formulation permet de traiter dans une seconde partie l'homogénéisation des plaques multiperforées. La loi de comportement de la plaque homogénéisée est explicitée. On montre que le spectre et les branches bifurquées du problème de la plaque multiperforée convergent vers les éléments correspondants de la plaque homogénéisée.

**MOTS CLES :** Von Karman, bifurcation, homogénéisation.

**CLASSIFICATION AMS :** 73-K-10, 73-H-05, 73-C-50, 73-K-20.

**Summary :** We first study the buckling of a plate submitted to forces applied on its edges and surface for which we assume the same mechanical hypothesis as in the Von Karman equations, but without assuming the existence of the Airy function. This allows us to consider various geometries for the plate and various boundary conditions. In a second part we study the buckling of a plate which is perforated periodically (with a frequency of the order of  $\frac{1}{\epsilon}$ ). Using the results of the first part and some results of homogenization, we can show that when  $\epsilon \rightarrow 0$ , the plate behaves like a homogenized plate occupying the whole domain and whose constitutive relations are given.

Une plaque élastique soumise à des forces extérieures s'exerçant dans le plan de la plaque présente le phénomène bien connu de flambage. Ceci a été étudié sous l'angle de la bifurcation dans de nombreux travaux, notamment ceux de BERGER [1] BERGER-FIFE [3].

Le modèle retenu par ces auteurs est constitué par les équations de Von Karman. Dans leur formulation ils supposent l'existence d'une fonction des contraintes ou fonction d'Airy. Cette hypothèse impose des conditions géométriques sur la plaque ou / et des restrictions sur les conditions aux limites.

Nous nous proposons ici, dans une première partie d'écrire et d'étudier le modèle de Von Karman uniquement au moyen des relations entre tenseur des déformations et contraintes. Ce système, qui se ramène au précédent si la fonction d'Airy existe, nous permettra de prendre en compte des plaques de géométrie variée - les trous sont autorisés - et des conditions au bord plus générales que précédemment. Nous retrouvons dans ce cadre les résultats classiques de bifurcation, BERGER [1], [2] BERGER FIFE [3]. Et surtout cette formulation est particulièrement adaptée à l'objet de la seconde partie qui est l'étude du flambage d'une plaque perforée périodiquement avec une fréquence de l'ordre de  $\frac{1}{\epsilon}$ , le bord des trous étant libre. Nous analysons l'homogénéisation de ce problème particulier de bifurcation (MIGNOT, PUEL [16]) et nous montrons que le comportement de la plaque est équivalent à celui d'une plaque homogénéisée dont les lois de comportement avaient été déjà obtenues par DUVAUT [6], [7] LENE [11].

Le plan est le suivant :

## A - BIFURCATION

### I - Equations de Von Karman en contraintes - déplacements.

- 1 - Position du problème
- 2 - Etude des équations

### II - Bifurcation.

- 1 - Problème linéarisé
- 2 - Bifurcation à la première valeur propre
- 3 - Bifurcation par rapport à une valeur propre quelconque
- 4 - Etude du problème non homogène

## B - HOMOGENEISATION

### I - Homogénéisation des problèmes du quatrième ordre

### II - Homogénéisation des problèmes d'élasticité

### III - Homogénéisation du problème linéarisé

### IV - Homogénéisation du problème bifurqué

- 1 - Méthode de Berger
- 2 - Méthode de Kikuchi

## A - BIFURCATION

## I - EQUATION DE VON KARMAN EN CONTRAINTES DEPLACEMENTS

## 1 - Position du problème

On considère une plaque mince dont la surface moyenne au repos (forces exercées nulles) est représentée par un ouvert  $\Omega$  inclus dans  $\mathbb{R}^2$ , de frontière  $\Gamma$ . On suppose la plaque soumise sur une partie du bord à une force  $\lambda \vec{F}$  s'exerçant dans le plan de la plaque. Alors le point de coordonnées  $(x_1, x_2)$  subit le déplacement représenté par le vecteur  $(u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), \xi(x_1, x_2))$ ,  $\xi(x_1, x_2)$  étant la déflexion de la plaque.

Le tenseur des déformations, non linéarisé, dans le plan de la plaque s'écrit ( $\xi = u_3$ ) :

$$(1) \quad \gamma_{\alpha\beta}(u, \xi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_\beta},$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2 \quad k = 1, 2, 3).$$

Comme on considère des déformations dans le plan de la plaque, petites par rapport aux déforma-

tions verticales (orthogonales au plan de la plaque) on négligera dans (1) les termes  $\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_\beta}$   $k = 1, 2$ . On aura donc :

$$\epsilon_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right), \quad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(u, \xi) = \epsilon_{\alpha\beta}(u) + \frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \xi}{\partial x_\beta}.$$

L'étude des contraintes dans la plaque est décrit par deux tenseurs :

- le tenseur des contraintes de tension dans le plan de la plaque, noté  $(\sigma_{\alpha\beta})$ .
- le tenseur des contraintes de flexion, ou moments fléchissants, noté  $(M_{\alpha\beta})$ .

La loi fondamentale de la mécanique conduit alors aux équations :

$$(3) \quad \sigma_{\alpha\beta, \beta} = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (M_{\alpha\beta}) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi}{\partial x_\beta} \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Les lois de comportement sont supposées linéaires, c'est-à-dire que

$$(5) \quad \sigma_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta\gamma\delta} (\gamma_{\gamma\delta}(u, \zeta)),$$

$$(6) \quad M_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_\gamma \partial x_\delta},$$

les matrices  $(a_{\alpha\beta\gamma\delta})$  et  $(A_{\alpha\beta\gamma\delta})$  possédant les propriétés habituelles de symétrie et de coercivité :

$$a_{\alpha\beta\gamma\delta} = a_{\beta\alpha\gamma\delta} = a_{\gamma\delta\alpha\beta},$$

$$a_{\alpha\beta\gamma\delta} \xi_{\gamma\delta} \xi_{\alpha\beta} \geq C \sum_{\alpha\beta} (\xi_{\alpha\beta})^2, \quad C > 0, \quad \forall (\xi_{\alpha\beta}) \in (\mathbb{R}^4)_s,$$

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{\beta\alpha\gamma\delta} = A_{\gamma\delta\alpha\beta},$$

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta} \xi_{\gamma\delta} \xi_{\alpha\beta} \geq C \sum_{\alpha\beta} (\xi_{\alpha\beta})^2, \quad C > 0, \quad \forall (\xi_{\alpha\beta}) \in (\mathbb{R}^4)_s.$$

*Conditions aux limites.*

Le bord  $\Gamma$  de  $\Omega$  se décompose en  $\Gamma_{00} \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

*Conditions cinématiques.*

Sur la partie  $\Gamma_{00}$  la plaque est encastée :  $\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0$  et ne peut se déplacer horizontalement :  $u = 0$ .

Sur la partie  $\Gamma_0$  la plaque est encastée :  $\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0$ .

Sur  $\Gamma_1$  la plaque est en appui simple :  $\zeta = 0$ .

*Conditions mécaniques.*

Sur  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$  la plaque est soumise à la force  $\lambda \vec{F}$  qui s'exerce dans le plan de la plaque d'où la relation :

$$\sigma_{\alpha\beta} \eta_\beta = \lambda F_\alpha \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1.$$

Sur  $\Gamma_2$  la plaque est libre : il ne s'y exerce ni forces ni couples : les conditions aux limites correspondantes seront implicitement contenues dans la formulation variationnelle : pour une étude détaillée de ces conditions on se référera à DUVAUT LIONS [5], Chapitre 4.

*Remarque.* Si le torseur des forces extérieures se réduit à 0 alors la partie  $\Gamma_{00}$  peut être vide.

## 2 - Formulation variationnelle

Étudions d'abord le problème des contraintes  $\sigma$ . Soit

$$W = \{u, u \in (H^1(\Omega))^2, u/\Gamma_{00} = 0\}.$$

L'équation (3) et les conditions aux limites sur  $u$  et  $\sigma$  conduisent à l'équation variationnelle (en contraintes - déplacements).

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta}(v) dx = \lambda \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} F_{\alpha} v_{\alpha} d\Gamma, \quad \forall v \in W, \\ \sigma_{\alpha\beta} \in (L^2(\Omega))_S^4. \end{array} \right.$$

La loi de comportement (5) nous permet de distinguer dans les contraintes les contributions respectives des forces aux bords et de la non linéarité retenue du tenseur des déformations.

Soit  $(\sigma_{\alpha\beta}^0, u^0)$  la solution du problème :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{\alpha\beta,\beta}^0 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma_{\alpha\beta}^0 n_{\beta} = F_{\alpha} & \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \\ \sigma_{\alpha\beta}^0 n_{\beta} = 0 & \text{sur } \Gamma_2, \\ u^0 = 0 & \text{sur } \Gamma_{00}, \\ \sigma_{\alpha\beta}^0 = a_{\alpha\beta\gamma\delta}(\epsilon_{\gamma\delta}(u^0)), \end{array} \right.$$

dont la formulation variationnelle est :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \epsilon_{\alpha\beta}(v) dx = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} F_{\alpha} v_{\alpha} d\Gamma, \quad \forall v \in W, \\ \sigma^0 \in (L^2(\Omega))_S^4, \end{array} \right.$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta}(u^0) \epsilon_{\alpha\beta}(v) dx = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} F_{\alpha} v_{\alpha} d\Gamma, \quad \forall v \in W, \\ u^0 \in W. \end{array} \right.$$

(Grâce à l'inégalité de Korn (10) admet une solution unique).

Soit  $f_{\alpha\beta} \in (L^2(\Omega))_s^4$  considérons la solution  $(\hat{S}_{\alpha\beta}(f), \hat{u}(f))$  du problème :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_{\alpha\beta}(f),_{\beta} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \hat{u}(f) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{00}, \\ \hat{S}_{\alpha\beta}(f)\eta_{\beta} = 0 \quad \text{sur } \Gamma/\Gamma_{00}, \\ \hat{S}_{\alpha\beta}(f) = a_{\alpha\beta\gamma\delta} [\epsilon_{\gamma\delta}(\hat{u}(f)) + f_{\gamma\delta}]. \end{array} \right.$$

dont la formulation variationnelle est :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \hat{S}_{\alpha\beta}(f) \epsilon_{\alpha\beta}(v) dx = 0, \quad \forall v \in W, \\ \hat{S}_{\alpha\beta}(f) \in (L^2(\Omega))_s^4, \end{array} \right.$$

où encore

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta}(\hat{u}(f)) \epsilon_{\alpha\beta}(v) dx = - \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta}(v) dx, \quad \forall v \in W, \\ \hat{u}(f) \in W. \end{array} \right.$$

Pour  $\theta \in H^2(\Omega)$  nous poserons  $f(\theta) = (f_{\alpha\beta}(\theta))$ , où

$$f_{\alpha\beta}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \theta}{\partial x_{\beta}},$$

comme  $\frac{\partial \theta}{\partial x_{\alpha}} \in L^p(\Omega)$ , pour tout  $p$  fini, on a  $f_{\alpha\beta} \in L^2(\Omega)$ , et nous pouvons considérer

$\hat{S}_{\alpha\beta}(f(\theta))$  que, pour simplifier, nous écrirons :

$$S_{\alpha\beta}(\theta) = \hat{S}_{\alpha\beta}(f(\theta)).$$

On vérifie alors aisément que la solution  $\sigma_{\alpha\beta}$  de (7) s'écrit :

$$(14) \quad \sigma_{\alpha\beta} = \lambda \sigma_{\alpha\beta}^0 + S_{\alpha\beta}(\xi).$$

Remarques. 1 -  $\hat{S}_{\alpha\beta}(f)$  est un champ de contraintes correspondant à un champ de forces fictives, réparties sur  $\Omega$  :  $\frac{\partial}{\partial x_\beta}(a_{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\gamma\delta})$ .

2 - Il est immédiat que  $S_{\alpha\beta}(\theta)$  ne dépend que de  $\theta$  et que

$$S_{\alpha\beta}(k\theta) = k^2 S_{\alpha\beta}(\theta),$$

ainsi (14) met en évidence la décomposition cherchée de  $\sigma$ .

Donnons maintenant la formulation variationnelle de (4), (6), et des conditions aux limites associées, en tenant compte de (14). Soit :

$$V = \left\{ \zeta, \zeta \in H^2(\Omega), \zeta|_{\Gamma_{00} \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1} = 0, \frac{\partial \zeta}{\partial n}|_{\Gamma_{00} \cup \Gamma_0} = 0 \right\}.$$

On a :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} A_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} dx + \lambda \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_\beta} dx + \\ \int_{\Omega} S_{\alpha\beta}(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_\beta} dx = 0, \\ \zeta \in V, \quad \forall \theta \in V. \end{array} \right.$$

Etudions les différents opérateurs intervenant dans (15). Soit

$$A : V \rightarrow V',$$

défini par

$$(16) \quad \langle A(\zeta), \theta \rangle = \int_{\Omega} A_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} dx.$$

Comme la matrice  $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$  est définie positive, A est un isomorphisme de V sur V'. Soit

$$B : V \rightarrow V',$$

défini par

$$(17) \quad \langle B(\zeta), \theta \rangle = - \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} dx.$$



LEMME. L'opérateur B est linéaire, symétrique compact de V dans V'.

*Preuve.* En effet, d'une part  $\zeta \in V$ , donc  $\frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \in L^p(\Omega)$  pour tout p fini, et d'autre part  $\sigma_{\alpha\beta}^0 \in L^2(\Omega)$ , il en résulte donc que  $\sigma_{\alpha\beta}^0 \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} \in L^{2-\epsilon}(\Omega)$  et donc que B est compact.

Soit C : V → V' défini par

$$(18) \quad \langle C(\zeta), \theta \rangle = \int_{\Omega} S_{\alpha\beta}(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} dx.$$

LEMME. L'opérateur C est complètement continu de V dans V'. Il est homogène de degré 3 et dérive d'un potentiel Q positif :

$$(19) \quad C(\zeta) = \frac{1}{4} D(Q(\zeta)),$$

où

$$(20) \quad Q(\zeta) = \int_{\Omega} S_{\alpha\beta}(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} dx,$$

soit encore

$$Q(\zeta) = 2 \int_{\Omega} \widehat{S}_{\alpha\beta}(f(\zeta)) \cdot f_{\alpha\beta}(\zeta) dx.$$

La fonctionnelle définie sur  $(L^2(\Omega))^4$  par

$$(21) \quad \widehat{Q}(f) = 2 \int_{\Omega} \widehat{S}_{\alpha\beta}(f) f_{\alpha\beta} dx,$$

est positive quadratique (donc convexe).

*Preuve.* Pour  $\varphi, \Psi \in V$ , notons  $(T(\varphi, \Psi), u(\varphi, \Psi))$  la solution dans  $[L^2(\Omega)]_S^4 \times W$  de

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{\alpha\beta,\beta} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ T_{\alpha\beta} n_\beta = 0 \quad \text{sur } \Gamma/\Gamma_{00}, \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{00}, \\ T_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta\gamma\delta} \left[ \epsilon_{\gamma\delta}(u) + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\gamma} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_\delta} \right]. \end{array} \right.$$

Il est clair que  $T_{\alpha\beta}(\varphi, \Psi)$  est bilinéaire en  $\psi$  et  $\Psi$  et que

$$S_{\alpha\beta}(\xi) = T_{\alpha\beta}(\xi, \xi).$$

Posons :

$$(23) \quad Q(\varphi, \Psi, \xi, \theta) = \int_{\Omega} T_{\alpha\beta}(\varphi, \Psi) \frac{\partial \xi}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \theta}{\partial x_{\alpha}} dx.$$

Ceci a bien un sens et plus précisément

$$(23 \text{ bis}) \quad |Q(\varphi, \Psi, \xi, \theta)| \leq C \|\varphi\|_V \|\Psi\|_V \|\xi\|_V \|\theta\|_V.$$

En outre l'application  $(\varphi, \Psi, \xi, \theta) \rightarrow Q(\varphi, \Psi, \xi, \theta)$  est complètement continue de  $V^4$  dans  $\mathbb{R}$ .  
Montrons que

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad Q(\varphi, \Psi, \xi, \theta) = Q(\Psi, \varphi, \xi, \theta), \\ \text{(ii)} \quad Q(\varphi, \Psi, \xi, \theta) = Q(\varphi, \Psi, \theta, \xi), \\ \text{(iii)} \quad Q(\varphi, \Psi, \xi, \theta) = Q(\xi, \theta, \varphi, \Psi). \end{array} \right.$$

Tout d'abord (24) (i), (ii), résultent des propriétés évidentes de symétrie de  $T_{\alpha\beta}(\varphi, \Psi)$ ,  $T_{\alpha\beta}(\xi, \theta)$ .  
Pour (24) (iii), on a grâce à (22)

$$Q(\varphi, \Psi, \xi, \theta) = \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \left[ \epsilon_{\gamma\delta}(u(\varphi, \Psi)) + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\delta}} \right] \frac{\partial \xi}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \theta}{\partial x_{\alpha}} dx$$

et

$$Q(\xi, \theta, \varphi, \Psi) = \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \left[ \epsilon_{\gamma\delta}(u(\xi, \theta)) + \frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial \theta}{\partial x_{\delta}} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\alpha}} dx$$

Il s'agit donc de montrer :

$$(25) \quad \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta}(u(\varphi, \Psi)) \frac{\partial \xi}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \theta}{\partial x_{\alpha}} dx = \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta}(u(\xi, \theta)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\alpha}} dx$$

or toujours d'après (22), pour tout  $w \in W$  on a :

$$(26) \quad \text{(i)} \quad \int_{\Omega} T_{\alpha\beta}(\varphi, \Psi) \epsilon_{\alpha\beta}(w) dx = 0,$$

$$(26) \quad \text{(ii)} \quad \int_{\Omega} T_{\alpha\beta}(\xi, \theta) \epsilon_{\alpha\beta}(w) dx = 0,$$

Compte-tenu de la loi de comportement ceci s'écrit encore :

$$(27) \quad (i) \quad \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \left[ \epsilon_{\gamma\delta}(u(\varphi, \Psi)) + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\delta}} \right] \epsilon_{\alpha\beta}(w) dx = 0 ,$$

$$(27) \quad (ii) \quad \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \left[ \epsilon_{\gamma\delta}(u(\xi, \theta)) + \frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial x_{\gamma}} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_{\delta}} \right] \epsilon_{\gamma\delta}(w) dx = 0 .$$

La comparaison de (27)i où l'on prend  $w = u(\xi, \theta)$  et de (27)ii où  $w = u(\varphi, \Psi)$  donne (25), la relation (24) (iii) est ainsi démontrée.

La majoration (23)bis et les relations algébriques (24) impliquent grâce à un calcul élémentaire que  $Q(\xi) = Q(\xi, \xi, \xi, \xi)$  est continûment Fréchet différentiable sur  $V$  et que

$$(28) \quad \langle DQ(\xi), \theta \rangle = 4 Q(\xi, \xi, \xi, \theta) = 4 \langle C(\xi), \theta \rangle .$$

On vérifie aussi immédiatement que  $Q(\xi)$  et  $C(\xi)$  sont complètement continues. Remarquons toutefois que  $Q(\varphi, \Psi, \xi, \theta)$  si elle est quadrilinéaire n'est pas symétrique en toutes les variables, néanmoins les relations (24) sont suffisantes pour mettre  $DQ(\xi)$  sous la forme (28).

Il reste à montrer que

$$\frac{1}{2} \hat{Q}(f) = \int_{\Omega} \hat{S}_{\alpha\beta}(f) f_{\alpha\beta} dx$$

est positive.

Soit  $b_{\alpha\beta\gamma\delta}$  les coefficients de la matrice inverse de  $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$ . La loi de comportement des contraintes s'écrit encore

$$f_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta}(u(f)) + b_{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{S}_{\gamma\delta}(f),$$

donc

$$\int_{\Omega} \hat{S}_{\alpha\beta}(f) f_{\alpha\beta} dx = \int_{\Omega} b_{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{S}_{\alpha\beta}(f) \hat{S}_{\gamma\delta}(f) dx - \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta}(u(f)) \hat{S}_{\alpha\beta}(f) dx,$$

mais ce dernier terme d'après (12) est nul, d'où le résultat, la matrice  $b_{\alpha\beta\gamma\delta}$  étant définie positive.

Remarquons que  $Q(\xi) = 0$  implique  $S_{\alpha\beta}(\xi) = 0$ , plus précisément on a la :

**PROPOSITION.** Les solutions de  $Q(\xi) = 0$  sont solutions de l'équation de Monge Ampère

$$(29) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_{\beta}^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_{\alpha}^2} - \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \right)^2 = 0$$

Cette proposition se démontre par une dérivation judicieuse du système suivant (équivalent à  $T(\xi, \zeta) = 0$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \right)^2 = 0, \\ \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} = 0, \\ 2 \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta} + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} \right)^2 = 0. \end{array} \right.$$

*Remarque.* On trouvera dans POTIER FERRY [15] une étude détaillée de l'équation de Monge Ampère (cet auteur suppose seulement que la solution de (29) appartient à  $H^2(\Omega)$ ) et des exemples de domaine  $\Omega$  où la seule solution de (29) appartenant à  $V$  est 0.

*Conclusion.* Cette partie nous a permis de mettre les équations de Von Karman écrites en contraintes déplacement, sous la forme

$$(P_\lambda) \quad (30) \quad \left\{ \begin{array}{l} A\xi - \lambda B\xi + C(\xi) = 0, \\ \xi \in V. \end{array} \right.$$

Nous référerons à cette équation en parlant du problème  $(P_\lambda)$ , avec :

- .  $A \in \text{Isom}(V, V')$ ,  $A$  auto-adjoint coercif, donné par (16),
- .  $B \in L(V, V')$ ,  $B$  compact, auto-adjoint donné par (17),
- .  $C$  est un opérateur gradient, dérivé d'un potentiel positif, homogène de degré 3, complètement continu de  $V$  dans  $V'$  ( $C$  donné par (18)).

*Remarque 1.* L'équation (30) est encore équivalente à :

$$(30 \text{ bis}) \quad \xi - \lambda L \xi + N(\xi) = 0,$$

où  $L = A^{-1} B$  et  $N = A^{-1} C$ . Si  $V$  est muni du produit scalaire  $((\xi, \eta)) = \langle A\xi, \eta \rangle$  l'opérateur  $L$  est compact auto-adjoint non nécessairement positif.

2) La formulation précédente ne nécessite aucune hypothèse sur la géométrie de la plaque, en particulier comme n'intervient pas de fonction d'Airy, il n'est pas nécessaire que la plaque soit simplement connexe, ceci sera utile dans l'étude des plaques perforées.

Nous allons montrer que sur ce modèle nous pouvons faire une étude de bifurcation analogue à celle de BERGER [1].

## II - BIFURCATION A LA PREMIERE VALEUR PROPRE

### 1 - Problème linéarisé

Le problème de valeurs propres :

$$A\xi - \lambda B\xi = 0,$$

admet une famille dénombrable de valeurs propres  $\lambda_j$ ,  $j \in ]n, m[$ ,  $n \leq 0$ ,  $m \geq 0$ , l'un au moins des deux entiers  $n$  et  $m$  étant infini

$$\dots \leq \lambda_{-2} \leq \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

Le spectre admet une partie positive s'il existe  $\xi$  tel que  $\langle B\xi, \xi \rangle > 0$ . Alors,

$$(31) \quad \frac{1}{\lambda_1} = \max_{\{\xi \in V\}} \frac{\langle B\xi, \xi \rangle}{\langle A\xi, \xi \rangle},$$

et

$$\begin{aligned} E(\lambda_1) &= \{ \xi, \xi \in V, A\xi - \lambda_1 B\xi = 0 \} = \\ &= \{ \xi, \xi \in V, \langle A\xi, \xi \rangle - \lambda_1 \langle B\xi, \xi \rangle = 0 \}. \end{aligned}$$

Rappelons que l'espace propre associé à la première valeur propre positive (ou négative) n'est pas nécessairement de dimension 1 car le problème est du quatrième ordre.

### 2 - Bifurcation par rapport aux premières valeurs propres $\lambda_{-1}$ et $\lambda_1$

On suppose que  $\lambda_1$  existe ( $\lambda_1 < +\infty$ ). Si le spectre n'a pas de partie négative il faut poser dans ce qui suit  $\lambda_{-1} = -\infty$ .

**THEOREME 1.** *i) Si  $\lambda \in ]\lambda_{-1}, \lambda_1[$  le problème  $(P_\lambda)$  n'admet que la solution triviale  $\xi = 0$ .*

*ii) Pour  $\lambda = \lambda_1$  l'ensemble des solutions de  $(P_\lambda)$  est constitué du cône des vecteurs propres associés à  $\lambda_1$  et qui de plus vérifient  $Q(\xi) = 0$ .*

*Remarque.* Nous avons évidemment une partie ii) analogue pour  $\lambda = \lambda_{-1}$  si  $\lambda_{-1}$  est fini.

*Preuve.* Soit  $\lambda \in ]\lambda_{-1}, \lambda_{+1}[$  et  $\xi$  solution de  $(P_\lambda)$  :

$$A\xi - \lambda B\xi + C(\xi) = 0,$$

donc

$$\langle A\xi, \xi \rangle - \lambda \langle B\xi, \xi \rangle + \langle C(\xi), \xi \rangle = 0.$$

D'après (31) on a :

$$\frac{1}{\lambda_1} \langle A\xi, \xi \rangle \geq \langle B\xi, \xi \rangle \geq \frac{1}{\lambda_{-1}} \langle A\xi, \xi \rangle,$$

donc si  $\lambda \in [0, \lambda_1[$ ,

$$\langle A\xi, \xi \rangle - \lambda \langle B\xi, \xi \rangle \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \langle A\xi, \xi \rangle > 0,$$

et si  $\lambda \in ]\lambda_{-1}, 0]$ ,

$$\langle A\xi, \xi \rangle - \lambda \langle B\xi, \xi \rangle \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{-1}}\right) \langle A\xi, \xi \rangle > 0,$$

et comme

$$\langle C\xi, \xi \rangle = \frac{1}{4} Q(\xi) \geq 0,$$

on a  $\xi = 0$ .

ii) Si  $\xi$  est une solution de  $P$  pour  $\lambda = \lambda_1$ ,  $\xi$  vérifie

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle A\xi, \xi \rangle - \lambda_1 \langle B\xi, \xi \rangle = 0, \\ Q(\xi) = 0. \end{array} \right.$$

Il en résulte d'après (31) que  $\xi \in E(\lambda_1)$ . De plus on sait que  $Q(\xi) = 0$  est équivalent à  $S_{\alpha\beta}(\xi) = 0$ , donc implique  $C(\xi) = 0$ . Les solutions de (32) sont donc aussi solutions de  $(P)$ . Il reste à remarquer que si  $\xi$  est solution de (32) toute la droite  $\mathbb{R}\xi$  est aussi solution.

*Remarque 1.* Si l'équation de Monge Ampère (avec les conditions aux limites  $\xi = \frac{\partial \xi}{\partial n} = 0$  sur  $\Gamma_{00} \cup \Gamma_0$ ,  $\xi = 0$  sur  $\Gamma_1$ ) n'admet que la solution  $\xi = 0$ , alors le problème  $(P)$  n'admet que la solution  $\xi = 0$  pour  $\lambda = \lambda_1$ .

**THEOREME 2.** On suppose  $\lambda_1$  fini. Sous les hypothèses de la partie I le point  $(\lambda_1, 0)$  est un point de bifurcation pour le problème de Von Karman. Plus précisément il existe une branche de solution  $(\lambda_1(R), \xi_1(R))$  définie pour tout  $R > 0$ , telle que

$$\begin{array}{l}
 (33) \\
 (34) \\
 (35)
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 A\xi_1(R) - \lambda_1(R) B\xi_1(R) + C(\xi_1(R)) = 0, \\
 \|\xi_1(R)\| = \sqrt{2R(1 + O(R))}, \\
 \lim_{R \rightarrow 0} \lambda_1(R) = \lambda_1.
 \end{array} \right.$$

*Remarque.* Nous ne faisons pas, pour ce théorème, d'hypothèses sur les solutions de l'équation de Monge Ampère : la branche obtenue ici pouvant être une branche verticale, c'est-à-dire :  $\lambda_1(R) \equiv \lambda_1$  dans le cas où (29) admet des solutions non triviales.

*Preuve.* (BERGER [1]). Nous faisons apparaître  $\lambda$  comme un multiplicateur de Lagrange en maximisant la fonctionnelle  $J(\xi)$ ,  $J(\xi) = \frac{1}{2} \langle B\xi, \xi \rangle$ , sur la variété  $\Sigma_R$  ( $R > 0$ ) :

$$\Sigma_R = \left\{ \xi, \xi \in V, \frac{1}{2} \langle A\xi, \xi \rangle + \frac{1}{4} \langle C(\xi), \xi \rangle = R \right\}.$$

LEMME 1. L'ensemble  $\Sigma_R$  est une variété bornée  $C^1$ , étoilée par rapport à l'origine.

En effet,  $\Sigma_R$  est une surface de niveau de la fonction  $\xi \rightarrow \frac{1}{2} \langle A\xi, \xi \rangle + \frac{1}{4} \langle C\xi, \xi \rangle$  dont le gradient n'est nul qu'en 0. Cette variété est étoilée car pour tout  $\xi \in V$ , il existe t unique tel que  $t\xi \in \Sigma_R$ .

LEMME 2. La fonction  $J(\xi)$  atteint son sup sur  $\Sigma_R$  : il existe  $\tilde{\xi} \in \Sigma_R$  tel que,

$$J(\tilde{\xi}) = \sup_{\xi \in \Sigma_R} J(\xi).$$

En effet,  $J$  étant bornée sur  $\Sigma_R$ , il existe une suite maximisante  $\xi_n$  qui converge faiblement vers un  $\tilde{\xi}$ , et comme  $J$  est complètement continue,

$$J(\tilde{\xi}) = \lim J(\xi_n) = \sup_{\xi \in \Sigma_R} J(\xi).$$

Il reste à montrer que  $\tilde{\xi} \in \Sigma_R$ . Or,  $C$  étant complètement continue, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle C(\xi_n), \xi_n \rangle = \langle C(\tilde{\xi}), \tilde{\xi} \rangle,$$

et

$$\frac{1}{2} \langle A\tilde{\xi}, \tilde{\xi} \rangle + \frac{1}{4} \langle C(\tilde{\xi}), \tilde{\xi} \rangle \leq R.$$

Soit  $t_R$  tel que  $t_R \tilde{\xi} \in \Sigma_R$ ,  $t_R \geq 1$ , alors

$$J(t_R \tilde{\xi}) = t_R^2 J(\tilde{\xi}) \leq \sup_{\xi \in \Sigma_R} J(\xi) = J(\tilde{\xi})$$

donc

$$t_R = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{\xi} \in \Sigma_R.$$

LEMME 3. Pour tout  $R$ , il existe  $(\lambda_1(R), \xi_1(R))$  solution de

$$A\xi_1(R) - \lambda_1(R) B\xi_1(R) + C(\xi_1(R)) = 0.$$

Ce lemme est une conséquence triviale des deux précédents :  $\lambda_1(R)$  est le multiplicateur de Lagrange associé au point  $\xi_1(R)$  réalisant le maximum de  $J$  sur  $\Sigma_R$ .

LEMME 4. Lorsque  $R$  tend vers 0,

$$(34) \quad \|\xi_1(R)\|^2 = 2R (1 + o(R)),$$

$$(35) \quad \lim_{R \rightarrow 0} \lambda_1(R) = \lambda_1.$$

*Preuve.* D'une part pour tout  $\xi \in \Sigma_R$  on a :

$$2R - \frac{1}{2} \langle C(\xi), \xi \rangle = \|\xi\|^2 \leq 2R,$$

et d'autre part,

$$0 \leq \langle C(\xi), \xi \rangle \leq C \|\xi\|^4,$$

donc, pour tout  $\xi \in \Sigma_R$ ,

$$(36) \quad 2R - \frac{C}{2} R^2 \leq \|\xi\|^2 \leq 2R.$$

Ceci implique (34).

Pour obtenir (35) remarquons d'abord que d'après le théorème 1,  $\lambda_1(R) \geq \lambda_1$ . Ensuite soit  $t_R$  tel que  $t_R \xi_1 \in \Sigma_R$ ,  $\|\xi_1\| = 1$ ,  $A\xi_1 - \lambda_1 B\xi_1 = 0$ , la relation (36) montre que  $t_R^2 \sim 2R$ . Alors :



$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1} &\geq \frac{1}{\lambda_1(R)} = \frac{\langle B\xi_1(R) \cdot \xi_1(R) \rangle}{\langle A\xi_1(R) \cdot \xi_1(R) \rangle + \langle C(\xi_1(R)), \xi_1(R) \rangle} \geq \frac{\langle B\xi_1(R), \xi_1(R) \rangle}{2R + 4CR^2} \geq \frac{t_R^2 \langle B\xi_1, \xi_1 \rangle}{2R + 4CR^2} \\ &= \frac{1}{\lambda_1} (1 + o(R)). \end{aligned}$$

La relation (35) est ainsi démontrée.

*Remarque.* Lorsque  $R$  tend vers 0, la suite  $\frac{\xi(R)}{\|\xi(R)\|}$  est relativement fortement compacte et ses valeurs d'adhérence sont des vecteurs propres de  $A - \lambda B$  (associés à la valeur propre  $\lambda_1$ ).

### 3 - Bifurcation par rapport à une valeur propre quelconque

L'opérateur non linéaire  $C$  étant un opérateur gradient, il y a bifurcation en tout point du spectre de  $(A - \lambda B)$  (KRASNOSELSKI [10]). De plus il est facile de montrer par un raisonnement analogue à celui du théorème 1i) que si  $\lambda_i$  est une valeur propre positive, il existe  $\epsilon > 0$  tel que dans l'intervalle  $]\lambda_i - \epsilon, \lambda_i]$  il n'y a pas de solutions petites. (Si  $\lambda_i < 0$  ce sera dans  $[\lambda_i, \lambda_i + \epsilon[$ ). On trouvera dans BERGER [2] des résultats précis sur le nombre de solutions bifurquées en fonction de l'indice de Morse de la fonctionnelle quadratique  $\langle A\xi, \xi \rangle - \lambda \langle B\xi, \xi \rangle$  en  $\xi = 0$ , les théorèmes obtenus par BERGER [2] pour les équations de Von Karman écrites avec la fonction d'Airy s'appliquant au cas présent de la formulation en contraintes déplacements. La méthode de KIKUCHI [9] s'applique également pour l'étude de la branche bifurquée au voisinage d'une valeur propre simple (cf. MIGNOT PUEL [16]) nous en ferons usage dans l'homogénéisation.

### 4 - Etude du problème non homogène

Nous entendons par là le problème de Von Karman où intervient une force distribuée transversale à la plaque, de densité  $f$ . Les équations modélisant ce phénomène sont identiques à celles du début sauf l'équation (4) qui doit être remplacée par :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (M_{\alpha\beta}) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi}{\partial x_\beta} \right) = f \quad (\text{dans } \Omega).$$

Les opérateurs  $A, B, C$  ne sont pas modifiés et le problème étudié s'énonce : chercher  $\xi$  solution de

$$(\tilde{P}_\lambda) \quad \left\{ \begin{array}{l} A\xi - \lambda B\xi + C(\xi) = f, \\ \xi \in V. \end{array} \right.$$

(nous considérons  $\lambda$  comme une donnée : elle mesure l'intensité des forces, s'exerçant au bord dans le plan de la plaque).

Nous avons alors le :

**THEOREME 3.** *Sous les hypothèses précédentes et si l'équation de Monge Ampère n'admet que la solution nulle dans  $V$ , alors pour tout  $\lambda$  et tout  $f$  le problème  $(\tilde{P}_\lambda)$  admet au moins une solution  $\xi$ .*

*Preuve.* Les solutions de  $(\tilde{P}_\lambda)$  sont les points critiques de la fonctionnelle

$$J(\xi) = \frac{1}{2} \langle A\xi, \xi \rangle - \frac{\lambda}{2} \langle B\xi, \xi \rangle + Q(\xi) - \langle f, \xi \rangle ,$$

montrons que cette fonctionnelle admet un minimum, le point où  $J$  atteindra ce minimum sera évidemment solution de  $(\tilde{P}_\lambda)$ .

Il suffit de montrer :

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} J(\xi) = +\infty ,$$

car la fonctionnelle  $J$  étant s.c.i. ceci assure l'existence d'un inf atteint pour  $J$ .

Supposons qu'il existe  $M$  et une suite  $\xi_n$ ,  $\|\xi_n\| \rightarrow +\infty$  tels que

$$J(\xi_n) < M.$$

Soit,

$$\xi_n = \frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} ,$$

alors,

$$(37) \quad \frac{J(\xi_n)}{\|\xi_n\|^2} = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \langle B\xi_n, \xi_n \rangle + \|\xi_n\|^2 Q(\xi_n) - \frac{1}{\|\xi_n\|} \langle f, \xi_n \rangle \leq \frac{M}{\|\xi_n\|^2} ,$$

comme  $Q(\xi_n) \geq 0$ , on déduit de (37) que,

$$\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \langle B\xi_n, \xi_n \rangle - \frac{1}{\|\xi_n\|} \langle f, \xi_n \rangle \leq \frac{M}{\|\xi_n\|^2} ,$$

donc par passage à la limite :

$$(38) \quad \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \langle B\xi, \xi \rangle \leq 0.$$

(où  $\xi$  est une valeur d'adhérence faible de  $(\xi_n)$ ).

Montrons par ailleurs que  $\xi = 0$  ce qui sera contradictoire avec (38).

D'après (37)  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(\xi_n) = 0$ , sinon le terme  $\|\xi_n\|^2 Q(\xi_n)$  tend vers plus l'infini et

comme les autres termes du premier membre de (37) restent bornés, ceci contredirait (37). Mais  $Q$  est complètement continue donc

$$Q(\xi) = 0,$$

et  $\xi$  est solution de l'équation de Monge Ampère et appartient à  $V$ , d'après l'hypothèse du théorème,

$$\xi = 0.$$

*Remarque.* Nous aurions pu supposer l'existence de forces distribuées  $(g_\alpha)$  s'exerçant dans le plan de la plaque, nous aurions alors obtenu un résultat analogue (l'équation  $\sigma_{\alpha\beta,\beta} = 0$  devant être remplacée par  $\sigma_{\alpha\beta,\beta} = g_\alpha$ ).

**B - HOMOGENEISATION**

**I - HOMOGENEISATION DES PLAQUES MULTIPERFOREES**

**1 - Position du problème**

On étudie le comportement d'une plaque perforée périodiquement. Plus précisément comme dans LIONS [12] ou CIORANESCU - ST. JEAN PAULIN [4], on prend une cellule de base  $Y = ]0, y_1[ \times ]0, y_2[$ , un ouvert  $O \subset Y$ ,  $O$  à bord régulier,  $O$  représentant la perforation de base, on notera encore  $Y^* = Y - \bar{O}$ .

On considère le plan perforé obtenu par les translatsés de  $\epsilon Y^*$  par les vecteurs  $\epsilon(n_1 y_1, n_2 y_2), n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ . Notons :

$$\mathbb{R}_\epsilon^{2,*} = \cup(\epsilon Y^* + \epsilon(n_1 y_1, n_2 y_2)),$$

$$\Omega_\epsilon = \Omega \cap \mathbb{R}_\epsilon^{2,*},$$

$$O_\epsilon = \Omega \cap (\overline{\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}_\epsilon^{2,*}}), S_\epsilon = \partial O_\epsilon,$$

on supposera que  $\Omega_\epsilon$  est connexe et que  $\partial\Omega$  ne rencontre pas les trous,  $\partial\Omega \cap S_\epsilon = \emptyset$  et donc  $\partial\Omega_\epsilon = \partial\Omega \cup S_\epsilon$  (figure 1).

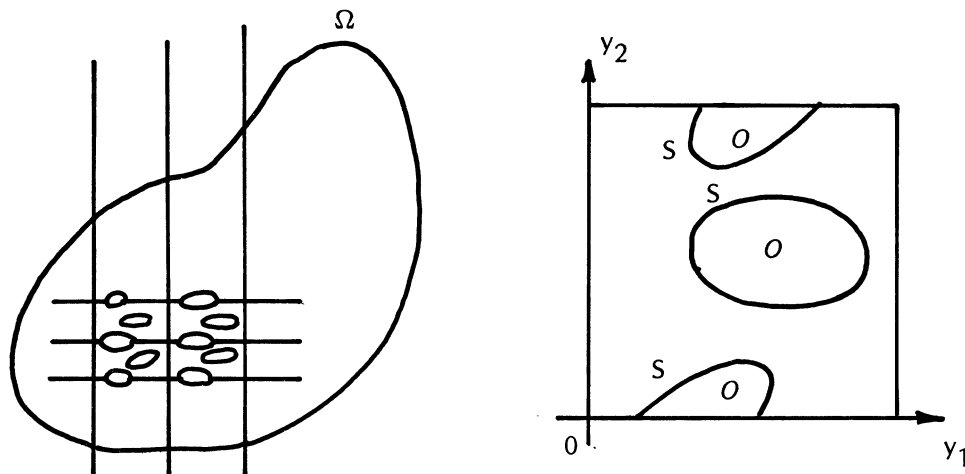


figure 1

La plaque perforée occupe au repos le domaine  $\Omega_\epsilon$ . Les conditions au bord sur  $\Gamma = \partial\Omega$  sont celles de la première partie, en revanche les bords des trous sont libres.

Le déplacement du point  $(x_1, x_2)$  est noté  $(u_1^\epsilon(x_1, x_2), u_2^\epsilon(x_1, x_2), \zeta^\epsilon(x_1, x_2))$ , et le tenseur non linéaire des déformations,

$$\gamma_{\alpha\beta}(u^\epsilon, \zeta^\epsilon) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha^\epsilon}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta^\epsilon}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta^\epsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta^\epsilon}{\partial x_\beta}.$$

Nous introduisons les espaces analogues à ceux du I :

$$W_\epsilon = \left\{ v, v \in (H^1(\Omega_\epsilon))^2, v|_{\Gamma_{00}} = 0 \right\},$$

$$V_\epsilon = \left\{ \zeta, \zeta \in H^2(\Omega_\epsilon), \zeta|_{\Gamma_{00} \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1} = 0, \frac{\partial \zeta}{\partial n} |_{\Gamma_{00} \cup \Gamma_0} = 0 \right\}.$$

Les contraintes  $\sigma_{\alpha\beta}^\epsilon$  vérifient l'équation variationnelle :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_\epsilon} \sigma_{\alpha\beta}^\epsilon \cdot \epsilon_{\alpha\beta}(v) dx = \lambda \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} F_\alpha v_\alpha d\Gamma, \quad \forall v \in W_\epsilon, \\ \sigma_{\alpha\beta}^\epsilon \in (L^2(\Omega_\epsilon))_s^4. \end{array} \right.$$

Les lois de comportement sont conservées :

$$(4) \quad \sigma_{\alpha\beta}^\epsilon = a_{\alpha\beta\mu\nu} [\gamma_{\mu\nu}(u^\epsilon, \zeta^\epsilon)],$$

$$(5) \quad M_{\alpha\beta}^\epsilon = A_{\alpha\beta\mu\nu} \left[ \frac{\partial^2 \zeta^\epsilon}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right].$$

*Remarque.* Pour tout ce qui suit nous pourrions prendre des coefficients  $a_{\alpha\beta\mu\nu}$  et  $A_{\alpha\beta\mu\nu}$  dépendant de  $\frac{x}{\epsilon}$ , mais pour simplifier nous les prendrons constants.

La déflexion  $\zeta^\epsilon$  vérifie :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_\epsilon} A_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial^2 \zeta^\epsilon}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \cdot \frac{\partial^2 \zeta^\epsilon}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} dx + \int_{\Omega_\epsilon} \sigma_{\alpha\beta}^\epsilon \frac{\partial \zeta^\epsilon}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \zeta^\epsilon}{\partial x_\beta} dx = 0, \\ \zeta^\epsilon \in V_\epsilon, \quad \forall \zeta^\epsilon \in V_\epsilon. \end{array} \right.$$

Comme dans la première partie, nous introduisons les tenseurs  $\sigma_{\alpha\beta}^{0,\epsilon}$  et  $S_{\alpha\beta}^\epsilon(\zeta^\epsilon)$ , le tenseur  $\sigma_{\alpha\beta}^{0,\epsilon}$  est solution de :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_\epsilon} \sigma_{\alpha\beta}^{0,\epsilon} \epsilon_{\alpha\beta}(v) dx = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} F_\alpha v_\alpha d\Gamma, \quad \forall v \in W_\epsilon, \\ \sigma_{\alpha\beta}^{0,\epsilon} \in (L^2(\Omega_\epsilon))_s^4, \end{array} \right.$$

et si  $f_{\alpha\beta}^\epsilon \in (L^2(\Omega_\epsilon))_s^4$ ,  $(\hat{S}_{\alpha\beta}^\epsilon(f^\epsilon), \hat{u}^\epsilon(f^\epsilon))$  est solution de :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_\epsilon} \hat{S}_{\alpha\beta}^\epsilon(f^\epsilon) \cdot \epsilon_{\alpha\beta}(v) dx = 0, \quad \forall v \in W_\epsilon, \\ \hat{S}_{\alpha\beta}^\epsilon(f^\epsilon) = a_{\alpha\beta\mu\nu} [\epsilon_{\mu\nu}(\hat{u}^\epsilon(f^\epsilon)) + f_{\mu\nu}^\epsilon]. \end{array} \right.$$

Si  $\theta \in H^2(\Omega_\epsilon)$ , soit  $f_{\alpha\beta}^\epsilon(\theta) = \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial x_\beta}$  et,

$$(9) \quad S_{\alpha\beta}^\epsilon(\theta) = \hat{S}_{\alpha\beta}^\epsilon(f_{\alpha\beta}^\epsilon(\theta)),$$

$$(10) \quad \sigma_{\alpha\beta}^\epsilon = \lambda \sigma_{\alpha\beta}^{0,\epsilon} + S_{\alpha\beta}^\epsilon(\zeta^\epsilon).$$

Enfin aux opérateurs A, B, C de la première partie correspondent de manière évidente les opérateurs  $A^\epsilon$ ,  $B^\epsilon$ ,  $C^\epsilon$ ,  $L^\epsilon = (A^\epsilon)^{-1} B^\epsilon$ , et  $N^\epsilon = (A^\epsilon)^{-1} C^\epsilon$ . Notons que les opérateurs  $A^\epsilon$  sont uniformément coercifs, ce qui permet de munir chaque espace  $V_\epsilon$  de la norme

$$\|\zeta\|^2 = \langle A^\epsilon \zeta, \zeta \rangle,$$

ces normes étant uniformément équivalentes à la norme induite par  $H^2(\Omega)$ .

Dans l'étude du comportement de la plaque quand  $\epsilon$  tend vers 0 nous nous attacherons aux problèmes suivants : si  $(\zeta^\epsilon, \lambda^\epsilon)$  est une solution de :

$$A^\epsilon \zeta^\epsilon - \lambda^\epsilon B^\epsilon \zeta^\epsilon + C^\epsilon(\zeta^\epsilon) = 0,$$

telle que  $\|\zeta^\epsilon\|$  et  $\lambda^\epsilon$  restent bornés, alors,

i) quelle est l'équation vérifiée par les «limites» de  $\zeta^\epsilon$  et  $\lambda^\epsilon$  ?

ii) dans le cas où cette équation limite a plusieurs solutions, vers laquelle tend  $\zeta^\epsilon$  ?

Le point (i) conduit à homogénéiser un problème du quatrième ordre non linéaire, alors que le point (ii) conduit à homogénéiser un problème de valeurs propres et un problème de bifurcation.

Nous commencerons par rappeler et préciser certains des résultats obtenus par DUVAUT [6] [7], LENE [11], TARTAR [17] sur l'homogénéisation des problèmes du quatrième ordre et d'élasticité.

### Problèmes du quatrième ordre

On conserve les notations ci-dessus. Soit  $T^\epsilon \in V'_\epsilon$  et  $u^\epsilon$  la solution de

$$(11) \quad A^\epsilon u^\epsilon = T^\epsilon.$$

L'étude du comportement de  $u^\epsilon$  nécessite de se placer sur  $\Omega$ , pour cela on introduit trois opérateurs de prolongement :

i) L'opérateur  $\sim$  de prolongement par 0 de  $L^2(\Omega_\epsilon)$  dans  $L^2(\Omega)$  : à  $\varphi \in L^2(\Omega_\epsilon)$  il associe  $\tilde{\varphi} \in L^2(\Omega)$ ,  $\tilde{\varphi} = \varphi$  sur  $\Omega_\epsilon$ ,  $\tilde{\varphi} = 0$  sur  $O_\epsilon$ .

ii) Soit  $R^\epsilon$  l'opérateur de restriction de  $V$  à  $V_\epsilon$ , pour tout  $\varphi \in V$ ,  $R^\epsilon \varphi = \varphi / \Omega_\epsilon$ . Alors l'opérateur transposé  ${}^tR^\epsilon : V'_\epsilon \rightarrow V'$  possède les propriétés suivantes :

- si  $f \in L^p(\Omega_\epsilon)$ ,  ${}^tR^\epsilon(f) = \tilde{f}$ ,

$${}^tR^\epsilon \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i},$$

$${}^tR^\epsilon \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j}.$$

-  $\exists M, \forall \epsilon : \| {}^tR^\epsilon \|_{L(V'_\epsilon, V')} \leq M$ .

iii) Il existe d'après TARTAR [17] un opérateur de prolongement  $P^\epsilon : V_\epsilon \rightarrow V$  possédant les propriétés :

$$\exists C, \forall \epsilon, \forall v \in V_\epsilon,$$

$$\begin{aligned} |P^\epsilon v|_{L^2(\Omega)} &\leq C |v|_{L^2(\Omega_\epsilon)}, \\ |D^2(P^\epsilon v)|_{L^2(\Omega)} &\leq C |D^2 v|_{L^2(\Omega_\epsilon)}, \\ \| (P^\epsilon v) \|_{H^2(\Omega)} &\leq C \| v \|_{H^2(\Omega_\epsilon)}. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant (DUVAUT [6]).

**THEOREME 1.** *On considère la suite d'opérateurs  $A^\epsilon$  définie ci-dessus et la suite  $u^\epsilon$  solution de  $A^\epsilon u^\epsilon = T^\epsilon$ . Alors il existe un opérateur  $A^0 : V \rightarrow V'$ , à coefficients constants :*

$$(12) \quad A^0 v = \sum q_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial^4 v}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu \partial x_\nu},$$

tel que si la suite  $T^\epsilon$  de  $V_\epsilon$  vérifie,

$$(13) \quad \lim(\langle T^\epsilon, v \rangle) = T \text{ dans } V' \text{ fort,}$$

alors  $u^\epsilon$  est telle que  $P^\epsilon u^\epsilon$  converge vers  $u$  dans  $V$  faible,  $u$  étant la solution de

$$(14) \quad A^0 u = T.$$

*Remarques.* 1) L'écriture variationnelle exacte de (14) est :

$$(14\text{bis}) \quad \int_{\Omega} q_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} dx = \langle T, v \rangle, \quad \forall v \in V.$$

2) Définition des  $q_{\alpha\beta\gamma\delta}$ .

Soit  $H_p^2(Y^*)$  l'espace de Hilbert des restrictions à  $Y^*$  des fonctions de  $H_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $Y$  périodique. Pour tout polynôme  $P$  de degré  $\leq 2$  il existe une solution unique  $\theta_p$  du problème :

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{Y^*} A_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2(\theta_p - P)}{\partial y_\gamma \partial y_\delta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} dy = 0, \quad \forall \varphi \in H_p^2(Y^*), \\ &\theta \in H_p^2(Y^*), \\ &\int_{Y^*} \theta(y) dy = 0, \end{aligned} \right.$$



alors, si on note  $p_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}$ ,  $\theta_{\alpha\beta} = \theta_{p_{\alpha\beta}}$  on a,

$$q_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} A_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2}{\partial y_{\alpha} \partial y_{\beta}} (\theta_{\alpha\beta} - P_{\alpha\beta}) \frac{\partial^2}{\partial y_{\gamma} \partial y_{\delta}} (\theta_{\gamma\delta} - P_{\gamma\delta}) dy.$$

*Preuve du théorème.* La démonstration est due pour la plus grande part à DUVAUT [6] et nous ne la referons pas ici : la seule modification consiste dans l'introduction du second membre  $T^{\epsilon}$  avec la condition :  ${}^t R^{\epsilon} T^{\epsilon}$  converge fortement dans  $V'$  : ceci assure un bon comportement dans les passages à la limite. Cette généralisation nous sera très utile dans l'étude du spectre de  $A^{\epsilon} \zeta^{\epsilon} - \lambda B^{\epsilon} \zeta^{\epsilon}$ ,  $\lambda B^{\epsilon} \zeta^{\epsilon}$  jouera le rôle de  $T^{\epsilon}$ , et dans l'étude de la branche bifurquée où l'on prendra  $T^{\epsilon} = \lambda B^{\epsilon} \zeta^{\epsilon} - C(\zeta^{\epsilon})$ .

## II - HOMOGENEISATION DES PROBLEMES D'ELASTICITE

Soit  $F_{\alpha} \in (L^2(\Gamma_0 \cup \Gamma_1))^2$ ,  $g_{\alpha} \in (L^2(\Omega))^2$ ,  $g_{\alpha\beta} \in (L^2(\Omega))^4$ , et soit  $(S_{\alpha\beta}^{\epsilon}, u^{\epsilon})$  la solution du problème d'élasticité,

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_{\epsilon}} S_{\alpha\beta}^{\epsilon} \epsilon_{\alpha\beta}(v) dx = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} F_{\alpha} v_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Omega_{\epsilon}} g_{\alpha} v_{\alpha} dx + \int_{\Omega_{\epsilon}} g_{\alpha\beta} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} dx, \\ S_{\alpha\beta}^{\epsilon} = a_{\alpha\beta\gamma\delta} [\epsilon_{\gamma\delta}(u^{\epsilon})]. \end{array} \right.$$

Les coefficients  $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$  possèdent les propriétés de symétrie et de coercivité indiquées dans la première partie.

*Remarque.* Dans le cas où  $g_{\alpha\beta} = 0$  ce problème a été résolu par LENE [11]. Nous allons constater que dans le cas où  $g_{\alpha\beta} \neq 0$ , il apparaît dans la loi de comportement une composante parasite due aux  $g_{\alpha\beta}$ .

Pour étudier le comportement de  $S_{\alpha\beta}^{\epsilon}$  et  $u^{\epsilon}$ , introduisons l'opérateur de prolongement  $P^{\epsilon}$  (TARTAR [17]) :

$$P^{\epsilon} : H^1(\Omega_{\epsilon}) \rightarrow H^1(\Omega),$$

qui est tel que,

$$\begin{aligned} \exists C, \forall \epsilon, \forall v \in H^1(\Omega_\epsilon), \\ |\nabla(P^\epsilon v)|_{L^2(\Omega)} \leq C |\nabla v|_{L^2(\Omega_\epsilon)}, \\ |(P^\epsilon v)|_{L^2(\Omega)} \leq C |v|_{L^2(\Omega_\epsilon)}. \end{aligned}$$

Comme précédemment nous désignons par  $\sim$  le prolongement par 0 dans les trous des éléments de  $L^2(\Omega_\epsilon)$ .

Nous pouvons alors énoncer le :

**THEOREME 2.** *Sous les hypothèses précédentes lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, la suite  $(\tilde{S}_{\alpha\beta}^\epsilon, P^\epsilon u^\epsilon)$  tend faiblement dans  $(L^2(\Omega))_S^4 \times W$  vers la solution  $(S_{\alpha\beta}, u)$  du problème :*

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} S_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} dx = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} F_\alpha v_\alpha d\Gamma + \theta \left[ \int_{\Omega} g_\alpha v_\alpha dx + \right. \\ \left. + \int_{\Omega} g_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} dx \right], \forall v \in W, \\ S_{\alpha\beta} \in (L^2(\Omega))_S^4. \end{array} \right. \\ \text{ii) } S_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\delta} + C_{\alpha\beta\mu\nu} g_{\mu\nu}. \end{array} \right.$$

Les coefficients  $q_{\alpha\beta\gamma\delta}$  sont ceux du problème d'élasticité homogénéisé obtenu par LENE [11] dans le cas où  $g_{\alpha\beta} \equiv 0$  (définition ci-dessous).

Les coefficients  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$  sont définis par :

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = q_{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\gamma\delta\mu\nu}^{-\theta},$$

où  $(b_{\gamma\delta\mu\nu})$  est la matrice inverse de  $(a_{\gamma\delta\mu\nu})$ .

*Définition des  $q_{\alpha\beta\gamma\delta}$*

Soit  $H_p^1(Y-O)$  la restriction à  $(Y-O)$  des fonctions de  $H_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $Y$  périodiques.

A  $\Lambda \in M_s^2(\mathbb{R})$  espace des matrices symétriques d'ordre 2 on associe  $\theta(\Lambda) = \theta \in (H_p^1(Y-O))^2$  solution de :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{Y-O} q_{\alpha\beta\gamma\delta} (\epsilon_{\gamma\delta}(\theta) - \epsilon_{\gamma\delta}(\Lambda(y))) \epsilon_{\alpha\beta}(v) dy = 0, \quad \forall v \in (H_p^1(Y-O))^2, \\ \int_{Y-O} \theta(y) dy = 0. \end{array} \right.$$

La forme quadratique  $Q(\Lambda) = \Sigma q_{\alpha\beta\gamma\delta} \lambda_{\alpha\beta} \lambda_{\gamma\delta}$  est alors définie par :

$$(19) \quad Q(\Lambda) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y-O} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta}(\Lambda-\theta) \epsilon_{\gamma\delta}(\Lambda-\theta) dy,$$

ce qui est encore équivalent à :

$$(20) \quad q_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y-O} a_{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} [\Lambda^{\gamma\delta}(y) - \theta(\Lambda^{\gamma\delta})] dy$$

où

$$\Lambda_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \delta_{\mu}^{\alpha} \cdot \delta_{\nu}^{\beta}.$$

*Remarque.* 1) Il y a unicité de la solution du problème (17) (i) et (ii) : il suffit de l'écrire en terme de déplacement : l'équation obtenue admet une solution unique  $u$  grâce à la coercivité de la matrice  $(q_{\alpha\beta\gamma\delta})$  :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} q_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial x_{\delta}} \cdot \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} dx = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} F_{\alpha} v_{\alpha} d\Gamma + \theta \int_{\Omega} g_{\alpha} v_{\alpha} dx \\ + \int_{\Omega} (q_{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\gamma\delta\mu\nu}) g_{\mu\nu} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} dx. \end{array} \right.$$

2) La relation (16) (ii) entre le tenseur des contraintes homogénéisées (c'est-à-dire le tenseur limite des  $\tilde{S}_{\alpha\beta}^{\epsilon}$ ) et le tenseur des déplacements  $\epsilon_{\alpha\beta}(u)$  fait intervenir un terme de relaxation dû aux  $g_{\alpha\beta}$  : il n'existe donc pas de relation entre  $S_{\alpha\beta}$ , le tenseur des contraintes, et  $\epsilon_{\alpha\beta}(u)$  *indépendante* des forces extérieures : on ne peut donc parler de loi de comportement au sens habituel. En fait dans ce problème on peut considérer que les bords des trous ne sont pas libres (si  $g_{\alpha\beta}$  est régulier, on a sur  $\partial O$ ,  $S_{\alpha\beta}^{\epsilon} n_{\beta} = g_{\alpha\beta} n_{\beta}$ ) au contraire du cas linéaire étudié par LENE [11]. Remarquons encore que cette absence de loi de comportement est masquée par la formulation (21) :

le tenseur  $\left( q_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial x_{\delta}} \right)$  n'est pas la limite faible de  $\tilde{S}_{\alpha\beta}^{\epsilon}$  alors qu'il serait raisonnable de le prendre comme le tenseur des contraintes homogénéisées.

Malgré cette anomalie le problème d'élasticité (16) nous sera très utile lorsque nous utiliserons le tenseur des déplacements non linéaire  $\gamma_{\alpha\beta}(u)$ .

*Preuve du théorème.* Les coefficients  $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$  étant symétriques en  $(\alpha,\beta)$  et  $(\gamma,\delta)$  nous remplacerons

$\epsilon_{\gamma\delta}(v)$  par  $\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\delta}$ . Dans la formulation en termes de déplacements, (16) s'écrit :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_\epsilon} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma^\epsilon}{\partial x_\delta} \cdot \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} dx = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} F_\alpha v_\alpha d\Gamma + \int_{\Omega_\epsilon} g_\alpha v_\alpha dx \\ + \int_{\Omega_\epsilon} g_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} dx, \quad \forall v \in W_\epsilon, \\ u^\epsilon \in W_\epsilon. \end{array} \right.$$

*Estimation a priori*

A partir de (22) on obtient :

$$|\epsilon_{\alpha\beta}(u^\epsilon)|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq M,$$

$$|S_{\alpha\beta}^\epsilon|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq M,$$

et grâce à l'inégalité de Korn (qui est uniforme en  $\epsilon$ ),

$$|u^\epsilon|_{(H^1(\Omega_\epsilon))^2} \leq M,$$

$$|P^\epsilon u^\epsilon|_{(H^1(\Omega))^2} \leq M.$$

*Premier passage à la limite*

D'après (16) on a :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \tilde{S}_{\alpha\beta}^\epsilon \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} dx = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} F_\alpha v_\alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \tilde{g}_\alpha v_\alpha dx \\ + \int_{\Omega} \tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} dx, \quad \forall v \in W. \end{array} \right.$$

Quand  $\epsilon$  tend vers 0,  $S_{\alpha\beta}^{\tilde{\epsilon}} \rightarrow S_{\alpha\beta}$  dans  $(L^2(\Omega))_s^4$ ,  $P^\epsilon u^\epsilon \rightarrow u$  dans  $W$ ,  $\tilde{g}_\alpha \rightarrow \theta g_\alpha$ ,  $\tilde{g}_{\alpha\beta} \rightarrow \theta g_{\alpha\beta}$  dans  $L^2(\Omega)$ .  $\left(\theta = \frac{|Y^*|}{|Y|}\right)$  et l'équation précédente donne (17)(i).

Relation entre  $S_{\alpha\beta}$  et  $\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}$

En utilisant (18) posons :

$$\begin{aligned} w(y) &= \Lambda(y) - \theta(y) \quad , \quad w(y) \in (H_{loc}^1(\mathbb{R}^{2*}))^2, \\ \sigma_{\alpha\beta}(y) &= a_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial w_\gamma}{\partial y_\delta} \quad , \quad \sigma_{\alpha\beta} \in (L_{loc}^2(\mathbb{R}^{2*}))_s^4, \\ w^\epsilon(x) &= \Lambda(x) - \epsilon\theta\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \epsilon w\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \\ \sigma_{\alpha\beta}^\epsilon(x) &= \sigma_{\alpha\beta}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = a_{\alpha\beta\gamma\delta} \left(\frac{\partial w_\gamma^\epsilon}{\partial x_\delta}\right) \end{aligned}$$

Grâce à la relation (18) on montre que :

$$(24) \quad \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^\epsilon \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\beta} dx = 0, \quad \forall \varphi \in (H_0^1(\Omega))^2.$$

Nous avons en outre les estimations :

$$\begin{aligned} |w^\epsilon|_{(H^1(\Omega_\epsilon))^2} &\leq C, \\ |P^\epsilon w^\epsilon|_{(H^1(\Omega))^2} &\leq C, \\ |\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^\epsilon|_{(L^2(\Omega))_s^4} &\leq C, \end{aligned}$$

donc lorsque  $\epsilon$  tend vers 0,

$$\begin{aligned} P^\epsilon w^\epsilon(x) &\rightarrow \Lambda(x) \text{ dans } (H^1(\Omega))^2, \\ \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^\epsilon &\rightarrow a_{\alpha\beta\gamma\delta} \lambda_{\gamma\delta} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial w_\gamma}{\partial x_\delta} dy. \end{aligned}$$

Soit alors  $\psi \in D(\Omega)$ , dans (24) prenons  $\varphi = \Psi P^\epsilon u^\epsilon$  et dans (23)  $v = \Psi P^\epsilon w^\epsilon$ . Par différence nous obtenons :

$$(25) \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} \tilde{S}_{\alpha\beta}^{\epsilon} (P^{\epsilon} w_{\alpha}^{\epsilon}) \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\beta}} dx = \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^{\epsilon} (P^{\epsilon} u^{\epsilon}) \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\beta}} dx \\ & + \int_{\Omega} \tilde{g}_{\alpha} (P^{\epsilon} w_{\alpha}^{\epsilon}) \Psi dx + \int_{\Omega} \tilde{g}_{\alpha\beta} (P^{\epsilon} w_{\alpha}^{\epsilon}) \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\beta}} dx \\ & + \int_{\Omega_{\epsilon}} g_{\alpha\beta} \frac{\partial w_{\alpha}^{\epsilon}}{\partial x_{\beta}} \Psi dx . \end{aligned} \right.$$

Dans chacun des termes de (25) excepté le dernier, il est aisé de passer à la limite car ce sont des produits scalaires de la forme  $(X^{\epsilon}, Y^{\epsilon})$  où  $X^{\epsilon}$  converge fortement et  $Y^{\epsilon}$  faiblement. Pour le dernier terme on se ramène à la situation précédente grâce à :

$$\int_{\Omega_{\epsilon}} g_{\alpha\beta} \frac{\partial w_{\alpha}^{\epsilon}}{\partial x_{\beta}} \Psi dx = \int_{\Omega} g_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial \tilde{w}_{\alpha}^{\epsilon}}{\partial x_{\beta}} \right) \Psi dx .$$

Il reste alors à évaluer la limite faible de  $\left( \frac{\partial \tilde{w}_{\alpha}^{\epsilon}}{\partial x_{\beta}} \right)$ .

On a :

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^{\epsilon} = a_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial \tilde{w}_{\gamma}^{\epsilon}}{\partial x_{\delta}} ,$$

la matrice  $(a_{\alpha\beta\gamma\delta})$  est associée à un opérateur linéaire inversible de  $M(2 \times 2)$  dans lui-même, soit  $b_{\alpha\beta\gamma\delta}$  la matrice inverse, on a évidemment  $b_{\alpha\beta\gamma\delta} = b_{\beta\alpha\gamma\delta} = b_{\gamma\delta\alpha\beta}$  et,

$$\frac{\partial \tilde{w}_{\alpha}^{\epsilon}}{\partial x_{\beta}} = b_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{\sigma}_{\gamma\delta}^{\epsilon} ,$$

$$\int_{\Omega} g_{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{w}_{\alpha}^{\epsilon}}{\partial x_{\beta}} \Psi dx = \int_{\Omega} b_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\alpha\beta} \tilde{\sigma}_{\gamma\delta}^{\epsilon} \Psi dx ,$$

et la limite faible de ce terme est

$$\int_{\Omega} q_{\gamma\delta\mu\nu} b_{\alpha\beta\gamma\delta} \lambda_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \Psi dx .$$

On obtient à partir de (25),

$$(26) \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} S_{\alpha\beta} \Lambda_{\alpha}(x) \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\beta}} dx = \int_{\Omega} q_{\alpha\beta\gamma\delta} \lambda_{\gamma\delta} \left( u_{\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\beta}} + b_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\gamma\delta} \Psi \right) dx \\ & + \theta \int_{\Omega} g_{\alpha} \Lambda_{\alpha}(x) \Psi dx + \theta \int_{\Omega} g_{\alpha\beta} \Lambda_{\alpha}(x) \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\beta}} dx . \end{aligned} \right.$$

La comparaison de (26) avec (22) où nous prenons  $v(x) = \Psi(x) \Lambda(x)$  conduit à la relation (16) ii. Ceci démontre complètement le théorème 2.

Les deux corollaires suivants permettront d'adapter le théorème 2 au problème de Von Karman.

COROLLAIRE 1. Soit  $g_{\alpha\beta} \in (L^2(\Omega))^4$  et une suite  $g_{\alpha\beta}^\epsilon \in (L^2(\Omega^\epsilon))^4$  telles que :

$$(27) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \|g_{\alpha\beta}^\epsilon - g_{\alpha\beta}\|_{L^2(\Omega^\epsilon)} \right) = 0,$$

alors la solution  $(\tilde{S}_{\alpha\beta}^\epsilon(g_{\alpha\beta}^\epsilon), P^\epsilon u^\epsilon(g_{\alpha\beta}^\epsilon))$  du problème ((16)  $(g_{\alpha\beta}^\epsilon)$ ) a même limite que  $(\tilde{S}_{\alpha\beta}^\epsilon(g_{\alpha\beta}), P^\epsilon u^\epsilon(g_{\alpha\beta}))$  quand  $\epsilon$  tend vers 0.

*Preuve.* La formulation variationnelle (22) donne :

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega_\epsilon} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta} (u^\epsilon(g^\epsilon) - u^\epsilon(g)) \epsilon_{\alpha\beta} (u^\epsilon(g^\epsilon) - u^\epsilon(g)) dx \\ & = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} F_\alpha (u^\epsilon(g^\epsilon) - u^\epsilon(g)) d\Gamma + \int_{\Omega_\epsilon} g_\alpha (u^\epsilon(g^\epsilon) - u^\epsilon(g)) dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon} (g_{\alpha\beta}^\epsilon - g_{\alpha\beta}) \frac{\partial}{\partial x_\beta} (u_\alpha^\epsilon(g^\epsilon) - u_\alpha^\epsilon(g)) dx, \end{aligned} \right.$$

d'où la majoration :

$$\| \epsilon_{\alpha\beta} (u^\epsilon(g^\epsilon) - u^\epsilon(g)) \|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq C \| g_{\alpha\beta}^\epsilon - g_{\alpha\beta} \|_{L^2(\Omega_\epsilon)}$$

ce qui donne le résultat grâce à l'inégalité de Korn.

COROLLAIRE 2. Soit  $f_{\alpha\beta}^\epsilon \in (L^2(\Omega^\epsilon))^4$  et soit  $(S_{\alpha\beta}^\epsilon(f^\epsilon), u^\epsilon(f^\epsilon))$  la solution de :

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega_\epsilon} S_{\alpha\beta}^\epsilon(f^\epsilon) \epsilon_{\alpha\beta}(v) dx = 0, \quad \forall v \in W_\epsilon, \\ & S_{\alpha\beta}^\epsilon(f^\epsilon) = a_{\alpha\beta\gamma\delta} [\epsilon_{\gamma\delta}(u^\epsilon(f^\epsilon)) + f_{\gamma\delta}^\epsilon]. \end{aligned} \right.$$

On suppose qu'il existe  $f_{\alpha\beta} \in [L^2(\Omega)]^4$  telle que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \|f_{\alpha\beta}^\epsilon - f_{\alpha\beta}\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \right) = 0.$$

Alors lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, la suite  $(S_{\alpha\beta}^\epsilon, P^\epsilon u^\epsilon(f^\epsilon))$  tend faiblement dans  $(L^2(\Omega))_s^4 \times (H^1(\Omega))^2$  vers la solution  $(S_{\alpha\beta}, u)$  du problème d'élasticité :

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \int_{\Omega} S_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta}(v) \, dx = 0, \quad \forall v \in W, \\ S_{\alpha\beta} \in (L^2(\Omega))_s^4, \quad v \in W, \\ \text{(ii)} \quad S_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta\gamma\delta} [\epsilon_{\gamma\delta}(u) + f_{\gamma\delta}]. \end{array} \right.$$

*Preuve.* Ce corollaire est une conséquence du théorème 2 et du corollaire précédent : il suffit de poser

$$g_{\alpha\beta}^\epsilon = a_{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\gamma\delta}^\epsilon,$$

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\gamma\delta}.$$

*Remarque.* Nous voyons dans le corollaire 2 que la relation (19 ii) qui joue le rôle de loi de comportement est conservée, ceci sera utile quand nous emploierons le tenseur non linéaire des déplacements.

*Conclusion.* Les résultats obtenus sur l'homogénéisation du problème d'élasticité nous permettent de définir des opérateurs homogénéisés  $B^0$  et  $C^0$  associés à la suite des opérateurs  $B^\epsilon$  et  $C^\epsilon$ .

DEFINITION DE  $B^0$ . Pour tout  $\zeta, \xi \in V$  posons

$$(30) \quad \langle B^0(\zeta), \xi \rangle = \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^{0,0} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} \, dx.$$

où  $\sigma_{\alpha\beta}^{0,0}$  est la solution du problème d'élasticité,

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\alpha\beta, \beta}^{0,0} = 0, \\ \sigma_{\alpha\beta}^{0,0} n_\beta = F_\alpha \quad \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \\ u^{0,0} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_{00}, \\ \sigma_{\alpha\beta}^{0,0} = q_{\alpha\beta\gamma\delta} (\epsilon_{\gamma\delta}(u^{0,0})) \end{array} \right.$$

L'opérateur  $B^0$  est compact symétrique de  $V$  dans  $V'$  ( $V$  étant muni de la norme induite par  $H^2(\Omega)$ ).



D'après le théorème 2 où l'on prend  $g_\alpha = g_{\alpha\beta} = 0$  la solution  $(\sigma_{\alpha\beta}^{0,\epsilon}, u^{0,\epsilon})$  du problème (7) est telle que  $(\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^{0,\epsilon}, P^\epsilon u^{0,\epsilon})$  converge dans  $(L^2(\Omega))_s^4 \times W$  faible vers  $(\sigma_{\alpha\beta}^{0,0}, u^{0,0})$  solution de (30).

DEFINITION DE  $C^0$ . Pour tout  $\zeta, \xi \in V$  posons

$$(32) \quad \langle C^0(\zeta), \xi \rangle = \int_{\Omega} S_{\alpha\beta}^0(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} dx,$$

où  $S_{\alpha\beta}^0(\zeta)$  est la solution du problème d'élasticité,

$$(33) \quad \begin{aligned} S_{\alpha\beta,\beta}^0 &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ S_{\alpha\beta}^0 n_\beta &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \\ S_{\alpha\beta}^0 &= a_{\alpha\beta\gamma\delta} \left[ \epsilon_{\gamma\delta}(u^0) + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\delta} \right]. \end{aligned}$$

D'après le corollaire 2 du théorème 2 si  $\zeta^\epsilon, \zeta^\epsilon \in V_\epsilon$  est telle que  $P^\epsilon \zeta^\epsilon$  converge faiblement vers  $\zeta$  dans  $V$  la solution  $S_{\alpha\beta}^\epsilon = S_{\alpha\beta}^\epsilon(\zeta^\epsilon)$  du problème

$$\left\{ \begin{aligned} S_{\alpha\beta,\beta}^\epsilon &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ S_{\alpha\beta}^\epsilon n_\beta &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \\ S_{\alpha\beta}^\epsilon &= a_{\alpha\beta\gamma\delta} \left[ \epsilon_{\gamma\delta}(u^\epsilon) + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta^\epsilon}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \zeta^\epsilon}{\partial x_\delta} \right] \end{aligned} \right.$$

est telle que  $\tilde{S}_{\alpha\beta}^\epsilon$  converge faiblement dans  $(L^2(\Omega))_s^4$  vers  $S_{\alpha\beta}^0$  solution de (33). En effet il suffit de prendre  $f_{\gamma\delta}^\epsilon = \frac{\partial \zeta^\epsilon}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \zeta^\epsilon}{\partial x_\delta}$ ,  $f = \frac{\partial \zeta}{\partial x_\gamma} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x_\delta}$  et d'utiliser l'injection compacte de  $H^1(\Omega)$  dans tous les  $L^p(\Omega)$  ( $p$  fini).

Nous sommes alors en mesure de passer au problème linéarisé.

III - HOMOGENEISATION DU PROBLEME LINEARISE

Le problème

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^\epsilon \varphi^\epsilon - \lambda B^\epsilon \varphi^\epsilon = 0, \\ \varphi^\epsilon \in V_\epsilon, \\ \langle B^\epsilon \varphi^\epsilon, \varphi^\epsilon \rangle = \pm 1, \end{array} \right.$$

admet une famille dénombrable de valeurs propres  $\{\lambda_j^\epsilon\}_{j \in ]n_0^\epsilon, m_0^\epsilon[}$ , où l'un au moins des deux entiers  $n_0^\epsilon, m_0^\epsilon$  est infini, avec

$$\lambda_{-j}^\epsilon \leq \lambda_{-j+1}^\epsilon \leq \dots \leq \lambda_{-1}^\epsilon < 0 < \lambda_1^\epsilon \leq \lambda_2^\epsilon \leq \dots,$$

on convient de répéter les  $\lambda_j^\epsilon$  avec leur multiplicité et à chaque  $\lambda_j^\epsilon$  on associe un vecteur propre  $\varphi_j^\epsilon$  normalisé par  $\langle B^\epsilon \varphi_j^\epsilon, \varphi_j^\epsilon \rangle = \text{signe de } \lambda_j^\epsilon$ , les  $\{\varphi_j^\epsilon\}$  formant un système orthogonal complet pour  $V_\epsilon$  muni du produit scalaire  $((\xi, u)) = \langle A^\epsilon \xi, u \rangle$ . Enfin on désigne par  $E^\epsilon(\lambda)$  le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

De même à  $(A^0, B^0)$  est associé le système  $(\lambda_i^0, \varphi_i^0)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} A^0 \varphi_i^0 = \lambda_i^0 B^0 \varphi_i^0, \\ \langle B^0 \varphi_i^0, \varphi_i^0 \rangle = \text{signe de } \lambda_i^0, \\ i \in ]n_0, m_0[, \varphi_i^0 \in V. \end{array} \right.$$

Le théorème suivant précise le comportement des propriétés spectrales de la suite  $(A^\epsilon - \lambda B^\epsilon)$ .

**THEOREME 3.** Lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, le système de valeurs et vecteurs propres  $(\lambda_i^\epsilon, \varphi_i^\epsilon)$ ,  $i \in ]n_\epsilon, m_\epsilon[$ , associé à (34) vérifie :

(i) pour  $i \in ]n_0, m_0[$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_i^\epsilon = \lambda_i^0$$

(ii) pour  $i \in ]n_0, m_0[$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\lambda_i^\epsilon| = +\infty$$

(iii) si  $\lambda_i^0$  est de multiplicité  $p$  avec

$$\lambda_{i-1} < \lambda_i^0 = \lambda_{i+1}^0 = \dots = \lambda_{i+p-1}^0 < \lambda_{i+p}$$

l'espace  $\sum_{0 \leq j \leq p-1} P^\epsilon E^\epsilon(\lambda_{i+j}^\epsilon)$  converge faiblement vers  $E(\lambda^0)$  dans  $V$  (donc converge pour la métrique de Hausdorff sur les boules unités des sous-espaces dans  $L^2(\Omega)$ ).

*Remarque.* Ceci implique en particulier que tout vecteur propre du problème  $A^0 - \lambda B^0$  est limite faible d'une suite  $P^\epsilon \varphi_i^\epsilon$  et qu'inversement si la suite  $\lambda_i^\epsilon$  a une limite, les valeurs d'adhérence des  $P^\epsilon \varphi_i^\epsilon$  (qui sont évidemment bornées) sont des vecteurs propres de  $(A^0 - \lambda B^0)$  associés à la valeur propre limite des  $\lambda_i^\epsilon$ .

*Preuve du théorème*

Notation. Soit  $i \in \mathbf{Z}^*$ , nous noterons  $]0, i[$  l'intervalle de  $\mathbf{Z}^*$  :  $[1, i]$  si  $i \geq 1$ , et  $[i, 1]$  si  $i \leq -1$ . Nous montrons successivement :

1) Les valeurs d'adhérence des suites  $\lambda_i^\epsilon$  ( $i$  fixé,  $\epsilon$  tendant vers 0) sont valeurs propres de  $(A^0, B^0)$ .

2) Les valeurs propres de  $(A^0, B^0)$  sont limites de suites  $\lambda_i^\epsilon$ .

3) Les espaces propres convergent.

LEMME 1. On se place dans le cadre des hypothèses du théorème. Si la suite  $\lambda_i^\epsilon$  ( $i$  fixé,  $\epsilon$  tendant vers 0) a une valeur d'adhérence finie, il existe une sous-suite (notée encore  $\epsilon$ ) telle que :

i) pour tout  $j \in ]0, i[$  la suite  $\lambda_j^\epsilon$  converge vers  $\mu_j$  valeur propre de  $A^0 - \lambda B^0$ ,

ii) les vecteurs propres  $(\varphi_j^\epsilon)_{j \in ]0, i[}$  sont tels que  $P^\epsilon \varphi_j^\epsilon$  convergent vers  $\hat{\varphi}_j^0$  dans  $V$  faible, vérifiant

$$A^0 \hat{\varphi}_j^0 = \mu_j B^0 \hat{\varphi}_j^0,$$

$$\langle B^0 \varphi_j^0, \varphi_j^0 \rangle = \text{signe de } \mu_j,$$

les  $\hat{\varphi}_j^0$ ,  $j \in ]0, i]$ , formant une famille orthogonale dans  $V$  muni du produit scalaire  $\langle A^0 \xi, \eta \rangle = ((\xi, \eta))$ ,

iii) Si  $i > 0$ , alors,  $\forall j, 0 < j \leq i, 0 < \lambda_j \leq \mu_j$ ,

Si  $i < 0$ , alors,  $\forall j, 0 > j \geq i, 0 > \lambda_j \geq \mu_j$ .

*Preuve.* Supposons  $i > 0$ , d'après l'hypothèse on a :

$$0 < \lambda_1^\epsilon \leq \dots \leq \lambda_i^\epsilon \leq M,$$

et on peut supposer :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_j^\epsilon = \mu_j, \quad 1 \leq j \leq i,$$

(ceci est la définition des  $\mu_j$ ), avec

$$0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_i \leq M.$$

Il résulte par ailleurs de (34) que

$$(35) \quad \|\varphi_j^\epsilon\|_{V_\epsilon} = \lambda_j^\epsilon \leq M,$$

donc il existe  $\hat{\varphi}_j \in V$  tel que

$$P^\epsilon \varphi_j^\epsilon \rightarrow \hat{\varphi}_j \text{ dans } V.$$

Montrons que  ${}^t R^\epsilon B^\epsilon \varphi_j^\epsilon$  tend fortement dans  $V'$  vers  $B^0 \hat{\varphi}_j$ . Il en résultera que

$$\langle B^0 \hat{\varphi}_j, \hat{\varphi}_k \rangle = \delta_{jk},$$

(donc que  $\hat{\varphi}_j \neq 0$ ) et, -grâce au théorème sur l'homogénéisation des problèmes du quatrième ordre- que

$$A^0 \hat{\varphi}_j = \mu_j B^0 \hat{\varphi}_j,$$

(ceci implique que  $\mu_j > 0$ ).

Les parties (i) et (ii) du lemme seront ainsi démontrées.

Soit donc, pour  $v \in V$ ,

$${}^t R^\epsilon B^\epsilon \varphi_j^{\epsilon, v} = \int_{\Omega_\epsilon} \sigma_{\alpha\beta}^\epsilon \frac{\partial \varphi_j^\epsilon}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} dx = \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^\epsilon \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\epsilon \varphi_j^\epsilon) \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} dx ,$$

nous savons que  $\sigma_{\alpha\beta}^\epsilon$  est borné dans  $L^2(\Omega_\epsilon)$ , donc  $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^\epsilon \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\epsilon \varphi_j^\epsilon)$  converge faiblement vers  $\sigma_{\alpha\beta}^0 \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\hat{\varphi}_j)$  dans  $L^q(\Omega)$ , pour tout  $q$ ,  $q < 2$ , et  ${}^t R^\epsilon B^\epsilon \varphi_j^\epsilon$  converge faiblement dans  $W^{-1, q}(\Omega)$  qui s'envoie de façon compacte dans  $V'$ .

Nous allons prouver (iii) par contradiction.

Tout d'abord, on a  $0 < \lambda_1 \leq \mu_1$ , soit donc  $j$  le premier indice,  $j \leq i$ , tel que

$$\lambda_{j-1} \leq \mu_{j-1} \leq \mu_j < \lambda_j ,$$

comme  $\mu_j$  est valeur propre de  $(A^0 - \lambda B^0)$

$$\mu_j = \lambda_{j-1} = \mu_{j-1} ,$$

soit alors  $q$  la multiplicité de  $\lambda_{j-1}$ ,

$$\lambda_{j-q} = \lambda_{j-q+1} = \dots = \lambda_{j-1} = \mu_{j-1} = \mu_j < \lambda_j ,$$

donc

$$\mu_{j-1} = \mu_{j-q+1} = \dots = \mu_{j-1} = \mu_j ,$$

et les vecteurs propres  $\hat{\varphi}_{j-q}, \dots, \hat{\varphi}_j$  forment une famille libre de  $(q+1)$  vecteurs dans  $E(\lambda_{j-1})$  qui est de dimension  $q$  ce qui est absurde.

LEMME 2. Sous les hypothèses du théorème on a :

i) Toute valeur propre de  $(A^0 - \lambda B^0)$  est limite d'une sous-suite  $\lambda_k^{\epsilon'}$

ii) plus précisément : soit  $\lambda_j$  une valeur propre de multiplicité  $p$  de  $A^0 - \lambda B^0$  ( $\lambda_{j-1} < \lambda_j = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+p-1} < \lambda_{j+p}$ ) et  $E(\lambda_j)$  l'espace propre correspondant. Il existe une sous-suite  $\epsilon'$  et un indice  $k$  tel que

$\alpha)$   $\lambda_k^{\epsilon'}, \lambda_{k+1}^{\epsilon'}, \dots, \lambda_{k+p-1}^{\epsilon'}$  tendent vers  $\lambda_j$ ,

$\beta)$   $\sum_{0 \leq s \leq p-1} P^\epsilon E(\lambda_{k+s}^{\epsilon'})$  tend faiblement vers  $E(\lambda_j)$ .

*Preuve.* Considérons  $j$  donné par (ii), supposons que  $j \geq 1$  et que  $\lambda_j$  ne soit pas valeur d'adhérence de toutes les suites  $\lambda_i^\epsilon, 0 \leq i \leq p-1+j$ . Or d'après le lemme 1,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf \lambda_{j+p-1}^\epsilon \geq \lambda_{j+p-1} = \lambda_j$$

donc pour  $s \geq p$ ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf \lambda_{j+s}^\epsilon \geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf \lambda_{j+p-1}^\epsilon > \lambda_j,$$

et de plus comme  $\lambda_j$  n'est adhérent à aucune suite  $\lambda_i^\epsilon, i \in [1, j+p]$ , il existe  $\eta > 0$ , et  $\epsilon_0$  tel que  $\forall \epsilon, \epsilon < \epsilon_0, \forall i \in ]n_\epsilon, m_\epsilon[$  on ait :

$$(36) \quad |\lambda_i^\epsilon - \lambda_j| \geq \eta.$$

Montrons que ceci implique,

$$(A^0 - \lambda_j B^0)(V) \supset L^2(\Omega),$$

ce qui contredira l'alternative de Fredholm car

$$(A^0 - \lambda_j B^0)(V) = \{T, T \in V', \langle T, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in E(\lambda_j)\}$$

donc

$$(37) \quad (A^0 - \lambda_j B^0)(V) \cap L^2(\Omega) = \{f, f \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} f \varphi dx = 0, \forall \varphi \in E(\lambda_j)\}.$$

Nous savons que si  $\lambda \notin Sp(A^\epsilon, B^\epsilon)$  on a,

$$\| (A^\epsilon - \lambda B^\epsilon)^{-1} \|_{L(V'_\epsilon, V_\epsilon)} = \max_{i \in ]n_\epsilon, m_\epsilon[} \left| \frac{\lambda_i^\epsilon}{\lambda - \lambda_i^\epsilon} \right|.$$

Il résulte alors de (36) que

$$\| (A^\epsilon - \lambda_j B^\epsilon)^{-1} \| \leq \frac{C}{\eta},$$

donc si  $f \in L^2(\Omega)$ , la solution  $\zeta^\epsilon$  de

$$A^\epsilon \zeta^\epsilon - \lambda_j B^\epsilon \zeta^\epsilon = f|_{\Omega_\epsilon},$$

vérifie

$$\|\zeta^\epsilon\|_{V_\epsilon} \leq \frac{C}{\eta} \|f\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \leq C',$$

donc

$$P^\epsilon \zeta^\epsilon \rightharpoonup \zeta, \text{ dans } V,$$

et comme  $\tilde{f}|_{\Omega_\epsilon} \rightarrow \theta f$  dans  $V'$ , il résulte du théorème 1 sur l'homogénéisation des problèmes du quatrième ordre que

$$A^0 \zeta - \lambda_j B^0 \zeta = \theta f,$$

ce qui contredit (37).

Il existe donc un indice  $k$ ,  $k \leq j + p - 1$ , tel que

- i)  $\lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \lambda_{k-1}^{\epsilon'} < \lambda_j$ ,
- ii)  $\lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \lambda_k^{\epsilon'} = \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \lambda_{k+1}^{\epsilon'} = \dots = \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \lambda_{k+q-1}^{\epsilon'} = \lambda_j$ .

Montrons que  $q = p$ , ceci complètera la démonstration du lemme 2. Tout d'abord  $q \leq p$ , en effet d'après le lemme 1 les  $(\hat{\varphi}_{k+s})_{0 \leq s \leq q-1}$  forment un système orthogonal de  $q$  vecteurs propres de  $E(\lambda_j)$  donc  $p = \dim E(\lambda_j) \geq q$ .

Supposons  $q < p$ . Il existe donc  $\varphi_0 \in E(\lambda_j)$  tel que

$$(38) \quad \int_{\Omega} \varphi_0 \hat{\varphi}_{k+s} dx = 0 \quad 0 \leq s \leq q-1$$

Montrons que le problème

$$(39) \quad A^0 \zeta - \lambda_j B^0 \zeta = \theta \varphi_0$$

admet une solution ce qui contredira l'alternative de Fredholm pour  $(A^0 - \lambda_j B^0)$ .

$$\text{Soit } \varphi_0^\epsilon \text{ la projection dans } L^2(\Omega_\epsilon) \text{ de } R^\epsilon \varphi_0 \text{ sur } \sum_{0 \leq s \leq q-1} E(\lambda_{k+s}^\epsilon) :$$

$$\varphi_0^\epsilon = \sum_{0 \leq s \leq p-1} \frac{1}{\int_{\Omega_\epsilon} |\varphi_{k+s}^\epsilon|^2 dx} \left( \int_{\Omega_\epsilon} \varphi_0 \varphi_{k+s}^\epsilon dx \right) \varphi_{k+s}^\epsilon.$$

D'après (38),

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{\varphi}_0^\epsilon = 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

De plus le problème suivant admet une solution unique,

$$\begin{cases} A^\epsilon \zeta^\epsilon - \lambda_k^\epsilon B^\epsilon \zeta^\epsilon = R^\epsilon \cdot \varphi_0 - \varphi_0^\epsilon, \\ \langle A^\epsilon \zeta^\epsilon, \varphi_{k+s}^\epsilon \rangle = 0 \quad , \quad 0 \leq s \leq q-1. \end{cases}$$

Pour montrer que (39) admet une solution, il suffit d'obtenir l'estimation

$$(40) \quad \|\zeta^\epsilon\|_{V^\epsilon} \leq C,$$

(car alors  ${}^tR^\epsilon [\lambda_k^\epsilon B^\epsilon \zeta^\epsilon + R^\epsilon \varphi_0 - \varphi_0^\epsilon]$  tend fortement dans  $V'$  vers  $\lambda_j B^0 \zeta + \theta \varphi_0$ ).

Or l'opérateur  $(A^\epsilon - \lambda_k^\epsilon B^\epsilon)$  est un isomorphisme entre

$$F^\epsilon = \{ \zeta, \zeta \in V_\epsilon, \langle A\zeta, \varphi_{k+i}^\epsilon \rangle = 0 \quad i=0, \dots, q-1 \}$$

et

$$F'^\epsilon = \{ T, T \in V'_\epsilon, \langle T, \varphi_{k+i}^\epsilon \rangle = 0 \quad i=0, \dots, q-1 \}$$

dont l'opérateur inverse a pour norme

$$\| (A^\epsilon - \lambda_k^\epsilon B^\epsilon)^{-1} \| = \max_{s \notin [k, k+q-1]} \frac{|\lambda_s^\epsilon|}{|\lambda_s^\epsilon - \lambda_k^\epsilon|}.$$

D'après le choix des  $\lambda_k^\epsilon, \dots, \lambda_{k+q-1}^\epsilon$ , il existe une constante C, indépendante de  $\epsilon$ , telle que :

$$\max_{s \notin [k, k+q-1]} \frac{|\lambda_s^\epsilon|}{|\lambda_s^\epsilon - \lambda_k^\epsilon|} \leq C.$$

L'estimation (40) résulte alors trivialement de (39). Le lemme 2 est ainsi démontré. Pour achever le théorème, il reste à montrer que

$$\mu_i = \lambda_i, \quad \forall i \in ]n_0, m_0[$$

On suppose  $i > 0$ . Nous aurons besoin du

LEMME 3. Si  $\mu_{i-1} < \mu_i = \lambda_i$  et si  $\lambda_i$  est de multiplicité p alors,

$$\mu_i = \mu_{i+1} = \dots = \mu_{i+p-1} = \lambda_i = \dots = \lambda_{i+p-1}.$$



*Preuve.* D'après le lemme 2 il existe  $k$  tel que  $\mu_{k-1} < \mu_k = \mu_{k+1} = \dots = \mu_{k+p-1} = \lambda_i < \mu_{k+p}$ . Nécessairement  $k \geq i$  car les  $\mu_j$  sont croissants et  $\mu_{k-1} < \lambda_i$ .

Si  $k > i$   $\lambda_i = \mu_k > \mu_{k-1} \geq \mu_i = \lambda_i$  ce qui est contradictoire et le lemme 3 est ainsi démontré.

Montrons alors par récurrence que pour  $i > 0$   $\mu_i = \lambda_i$ . Tout d'abord  $\mu_1 = \lambda_1$  car d'après le lemme 1  $\mu_1 \geq \lambda_1$  et d'après la proposition 2i) il existe  $k$  tel que  $\mu_k = \lambda_1$  donc  $\lambda_1 = \mu_1 = \dots = \mu_k$ . Soit  $j$  le plus petit indice tel que  $\mu_j > \lambda_j$  ( $j \geq 2$ ), alors il existe  $s$  tel que,

$$\mu_{j-s-1} < \mu_{j-s} = \dots = \mu_{j-1} < \mu_j,$$

donc d'après l'hypothèse sur  $j$ ,

$$\lambda_{j-s-1} < \lambda_{j-s} = \dots = \lambda_{j-1} \leq \lambda_j,$$

si  $\lambda_{j-s}$  est de multiplicité  $s' \geq s+1$  alors d'après le lemme 3,

$$\mu_j = \mu_{j-1} = \dots = \lambda_{j-s} = \lambda_j,$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse, donc  $\lambda_{j-s}$  est de multiplicité  $s$  et,

$$(41) \quad \mu_{j-1} = \lambda_{j-1} < \lambda_j < \mu_j,$$

d'après le lemme 2, il existe un indice  $k$  tel que  $\mu_k = \lambda_j$  et  $k > j$  ce qui est contradictoire avec (41), les  $\mu_k$  étant croissants donc  $\mu_j = \lambda_j$ ,  $\forall j, j \in ]0, m_0[$ . Même chose pour  $j < 0$ .

**Conclusion.** Cette partie montre que les points de bifurcation de la plaque homogénéisée sont les limites des points de bifurcation de la plaque perforée quand  $\epsilon$  tend vers 0. Il nous reste à montrer qu'il y a aussi convergence des branches bifurquées.

#### IV - HOMOGENEISATION DU PROBLEME DE BIFURCATION

##### 1 - Méthode de Berger

D'après la première partie nous savons que pour chaque  $\epsilon$  le point  $(\lambda_1^\epsilon, 0)$  est un point de bifurcation pour le problème de Von Karman : il existe une branche de solutions  $(\lambda_1^\epsilon(R), \zeta_1^\epsilon(R))$  définie pour  $R > 0$ , telle que

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^\epsilon \zeta_1^\epsilon(R) - \lambda_1^\epsilon(R) B^\epsilon \zeta_1^\epsilon(R) + C^\epsilon(\zeta_1^\epsilon(R)) = 0, \\ \lim_{R \rightarrow 0} \lambda_1^\epsilon(R) = \lambda_1^\epsilon, \\ \langle A^\epsilon \zeta_1^\epsilon(R), \zeta_1^\epsilon(R) \rangle = 2R (1 + o(R)), \end{array} \right.$$

le paramètre  $\lambda_1^\epsilon(R)$  étant le multiplicateur de Lagrange associé au maximum de la fonctionnelle  $\langle B^\epsilon(\zeta), \zeta \rangle$  sur la variété

$$(43) \quad \Sigma_R^\epsilon = \left\{ \zeta, \zeta \in V_\epsilon, \frac{1}{2} \langle A^\epsilon \zeta, \zeta \rangle + \frac{1}{4} \langle C^\epsilon \zeta, \zeta \rangle = R \right\}.$$

Nous pouvons alors énoncer le :

**THEOREME.** *On suppose que le problème homogénéisé  $A^0 \zeta - \lambda B^0 \zeta$  admet une valeur propre positive. Alors lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, la branche  $(\lambda_1^\epsilon(R), \zeta_1^\epsilon(R))$  converge dans  $\mathbb{R} \times V$  faible vers  $(\lambda_1^0(R), \zeta_1^0(R))$  solution non nulle de,*

$$A^0 \zeta_1^0(R) - \lambda_1^0(R) B^0 \zeta_1^0(R) + C^0(\zeta_1^0(R)) = 0,$$

et qui vérifie de plus,

$$\langle B^0 \zeta_1^0(R), \zeta_1^0(R) \rangle = \zeta \in \Sigma_R^0 = \left\{ \zeta, \frac{1}{2} \langle A^0 \zeta, \zeta \rangle + \frac{1}{4} \langle C^0 \zeta, \zeta \rangle = R \right\}.$$

*Remarques.* 1) La solution obtenue par la méthode de BERGER [1] converge donc vers la solution correspondante du problème homogénéisé.

2) Le problème de savoir si le spectre de  $(A^0 - \lambda B^0)$  a une partie positive (ou négative) dépend étroitement de la géométrie de la plaque et des propriétés d'anisotropie des coefficients homogénéisés. De toute façon le spectre a toujours une première valeur propre ou négative ou positive et la branche qui bifurque en ce point a son comportement en fonction de  $\epsilon$  décrit par le théorème précédent.

*Preuve.* Fixons  $R$  et posons  $\zeta_1^\epsilon(R) = \zeta_1^\epsilon$ . Estimation a priori sur  $\zeta_1^\epsilon$  et  $\lambda_1^\epsilon(R)$ .

Comme  $\zeta_1^\epsilon \in \Sigma_R^\epsilon$  on a,

$$\|\zeta_1^\epsilon\|_{V_\epsilon} \leq 2R.$$

Pour  $\lambda_1^\epsilon(R)$  on a :

$$\lambda_1^\epsilon(R) = \frac{\langle A^\epsilon \zeta_1^\epsilon, \zeta_1^\epsilon \rangle + \langle C^\epsilon(\zeta_1^\epsilon), \zeta_1^\epsilon \rangle}{\langle B^\epsilon \zeta_1^\epsilon, \zeta_1^\epsilon \rangle},$$

comme  $\langle A^\epsilon \zeta_1^\epsilon, \zeta_1^\epsilon \rangle \leq 2R$  et  $\langle C^\epsilon(\zeta_1^\epsilon), \zeta_1^\epsilon \rangle \leq 4R$ , il suffit de minorer  $\langle B^\epsilon \zeta_1^\epsilon, \zeta_1^\epsilon \rangle$  pour obtenir une majoration de  $\lambda_1^\epsilon(R)$ .

D'après l'hypothèse du théorème, le problème  $(A^0 - \lambda B^0)$  admet une première valeur propre positive  $\lambda_1^0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} A^0 \varphi_1^0 - \lambda_1^0 B^0 \varphi_1^0 = 0, \\ \langle A^0 \varphi_1^0, \varphi_1^0 \rangle = 1. \end{array} \right.$$

Soit  $t_\epsilon$  tel que  $t_\epsilon \varphi_1^0 \in \Sigma_R^\epsilon$  (on note pour simplifier, de la même façon  $\varphi_1^0$  et  $\varphi_1^0|_{\Omega_\epsilon}$ ) donc

$$\frac{t_\epsilon^2}{2} + \frac{t_\epsilon^4}{4} \langle C^\epsilon(\varphi_1^0), \varphi_1^0 \rangle = R,$$

or,

$$0 \leq \langle C^\epsilon(\varphi_1^0), \varphi_1^0 \rangle \leq M,$$

M indépendant de  $\epsilon$ ,

donc

$$t_\epsilon^2 \leq 2R \leq t_\epsilon^2 \left( 1 + \frac{M}{2} t_\epsilon^2 \right),$$

$$\frac{2R}{1 + 2M R^2} \leq t_\epsilon^2 \leq 2R,$$

On déduit alors de

$$\langle B^\epsilon \zeta_1^\epsilon, \zeta_1^\epsilon \rangle \geq t_\epsilon^2 \langle B^\epsilon \varphi_1^0, \varphi_1^0 \rangle,$$

et de

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle B^\epsilon \varphi_1^0, \varphi_1^0 \rangle = \frac{1}{\lambda_1^0},$$

que

$$\langle B^\epsilon \zeta_1^\epsilon, \zeta_1^\epsilon \rangle \geq M \cdot \frac{2R}{1 + 2M R^2},$$

et donc

$$0 < \lambda_1^\epsilon(R) < M''.$$

**Passage à la limite.**

Quand  $\epsilon$  tend vers 0, pour une sous-suite notée encore  $\epsilon$  on a :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_1^\epsilon(R) = \mu ,$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P^\epsilon \zeta_1^\epsilon = \zeta_1^0 \text{ dans } V \text{ faible .}$$

LEMME 1. Lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, nous avons

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} {}^tR^\epsilon(B^\epsilon(\zeta_1^\epsilon)) = B^0(\zeta_1^0) , \text{ dans } V' \text{ fort.}$$

En effet pour  $\xi \in V$  ,

$$\langle {}^tR^\epsilon B^\epsilon \zeta_1^\epsilon, \xi \rangle = \int_{\Omega_\epsilon} \sigma_{\alpha\beta}^\epsilon \frac{\partial \zeta_1^\epsilon}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} dx = \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^\epsilon \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\epsilon \zeta_1^\epsilon) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} dx .$$

La quantité  $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^\epsilon \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\epsilon \zeta_1^\epsilon)$  converge dans  $L^q(\Omega)$  faible ( $q < 2$ ) vers  $\sigma_{\alpha\beta}^0 \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\zeta_1^0)$  car  $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^\epsilon \rightarrow \sigma_{\alpha\beta}^0$  dans  $L^2(\Omega)$  et  $\frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\epsilon \zeta_1^\epsilon) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\zeta_1^0)$  dans  $L^p$  fort ( $\forall p$  fini). Il en résulte que  $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^\epsilon \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\epsilon \zeta_1^\epsilon) \right)$  converge dans  $W^{-1,q}(\Omega)$  faible et donc dans  $V'$  fort vers  $B^0 \zeta_1^0$ .

LEMME 2. Lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, l'opérateur  ${}^tR^\epsilon C^{\epsilon'}(\zeta_1^{\epsilon'})$  converge dans  $V'$  fort vers  $C^0(\zeta_1^0)$ .

*Preuve.* Rappelons que l'opérateur  ${}^tR^\epsilon C^\epsilon(\zeta_1^\epsilon)$  est défini par :

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} \forall \xi \in V , \langle {}^tR^\epsilon C^\epsilon(\zeta_1^\epsilon), \xi \rangle &= \int_{\Omega_\epsilon} S_{\alpha\beta}^\epsilon(\zeta_1^\epsilon) \cdot \frac{\partial \zeta_1^\epsilon}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} dx \\ &= \int_{\Omega} \widetilde{S_{\alpha\beta}^\epsilon(\zeta_1^\epsilon)} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\epsilon \zeta_1^\epsilon) \cdot \frac{\partial(\xi)}{\partial x_\alpha} dx , \end{aligned} \right.$$

où  $S_{\alpha\beta}^\epsilon(\zeta_1^\epsilon)$  est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_\epsilon} S_{\alpha\beta}^\epsilon(\zeta_1^\epsilon) \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} dx = 0, \quad \forall v \in W^\epsilon, \\ S_{\alpha\beta}^\epsilon(\zeta_1^\epsilon) \in (L^2(\Omega_\epsilon))_s^4, \\ S_{\alpha\beta}^\epsilon(\zeta_1^\epsilon) = a_{\alpha\beta\gamma\delta} \left[ \epsilon_{\gamma\delta}(u^\epsilon) + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta_1^\epsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta_1^\epsilon}{\partial x_\beta} \right]. \end{array} \right.$$

Mais  $P^\epsilon \zeta_1^\epsilon$  tend faiblement dans  $V$  vers  $\zeta_1^0$  donc

$$\left| \frac{\partial \zeta_1^\epsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta_1^\epsilon}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \zeta_1^0}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta_1^0}{\partial x_\beta} \right|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \rightarrow 0 \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0.$$

Nous pouvons appliquer le corollaire 2 du théorème 2 sur l'homogénéisation du problème d'élasticité :  $\widetilde{S_{\alpha\beta}^\epsilon(\zeta_1^\epsilon)}$  converge faiblement dans  $(L^2(\Omega))_s^4$  vers  $S_{\alpha\beta}^0(\zeta_1^0)$  la solution du problème homogénéisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} S_{\alpha\beta}^0(\zeta_1^0) \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} dx = 0, \quad \forall v \in W, \\ S_{\alpha\beta}^0(\zeta_1^0) \in (L^2(\Omega))_s^4, \\ S_{\alpha\beta}^0(\zeta_1^0) = a_{\alpha\beta\gamma\delta} \left[ \epsilon_{\gamma\delta}(u^0) + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta_1^0}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta_1^0}{\partial x_\beta} \right] \end{array} \right.$$

Il en résulte que  $\widetilde{S_{\alpha\beta}^\epsilon(\zeta_1^\epsilon)} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\epsilon \zeta_1^\epsilon)$  tend vers  $S_{\alpha\beta}^0(\zeta_1^0) \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\zeta_1^0)$  dans  $L^q(\Omega)$  faible ( $q < 2$ ), car  $\frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\epsilon \zeta_1^\epsilon)$  converge vers  $\frac{\partial \zeta_1^0}{\partial x_\beta}$  dans  $L^p(\Omega)$  fort (pour tout  $p$  fini). La démonstration se termine comme dans le lemme 1.

Ce qui précède implique que  ${}^t R^\epsilon[\lambda_1^\epsilon(R) B^\epsilon \zeta_1^\epsilon - C^\epsilon(\zeta_1^\epsilon)]$  tend vers  $\mu B^0 \zeta_1^0 - C^0(\zeta_1^0)$  dans  $V'$  fort, donc d'après le théorème 1,  $\zeta_1^0$  est la solution de

$$A^0 \zeta_1^0 - \mu B^0 \zeta_1^0 + C^0(\zeta_1^0) = 0.$$

Il reste à montrer que  $\zeta_1^0 \neq 0$ ,  $\zeta_1^0 \in \Sigma_{\mathbb{R}}^0$ , et que

$$(45) \quad \langle B^0 \zeta_1^0, \zeta_1^0 \rangle = \sup_{\zeta \in \Sigma_{\mathbb{R}}^0} \langle B^0 \zeta, \zeta \rangle.$$

(Ce qui impliquera que  $\mu = \lambda_1^0(\mathbb{R})$  est le multiplicateur de Lagrange associé à  $\zeta_1^0$ ).

Nous savons que  ${}^t\mathbb{R}^\epsilon A^\epsilon \zeta_1^\epsilon$  converge vers  $A^0 \zeta_1^0$  dans  $V'$  fort, donc :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle A^\epsilon \zeta_1^\epsilon, \zeta_1^\epsilon \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle {}^t\mathbb{R}^\epsilon A^\epsilon \zeta_1^\epsilon, P^\epsilon \zeta_1^\epsilon \rangle = \langle A^0 \zeta_1^0, \zeta_1^0 \rangle .$$

On peut donc passer à la limite dans chaque terme de l'expression,

$$\frac{1}{2} \langle A^\epsilon \zeta_1^\epsilon, \zeta_1^\epsilon \rangle + \frac{1}{4} \langle C^\epsilon \zeta_1^\epsilon, \zeta_1^\epsilon \rangle = R,$$

et obtenir ainsi,

$$\frac{1}{2} \langle A^0 \zeta_1^0, \zeta_1^0 \rangle + \frac{1}{4} \langle C^0 \zeta_1^0, \zeta_1^0 \rangle = R,$$

donc  $\zeta_1^0 \in \Sigma_{\mathbb{R}}^0$  (en particulier  $\zeta^0 \neq 0$ ).

Il reste à prouver (45). Soit  $(\lambda^0, \zeta^0)$  la solution de

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^0 \zeta^0 - \lambda^0 B^0 \zeta^0 + C^0(\zeta^0) = 0, \\ \langle B^0 \zeta^0, \zeta^0 \rangle = \sup_{\zeta \in \Sigma_{\mathbb{R}}^0} \langle B^0 \zeta, \zeta \rangle . \end{array} \right.$$

Définissons  $T^0 \in V'$  par : pour tout  $\xi$  dans  $V$ ,

$$\langle T^0, \xi \rangle = \lambda^0 \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \frac{\partial \zeta^0}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} dx - \int_{\Omega} S_{\alpha\beta}(\zeta^0) \frac{\partial \zeta^0}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} dx ,$$

et  $T^\epsilon \in V'_\epsilon$  par : pour tout  $\xi$  dans  $V_\epsilon$ ,

$$\langle T^\epsilon, \xi \rangle = \frac{1}{\theta} \left[ \lambda^0 \int_{\Omega_\epsilon} \sigma_{\alpha\beta}^0 \frac{\partial \zeta^0}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} dx - \int_{\Omega_\epsilon} S_{\alpha\beta}(\zeta^0) \frac{\partial \zeta^0}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} dx \right] .$$

Il est clair que  ${}^t\mathbb{R}^\epsilon T^\epsilon$  tend vers  $T^0$  dans  $V'$  fort.

Soit  $\eta^\epsilon$  la solution de

$$A^\epsilon \eta^\epsilon = T^\epsilon .$$

Quand  $\epsilon$  tend vers 0,  $P^\epsilon \eta^\epsilon$  tend vers  $\eta^0$  solution de  $A^0 \eta^0 = T^0$ , c'est-à-dire  $\eta^0 = \zeta^0$ .

Il existe  $t_\epsilon > 0$  tel que  $t_\epsilon \eta^\epsilon \in \Sigma_{\mathbb{R}}^\epsilon$ :

$$(47) \quad \frac{t_\epsilon^2}{2} \langle A^\epsilon \eta^\epsilon, \eta^\epsilon \rangle + \frac{t_\epsilon^4}{4} \langle C^\epsilon(\eta^\epsilon), \eta^\epsilon \rangle = R .$$

La relation (45) sera démontrée si  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} t_\epsilon = 1$ , car

$$\begin{aligned} \langle B^0 \zeta_1^0, \zeta_1^0 \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle B^\epsilon \zeta_1^\epsilon, \zeta_1^\epsilon \rangle \\ &\geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} t_\epsilon^2 \langle B^\epsilon \eta^\epsilon, \eta^\epsilon \rangle \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle B^\epsilon \eta^\epsilon, \eta^\epsilon \rangle \\ &= \langle B^0 \zeta^0, \zeta^0 \rangle . \end{aligned}$$

Pour montrer que  $t_\epsilon$  tend vers 1, remarquons d'abord que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle A^\epsilon \eta^\epsilon, \eta^\epsilon \rangle = \langle A^0 \zeta^0, \zeta^0 \rangle ,$$

et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle C^\epsilon(\eta^\epsilon), \eta^\epsilon \rangle = \langle C^0(\zeta^0), \zeta^0 \rangle .$$

Alors  $t_\epsilon$  la solution positive de (47) tend vers la solution positive de

$$\frac{t_0^2}{2} \langle A^0 \zeta^0, \zeta^0 \rangle + \frac{t_0^4}{2} \langle C^0(\zeta^0), \zeta^0 \rangle = R$$

qui est  $t_0 = 1$ .

Le théorème est ainsi complètement démontré.

## 2 - Méthode de Kikuchi

La méthode précédente ne permet d'obtenir que la branche bifurquée à partir de la première valeur propre (positive ou négative), la solution obtenue réalisant le minimum de l'énergie et étant stable au sens de Lyapunov. Par ailleurs nous savons qu'il y a bifurcation à partir de chaque valeur propre  $\lambda$  de  $(A-\lambda B)$  car les opérateurs considérés sont tous des opérateurs gradient. Cette dernière partie a pour objet de montrer que la branche bifurquée au voisinage d'une valeur propre *simple* du problème homogénéisé est limite de la branche bifurquée (à la valeur propre simple correspondante) de la plaque perforée. La démonstration est fondée sur l'analyse de la bifurcation faite par KIKUCHI [9] et KESAVAN [8] pour l'approximation numérique de ce problème : elle repose sur la paramétrisation de la branche bifurquée par sa composante sur le vecteur propre au point de bifurcation.

On conserve les hypothèses et les notations de la partie II pour les opérateurs  $A^\epsilon, B^\epsilon, C^\epsilon, A^0, B^0, C^0$ . Soit  $\lambda_0$  une valeur propre simple du problème  $(A^0 - \lambda B^0)$ ,  $\varphi^0$  un vecteur propre associé :

$$\left\{ \begin{array}{l} A^0 \varphi^0 - \lambda_0 B^0 \varphi^0 = 0, \\ \langle B^0 \varphi^0, \varphi^0 \rangle = (\text{signe de } \lambda_0). \end{array} \right.$$

Introduisons les espaces :

$$M_0 = \{v, v \in V, \langle B^0 v, \varphi^0 \rangle = 0\},$$

$$M'_0 = \{f, f \in V', \langle f, \varphi^0 \rangle = 0\}.$$

D'après l'alternative de Fredholm  $(A^0 - \lambda_0 B^0)$  réalise un isomorphisme entre  $M_0$  et  $M'_0$ .

D'après le théorème 3, il existe  $\eta, \eta > 0$ , et  $\epsilon_0$  tel que pour tout  $\epsilon, 0 < \epsilon < \epsilon_0$ , le problème  $(A^\epsilon - \lambda B^\epsilon)$  admette une seule valeur propre simple  $\lambda_\epsilon, \lambda_\epsilon \in ]\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta[$ , associée à un vecteur propre  $\varphi^\epsilon$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} A^\epsilon \varphi^\epsilon - \lambda_\epsilon B^\epsilon \varphi^\epsilon = 0, \\ \langle B^\epsilon \varphi^\epsilon, \varphi^\epsilon \rangle = \text{signe de } \lambda_\epsilon = \text{signe de } \lambda_0, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_\epsilon = \lambda_0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P^\epsilon \varphi^\epsilon = \varphi^0, \text{ dans } V \text{ faible.} \end{array} \right.$$

Introduisons aussi  $M_\epsilon$  et  $M'_\epsilon$  :

$$M_\epsilon = \{v, v \in V_\epsilon, \langle B^\epsilon v, \varphi^\epsilon \rangle = 0\},$$

$$M'_\epsilon = \{f, f \in V'_\epsilon, \langle f, \varphi^\epsilon \rangle = 0\}.$$

On a la décomposition de  $V_\epsilon$  en somme directe orthogonale (pour le produit scalaire  $((\zeta, \eta)) = \langle A^\epsilon \zeta, \eta \rangle$ ).

$$V_\epsilon = R \varphi^\epsilon \oplus M_\epsilon,$$

$$\zeta = t \varphi^\epsilon + w.$$



Nous poserons pour  $T > 0$  :

$$U_\epsilon(T) = \{(\lambda, \zeta), (\lambda, \zeta) \in \mathbb{R} \times V_\epsilon, \zeta = t \varphi_\epsilon + w, \\ |\lambda - \lambda_\epsilon| < T, |t| < T, |w| < T\}.$$

$U_\epsilon(T)$  est évidemment un voisinage de  $(\lambda_\epsilon, 0)$  dans  $\mathbb{R} \times V_\epsilon$ . De même pour  $U_0(T)$  dans  $\mathbb{R} \times V_0$ .

Nous sommes alors en mesure d'énoncer le :

**THEOREME.** *On se place dans le cadre précisé ci-dessus. Il existe  $T > 0$  et  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\epsilon, 0 < \epsilon < \epsilon_0$  la branche bifurquée du problème  $(P_\epsilon)$  en  $(\lambda_\epsilon, 0)$  admet dans le voisinage  $U_\epsilon(T)$  de ce point, la paramétrisation continue suivante :*

$$t \rightarrow (\lambda^\epsilon(t), \zeta^\epsilon(t) = t \varphi_\epsilon + w^\epsilon(t)),$$

(la fonction  $t \rightarrow w^\epsilon(t)$  étant à valeurs dans  $M$ ),  $(\lambda^\epsilon, \zeta^\epsilon)$  vérifiant donc

$$\left\{ \begin{array}{l} A^\epsilon \zeta^\epsilon(t) - \lambda^\epsilon(t) B^\epsilon \zeta^\epsilon(t) + C^\epsilon(\zeta^\epsilon(t)) = 0, \\ \lambda^\epsilon(0) = \lambda_\epsilon, \zeta^\epsilon(0) = 0. \end{array} \right.$$

Lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, pour tout  $t$  dans  $]-T, +T[$ ,  $(\lambda^\epsilon(t), P^\epsilon w^\epsilon(t))$  tend dans  $\mathbb{R} \times V$  faible, vers  $(\lambda(t), w(t))$ . La fonction  $t \rightarrow (\lambda(t), t \varphi^0 + w(t) = \zeta(t))$  est la paramétrisation continue de la branche bifurquée du problème  $(P_0)$  en  $(\lambda_0, 0)$  dans le voisinage  $U_0(T)$  de ce point :

$$A^0 \zeta(t) - \lambda(t) B^0 \zeta(t) + C^0(\zeta(t)) = 0.$$

De plus les représentations précédentes donnent toutes les solutions non nulles de  $P_\epsilon$  (resp.  $P_0$ ) dans  $U_\epsilon(T)$  (resp.  $U_0(T)$ ).

**Remarque.** On peut dire brièvement que la branche bifurquée du problème  $P_\epsilon$  converge vers la branche bifurquée du problème homogénéisé la convergence ayant lieu dans  $C^{0,\alpha}(\Omega)$  pour tout  $\alpha < 1$ .

La preuve consiste à appliquer la méthode de KIKUCHI au problème  $P_\epsilon$  et à obtenir des estimations indépendantes de  $\epsilon$ .

Dans la suite une assertion vraie pour  $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$  signifiera qu'elle est vraie pour les problèmes  $P_\epsilon$ ,  $\epsilon \in ]0, \epsilon_0]$  ainsi que pour le problème homogénéisé  $P_0$ .

Pour simplifier nous supposons  $\lambda_0 > 0$ , donc  $\langle B^\epsilon \varphi^\epsilon, \varphi^\epsilon \rangle = 1$ .

LEMME. Pour tout  $q$  fini, il existe une constante  $C_q$  telle que pour tout  $\epsilon$  de  $[0, \epsilon_0]$ , et tout  $\zeta$  de  $H^2(\Omega_\epsilon)$  on ait :

$$\|\zeta\|_{W^{1,q}(\Omega_\epsilon)} \leq C_q \|\zeta\|_{H^2(\Omega_\epsilon)}.$$

Preuve. D'après les propriétés du prolongement  $P^\epsilon$  on a :

$$\begin{aligned} \|\zeta\|_{W^{1,q}(\Omega_\epsilon)} &\leq \|P^\epsilon \zeta\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C'_q(\Omega) \|P^\epsilon \zeta\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C_q \|\zeta\|_{H^2(\Omega_\epsilon)}. \end{aligned}$$

Le comportement du terme non linéaire  $C^\epsilon$  est précisé par le :

LEMME 2. Il existe  $M$  indépendant de  $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$  tel que

$$\|C^\epsilon(\zeta) - C^\epsilon(\hat{\zeta})\|_{V'_\epsilon} \leq M \left( \|\zeta\|_{V_\epsilon} + \|\hat{\zeta}\|_{V_\epsilon} \right)^2 \|\zeta - \hat{\zeta}\|_{V_\epsilon}, \forall \zeta, \hat{\zeta} \in V_\epsilon.$$

Preuve. Il suffit de le démontrer pour  $\epsilon > 0$ .

Rappelons que

$$\langle C^\epsilon(\zeta), \xi \rangle = \int_{\Omega_\epsilon} S^\epsilon_{\alpha\beta}(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} dx, \quad \forall \zeta, \xi \in V_\epsilon, \quad (\text{où } S^\epsilon_{\alpha\beta}(\zeta) = \hat{S}^\epsilon_{\alpha\beta}(f(\zeta)))$$

(voir (13) page 6 partie I) donc

$$\|C^\epsilon(\zeta) - C^\epsilon(\hat{\zeta})\|_{V'_\epsilon} = \sup_{\substack{\xi \in V_\epsilon \\ \|\xi\| \leq 1}} \int_{\Omega_\epsilon} \left( S^\epsilon_{\alpha\beta}(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} - S^\epsilon_{\alpha\beta}(\hat{\zeta}) \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x_\beta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} dx,$$

donc

$$\|C^\epsilon(\zeta) - C^\epsilon(\hat{\zeta})\|_{V'_\epsilon} \leq \sup_{\substack{\xi \in V_\epsilon \\ \|\xi\| \leq 1}} \left| \left( S^\epsilon_{\alpha\beta}(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} - S^\epsilon_{\alpha\beta}(\hat{\zeta}) \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x_\beta} \right) \right|_{L^q} \left| \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} \right|_{L^{q'}}$$

où  $q$  est fixé,  $q \in ]1, 2[$   $q' = \frac{q}{q-1}$ .

Grâce à l'injection de Sobolev  $H^2(\Omega_\epsilon) \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega_\epsilon)$ , et au lemme 1 on obtient :

$$\|C^\epsilon(\zeta) - C^\epsilon(\hat{\zeta})\|_{V,\epsilon} \leq M \left\| S_{\alpha\beta}^\epsilon(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} - S_{\alpha\beta}^\epsilon(\hat{\zeta}) \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x_\beta} \right\|_{L^q(\Omega_\epsilon)}.$$

Il s'agit d'évaluer le deuxième terme de cette inégalité en utilisant la définition de  $S_{\alpha\beta}^\epsilon$ . Tout d'abord,

$$\left| S_{\alpha\beta}^\epsilon(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} - S_{\alpha\beta}^\epsilon(\hat{\zeta}) \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x_\beta} \right|_{L^q} \leq \left| (S_{\alpha\beta}^\epsilon(\zeta) - S_{\alpha\beta}^\epsilon(\hat{\zeta})) \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} \right|_{L^q} + \left| S_{\alpha\beta}^\epsilon(\hat{\zeta}) \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x_\beta} \right) \right|_{L^q}$$

Grâce au lemme 1

$$\left| S_{\alpha\beta}^\epsilon(\hat{\zeta}) \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x_\beta} \right) \right|_{L^q} \leq C |S_{\alpha\beta}^\epsilon(\hat{\zeta})|_{L^2} \cdot \|\zeta - \hat{\zeta}\|_V,$$

et grâce à,

$$|S_{\alpha\beta}^\epsilon(\hat{\zeta})|_{L^2} \leq C \|\hat{\zeta}\|_V,$$

et à,

$$\begin{aligned} |S_{\alpha\beta}^\epsilon(\zeta) - S_{\alpha\beta}^\epsilon(\hat{\zeta})|_{L^2} &\leq C \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x_\beta} \right|_{L^2} \\ &\leq C (\|\zeta\|_V + \|\hat{\zeta}\|_V) (\|\zeta - \hat{\zeta}\|_V). \end{aligned}$$

on obtient immédiatement la majoration du lemme 2.

Pour exhiber les solutions non triviales de  $(P_\epsilon)$  au voisinage de  $(\lambda_\epsilon, 0)$  nous pouvons poser

$$\zeta^\epsilon = t\varphi^\epsilon + w^\epsilon, \quad w^\epsilon \in M_\epsilon, \quad \text{car } V_\epsilon = R\varphi^\epsilon \oplus M_\epsilon,$$

et nous allons montrer que ces solutions sont paramétrées par  $t$ .

Le problème  $P_\epsilon$  peut encore s'écrire :

$$A^\epsilon w^\epsilon - \lambda_\epsilon B^\epsilon w^\epsilon = C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w^\epsilon) + (\lambda^\epsilon - \lambda_\epsilon) B^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w^\epsilon),$$

d'après l'alternative de Fredholm ce problème admet une solution si et seulement si

$$(\lambda^\epsilon - \lambda_\epsilon) \langle B^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w^\epsilon), \varphi^\epsilon \rangle + \langle C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w^\epsilon), \varphi^\epsilon \rangle = 0,$$

soit compte tenu de  $\langle B^\epsilon \varphi^\epsilon, \varphi^\epsilon \rangle = \text{signe } \lambda_\epsilon = +1$ ,

$$\lambda^\epsilon - \lambda_\epsilon = - \frac{\langle C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w^\epsilon), \varphi^\epsilon \rangle}{t}.$$

Le problème  $P_\epsilon$  est donc équivalent à :

$$(48) \quad \begin{cases} (i) & A^\epsilon w^\epsilon - \lambda_\epsilon B^\epsilon w^\epsilon = C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w^\epsilon) - \frac{1}{t} \langle C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w^\epsilon), \varphi^\epsilon \rangle B^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w^\epsilon), \\ (ii) & \lambda^\epsilon = \lambda_\epsilon - \frac{1}{t} \langle C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w^\epsilon), \varphi^\epsilon \rangle. \end{cases}$$

La première équation de (48) ne fait intervenir que  $t$  et  $w^\epsilon$  :  $t$  étant fixé nous montrons par une méthode de point fixe qu'elle admet une seule solution  $w^\epsilon$  (dans un voisinage de 0). La deuxième équation donne alors  $\lambda^\epsilon$  en fonction de  $t$ .

Posons

$$(49) \quad H_{\epsilon,t}(w) = C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w) - \frac{1}{t} \langle C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w), \varphi^\epsilon \rangle B^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w)$$

Comme  $(A^\epsilon - \lambda_\epsilon B^\epsilon) \in \text{Isom}(M_\epsilon, M'_\epsilon)$  l'équation 48 (i) s'écrit encore

$$(50) \quad w = (A^\epsilon - \lambda_\epsilon B^\epsilon)^{-1} H_{\epsilon,t}(w) = T_{\epsilon,t}(w).$$

Tout d'abord nous avons une première estimation sur les solutions.

LEMME 3. Soit  $k \geq 1$ . Il existe  $\tau(k) > 0$ , indépendant de  $\epsilon$  ( $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ ) tel que toute solution de  $P_\epsilon : (\lambda^\epsilon, \zeta^\epsilon), \zeta^\epsilon = t\varphi^\epsilon + w^\epsilon$ , qui appartient au pavé

$$U(k(\tau), k) = \{ (\lambda^\epsilon, \zeta^\epsilon), |\lambda^\epsilon - \lambda_\epsilon| \leq \tau(k), |t| \leq \tau(k), \|w^\epsilon\| \leq k\tau(k) \},$$

vérifie

$$\|w^\epsilon\| \leq t.$$

Preuve. Il existe une constante  $M$  indépendante de  $\epsilon$  telle que

$$\begin{aligned} \| (A^\epsilon - \lambda_\epsilon B^\epsilon)^{-1} \|_{L(M'_\epsilon, M_\epsilon)} &\leq M, \\ \| B^\epsilon \|_{L(V_\epsilon, V'_\epsilon)} &\leq M, \\ \| C^\epsilon(\zeta^\epsilon) \|_{V'_\epsilon} &\leq M \| \zeta^\epsilon \|_{V_\epsilon}^3 \end{aligned}$$

On peut donc écrire à partir de (49) (50) et du lemme 2 :

$$\|w^\epsilon\|_{V_\epsilon} \leq M (\|t\varphi^\epsilon + w^\epsilon\|^2 + |\lambda^\epsilon - \lambda_\epsilon|_{V_\epsilon}) (|t| + \|w^\epsilon\|_{V_\epsilon}),$$

donc si  $|t| \leq \tau$ ,  $\|w^\epsilon\|_{V_\epsilon} < k\tau$ ,  $|\lambda^\epsilon - \lambda_\epsilon| \leq \tau$  on a :

$$\|w^\epsilon\|_{V_\epsilon} \leq \frac{M((1+k)^2\tau^2 + \tau)}{1 - M((1+k)^2\tau^2 + \tau)} |t|.$$

Il suffit donc de prendre pour  $\tau(k)$  la racine positive de

$$2M(1+k)^2\tau^2 + 2\tau - 1 = 0.$$

Pour toute la suite nous prendrons,

$$(51) \quad k = \sup_{\epsilon \in [0, \epsilon^0]} \|P^\epsilon\|,$$

ce choix sera justifié dans l'étude de la branche bifurquée homogénéisée.

*Remarque.* Avec la même démonstration on obtient

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|w^\epsilon\|_{V_\epsilon}}{t} = 0$$

la limite étant uniforme en  $\epsilon$  : les branches bifurquées sont uniformément tangentes à  $\varphi_\epsilon$  en  $t = 0$ .

La propriété de contraction de  $T_{\epsilon,t}$  défini par (50), est précisée par le

LEMME 4. *Il existe C indépendant de  $\epsilon$  ( $\epsilon < \epsilon_0$ ) tel que, pour tout t et pour tout w,  $\hat{w} \in M_\epsilon$   $\|w\|_{V_\epsilon} \leq t$ ,  $\|\hat{w}\|_{V_\epsilon} \leq t$ , on ait :*

$$(52) \quad \|T_{\epsilon,t}(w) - T_{\epsilon,t}(\hat{w})\|_{V_\epsilon} \leq C t^2 \|w - \hat{w}\|_{V_\epsilon},$$

(la constante C étant indépendante de  $\epsilon$ ).

*Preuve.*

$$\begin{aligned} H_{\epsilon,t}(w) - H_{\epsilon,t}(\hat{w}) &= (C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w) - C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + \hat{w})) - \frac{1}{t} [ \langle C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w), \varphi^\epsilon \rangle B^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w) \\ &\quad - \langle C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + \hat{w}), \varphi^\epsilon \rangle B^\epsilon(t\varphi^\epsilon + \hat{w}) ], \end{aligned}$$

d'après le lemme 2

$$(53) \quad \|C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w) - C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + \hat{w})\|_{V_\epsilon} \leq M \cdot t^2 \cdot \|w - \hat{w}\|_{V_\epsilon},$$

et

$$\begin{aligned} X_\epsilon &= \langle C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w), \varphi^\epsilon \rangle B^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w) - \langle C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + \hat{w}), \varphi^\epsilon \rangle B^\epsilon(t\varphi^\epsilon + \hat{w}) = \\ &\langle C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w), \varphi^\epsilon \rangle B^\epsilon(w - \hat{w}) + \langle C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + w) - C^\epsilon(t\varphi^\epsilon + \hat{w}), \varphi^\epsilon \rangle B^\epsilon(t\varphi^\epsilon + \hat{w}), \end{aligned}$$

donc

$$(54) \quad \|X_\epsilon\|_{V_\epsilon} \leq M t^3 \|w - \hat{w}\|_{V_\epsilon} + M' t^3 \|w - \hat{w}\|_{V_\epsilon}.$$

Il résulte de (53) et (54) que,

$$(55) \quad \|H_{\epsilon t}(w) - H_{\epsilon t}(\hat{w})\|_{V_\epsilon} \leq M t^2 \|w - \hat{w}\|_{V_\epsilon},$$

comme les opérateurs  $(A^\epsilon - \lambda_\epsilon B^\epsilon)^{-1}$  sont uniformément bornés dans les espaces  $(M'_\epsilon, M_\epsilon)$  la relation (52) découle de (55).

D'après les lemmes 3 et 4 on peut choisir  $\tau$  indépendant de  $\epsilon$  tel que si  $(\lambda^\epsilon, \zeta^\epsilon = t\varphi^\epsilon + w^\epsilon)$  appartient à  $U_\epsilon(\tau)$  et est solution de  $P_\epsilon$  alors  $\|w^\epsilon\|_{V_\epsilon} \leq t$ . Alors, si on prend  $\tau^2 \leq \frac{1}{2M}$ ,  $w_\epsilon$  appartient au domaine de contraction de  $T_{\epsilon, t}$  : il en résulte que l'équation 48 (i) admet une seule solution  $w_\epsilon(t)$ ,  $|w_\epsilon(t)| < \tau$ , pour tout  $t \in ]-\tau, +\tau[$ , et que, la contraction  $T_{\epsilon, t}$  étant uniforme par rapport à  $t$ , la fonction  $w_\epsilon(t)$  est continue. L'équation 48 (ii) donne  $\lambda^\epsilon(t)$ . Ceci démontre la première partie du théorème en prenant  $T$  vérifiant  $T \leq \tau$ .

Il reste à étudier le comportement de la branche bifurquée quand  $\epsilon$  tend vers 0.

Fixons  $t \in ]-\tau, +\tau[$ , nous avons grâce au lemme 3 les estimations :

$$(56) \quad \|w^\epsilon(t)\|_{V_\epsilon} \leq |t|, \quad \|P^\epsilon w^\epsilon(t)\|_{V_\epsilon} \leq k |t|,$$

$$\|\zeta^\epsilon(t)\|_{V_\epsilon} \leq 2 |t|,$$

$$\|P^\epsilon \zeta^\epsilon(t)\|_{V_\epsilon} \leq 2C |t|,$$

comme

$$P^\epsilon \zeta^\epsilon(t) = t P^\epsilon \varphi^\epsilon + P^\epsilon w^\epsilon(t),$$

lorsque  $\epsilon$  tend vers 0 (pour une sous-suite) on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} P^\epsilon \varphi^\epsilon \rightharpoonup \varphi^0, \\ P^\epsilon w^\epsilon(t) \rightarrow w^0(t), \\ P^\epsilon \zeta^\epsilon(t) \rightarrow t \varphi^0 + w^0(t). \end{array} \right.$$

Montrons le

LEMME. Lorsque  $\epsilon$  tend vers 0

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^t R^\epsilon(B^\epsilon(\zeta^\epsilon)) \rightarrow B^0 \zeta^0 \text{ dans } V' \text{ fort}, \\ {}^t R^\epsilon(C^\epsilon(\zeta^\epsilon)) \rightarrow C^0(\zeta^0) \text{ dans } V' \text{ fort}. \end{array} \right.$$

*Preuve.* Comme  $P^\epsilon \zeta^\epsilon$  tend faiblement vers  $\zeta^0$  dans  $V$ , la preuve de ce lemme est identique à celle des corollaires 1, 2 page 30.

Il en résulte, grâce au théorème 1 page 23, appliqué à

$$A^\epsilon \zeta^\epsilon(t) = \lambda^\epsilon(t) B^\epsilon \zeta^\epsilon(t) - C^\epsilon(\zeta^\epsilon(t)) = T^\epsilon,$$

avec  ${}^t R^\epsilon T^\epsilon$  qui converge fortement dans  $V'$  vers  $\lambda^0(t) B^0 \zeta^0(t) - C^0 \zeta^0(t)$ , que

$$A^0 \zeta^0(t) - \lambda^0(t) B^0 \zeta^0(t) + C^0 \zeta^0(t) = 0,$$

et ceci quelque soit  $t \in ]-\tau, +\tau[$ .

Montrons que  $\zeta^0(t) \neq 0$  (la solution limite n'est pas la branche  $\zeta^0(t) \equiv 0$ !), il suffit d'obtenir,

$$(57) \quad \langle B^0 \varphi^0, w^0 \rangle = 0,$$

car alors  $\zeta^0(t) = t \varphi^0 + w^0$  est la décomposition de  $\zeta^0(t)$  dans  $R \varphi^0 \oplus M_0$  et sa première composante est différente de 0.

Pour 57 on a :

$$\langle B^0 \varphi^0, w^0 \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle {}^t R^\epsilon B^\epsilon \varphi^\epsilon, P^\epsilon w^\epsilon \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle B^\epsilon \varphi^\epsilon, w^\epsilon \rangle = 0.$$

Il reste à montrer que la branche obtenue est bien la branche bifurquée du problème homogénéisé, en  $(\lambda_0, 0)$ . Tout d'abord  $\lambda^0(0) = \lambda_0$  et  $\zeta^0(0) = 0$ . D'après le lemme 3, le choix de  $k$  et l'estimation (56)  $\|w^0(t)\|_V \leq kt$ , on déduit que  $\|w^0(t)\|_V \leq t$ , donc  $w^0(t)$  appartient au domaine de contraction de  $T_{0,t}$  : c'est donc l'unique solution du problème (48) ou (i) dans  $\|w\| \leq t$  et elle coïncide avec la branche bifurquée. Ceci montre la deuxième partie du théorème.



## REFERENCES

- [1] M.S. BERGER. «*On Von-Karman's Equations and the Buckling of a Thin Elastic Plate I, I The Clamped Plate\**». C.P.A.M. Vol XX (1967) pp. 687-719.
- [2] M.S. BERGER. «*Non linearity and Functional Analysis*». Academic Press, New-York (1977).
- [3] M.S. BERGER and P.D. FIFE. «*Von Karman's. Equations and the Buckling of a thin Elastic Plate II. PLate with General Edge conditions*». C.P.A.M. Vol XXI (1968) pp. 227-241.
- [4] D. CIORANESCU - J. SAINT JEAN PAULIN. «*Homogénéisation dans des ouverts avec cavités réparties périodiquement*». Publication n° 78003 (1978) Analyse Numérique. Université Paris 6 et note CRAS. Paris, t. 284, série A pp. 857-859.
- [5] G. DUVAUT - J.L. LIONS. «*Les Inéquations en mécanique et en physique*». Dunod, Paris (1972).
- [6] G. DUVAUT. «*Comportement macroscopique d'une plaque perforée périodiquement. Singular Perturbations and Boundary Layer Theory*». Lecture Note n° 594, Lyon (1976) pp. 131-145.
- [7] G. DUVAUT. «*Homogénéisation des plaques à structure périodique en théorie non linéaire de Von Karman*». Lecture Notes in Maths. 665. Journées d'Analyse Non linéaire. Besançon (1977) pp. 56-70.
- [8] S. KESAVAN. «*Thèse d'état*». Université Paris VI (1979).
- [9] F. KIKUCHI. «*Inst. of Space and Aeronautic Sci*». University of Tokio Rep. no 542 (1976).
- [10] M.A. KRASNOSEL'SKII. «*Topological' methods in the theory of non linear equations*». Pergamon New-York (1977).
- [11] F. LENE. CRAS (Paris) t. 286 - Série A pp. 75-77.
- [12] J.L. LIONS. Cours Collège de France (1977-1978-1979).
- [13] F. MIGNOT - J.P. PUEL - P.M. SUQUET. «*Homogenization and Bifurcation of Perforated Plates*». Int. J. Engng. Sci. Vol 18 (1980) pp. 404-414.

- [14] F. MURAT. «*H-convergence*». Séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique de l'Université d'Alger (1978). Ronéoté 34 p.
- [15] M. POTIER FERRY. «*Thèse d'Etat*». Université Paris VI (1978).
- [16] J.P. PUEL. «*Homogénéisation d'un problème de bifurcation*». Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in non linear analysis. Rome (1978). Edited by E. de Giorgi, E. Magenes, U. Mosco. Pitagora. Editrice Bologna pp. 281-306.
- [17] L. TARTAR. «*Problèmes d'homogénéisation dans les équations aux dérivées partielles*». Cours Peccot (rédigé par F. MURAT) Collège de France (1977).

(Manuscrit reçu le 27 novembre 1980)