ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

AHMED ZÉRIAHI

Bases communes dans certains espaces de fonctions harmoniques et fonctions séparément harmoniques sur certains ensembles de $\mathbf{C}^n$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 4, nº 1 (1982), p. 75-102

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1982_5_4_1_75_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol IV, 1982, P 75 à 102

BASES COMMUNES DANS CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS HARMONIQUES ET FONCTIONS SEPAREMENT HARMONIQUES SUR CERTAINS ENSEMBLES DE $\mathbb{C}^n$

Ahmed Zériahi [(1)]

(1) Université Paul Sabatier, U.E.R. M.I.G., 118 route de Narbonne 31062 Toulouse-France

Résumé : Nous démontrons tout d'abord l'existence d'une base commune régulière dans les espaces de fonctions harmoniques H(E) et H(D) où E est un compact du plan complexe limité par un nombre fini de contours de Jordan mutuellement extérieurs et D un domaine borné de $\mathbb{C}$ tel que $E \subset D$ et $D \setminus E$ est régulier pour le problème de Dirichlet classique.

Ensuite nous appliquons ces bases pour démontrer que si $E_1,\ldots,E_n$ sont des compacts de $\mathbb{C}$ vérifiant une condition polynomiale harmonique (H) et si $D_1,\ldots,D_n$ sont des domaines quelconques de $\mathbb{C}$ tels que $E_j \subset D_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ alors toute fonction f (complexe) définie et séparément harmonique sur

$$X = (E_1 \times \ldots \; E_{n-1} \times D_n) \cup \ldots \cup (D_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n)$$

se prolonge en une fonction $\widetilde{f}$ n-harmonique dans l'enveloppe d'holomorphie

$$\widetilde{X} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^{n} h_{D_i}(z_i;E_i) < 1 \right\} \quad \text{de } X \text{ dans } \mathbb{C}^n \text{ ; où } h_{D_i}(z_i;E_i)$$

est la fonction sous-harmonique extrémale associée au couple (E_i,D_i).

Ce résultat généralise un théorème de Nguyen Thanh Van (Bull. Sci. Math. 2ème série 97 (1973) p. 33-49).

Summary : First we show existence of a common basis in the spaces H(E) and H(D) of harmonic functions where E is a compact subset of $\mathbb{C}$ limited by a finite number of Jordan contours mutually exterior and D is a bounded domain of $\mathbb{C}$ such that $E \subset D$ and $D \setminus E$ is regular for the classical Dirichlet problem.

Then we apply this to obtain the following continuation theorem : if $E_1,\dots,E_n$ are compact subsets of $\mathbb{C}$ satisfying some polynomial condition (H) and $D_1,\dots,D_n$ are domains of $\mathbb{C}$ such that $E_i \subset D_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, any function f defined and separately harmonic on

$$X = (E_1 \times \dots \times E_{n-1} \times D_n) \cup \dots \cup (D_1 \times E_2 \times \dots \times E_n)$$

is continuable on a function $\tilde{f}$ n-harmonic in the enveloppe of holomorphy

$$\tilde{X} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^{n} h_{D_i}(z_i,E_i) < 1 \right\} \text{ of } X \text{ in } \mathbb{C}^n \text{ ; where } h_{D_i}(z_i;E_i)$$

is the sub-harmonic extremal function associated with (E_i,D_i).

This result is a generalisation of a theorem due to Nguyen Thanh Van (Bull. Sci. Math. 2ème série, 97 (1973) p. 33-49).

INTRODUCTION

Etant donnés des compacts $E_1,\dots,E_n$ et des domaines $D_1,\dots,D_n$ du plan complexe $\mathbb{C}$ tels que $E_j \subset D_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, Siciak [11] a démontré par une méthode d'interpolation, le résultat suivant :

THEOREME (Siciak [11]). Si chaque E_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ est non effilé en chaque point de sa frontière extérieure, alors toute fonction f définie sur l'ensemble

$$\text{(I)} \qquad X = (E_1 \times \dots \times E_{n-1} \times D_n) \cup \dots \cup (D_1 \times E_2 \times \dots \times E_n)$$

à valeurs complexes, qui est séparément holomorphe sur X (i.e. pour tout point $(a_1,\dots,a_{k-1},a_{k+1},\dots,a_n)$ appartenant à $E_1 \times \dots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \dots \times E_n$ (k fixé, $1 \leqslant k \leqslant n$), la fonction $w \to f(a_1,\dots,a_{k-1},w,a_{k+1},\dots,a_n)$ est holomorphe dans D_k) se prolonge en une fonction holomorphe dans l'enveloppe d'holomorphie

$$\tilde{X} = \left\{ z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^{n} h_{D_i}(z_i;E_i) < 1 \right\}$$

de l'ensemble X ; $h_{D_i}(z_i;E_i)$ étant la fonction sous-harmonique extrémale associée au couple (E_i,D_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Nguyen T.V. a fait remarquer dans [7] que la condition de Siciak sur les compacts E_j ne suffit pas si on s'intéresse au problème du prolongement des fonctions séparément harmoniques sur un ensemble de la forme (I). Son exemple montre que dans ce cas, les compacts E_j doivent être nécéssairement des ensembles d'unicité pour les fonctions harmoniques. De plus, il a démontré par la méthode des bases communes que si chaque E_j est limité par un nombre fini de contours de Jordan mutuellement extérieurs le théorème de Siciak s'étend à la classe des fonctions séparément partie réelle sur X de fonctions holomorphes (voir [7], théorème 5).

Nous nous proposons dans ce travail d'étendre le théorème de Siciak à la classe des fonctions séparément harmoniques sur X lorsque les compacts E_j vérifient une «condition polynomiale harmonique» (H) analogue à la condition polynomiale de Leja (voir [11]). Notre résultat (théorème 5.1) généralise celui de Nguyen Thanh Van puisque les compacts qu'il a considéré vérifient la condition (H).

De plus nous donnons d'autres exemples de compacts vérifiant la condition (H). En particulier, on donne des exemples de compacts «assez petits» du plan complexe vérifiant la condition (H).

Notre principal outil est la technique hilbertienne et la méthode des bases communes utilisées par Zaharjuta pour étendre au cas de plusieurs variables le théorème de Siciak (voir [15]).

Notons que l'application des bases communes à des problèmes de prolongement avait déjà été faite auparavant par Nguyen Thanh Van (voir [7]).

I - PRELIMINAIRES ET NOTATIONS

Pour un ouvert D de $\mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 1$), on notera O(D) l'espace de Fréchet des fonctions holomorphes dans D, RO(D) l'espace réel des fonctions qui sont partie réelle dans D de fonctions holomorphes dans D, cet espace sera muni de la topologie de la convergence compacte sur D.

Si D est un domaine de $\mathbb{C}$, on notera H(D) l'espace réel des fonctions harmoniques réelles dans D. Cet espace sera également muni de la topologie de la convergence compacte dans D. Tous ces espaces sont nucléaires.

Si E est un compact de $\mathbb{C}^n$, on note O(E) (resp. RO(E)) l'espace des germes de fonctions holomorphes (resp. partie réelle de fonctions holomorphes) sur E, muni de sa topologie limite inductive. Enfin si E est un compact de $\mathbb{C}$, on note H(E) l'espace réel des germes de fonctions harmoniques sur E avec sa topologie limite inductive.

Si A est une partie de $\mathbb{C}$, on notera $\widetilde{A}$ la partie de $\mathbb{C}^2$ définie par

$$\widetilde{A} = \left\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 + iz_2 \in A,\ \bar{z}_1 + i\bar{z}_2 \in A\right\} \tag{1.1}$$

Si K est un compact de $\mathbb{C}^n$ et D un ouvert de $\mathbb{C}^n$ tel que $K \subset D$, on pose

$$h_D(z;K) = \limsup_{z' \to z} \sup \{ u(z') : u \in PSH(K;D) \}$$

où P(K;D) désigne l'ensemble des fonctions u plurisousharmoniques dans D telles que $u \leqslant 1$ sur D et $u \leqslant 0$ sur K. La fonction $h_D^*(.;K)$ sera dite fonctions plurisousharmonique extrémale associée à (K,D).

Pour les propriétés de cette fonction voir [11] et [15].

II - BASES COMMUNES ET ECHELLES HILBERTIENNES DANS CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS HARMONIQUES

Nous rappelons essentiellement dans ce paragraphe des résultats démontrés dans un cadre plus général dans [16] auquel nous renvoyons pour les démonstrations.

2.1. Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ et $\Omega = \widetilde{D}$ le domaine de $\mathbb{C}^2$ défini comme dans la relation (1.1). D'après le théorème 2 de [3] et le théorème du prolongement analytique, il existe un opérateur linéaire de prolongement

$$T : RO(D) \to O(\Omega) \tag{2.1}$$

Il est facile de voir grâce au théorème du graphe fermé que T est continu ; si E est un compact de D, $K = \widetilde{E}$ est un compact de $\Omega = \widetilde{D}$, et l'opérateur T s'étend en un opérateur linéaire et continu

$$T : RO(E) \to O(K) \tag{2.2}$$

comme cela résulte de la continuité d'un opérateur dans une limite inductive. On peut montrer (voir [16]) que si $h_\Omega(.,K)$ et $h_D(.,E)$ sont les fonctions extrémales de (K,Ω) et (E,D) respectivement on a

$$h_\Omega(z;K) = \max \{ h_D(z_1+iz_2;E) , h_D(\bar{z}_1+i\bar{z}_2;E) \}$$

pour $(z_1,z_2) = z \in \Omega$. Par conséquent $\Omega_\alpha = \widetilde{D_\alpha}$ et donc l'opérateur (2.2) induit un opérateur linéaire continu continu noté encore T

$$\begin{aligned} T &: RO(D_\alpha) \to O(\Omega_\alpha) \\ T &: RO(E_\alpha) \to O(K_\alpha) \end{aligned} \qquad \forall\, \alpha \in]0,1[\tag{2.3}$$

où $E_\alpha = \{z \in D : h_D(z;E) \leqslant \alpha\}$ et $K_\alpha = \{w \in \Omega : h_\Omega(w,K) \leqslant \alpha\}$.

2.2. On suppose maintenant que D est un domaine borné et régulier de $\mathbb{C}$ et E un compact de D avec D \ E connexe, formant un ensemble d'unicité pour la classe RO(E) (i.e. $f \in RO(E)$ et $f_{|E} = 0 \Rightarrow f = 0$) et non effilé en chacun de ses points.

Si on désigne par ROC(E) (resp. OC(K)) l'espace de Banach complété dans C(E) (resp. C(K)) espace des fonctions continues, de l'espace vectoriel des restrictions à E (resp. K) des germes de fonctions appartenant à RO(E) (resp. O(K)), on a les inclusions continues

$$RO(\bar{D}) \hookrightarrow RO(D) \hookrightarrow RO(E) \hookrightarrow ROC(E) \tag{2.4}$$

$$O(\bar{\Omega}) \hookrightarrow O(\Omega) \hookrightarrow O(K) \hookrightarrow OC(K) \tag{2.5}$$

D'après un lemme d'espaces hilbertiens démontré dans [16], il existe alors deux paires $\{H_1,H_0\}$ et $\{O_1,O_0\}$ d'espaces hilbertiens telles que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccccc} RO(\bar{D}) & \hookrightarrow & H_1 & \hookrightarrow & RO(D) & \hookrightarrow & H_0 & \hookrightarrow & ROC(E) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ O(\bar{\Omega}) & \hookrightarrow & O_1 & \hookrightarrow & O(\Omega) & \hookrightarrow & O_0 & \hookrightarrow & OC(K) \end{array} \tag{2.6}$$

et l'opérateur de prolongement induit une isométrie de H_i sur O_i $i = 0,1$, ce qui permet d'établir le résultat important suivant :

THEOREME 2.1. *Pour toutes paires* $\{H_0,H_1\}$ *et* $\{O_0,O_1\}$ *d'espaces hilbertiens vérifiant les relations (2.6) on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccccc} RO(E_\alpha) & \rightarrow & H^\alpha & \rightarrow & RO(D_\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ O(K_\alpha) & \rightarrow & O^\alpha & \rightarrow & O(\Omega_\alpha) \end{array}$$

où l'opérateur de prolongement induit une isométrie de H^α *dans* O^α (H^α) *et* (O^α) *étant les échelles hilbertiennes engendrées par* (H_0,H_1) *et* (O_0,O_1) *respectivement.*

2.3. Le théorème 2.1 peut être alors utilisé pour établir l'existence de bases communes dans les espaces RO(D) et RO(E), pour un domaine D borné et régulier pour le problème de Dirichlet et

E un compact d'unicité pour la classe RO(E) et non effilé en chacun de ses points tel que D \ E soit connexe.

Nous nous contenterons ici de l'énoncer dans le cas particulier où E est un compact limité par un nombre fini de contours de Jordan mutuellement extérieurs. On note $D_o = \mathrm{Int}(E)$. Avec ces notations on peut tout d'abord préciser le théorème 2.1 dans ce cas particulier.

THEOREME 2.2. *Pour deux espaces de Hilbert* H_1 *et* H_o *vérifiant les inclusions continues*

$$\mathrm{R\bar{O}(D)} \hookrightarrow H_1 \hookrightarrow \mathrm{RO(D)} \hookrightarrow \mathrm{RO(E)} \subset H_o \hookrightarrow \mathrm{RO(E)} \tag{2.8}$$

on a les inclusions continues

$$\mathrm{RO}(\bar{D}_\alpha) \hookrightarrow H^\alpha \hookrightarrow \mathrm{RO}(D_\alpha) \qquad \forall\, \alpha \in]0,1[\tag{2.9}$$

(H^α) *étant l'échelle hilbertienne engendrée par* H_1 *et* H_o.

De là on peut facilement déduire le résultat suivant :

PROPOSITION 2.1. *Pour toute paire* $\{H_1, H_o\}$ *d'espaces hilbertiens vérifiant les inclusions continues (2.8), il existe une base commune* $\{\varphi_k\}$ *des espaces* RO(D) *et* RO(E) *qui est une base commune orthogonale des espaces* H_1 *et* H_o *vérifiant les estimations*

$$c'(\alpha,\epsilon)\, \mu_k^{\alpha-\epsilon} \leqslant |\varphi_k|_{D_\alpha} \leqslant c(\alpha,\epsilon) \leqslant \mu_k^{\alpha+\epsilon}, \quad \forall\, k \geqslant 1 \tag{2.10}$$

où

$$\mu_k = \|\varphi_k\|_{H_1} \uparrow \infty \quad et \quad \log \mu_k \approx \frac{k}{2} \qquad (k \to \infty).$$

$c'(\alpha,\epsilon)$, $c(\alpha,\epsilon)$ *sont des constantes indépendantes de* k.

Remarque 2.1. Les inclusions (2.9) du théorème 2.2 restent valables si on suppose seulement que les deux espaces H_1 et H_o vérifient au lieu de (2.8) les inclusions continues suivantes :

$$\mathrm{RO}(\bar{D}) \hookrightarrow H_1 \hookrightarrow \mathrm{RO(D)} \hookrightarrow \mathrm{RO(E)} \hookrightarrow H_o \hookrightarrow \mathrm{RO}(D_o).$$

III - BASES COMMUNES REGULIERES DANS CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS HARMONIQUES

Dans ce paragraphe, nous donnons d'une part un résultat qui montre la «régularité» des bases fournies par la proposition 2.1 et d'autre part nous démontrons un théorème d'existence et de régularité des bases communes dans les espaces H(D) et H(E).

3.1. Dans les hypothèses de la section 2.3., on a :

THEOREME 3.1. *Toute base commune* $\{\varphi_k\}$ *des espaces* RO(D) *et* RO(E) *fournie par la propositions 2.1 est régulière i.e. vérifie la relation :*

$$\lim_{k\to\infty} \left(|\varphi_k|_{D_\alpha} \right)^{1/k} = R^{\alpha/2} \qquad \forall\, \alpha \in]0,1[\tag{3.1}$$

où $R = R(E,D) > 1$ *est une constante ne dépendant que de* E *et* D.

Démonstration. Soit $\{\varphi_k\}$ une base commune des espaces RO(D) et RO(E) donnée par la proposition 2.1. Pour montrer la relation (3.1) il suffit de prouver la relation asymptotique $\log \mu_k \sim \frac{k}{2} \log R$ i.e. $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{2 \log \mu_k}{k \log R}\right) = 1$. Pour cela, on procède comme dans [7], en remarquant

tout d'abord que toute base régulière $\{e_k\}$ des espaces O(D) et O(E) dont l'existence a été établie par Nguyen Thanh Van [6], permet de construire une base $\{\psi_k\}$ des espaces RO(D) et RO(E) vérifiant $\lim_{k\to\infty} \left(|\psi_k|_{D_\alpha} \right)^{1/k} = R^{\alpha/2}$ en posant $\psi_k = \mathrm{Re}(e_p)$ si $k = 2p$ et $\psi_k = \mathrm{Im}(e_p)$ si $k = 2p+1$.

on achève la démonstration en procédant comme dans [16].

3.2. Nous allons maintenant étudier l'existence et la régularité des bases communes dans les espaces H(D) et H(E).

Supposons tout d'abord que D est un domaine limité par un nombre fini de contours de Jordan $\Gamma_o, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$; Γ_o contenant tous les Γ_i (i=1,...,s) dans son intérieur. Soit a_i un point intérieur à Γ_i, i=1,...,s.

Un raisonnement classique qui repose sur la représentation intégrale d'une fonction harmonique d'une variable complexe par le noyau du potentiel logarithmique dans le plan prouve que toute fonction harmonique dans D s'écrit :

$$h(z) = \mathrm{Re}\, f(z) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \log |z-a_i|, \qquad z \in D \tag{3.3}$$

où $f \in O(D)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sont des nombres réels qui ne dépendent que de h. La représentation (3.3) est unique.

Nous allons maintenant démontrer un analogue du théorème 2.1 pour les espaces H(D) et H(E). Faisons les hypothèses suivantes : D est un domaine borné régulier du plan complexe $\mathbb{C}$, E un compact limité par un nombre fini de contours de Jordan mutuellement extérieurs tel que $E \subset D$. On note $D_o = \mathrm{Int}(E)$, intérieur topologique de E et $D_1 = D$. Pour chaque $i = 0,1$ on note :

$$H_i = H^2(D_i) = \left\{ f \in H(D_i) : \| f \|^2_{H_i} = \int_{D_i} |f|^2 \, dV < +\infty \right\}$$

on a alors les inclusions continues et denses

$$H(\bar{D}_i) \hookrightarrow H^2(D_i) \hookrightarrow H(D_i) \qquad i = 0,1.$$

Avec ces notations on a le

THEOREME 3.2. *Il existe une base commune* $\{\varphi_k\}$ *des espaces* H(D) *et* H(E) *qui est une base orthogonale commune des espaces de Hilbert* $H^2(D_1)$ *et* $H^2(D_o)$ *et vérifiant la relation*

(3.4) $$\lim_{k \to +\infty} (|\varphi_k|_{D_\alpha})^{1/k} = R^{\alpha/2} \qquad \forall \alpha \in]0,1[.$$

où $R = R(E,D) > 1$ *est la constante déjà rencontrée au théorème 3.1.*

Démonstration. Comme l'inclusion continue $H_1 \hookrightarrow H_o$ est dense, nous pouvons considérer l'échelle hilbertienne $\{H^\alpha\}$ engendrée par H_1 et H_o.

Nous allons établir les inclusions continues suivantes :

(3.5) $$H(\bar{D}_\alpha) \hookrightarrow H^\alpha \hookrightarrow H(D_\alpha) \qquad \forall \alpha \in]0,1[$$

a) l'inclusion continue $H^\alpha \hookrightarrow H(D_\alpha)$ $(0 < \alpha < 1)$ s'obtient par un raisonnement déjà utilisé plusieurs fois et qui est essentiellement basé sur le théorème de deux constantes pour les fonctions harmoniques (théorème 1 [7]).

b) Montrons l'inclusion continue suivante :

(3.6) $$H(\bar{D}_\alpha) \hookrightarrow H^\alpha \qquad 0 < \alpha < 1$$

Supposons pour commencer que D_α est limité par un nombre fini de contours de Jordan $\Gamma_o, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{s(\alpha)}$ disjoints Γ_o contenant tous les Γ_i $(i \neq 0)$ dans son intérieur, les Γ_i $(i \neq 0)$ étant mutuellement extérieurs. Alors pour $\beta > \alpha$ (β assez voisin de α), D_β sera limité par un nombre fini de contours de Jordan $\Gamma'_o, \Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_{s(\beta)}$, $s(\beta) \geqslant s(\alpha)$; Γ'_o contenant tous les autres Γ'_i $(i \neq 0)$ dans son intérieur et chaque Γ'_i contenant Γ_i dans son intérieur pour $i \leqslant s(\alpha)$. D'après la relation (3.3), on a une décomposition en somme directe topologique.

$$H(D_\beta) = RO(D_\beta) \oplus \mathbb{R} . h_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R} . h_{s(\beta)} \tag{3.7}$$

pour $\beta \geqslant \alpha$ (β assez voisin de α), où $h_i(z) = \log |z-a_i|$ $(1 \leqslant i \leqslant s(\beta))$ avec a_i intérieur à Γ_i si $1 \leqslant i \leqslant s(\alpha)$, $a_i \notin D$ et a_i intérieur à Γ_i' pour $s(\alpha) < i \leqslant s(\beta)$, lorsque $s(\beta) > s(\alpha)$.

Les «trous» de D n'étant pas réduits à des singletons, chaque fonction h_i est harmonique dans un voisinage de $\overline{D}$. Si on note I_k l'espace de Hilbert des fonctions $h \in RO(D)$ avec la norme finie

$$\| h \|_{I_k} = \left(\int_{D_k} |h|^2 dV \right)^{1/2} < +\infty, \qquad k=0,1$$

on sait d'après le théorème 2.2 et la remarque 2.1 que l'on a

$$RO(\overline{D}_\gamma) \hookrightarrow I^\gamma \hookrightarrow RO(D_\gamma) \qquad \forall \gamma \in]0,1[\tag{3.8}$$

où (I^γ) est l'échelle hilbertienne engendrée par I_o et I_1.

Notons

$$J_\alpha = I^\alpha \oplus R\, h_1 \oplus \ldots \oplus R . h_{s(\alpha)} \subset H(D_\alpha)$$

J_α est un espace hilbertien réel pour la norme hilbertienne

$$\| h \|_{J_\alpha} = \left(\sum_{j=1}^{s(\alpha)} |\lambda_j|^2 \right)^{1/2} + \| g \|_{I^\alpha}, \quad \text{si } h = g + \sum_{j=1}^{s(\alpha)} \lambda_j h_j$$

avec $g \in I^\alpha$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{s(\alpha)} \in \mathbb{R}$.

Nous allons établir les inclusions continues suivantes :

$$H(D_\beta) \hookrightarrow J_\alpha \hookrightarrow H^\alpha \qquad \text{pour } \beta > \alpha \ (\beta \text{ assez voisin de } \alpha) \tag{3.9}$$

Tout d'abord nous avons déjà remarqué que les fonctions h_j sont harmoniques dans un voisinage de $\overline{D}$, donc $h_j \in H_j$ $(j = 1,\ldots,s(\beta))$ et aussi $RO(D_\beta) \hookrightarrow I^\alpha$ (voir (3.8)). D'autre part le théorème d'interpolation dans les échelles hilbertiennes montre que $I^\alpha \hookrightarrow H^\alpha$. Par suite on a l'inclusion $J_\alpha \subset H^\alpha$ par définition de J_α. La continuité de cette inclusion résulte des estimations suivantes :

$$\text{pour } h = g + \sum_{j=1}^{s(\alpha)} \lambda_j h_j \in J_\alpha \quad \text{avec} \quad g \in I^\alpha :$$

$$\|h\|_{H^\alpha} \leqslant \|\sum_{j=1}^{s(\alpha)} \lambda_j h_j\|_{H^\alpha} + \|g\|_{H^\alpha}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{s(\alpha)} |\lambda_j| . \|h_j\|_{H^\alpha} + c_1 . \|g\|_{I^\alpha}$$

$$\leqslant c_0 \left(\sum_{j=1}^{s(\alpha)} |\lambda_j|^2 \right)^{1/2} + c_1 \|g\|_{I^\alpha}$$

$$\leqslant c \|h\|_{J_\alpha}$$

où c_0, c_1, c sont des constantes absolues.

Il reste à établir l'inclusion continue $H(D_\beta) \hookrightarrow J_\alpha$, $\beta > \alpha$ (β assez voisin de α). Il est clair d'après (3.7) que $H(D_\beta) \subset J_\alpha$ car si $g \in RO(D_\beta)$

$$h = \sum_{j=1}^{s(\beta)} \lambda_j h_j + g \in H(D_\beta)$$

et comme $a_i \notin \bar{D}_\alpha$ pour $i > s(\alpha)$ pour de tels i,

$$h_i \in RO(\bar{D}_\alpha) \text{ et } h = \sum_{j=1}^{s(\alpha)} \lambda_j h_j + g_1, \text{ où } g_1 = g + \sum_{s(\alpha)+1}^{s(\beta)} \lambda_j h_j \in RO(\bar{D}_\alpha) \subset I^\alpha.$$

De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|h\|_{J_\alpha} \leqslant c\left(\sum_{j=1}^{s(\alpha)} |\lambda_j| \right) + \|g_1\|_{I^\alpha}$$

or l'inclusion $RO(D_\beta) \hookrightarrow I^\alpha$ est continue, il existe donc un compact $L \subset G_\beta$ tel que

$$\|g_1\|_{I^\alpha} \leqslant c'\left(\sum_{j=s(\alpha)+1}^{s(\beta)} |\lambda_j| + |g|_L \right)$$

i.e.

$$\|h\|_{J_\alpha} \leqslant c''\left(\sum_{j=1}^{s(\beta)} |\lambda_j| + |g|_L \right)$$

$$\text{si } h = g + \sum_{j=1}^{s(\beta)} \lambda_j h_j \in H(D_\beta)$$

En utilisant la base $\{\phi_k\}$ de $RO(D_\beta)$ et la base $\{\widetilde{\phi}_k\} = \{h_1, \ldots, h_{s(\beta)}\} \cup \{\phi_k\}$ qui résulte de la décomposition (3.7) ainsi que le système biorthogonal $\{\widetilde{\phi}'_k\} = \{h'_1,\ldots,h'_{s(\beta)}\} \cup \{\phi'_k\}$ associé à $\{\widetilde{\phi}_k\}$, l'estimation précédente s'écrit :

$$(3.10) \qquad \| h \|_{J_\alpha} \leqslant c'' \left(\sum_{j=1}^{s(\beta)} |h'_j(h)| + \sum_{k=1}^{\infty} |\phi'_k(h)| . |\phi_k|_L \right)$$

la série du second membre étant convergente parce que $\{\phi_k\}$ est une base absolue de l'espace $RO(D_\beta)$.

Pour établir la continuité de l'inclusion $H(D_\beta) \subset J_\alpha$, il suffit de voir d'après l'estimation (3.10) que les semi-normes

$$h \in H(D_\beta) \to p_L(h) = \sum_{j=1}^{s(\beta)} |h'_j(h)| + \sum_{k=1}^{\infty} |\phi'_k(h)| . |\phi_k|_L$$

pour L compact $\subset D_\beta$, sont continues sur l'espace $H(D_\beta)$ et engendrent la topologie de $H(D_\beta)$. Pour cela remarquons tout d'abord que si L est un compact de D_β on a

$$|h|_L \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\widetilde{\phi}'_k(h)| . |\widetilde{\phi}_k|_L$$

$$\leqslant \sum_{1}^{s(\beta)} |h'_j(h)| . |h_j|_L + \sum_{k=1}^{\infty} |\phi'_k(h)| . |\phi_k|_L$$

$$\leqslant c_L \left(\sum_{1}^{s(\beta)} |h'_j(h)| + \sum_{k=1}^{\infty} |\phi'_k(h)| . |\phi_k|_L \right)$$

d'où la relation

$$(3.11) \qquad |h|_L \leqslant c_L \cdot p_L(h) \quad , \quad \forall\, h \in H(D_\beta)$$

pour tout compact L $\subset D_\beta$, c_L est une constante > 0.

Maintenant il reste à voir seulement que les semi-normes p_L sont continues sur $H(D_\beta)$. L'espace $H(D_\beta)$ étant évidemment un espace tonnelé, il suffit d'après un principe classique de prouver que p_L est semi-continue inférieurement, ce qui découle de la définition de p_L comme enveloppe supérieure de fonctionnelles continues sur $H(D_\beta)$.

Notre assertion est démontrée et la relation (3.9) est établie ; par passage à la limite inductive dans (3.9), on obtient (3.6).

Dans les autres cas de configuration de D_α, le raisonnement est plus simple car alors D_α est une réunion finie de domaines simplement connexes et donc $H(\overline{D}_\alpha) = RO(\overline{D}_\alpha)$ et l'inclusion (3.8) donne $H(\overline{D}_\alpha) \hookrightarrow I^\alpha$: de plus on a $I^\alpha \hookrightarrow H^\alpha$; la relation (3.9) s'en découle dans ce cas.

Ainsi la relation (3.5) est établie.

Pour démontrer le théorème, considérons une base $\{\phi_k\}$ commune orthogonale des espaces H_1 et H_o vérifiant $\| \phi_k \|_{H_o} = 1$, $\| \phi_k \|_{H_1} = \mu_k \uparrow \infty$ (pour l'existence d'une telle base voir [5] et [14]). Alors ϕ_k est une base orthogonale dans chaque H^α et $\| \phi_k \|_{H^\alpha} = \mu_k^\alpha$, pour chaque $\alpha \in]0,1[$.

Des relations (3.5), il résulte évidemment que l'on a

$$H(D) = \lim_{\alpha \uparrow 1} \text{proj } H(D_\alpha) = \lim_{\alpha \uparrow 1} \text{proj } H^\alpha$$

$$H(E) = \lim_{\alpha \downarrow o} \text{ind } H(D_\alpha) = \lim_{\alpha \downarrow o} \text{ind } H^\alpha$$

et par un raisonnement classique, on en déduit que $\{\phi_k\}$ est une base commune des espaces H(D) et H(E). De plus la continuité dans (3.5) entraîne :

$$c(\alpha,\epsilon)\mu_k^{\alpha-\epsilon} \leqslant |\phi_k|_{D_\alpha} \leqslant c'(\alpha,\epsilon)\mu_k^{\alpha+\epsilon} \qquad \forall\, k \geqslant 1 \tag{3.12}$$

pour tous $\alpha \in]0,1[$, $\epsilon > o$; $c(\alpha,\epsilon)$ et $c'(\alpha,\epsilon)$ étant des constantes. Par conséquent pour prouver la relation (4.9), il suffit de prouver la relation asymptotique : $\log \mu_k \sim \frac{k}{2} \log R$.

On procède comme dans le théorème 4.1. Pour $\alpha_o > o$, voisin de o l'ouvert D_α est réunion d'un nombre fini de domaines simplement connexes pour $o < \alpha < \alpha_o$, donc $H(D_\alpha) = RO(D_\alpha)$ et $\{\varphi_k\}$ est une base régulière des espaces $RO(D_\alpha)$, $o < \alpha < \alpha_o$. Ce qui permet d'établir un isomorphisme simultané entre les 2 échelles de Riez $\Lambda_\alpha(a_k)$ et $\Lambda_\alpha(b_k)$ où $a_k = \log \mu_k$ et $b_k = \frac{k}{2} \log R$ pour $o < \alpha < \alpha_o$. Ceci entraîne d'après un théorème de Zaharjuta ([14]) que $\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$, d'où notre assertion ; le théorème est démontré.

IV - CONDITION POLYNOMIALE HARMONIQUE POUR LES COMPACTS DU PLAN COMPLEXE

4.1. Définissons tout d'abord une condition polynomiale harmonique analogue à la condition polynomiale (L) de Leja (voir [11]). Dans tout ce qui suit on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$ au sous espace $\{ (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) = 0 \}$ de $\mathbb{C}^2$.

DEFINITION 4.1. *On dit qu'une partie* E *de* $\mathbb{R}^2$ *vérifie la condition* (H_o) *en un point* $a \in E$ *si pour toute famille* $\mathscr{F}$ *de polynomes harmoniques dans* $\mathbb{R}^2$ *ponctuellement bornée sur* E i.e. $\forall\, z \in E$, $\sup_{h \in \mathscr{F}} |h(z)| < +\infty$, *on a :*

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \exists M = M(a,\epsilon), \qquad \exists \delta = \delta(a,\epsilon) \text{ tels que}$$

$$\forall h \in \mathscr{F}, \qquad \forall z \in B_\delta(a), \qquad |h(z)| \leqslant M \,.\, e^{\epsilon.\deg(h)}$$

où
$$B_\delta(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \delta\}.$$

On dit que E *vérifie la condition* (H) *au point* a *si pour tout* $r > 0$ *l'ensemble* $E_r = \{z \in E : |z-a| \leqslant r\}$ *vérifie la condition* (H_0) *au point* a.

Enfin on dira que E *vérifie la condition* (H) *et on écrira* $E \in (H)$ *si* E *vérifie* (H) *en chaque point* $a \in \bar{E}$.

Il est clair que toute partie $E \subset IR^2 \cong \mathbb{C}$ vérifiant la condition (H) vérifie la condition (L). La réciproque n'est pas vraie. Une condition analogue a été définie dans [*12*].

Exemples. 1) Tout compact $E \subset IR^2$ vérifiant la condition (L) dans $\mathbb{C}^2$, vérifie la condition (H) dans IR^2. Il en découle un certain nombre d'exemples importants de compacts vérifiant la condition (H) dans IR^2 (voir par exemple [8] et aussi [12]). Par exemple si I et J sont deux compacts de $IR \subset \mathbb{C}$, réguliers au sens de la théorie du potentiel dans le plan. Alors $E = I \times J$ est un compact de IR^2 qui, considéré comme compact de $\mathbb{C}^2$, est le produit de deux compacts de $\mathbb{C}$ vérifiant la condition L dans $\mathbb{C}$ ([11], théorème 1.2). D'après un résultat classique, E vérifie la condition (L) dans $\mathbb{C}^2$ ([11], théorème 1.1), donc la condition (H) dans IR^2. En particulier si I ou J est l'ensemble triadrique de Cantor, on obtient un exemple d'ensemble compact de $\mathbb{C}^2$ vérifiant la condition (H) mais de «dimension» inférieure à 2.

2) Soient $E \subset IR^2$, $a \in E$ et F un compact convexe de IR^2 d'intérieur non vide tel que $a \in F \subset E$, alors E vérifie (H) au point a, comme il découle d'un résultat de Dudley-Randol ([2]).

Nous montrerons plus loin qu'il existe des compacts de IR^2 vérifiant la condition (H) dans IR^2 mais ne vérifiant pas la condition (L) dans $\mathbb{C}^2$ (voir remarque 4.1 ci-dessous).

4.2. Nous allons maintenant donner d'autres exemples importants de compacts vérifiant la condition (H) dans IR^2. On a le critère suivant :

LEMME 4.1. *Soit* E *une partie de* $\mathbb{C}$ *d'intérieur non vide et* $a \in E$. *S'il existe un ensemble compact* Γ *de* $\mathbb{C}$ *régulier au sens de la théorie du potentiel dans le plan (par exemple un arc continu) tel que* $a \in \Gamma$ *et* $\Gamma \setminus \{a\} \subset \overset{\circ}{E} = \mathrm{Int}(E)$, *alors* E *vérifie la condition* (H) *au point* a.

Démonstration. On peut supposer E connexe. Soit $\{E_k\}$ une suite exhaustive de compacts connexes de $\overset{\circ}{E} = \mathrm{Int}(E)$ telle que chaque E_k soit limité par un nombre fini de contours de Jordan différentiables l'un contenant tous les autres dans son intérieur.

Soit $\mathscr{F}$ une famille de polynomes harmoniques dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\sup\left\{|h(z)| : h \in \mathscr{F}\right\} < +\infty \quad \text{si } z \in E$$

D'après un résultat classique de Dudley-Randol ([2]), il existe pour chaque $k \geqslant 1$ et tout $\epsilon > 0$, une constante $M_k = M_k(\epsilon)$ telle que

$$(4.1) \qquad |h|_{E_k} \leqslant M_k \, . \, e^{\epsilon/2 \, . \, \deg(h)}, \quad \forall h \in \mathscr{F}.$$

Si $\hat{E}_k$ désigne l'enveloppe polynomiale convexe de E_k, on peut montrer facilement qu'il existe une constante $c_k > 0$ telle que tout polynome $h \in \mathscr{F}$ possède un polynome harmonique conjugué h^* tel que

$$(4.2) \qquad |h^*|_{\hat{E}_k} \leqslant c_k \, . \, |h|_{\hat{E}_{k+1}} = c_k \, |h|_{E_{k+1}}$$

Alors de (4.1) et (4.2) il résulte l'estimation

$$(4.3) \qquad |h + ih^*|_{E_k} \leqslant (1 + c_k) M_{k+1} \, e^{\epsilon/2 \, . \, \deg(h)}, \quad \forall h \in \mathscr{F}$$

L'inégalité de Bernstein-Walsh appliquée aux polynomes (analytiques) $h + ih^*$ fournit à partir de (4.3) l'estimation :

$$(4.4) \qquad |h(z) + ih^*(z)| \leqslant (1+c_k) M_{k+1} \, e^{(\epsilon/2 + V^*_{\hat{E}_k})\deg(h)}$$

$\forall h \in \mathscr{F}$, $\forall z \in \mathbb{C}$; où $V^*_{E_k}$ est la fonction extrémale de Zaharjuta associée au compact E_k et qui coïncide d'ailleurs dans le cas présent avec la fonction de Green de $\mathbb{C} \setminus \hat{E}_k$ avec pôle au point infini (voir par exemple [10]).

Posons pour chaque $k \geqslant 1$, $F_k = (E_k \cap \Gamma) \cup \{a\}$. Alors (F_k) est une suite de compacts telle que $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \Gamma$ soit un compact régulier au point a. D'après un résultat de Cegrell ([1]) $\lim_{k \to \infty} V^*_{F_k}(a) = 0$. Il existe donc un entier $k_o = k_o(\epsilon)$ et par semi-continuité supérieure de $V^*_{F_{k_o}}$, un voisinage U de a tels que

$$(4.5) \qquad V^*_{F_{k_o}}(z) < \epsilon/2 \qquad \text{pour } z \in U$$

Or si on pose $E_o = E_{k_o} \cap \Gamma$, on a $F_{k_o} = E_o \cup a$ et d'après un résultat de Siciak (voir [10]) on a $V^*_{E_o} = V^*_{F_{k_o}}$ et donc d'après (4.5)

$$V^*_{E_o}(z) < \epsilon/2 \quad \text{pour} \quad z \in U \tag{4.6}$$

D'autre part puisque $E_o \subset E_{k_o}$ on a $V^*_{E_{k_o}} \leqslant V^*_{E_o}$ et compte tenu des relations (1.8) et (1.9) on obtient

$$|h(z)| \leqslant A \,.\, e^{\epsilon . \deg(h)}, \quad \forall z \in U, \quad \forall h \in \mathscr{F}$$

où $A = (1 + c_{k_o})M_{k_o+1}$ est une constante qui ne dépend que de $\mathscr{F}$ et de ϵ ce qui prouve donc que E vérifie la condition (H_o) au point a. Si $r > 0$ et $E_r = \{z \in E : |z-a| \leqslant r\} = \overline{E \cap B(a,r)}$ où $B(a,r)$ est la boule ouverte de centre a et de rayon r dans $\mathbb{C}$, alors si $\Gamma' = \Gamma \cap B(a, \frac{r}{2})$ on a $\Gamma' \setminus \{a\} \subset \overset{o}{E}_r$ et on peut appliquer ce qui précède au compact régulier Γ' et à l'ensemble E_r pour en déduire que E_r vérifie (H_o) au point a. Donc E vérifie (H) au point a, ce qui prouve le lemme.

Remarque 4.1. Il résulte du lemme 4.1 que tout domaine de Jordan $D \subset \mathbb{R}^2$ vérifie la condition (H) en chaque point de sa frontière. Ceci ne demeure plus vrai si on remplace la condition (H) dans $\mathbb{R}^2$ par la condition (L) dans $\mathbb{C}^2$. En effet Saddulaev a construit (voir [9]) un domaine de Jordan $D_o \subset \mathbb{R}^2$ qui ne vérifie pas la condition (L) dans $\mathbb{C}^2$.

Enfin donnons une définition qui sera utile dans la suite. Une partie E de $\mathbb{R}^2$ est dite localement d'unicité pour une classe $\mathcal{L}$ de fonctions harmoniques au voisinage de E si pour tout point $a \in E$ et tout voisinage ω de a, $E \cap \omega$ est un ensemble d'unicité pour la classe $\mathcal{L}$ (i.e. $h \in \mathcal{L}$ et $h|_{E \cap \omega} = 0 \Rightarrow h = 0$).

Il résulte alors de ([16] , lemme 4.1, p. 49) que tout compact $E \in (H)$ est localement d'unicité pour la classe $H(E)$.

V - PROLONGEMENT DES FONCTIONS SEPAREMENT HARMONIQUES SUR CERTAINS ENSEMBLES DE $\mathbb{C}^n$

Commençons par donner une définition : soit D un domaine de $\mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 1)$ une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ continue dans D est dite n-harmonique si pour tout $a \in D$ fixé, la fonction d'une variable complexe $z \to f(a_1,\dots,a_{k-1},z,a_{k+1},\dots,a_n)$ est harmonique dans l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} : (a_1,\dots,a_{k-1},z,a_{k+1},a_n) \in D\}$ de C pour chaque k fixé $1 \leqslant k \leqslant n$. D'après l'ellipticité de l'opérateur Δ (laplacien dans R^{2n}), toute fonction n-harmonique dans D est harmonique dans D comme fonction des 2n variables réelles en identifiant $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$.

On notera n.H(D) l'espace des fonctions réelles n-harmoniques dans D muni de la topologie de la convergence compacte sur D.

5.1. Soient $D_1,\ldots,D_n$ des domaines quelconques du plan complexe et $E_1,\ldots,E_n$ des compacts du plan tels que $E_i \subset D_i$ ($i = 1,\ldots,n$). On posera $D = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$, on supposera (ce qui n'est pas essentiel) que chaque E_i est sans trou dans D_i.

L'objet de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant :

THEOREME 5.1. *Soit* f *une fonction à valeurs complexes définie sur l'ensemble*

$$X = (E_1 \times \ldots \times E_{n-1} \times D_n) \cup \ldots \cup (D_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n)$$

et séparément harmonique sur X (i.e. *pour tout point* $(a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_n)$ *de l'ensemble* $E_1 \times \ldots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \ldots \times E_n$, *la fonction* $z \to f(a_1,\ldots,a_{k-1},z,a_{k+1},\ldots,a_n)$ *est harmonique dans* D_k *pour chaque* k *fixé,* $k \in \{1,2,\ldots,n\}$). *Alors si pour chaque* $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ $E_i \in (H)$, *la fonction* f *se prolonge (de manière unique) en une fonction* $\widetilde{f}$ n-*harmonique dans l'enveloppe d'holomorphie*

$$\widetilde{X} = (z_1,\ldots,z_n) \in D : \sum_{i=1}^{n} h_{D_i}(z_i,E_i) < 1$$

de l'ensemble X.

La démonstration de ce théorème se fait en plusieurs étapes et sera une conséquence de la proposition 5.1 ci-dessous.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 5.1. *Soient* $U = U_1 \times \ldots \times U_n$ *et* $V = V_1 \times \ldots \times V_n$ *deux domaines quelconques de* $\mathbb{C}^n$ *tels que* $U \subset\subset V_*$. *Pour tout compact* $E = E_1 \times \ldots \times E_n$, $E \subset U$, *tout domaine* $D, E \subset D = D_1 \times \ldots \times D_n \subset\subset V$ *et toute fonction* f n-*harmonique dans* V_* *vérifiant les inégalités* $|f|_U \leqslant M_o$ *et* $|f|_{V_*} \leqslant M_1$, *on a*

$$|f|_{D_1,\gamma_1 \times \ldots \times D_n,\gamma_n} \leqslant c(\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \,.\, M_o^{1-\gamma} \,.\, M_1^{\gamma}$$

où $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n \in]0,1[$; *pour chaque* $j = 1,\ldots,n$,

$$D_{j,\gamma_j} = \{ z_j \in D_j : h_{D_j}(z_j,E_j) < \gamma_j \} \; et \; V_* = \left\{ z \in V : \sum_{i=1}^{n} h_{V_i}(z_i,E_i) < 1 \right\} .$$

Démonstration. Si $n = 1$, le lemme 5.1 est une autre version du théorème de deux constantes pour les fonctions harmoniques (voir [7], théorème 1) ; pour n-quelconque, le lemme s'obtient par récurrence à partir du cas $n = 1$.

5.2. Considérons de plus des compacts $F_1,\dots,F_m$ $(m \geqslant 1)$ et des domaines $G_1,\dots,G_m$ de $\mathbb{C}$ tels que $F_\ell \subset G_\ell$ $(1 \leqslant \ell \leqslant m)$. On utilisera les notations suivantes $E = E_1 \times \dots \times E_n$, $F = F_1 \times \dots \times F_m$, $D = D_1 \times \dots \times D_n$, $G = G_1 \times \dots \times G_m$

$$D_* = \left\{ z \in D : \sum_{j=1}^{n} h_{D_j}(z_j, E_j) < 1 \right\}$$

$$G_* = \left\{ w \in G : \sum_{\ell=1}^{m} h_{G_\ell}(w_\ell, F_\ell) < 1 \right\}$$

Nous allons montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1. *Soit* f *une fonction à valeurs complexes définies sur l'ensemble*

$$X_* = (E \times G_*) \cup (D_* \times E)$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

(a) $\forall z \in E$, *la fonction* $w \to f(z,w)$ *est* m*-harmonique dans* G_*

(b) $\forall w \in F$, *la fonction* $z \to f(z,w)$ *est* n*-harmonique dans* D_*.

Alors, si chaque compact E_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ *et chaque compact* F_ℓ $(1 \leqslant \ell \leqslant m)$ *vérifie la condition* (H), *la fonction* f *se prolonge en une fonction* n+m*-harmonique dans l'enveloppe d'holomorphie*

$$\widetilde{X}_* = \left\{ (z,w) \in D_* \times G_* : \sum_{j=1}^{n} h_{D_j}(z_j, E_j) + \sum_{\ell=1}^{m} h_{G_\ell}(w_\ell, F_\ell) < 1 \right\}$$

de X.

Démonstration. Nous allons procéder comme dans [7] et [15]. Démontrons d'abord deux lemmes. On peut supposer f à valeurs réelles.

LEMME 5.2. *Soit* f *une fonction réelle définie sur* X_*. *On suppose que* f *est* **localement bornée** *sur* $D_* \times F$ *et vérifie les deux conditions (a) et (b) de la proposition 5.1. Alors, si chaque compact* E_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ *vérifie la condition* (H) *et si chaque* F_ℓ $(1 \leqslant \ell \leqslant m)$ *est un ensemble d'unicité* *pour la classe* $H(G_\ell)$ *et non polaire dans* G_*, *il existe une fonction* $\widetilde{f}$ $n+m$*-harmonique dans un voisinage* Θ *de* $E \times G_*$ *telle que* $\widetilde{f}(z,w) = f(z,w)$ *pour* $(z,w) \in \Theta \cap X$. *Si de plus chaque* F_ℓ *vérifie la condition* (H), *alors* $\Theta = \widetilde{X}_*$.

Démonstration du lemme 5.2. Remarquons tout d'abord comme dans [15] que puisque chaque F_ℓ est non polaire dans G_ℓ, il existe pour chaque $\ell = 1,\dots,m$ un voisinage $G_\ell^{(o)}$ de F_ℓ tel que $h_{G_\ell^{(o)}}(z;F) \neq 1$ dans $G_\ell^{(o)}$, ce qui d'après le principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques prouve que pour tout domaine G'_ℓ tel que $F_\ell \subset G_\ell^{(o)} \subset G'_\ell$, on a $G'_\ell = \bigcup\limits_{0<\alpha<1} G'_{\ell,\alpha}$ où on pose

$$G'_{\ell,\alpha} = \left\{ z \in G'_\ell : h_{G'_\ell}(z,F) < \alpha \right\}.$$

Pour chaque $j, 1 \leqslant j \leqslant n$ (resp. ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant m$) le domaine D_j (resp. G_ℓ) peut être approchée par une suite $\{D_j^{(s)}\}$ (resp. $\{G_\ell^{(s)}\}$) de domaine de $\mathbb{C}$ limités par un nombre fini de contours de Jordan disjoints l'un contenant tous les autres dans son intérieur telle que :

$$(5.1) \qquad E_j \subset D_j^{(1)} \subset\subset \dots \subset\subset D_j^{(s)} \subset\subset D_j^{(s+1)} \subset\subset \dots ; D_j = \bigcup_{s=1}^{\infty} D_j^{(s)} \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

$$(5.2) \qquad F \subset G^{(o)} \subset\subset G_\ell^{(1)} \subset\subset \dots \subset\subset G_\ell^{(s)} \subset\subset G_\ell^{(s+1)} \subset\subset \dots ;$$

$$G_\ell = \bigcup_{s=1}^{\infty} G_\ell^{(s)} \quad (1 \leqslant \ell \leqslant m)$$

Posons pour chaque $s \geqslant 1$, $D^{(s)} = \prod\limits_{j=1}^{n} D_j^{(s)}$ et $G^{(s)} = \prod\limits_{\ell=1}^{m} G_\ell^{(s)}$. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des nombres réels arbitraires de l'intervalle $]0,1[$ vérifiant $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ et posons

$$\Delta_i^{(s)} = \left\{ z \in D_i^{(s)} : h_{D_i^{(s)}}(z;E_i) < \alpha_i \right\} \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \text{ et } \Delta^{(s)} = \prod_{i=1}^{n} \Delta_i^{(s)} \subset D^{(s)}$$

on choisit pour chaque $i = 1,\dots,n$ un voisinage K_i de E_i dans $D_i^{(1)}$, limité par un nombre fini de contours de Jordan disjoints l'un contenant tous les autres dans son intérieur.

Fixons $s \geqslant 3$; d'après le théorème 3.2, si on pose, dV étant l'élément de surface dans $\mathbb{C}$

$$H_1^{(i)} = \left\{ h \in H(\Delta_i^{(s)}) : \int_{\Delta_i^{(s)}} |h|^2 \, dV = \| h \|^2_{H_1^{(i)}} < +\infty \right\} \quad i = 1,\dots,n$$

$$H_0^{(i)} = \left\{ h \in H(K_i) \quad : \int_{K_i} |h|^2 \, dV = \| h \|^2_{H_1^{(i)}} < +\infty \right\} \quad i = 1,\dots,n$$

on a :

$$H(\overline{\Delta}_i^{(s)}) \hookrightarrow H_1^{(i)} \hookrightarrow H(\Delta_i^{(s)}) \hookrightarrow H_o^{(i)} \hookrightarrow H(K_i) \qquad i=1,\dots,n$$

il existe une base $\{\phi_k^{(i)}\}$ de l'espace $H(\Delta_i^{(s)})$ qui est une base commune orthogonale des espaces $H_1^{(i)}$ et $H_o^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ vérifiant (voir théorème 3.2)

$$\|\phi_k^{(i)}\|_{H_o^{(i)}} = 1, \quad \|\phi_k^{(i)}\|_{H_1^{(i)}} = \mu_k^{(i)} \uparrow \infty, \quad \log \mu_k^{(i)} \sim \frac{k}{2} \log R_i \quad (k \to \infty)$$

En posant $\phi_\nu = \bigotimes_{i=1}^{n} \phi_{\nu_i}^{(i)}$, $\nu \in N^n$; $H_1 = \hat{\bigotimes}_{1 \leqslant i \leqslant n} H_1^{(i)}$ et $H_o = \hat{\bigotimes}_{1 \leqslant i \leqslant n} H_o^{(i)}$, $\{\phi_\nu\}$ est une base orthogonale commune des espaces H_1 et H_o telle que

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{array}{lll} |\phi_\nu|_{\Delta_\alpha^{(s)}} \leqslant c(\alpha,\epsilon)\, \mu_\nu^{\alpha+\epsilon} & 0 < \alpha < 1, \ \ \epsilon > 0, & \nu \in N^n \\ \|\phi_\nu\|_{H_o} = 1, \ \|\phi_\nu\|_{H_1} = \mu_{\nu_1}^{(1)} \dots \mu_{\nu_n}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \mu_\nu, & & \nu \in N^n \\ \log \mu_{\nu_i}^{(i)} \sim \frac{\nu_i}{2} \log R_i \quad (\nu_i \to \infty) & & 1 \leqslant i \leqslant n \end{array} \right.$$

de plus, on a les injections continues

$$(5.4) \qquad n.H(\overline{\Delta}^{(s)}) \hookrightarrow H_1 \hookrightarrow n.H(\Delta^{(s)}) \hookrightarrow H_o \hookrightarrow nH(K)$$

D'autre part soient $\beta_1,\dots,\beta_m \in]0,1[$ tels que $\sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1$ et posons

$$\Omega_\ell^{(s)} = \left\{ w \in G_\ell^{(s)} : h_{G_\ell^{(s)}}(w;F_\ell) < \beta_\ell \right\}, \quad (1 \leqslant \ell \leqslant m) ; \Omega^{(s)} = \prod_{\ell=1}^{m} \Omega_\ell^{(s)} \subset G^{(s)}$$

Soit

$$I_1^{(\ell)} = \left\{ h \in H(\Omega_\ell^{(s)}) : \int_{\Omega_\ell^{(s)}} |h|^2 dV = \|h\|^2_{I_1^{(\ell)}} < +\infty \right\}, \quad \ell = 1,\dots,m.$$

D'après le lemme 5.2 de [15] , il existe deux espaces de Hilbert $I_o^{(\ell)}$ et $\widetilde{I}_o^{(\ell)}$ tels que si L_ℓ est un voisinage compact de F_ℓ dans $\Omega_\ell^{(s)}$

$$(5.5) \qquad I_1^\ell \hookrightarrow H(\Omega_\ell^{(s)}) \hookrightarrow \widetilde{I}_o^{(\ell)} \hookrightarrow HC(L_\ell) \hookrightarrow I_o^{(\ell)}, \qquad \ell = 1,\dots,m$$

et une base $\{\psi_k^{(\ell)}\}$ orthogonale commune des espaces $I_1^{(\ell)}, \tilde{I}_o^{(\ell)}$ et $I_o^{(\ell)}$ telle que

$$\|\psi_k^{(\ell)}\|_{I_o^{(\ell)}} = 1 , \quad \|\psi_k\|_{\tilde{I}_o^{(\ell)}} \leqslant c_\ell \dots k^2 , \quad \|\psi_k^{(\ell)}\|_{I_1^{(\ell)}} = \theta_k^{(\ell)} \uparrow \infty$$

Notons $I_o = \overset{\wedge}{\underset{1\leqslant\ell\leqslant m}{\otimes}} I_o^{(\ell)}$, $\tilde{I}_o = \overset{\wedge}{\underset{1\leqslant\ell\leqslant m}{\otimes}} \tilde{I}_o^{(\ell)}$, $I_1 = \overset{\wedge}{\underset{1\leqslant\ell\leqslant m}{\otimes}} I_1^{(\ell)}$. Alors on a les inclusions continues

$$\text{(5.6)} \qquad I_1 \hookrightarrow m.H(\Omega^{(s)}) \hookrightarrow \tilde{I}_o \hookrightarrow mHC(L) \hookrightarrow I_o$$

et le système $\psi_\lambda = \overset{m}{\underset{\ell=1}{\otimes}} \psi_{\lambda_\ell}^{(\ell)}$, $\lambda \in N^m$ forme une base orthogonale commune des espaces de Hilbert $I_1, I_o, \tilde{I}_o$ vérifiant

$$\text{(5.7)} \qquad \|\psi_\lambda\|_{I_o} = 1 , \quad \|\psi_\lambda\|_{\tilde{I}_o} \leqslant c\,\lambda_1^2 \dots \lambda_m^2 , \quad \|\psi\|_{I_1} = \theta_{\lambda_1}^{(1)} \dots \theta_{\lambda_m}^{(m)} \overset{\text{def}}{=} \theta_\lambda$$

En appliquant le théorème de deux constantes pour les fonctions harmoniques sous la forme du lemme 5.1 (dans le cas n = 1), des relations (5.5) et (5.7) il découle compte tenu du fait que $\Omega_\alpha^{(s-1)} = \Omega_{1,\alpha}^{(s-1)} \times \dots \times \Omega_{m,\alpha}^{(s-1)}$

$$\text{(5.8)} \qquad |\psi_\lambda|_{\Omega_\alpha^{(s-1)}} \leqslant c'(\alpha)\lambda^2 . \theta_\lambda^\alpha = c'(\alpha)\lambda_1^2 \dots \lambda_m^2\, \theta_{\lambda_1}^\alpha \dots \theta_{\lambda_m}^\alpha .$$

Par hypothèse pour tout $w \in F$, $f(.,w) \in n.H(D_*)$ et $\bar{\Delta}^{(s)} \subset D_*$, donc en vertu de (5.4), $f(.,w) \in H_1$ et on a

$$f(.,w) = \sum_{\nu\in N^n} a_\nu(w)\phi_\nu \quad \text{dans } H_1 , \qquad \forall\, w \in F.$$

D'après les propriétés d'orthogonalité de la base $\{\phi_\nu\}$ et les relations (5.3) on a

$$\text{(5.9)} \qquad a_\nu(w) = \frac{1}{\mu_\nu^2} \int_{\Delta^{(s)}} f(z,w)\, \overline{\phi_\nu(z)}\, dV(z) , \qquad \forall\, w \in F , \quad \forall\, \nu \in N^n$$

Comme par hypothèse f est bornée sur $\Delta^{(s)} \times F$, il résulte des relations (5.9) et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\text{(5.10)} \qquad |a_\nu(w)| \leqslant \frac{1}{\mu_\nu^2} . A(f) . \|\varphi_\nu\|_{H_1} = \frac{A(f)}{\mu_\nu} , \quad \forall\, \nu \in N^n, \quad \forall\, w \in F$$

où $A(f) = \sqrt{|\Delta^{(s)}|} . \sup_{(z,w)\in\Delta^{(s)}\times F} |f(z,w)|$ est une constante ne dépendant que de f et $|\Delta^{(s)}|$ est le volume euclidien de $\Delta^{(s)}$.

D'autre part pour tout $z \in E$, $F(z,.) \in m.H(G_*)$ et $\overline{\Omega}^{(s)} \subset G_*$, donc en vertu de (5.6) on a

$$f(z,.) = \sum_{\lambda \in N^m} b_\lambda(z)\, \psi_\lambda \quad \text{dans } l_1 , \quad \forall\, z \in E,$$

et par le même raisonnement que précédemment on obtient

$$(5.11) \qquad |b_\lambda(z)| \leqslant \frac{A'(z)}{\theta_\lambda} , \quad \forall\, z \in E , \quad \forall\, \lambda \in N^m$$

où $A'(z)$ est une constante dépendante de z car nous n'avons pas supposé la fonction f localement bornée sur $E \times G_*$.

Nous allons voir que, en affaiblissant un peu l'ordre de l'estimation (5.11), on peut la rendre uniforme en z sur E. D'après (5.3) et (5.10), on a pour tout $\alpha \in]0,1[$ et $\epsilon > 0$

$$|a_\nu(w)\, \phi_\nu(z)| \leqslant c(\alpha,\epsilon) R_1^{\nu_1(\alpha+\epsilon-1)} \dots R_n^{\nu_n(\alpha+\epsilon-1)}$$

$$\forall\, (z,w) \in \Delta_\alpha^{(s)} \times F , \quad \forall\, \nu \in N^n$$

ce qui prouve, en choisissant $\epsilon > 0$ tel que $\alpha + \epsilon < 1$, que la famille $\{a_\nu(w)\phi_\nu(z)\}$ est uniformément sommable sur tout compact de $\Delta^{(s)} \times F = \bigcup_{0<\alpha<1} (\Delta_\alpha^{(s)} \times F)$.

Désignons par $\{\psi'_\lambda\}$ la base duale de $\{\psi_\lambda\}$ dans l'_o dual topologique fort de l_o. La continuité des injections (5.5) et la densité de l'inclusion $n.HC(L) \hookrightarrow n.HC(F)$ impliquent que les formes linéaires ψ'_λ définissent des éléments de $n.HC'(F)$ dual topologique fort de $n.HC(F)$ et on a

$$(5.12) \qquad \| \psi'_\lambda \|_{n.HC'(F)} \leqslant c \,.\, \| \psi'_\lambda \|_{l_o} = c , \quad \forall\, \lambda \in N^m$$

Comme $n.HC(F)$ est un sous-espace de l'espace de Banach $B(F)$ des fonctions (réelles) bornées sur F, il résulte du théorème de Hann-Banach que toute forme linéaire $\psi'_\lambda \in n.HC'(F)$ se prolonge en une forme linéaire $\psi^*_\lambda \in B'(F)$ avec la même norme i.e. d'après (5.12)

$$(5.13) \qquad \| \psi^*_j \|_{B'(F)} = \| \psi'_j \|_{n.HC'(F)} \leqslant C , \quad \forall\, \lambda \in N^m.$$

Comme la famille $\{a_\nu(w)\ \phi_\nu(z)\}_{\nu \in N^m}$ est absolument sommable sur $\Delta^{(s)} \times F$, pour tout $z \in \Delta^{(s)}$ la fonction $\sum_{\nu \in N^n} \phi_\nu(z)\, a_\nu \in B(F)$ on peut donc prolonger la fonction $b_\lambda(\lambda \in N^n)$ à l'ouvert $\Delta^{(s)}$ en posant

$$\cdot\,(z) = \psi_\lambda^* \left(\sum_{\nu \in N^n} \phi_\nu(z)\, a_\nu \right) = \sum_{\nu \in N^n} a_{\nu\lambda}\, \phi_\nu(z)$$

où $a_{\nu\lambda} = \psi_\lambda^*(a_\nu)$.

Nous allons montrer que la fonction ainsi prolongée est un élément de l'espace n.H($\Delta^{(s)}$). En effet les relations (5.10) et (5.13) entraînent

$$|a_{\nu\lambda}| \leqslant \|\psi_\lambda^*\|_{B'(F)} \|a_\nu\|_{B(F)} \leqslant c\,.\frac{A(f)}{\mu_\nu}, \quad \forall\, \nu \in N^n$$

Cette dernière estimation jointe à (5.3) prouve que la famille $\{a_{\nu\lambda}\ \phi_\nu(z)\}\ \nu \in N^n$ pour λ fixé $\in N^m$, est uniformément sommable sur chaque compact de $\Delta^{(s)} = \bigcup_{0<\alpha<1} \Delta_\alpha^{(s)}$ et sa somme b_λ définit une fonction n-harmonique dans $\Delta^{(s)}$ qui est le prolongement unique à $\Delta^{(s)}$ de la fonction b_λ définie initialement sur F. De plus, on a, en vertu des estimations précédentes :

$$|b_\lambda(z)| \leqslant A' < +\infty, \quad \forall\, \lambda \in N^m, \quad \forall\, z \in \Delta^{(s-1)} \tag{5.14}$$

Considérons maintenant les fonctions

$$v_\lambda(z) = \frac{\log |b_\lambda(z)|}{\log \theta_\lambda}, \quad z \in \Delta^{(s-1)},\ \lambda \in N^m.$$

D'après l'estimation (5.11), en considérant une bijection π de N sur N^n on a

$$\limsup_{k \to \infty} v_{\pi(k)}(z) \leqslant -1, \quad \forall\, z \in E = E_1 \times \ldots \times E_n \tag{5.15}$$

Comme chaque compact E_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) vérifie la condition (H), d'après le corollaire 11, p. 49 et la définition page 41 de [16] on obtient : $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, M = M(\epsilon)$ = cte et $U = U(\epsilon)$ voisinage de E tel que

$$|b_\lambda(z)| \leqslant \frac{M}{\theta_\lambda^{1-\epsilon}}, \quad \forall\, z \in U, \quad \forall\, \lambda \in N^m$$

Nous allons maintenant prouver que la famille $\{b_\lambda \otimes \psi_\lambda\}_{\lambda \in N^m}$ est uniformément sommable sur tout compact du domaine $\Delta_{1-\alpha}^{(s-2)} \times \Omega_\alpha^{(s-2)}$ pour tout $\alpha \in]0,1[$. En effet soient $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \in (\ ]0,1[\ )^n$ tels que $\gamma_1 + \ldots + \gamma_n = 1-\alpha$, où $\alpha \in]0,1[$. Alors les relations (3.13) et (3.14) jointes au lemme 5.1 entrainent

$$|b_\lambda|_{\Delta_{1,\gamma_1}^{(s-2)} \times \ldots \times \Delta_{n,\gamma_n}^{(s-2)}} \leqslant \frac{c(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)}{\theta_\lambda^{\alpha(1-\epsilon)}}, \quad \lambda \in N^m \tag{5.16}$$

où $$\Delta_{i,\gamma_i}^{(s-2)} = \left\{ z_i \in \Delta_i^{(s-2)} : h_{\Delta_i^{(s-2)}}(z_i;E_i) < \gamma_i \right\}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Les estimations (3.9) e (5.16) donnent

$$(5.17)\qquad |b_\lambda \otimes \psi_\lambda|_{(\Delta_{1,\gamma_1}^{(s-2)}\times\ldots\times\Delta_{n,\gamma_n}^{(s-2)})\times\Omega_\alpha^{(s-2)}} \leqslant c''(\alpha,\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\lambda_1^2\ldots\lambda_m^2\,\theta_\lambda^{\epsilon(\alpha-1)}$$

on sait d'après les paragraphes 2 et 3 que chaque suite $\{\theta_{\lambda_j}^{(j)}\}_{\lambda_j\in N}$ vérifie l'estimation asymptotique $\log\theta_{\lambda_j}^{(j)} \approx \lambda_j\ (\lambda_j\to\infty)$. Par suite la famille de nombres réels > 0 du second membre de (5.17) est sommable, donc la famille de fonctions $\{b_\lambda \otimes \psi_\lambda\}$ est uniformément sommable sur tout compact du domaine

$$\left(\bigcup_{\substack{\sum_{i=1}^n \gamma_i = 1-\alpha \\ 0<\gamma_i<1}} \Delta_{1,\gamma_1}^{(s-2)}\times\ldots\times\Delta_{n,\gamma_n}^{(s-2)}\right)\times\Omega_\alpha^{(s-2)} = \Delta_{1-\alpha}^{(s-2)}\times\Omega_\alpha^{(s-2)}$$

pour chaque $\alpha\in\,]0,1[$. Par conséquent sa somme $\sum_{\lambda\in N^n} b_\lambda(z)\,\psi_\lambda(w)$ est une fonction n+m-harmonique $\widetilde{f}_s$ dans $\Gamma_s = \bigcup_{0<\alpha<1}(\Delta_{1-\alpha}^{(s-2)}\times\Omega_\alpha^{(s-2)})$. De plus il est facile de voir que

$$\widetilde{f}_s(z,w) = f(z,w)\quad \text{si}\quad (z,w)\in\Gamma_s\cap(\Delta^{(s-2)}\times F)\cup(E\times\Omega^{(s-2)})$$

comme les domaines $\Delta^{(s-2)}$ et $\Omega^{(s-2)}$ sont arbitraires et leur réunion est $D_*^{(s-2)}$ et $G_*^{(s-2)}$ respectivement, la propriété d'unicité des compacts E et F prouve que la fonction f_s se prolonge en une fonction (unique) n+m-harmonique dans l'ouvert $\Theta_s = \bigcup_{0<\alpha<1}(D_{*2-\alpha}^{(s-2)}\times G_{*\alpha}^{(s-2)})$. Ce prolongement sera encore noté $\widetilde{f}_s$, avec

$$D_{*1-\alpha}^{(s-2)} = \left\{z\in D_*^{(s-2)} : \sum_{i=1}^n h_{D_i^{(s-2)}}(z_i,E_i) < 1-\alpha\right\}$$

$$G_{*\alpha}^{(s-2)} = \left\{w\in G_*^{(s-2)} : \sum_{j=1}^m h_{G_j^{(s-2)}}(w_j,F_j) < \alpha\right\};$$

de plus $\widetilde{f}_s = f$ sur $\Theta_s\cap X_*$.

La propriété d'unicité des compacts E et F prouve que :

$$\widetilde{f}_{s+1}(z,w) = f_s(z,w)\quad\text{si}\quad (z,w)\in\Theta_s\subset\Theta_{s+1},\quad \forall s\geqslant 3$$

Il y a donc une fonction n+m-harmonique $\widetilde{f}$ dans l'ouvert $\Theta = \bigcup_{s=3}^{\infty}\Theta_s$ telle que $\widetilde{f} = f$ sur $\Theta\cap X_*$. Comme chaque E_j est en particulier régulier, on a $E\times G_*\subset\Theta$ donc Θ est un voisinage de $E\times G_*$. Si de plus chaque F_ℓ est régulier, on a aussi $D_*\times F\subset\Theta$ et alors Θ est un voisinage de X_*. Par définition de Θ, on a

$$\Theta = \left\{ (z,w) \in D_* \quad G_* : \sum_{j=1}^{n} h_{D_j}(z_j;E_j) + \sum_{\ell=1}^{m} h_{G_\ell}(w_\ell, F_\ell) < 1 \right\}$$

qui n'est autre que l'enveloppe d'holomorphie de l'ensemble $X^* = (E \times G_*) \cup (D_* \times F)$ (voir [11] et [15]). Le lemme 5.3 est démontré.

5.3. Nous allons montrer le deuxième lemme qui constituera la dernière étape pour la démonstration de la proposition 5.1. Dans ce lemme, nous allons montrer que l'hypothèse «localement bornée» sur la fonction f est en fait superflue.

LEMME 5.3. *Soit* f *une fonction réelle définie sur* X_* *comme dans le lemme 5.2 on suppose que les hypothèses de la proposition 5.1 sont vérifiées pour la fonction* f. *Alors, si chaque compact* E_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ *vérifie la condition* (H) *et chaque compact* F_ℓ $(1 \leqslant \ell \leqslant m)$ *est un ensemble localement d'unicité pour la classe* $H(G_\ell)$ *et non polaire, il existe une fonction* $\tilde{f}$ n+m-*harmonique dans un voisinage de* $E \times G_*$ *, qui coïncide avec* f *sur* $E \times G_*$ *. En particulier* f *est localement bornée sur* $E \times G_*$.

Démonstration du lemme 5.3. Choisissons des domaines réguliers d_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ tels que $E_j \subset d_j \subset\subset D_j$ de sorte que $E \subset d \subset\subset D$, si on pose $d = d_1 \times \ldots \times d_n$. Considérons les ensembles

$$F^{(k)} = \left\{ w \in F : \sup_{z \in d_*} |f(z,w)| \leqslant k \right\} \qquad k \geqslant 1, \quad k \in N$$

comme par hypothèse pour chaque $w \in F$, $f(.,w)$ est n-harmonique dans D_* et que $d_* \subset\subset D_*$, $F = \bigcup_{k \geqslant 1} F^{(k)}$.

D'autre part, par un argument analogue à celui utilisé dans ([11] , p. 165) et qui repose sur la propriété de Montel de l'espace n.H (d_*), on montre que $F^{(k)}$ $(k = 1,2,\ldots)$ est un sous-ensemble fermé de F. D'après le théorème de Baire appliqué à l'espace compact $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F^{(k)}$ il existe $k_o \geqslant 1$ et un polydisque $P = \left\{ w \in C^m : |w_j - a_j| \leqslant r_j \right\}$ centré en un point $a \in F$ tels que $F \cap P \subset F^{(k_o)}$.

Alors, si on pose $F_{\ell,o} = \left\{ w_\ell \in F_\ell : |w_\ell - a_\ell| \leqslant r_\ell \right\}$ pour $\ell = 1,\ldots,m$ et $F^{(o)} = \prod_{\ell=1}^{m} F_{\ell,0}$, il est clair que $F^{(o)} \subset F^{(k_o)}$ et donc f est bornée sur $d_* \times F^{(o)}$. De plus, comme $F_\ell^{(o)} = F_\ell \cap P_\ell$, l'hypothèse sur les compacts F_ℓ entraîne que chaque compact $F_\ell^{(o)}$ est ensemble d'unicité pour la classe $H(G_\ell)$ et non polaire dans G_ℓ on peut donc appliquer le lemme 3.2 à la fonction f restreinte à l'ensemble $E \times G_* \cup d_* \times F^{(o)}$, ce qui entraîne immédiatement le lemme 5.3.

Nous pouvons maintenant facilement prouver la proposition et le théorème.

5.4. Démonstration de la proposition 5.1

Dans les hypothèses de la proposition, chaque compact F_ℓ vérifie la condition (H) par conséquent c'est un ensemble localement d'unicité pour la classe $H(G_\ell)$ et non polaire dans G_ℓ. Les hypothèses du lemme 5.3 sont donc vérifiées, par ce lemme f est alors localement bornée sur $E \times G_*$. Mais alors le lemme 5.2 est applicable en inversant les rôles de E et F et ceux de D et G.

Ainsi la fonction f se prolonge en une fonction n+m-harmonique dans l'enveloppe d'holomorphie $\widetilde{X}_*$ de X_* . La proposition est démontrée.

5.5. Démonstration du théorème 5.1

On peut évidemment supposer que f est à valeurs réelles. Nous procédons par récurrence sur n. Pour n = 1, le théorème est trivial. D'ailleurs pour n = 2, le théorème n'est autre qu'un cas particulier de la proposition 5.1 déjà démontrée. Supposons le théorème démontré pour la dimension $n > 2$ et démontrons le pour la dimension $n + 1$.

Soit alors f une fonction séparément harmonique sur l'ensemble

$$E_1 \times \dots \times E_n \times D_{n+1} \cup \dots \cup D_1 \times E_2 \times \dots \times E_{n+1}$$

en notant

$$D_* = \left\{ z \in D_1 \times \dots \times D_n = D : \sum_{j=1}^{n} h_{D_j}(z_j, E_j) < 1 \right\} \text{et } E = E_1 \times \dots \times E_n$$

l'hypothèse de récurrence dit que pour tout $w \in E_{n+1}$, la fonction $z = (z_1,\dots,z_n) \to f(z_1,\dots,z_n,w)$ qui est séparément harmonique sur $(E_1 \times \dots \times E_{n-1} \times D_n) \cup \dots \cup (D_1 \times E_2 \times \dots \times E_n)$ se prolonge en une fonction n-harmonique $\widetilde{f}(.,w)$ dans D_* . Définissons la fonction g sur $E \times D_{n+1} \cup D_* \times E_{n+1}$ par $g(z,w) = \widetilde{f}(z,w)$ si $(z,w) \in D_* \times E_{n+1}$ et $g(z,w) = f(z,w)$ si $(z,w) \in E \times D_{n+1}$. g est une fonction définie sur $(E \times D_{n+1}) \cup (D_* \times E_{n+1})$ qui vérifie les hypothèses de la proposition 3.1 pour n ; m = 1 ; $G = D_{n+1}$; $F = E_{n+1}$. D'après cette proposition g se prolonge en une fonction $\widetilde{g}$ n+1-harmonique dans l'enveloppe d'holomorphie

$$\left\{ (z,w) \in D_* \times D_{n+1} : \sum_{j=1}^{n} h_{D_j}(z_j,E_j) + h_{D_{n+1}}(w,E_{n+1}) < 1 \right\}$$

de l'ensemble $(E \times D_{n+1}) \cup (D_* \times E_{n+1})$ qui n'est autre que l'enveloppe d'holomorphie de l'ensemble $(E_1 \times ... \times E_n \times D_{n+1}) \cup ... \cup (D_1 \times E_2 \times ... \times E_{n+1})$. Il est clair que $\tilde{g}$ est le prolongement de f cherché.

Le théorème est démontré.

Remarque. Le théorème 5.1 généralise le théorème 5 de Nguyen Thanh Van (voir [7], p. 43) puisque les compacts qu'il considère vérifient la condition (H) d'après le lemme 4.1.

COROLLAIRE 5.1. *Soient* D *un ouvert de* $\mathbb{C}^n$, G un ouvert de $\mathbb{C}^m$ et f une fonction réelle telle que :

a) *pour tout* z_0 *fixé dans* D, *la fonction* $w \to f(z_0,w)$ *est* m-*harmonique dans* G.

b) *pour tout* w_0 *fixé dans* G, *la fonction* $z \to f(z,w_0)$ *est* n-*harmonique dans* D.

Alors f *est une fonction* n+m-*harmonique dans* D × G.

Démonstration. La propriété est locale et on se ramène facilement aux hypothèses de la proposition 5.1.

Enfin, l'auteur tient à remercier Monsieur NGUYEN Thanh Van pour l'aide et le soutien qu'il lui a apportés durant l'élaboration de ce travail.

REFERENCES

[1] U. CEGRELL. *«Some charactérisations of L-regular points»*. A paraître dans Monastsh Math. (1979).

[2] R.M. DUDLEY et B. RANDOL. *«Implications of point wise bounds on polynomials»*. Duke Math. J. 29 (3), (1962), p. 455-458.

[3] M. JARNICKI. *«Analytic continuation of harmonic functions»*. Zeszyty Nankowe UJ 17, (1975), p. 93-104.

[4] P. LELONG. *«Prolongement analytique et singularités complexes des fonctions harmoniques»*. Bull. Soc. Math. Belgique 7 (1) (1954), p. 10-23.

[5] B.S. MITYAGIN. *«Approximative dimension and bases in nuclear spaces»*. Russian Math. Surveys, t.16, (1961), p. 59-127.

[6] NGUYEN THANH VAN. *«Bases de Schauder dans certains espaces de fonctions holomorphes»*. Ann. Inst. Fourier, t. 22 (1972), p. 169-253.

[7] NGUYEN THANH VAN. *«Bases communes pour certains espaces de fonctions harmoniques»*. Bull. Sc. Math. 2e série, 97, (1973), p. 33-49.

[8] W. PLESNIAK. *«Sur la L-régularité des compacts de $\mathbb{C}^n$»*. Polycopié de la Fac. des Sciences de Toulouse, U.E.R. de Math., (1980).

[9] A. SADULLAEV. *«P-regularity of sets in $\mathbb{C}^n$. Proceeding of the conference on Analytic Functions Kozubnik 1979»*. Lectures notes in Math. n° 798, Springer-Verlag.

[10] J. SICIAK. *«Extremal plurisousharmonic functions in $\mathbb{C}^N$»*. Proceeding of the 1st Finish-Polish summer school in complex analysis Podlesice, Lodz, (1977).

[11] J. SICIAK. *«Separetely analytic functions and enveloppes of holomorphy of some lower dimentional subsets of $\mathbb{C}^n$»*. Ann. Pol. Math. t. 22, (1969), p. 145-171.

[12] J. SICIAK. *«Asymptotic behaviour of harmonic polynomials bounded on a compact set»*. Ann. Pol. Math. (1968), p. 267-278.

[13] V.P. ZAHARJUTA. *«Fonctions plusisousharmoniques extrémales, échelles hilbertienne et isomorphisme d'espaces de fonctions analytiques de plusieurs variables complexes (en Russe)»*. Théorie des fonctions, Analyse fonctionnelle et leurs applications, t. 19 et 21, (1974), p. 133-157 et p. 65-83.

[14] V.P. ZAHARJUTA. *«Continuable bases in spaces of analytic functions of one and several variables»*. Siberian Math. J. t. 8, (1967), p. 204-216.

[15] V.P. ZAHARJUTA. *«Separately analytic functions, generalisations of Hartog's theorem and enveloppes of holomorphy»*. Mat. Sbornik, t. 101 (143), (1976), n^{o} 1, p. 51-67.

[16] A. ZERIAHI. *«Sur les bases communes d'espaces de fonctions harmoniques et analytiques»*. Thèse de 3ème cycle, U.P.S. Sciences Toulouse (1980).

(Manuscrit reçu le 2 mai 1981)