

HAILÉ BÉRÉDA

Sur une classe de p -groupes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 4, n° 2 (1982), p. 191-194

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1982_5_4_2_191_0

© Université Paul Sabatier, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UNE CLASSE DE p-GROUPES

Hailé Béréda (1)

(1) *Mathématiques, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne 31062 Toulouse - France.*

Résumé : Le but de cette note est de donner une précision au sujet d'un théorème de HALL (cf. [4] Theorem 12.2.2). Par une utilisation assez intense du *lemme des trois sous-groupes* et quelques calculs avec des commutateurs, on détermine un majorant de la classe de nilpotence du sous-groupe S de $\text{Aut}(G)$ qui opère trivialement sur l'espace de FRATTINI $G/\Phi(G)$ d'un p-groupe fini G . Nous ne savons pas si cette majoration est optimale ou non.

Summary : The purpose of this note is to give further information concerning a theorem of HALL (cf. [4] Theorem 12.2.2). More precisely, let G be a finite p -group and S the subgroup of $\text{Aut}(G)$ whose elements induce the identity on the FRATTINI space $G/\Phi(G)$. By a rather heavy use of the *three subgroups lemma* and some commutator calculus, an upper bound for the nilpotency class of the p -group S is determined. Whether this bound is the best possible or not, we do not know.

INTRODUCTION

Soit G un p -groupe fini. Pour tout entier positif i , on désigne par G_i le i -ème terme de la série centrale descendante de G définie par les relations $G_1 = G$ et $G_{i+1} = [G_i, G_1]$ ($i \geq 1$); on note p^{n_i} l'exposant du groupe quotient G_i/G_{i+1} . Pour tout entier positif j , on désigne par $\Omega_j(G)$ le sous-groupe de G engendré par les puissances p^j -èmes des éléments de G . On pose $G_{i,j} = \Omega_j(G_i)G_{i+1}$. La famille des sous-groupes $G_{i,j}$ ($i \geq 1, 1 \leq j \leq n_i$) définit une suite de composition de G , dénotée Ω . $\Phi(G)$ est le sous-groupe de FRATTINI de G .

THEOREME. Soit S le sous-groupe du groupe des automorphismes de G qui opèrent trivialement sur l'espace de FRATTINI $G \mid \Phi(G)$.

- (1) Le groupe S opère trivialement sur tous les quotients de la suite de composition Ω .
- (2) La classe de nilpotence de S est majorée par $\sum_{1 \leq i \leq c} n_i$, où c est la classe de nilpotence de G .

La démonstration de l'assertion (1) repose essentiellement sur le lemme suivant.

LEMME. Pour tout $i \geq 1$, on a $[G_i, S] \subset \mathcal{U}_1(G_i)G_{i+1}$.

Démonstration du lemme. Elle se fait par récurrence sur i . Pour $i = 1$, l'assertion résulte du fait que $\Phi(G) = \mathcal{U}_1(G)G_2$. Supposons $i \geq 2$, et l'assertion vraie pour $i - 1$. Puisque $[G_i, S] = [G_{i-1}, G, S]$, il suffit, en vertu du lemme des trois sous-groupes, de démontrer que $[G_{i-1}, S, G]$ et $[G, S, G_{i-1}]$ sont contenus dans $\mathcal{U}_1(G_i)G_{i+1}$. Mais, cela résulte de l'hypothèse de récurrence et des inclusions

$$[\mathcal{U}_1(G_{i-1}), G] \subset \mathcal{U}_1(G_i)G_{i+1}$$

et

$$[\mathcal{U}_1(G), G_{i-1}] \subset \mathcal{U}_1(G_i)G_{i+1}$$

qui découlent toutes deux de la formule

$$[xy, z] = [x, z]^y [y, z] \quad (*)$$

puisque $G_i \mid G_{i+1}$ est central dans $G \mid G_{i+1}$.

Démontrons à présent l'assertion (1) du théorème. Grâce au lemme précédent, il suffit d'établir que $[\mathcal{U}_j(G_i), S] \subset \mathcal{U}_{j+1}(G_i)G_{i+1}$ pour tout i et pour $j < n_i$. Or, d'après la formule (*), puisque G_i opère trivialement sur $G_i \mid G_{i+1}$, on a $[\mathcal{U}_j(G_i), S] \equiv \mathcal{U}_j([G_i, S])$ (modulo G_{i+1}). D'après le lemme précédent, on voit que $\mathcal{U}_j([G_i, S]) \subset \mathcal{U}_j(\mathcal{U}_1(G_i)G_{i+1})$, d'où on déduit alors l'assertion cherchée.

L'assertion (2) résulte du

LEMME. Soient M, N des sous-groupes d'un groupe et $M = M^1 \supset M^2 \supset \dots \supset M^n \supset \dots$ une chaîne de sous-groupes distingués de M tels que $[M^i, N] \subset M^{i+1}$ pour tout i . Définissons la chaîne $N^1 \supset N^2 \supset \dots \supset N^i \supset \dots$ par $N^1 = N$ et, pour $j \geq 2$, $N^j = \{x \in N \mid [M^i, x] \subset M^{i+j}, \forall i\}$. Alors, on

a $[N_j^i, N^k] \subset N^{i+k}$ et $[M^i, N_j] \subset M^{i+j}$, où N_j est le j -ème terme de la série centrale descendante de N .

En effet, les sous-groupes $[M^i, N_j, N^k]$ et $[M^i, N^k, N_j]$ sont contenus dans M^{i+j+k} qui est distingué dans $\langle M, N \rangle$. Alors, le lemme des trois sous-groupes appliqué à $\langle M, N \rangle$ permet d'affirmer que $[M^i, [N_j, N^k]]$ qui est égal à $[N_j, N^k, M^i]$ est contenu dans M^{i+j+k} . Comme $N_j^{i+k} = \{ x \in N \mid [M^i, x] \subset M^{i+j+k}, \forall i \}$, on a $[N_j, N^k] \subset N_j^{i+k}$. Dès lors, en remplaçant j par 1 et k par $k - 1$, on obtient $[N, N^{k-1}] \subset N^k$. Cela signifie que la chaîne $N \supset N^2 \supset \dots \supset N^i \supset \dots$ est une série centrale de N ; d'où $N_j \subset N^j$ pour $j \geq 1$. Par suite, puisque $[M^i, N_j] \subset M^{i+j}$, on a $[M^i, N_j] \subset M^{i+j}$.

Ceci étant, posons $n = \sum_{1 \leq i \leq c} n_i$. Alors, S_n désignant le n -ème terme de la série centrale descendante de S , le lemme précédent donne $[G, S_n] \subset G_{c, n_c}$; d'où $[G, S_n] = 1$, car $G_{c, n_c} = 1$, ce qui prouve l'assertion (2) du théorème.

REFERENCES

- [1] N. BLACKBURN. «*Automorphisms of finite p -groups*». J. Algebra, 3 (1966) 28-29.
- [2] N. BLACKBURN. «*On a special class of p -groups*». Acta Mathematica, 100 (1958).
- [3] D. GORENSTEIN. «*Finite groups*». Harper and Row (1968).
- [4] M. HALL. «*The theory of groups*». New-York, Macmillan Company (1959).
- [5] B. HUPPERT. «*Endliche gruppen I*». Springer-Verlag (1967).

(Manuscrit reçu le 15 janvier 1980)