ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JACQUES SIMON

Caractérisation d'un espace fonctionnel intervenant en contrôle optimal

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 5, n° 2 (1983), p. 149-169
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1983_5_5_2_149_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol V, 1983, P. 149 à 169

CARACTERISATION D'UN ESPACE FONCTIONNEL INTERVENANT EN CONTROLE OPTIMAL

Jacques Simon (1)

(1) Laboratoire d'Analyse Numérique, Université P. et M. Curie, Tour 55-65, 5e étage, 4 place Jussieu, 75230 Paris Cédex 05 - France.

Résumé : On s'intéresse à un espace fonctionnel, appelé $\mathscr{U}_{b,\Omega}$, qui intervient dans le contrôle d'une source thermique ponctuelle en espace.

Une caractérisation intégrale de cet espace a été établie par divers auteurs. On montre que cette caractérisation est erronée en construisant des fonctions test convenables, et on donne une caractérisation nouvelle par limite d'intégrales.

Summary : We are interested in a functional space, called $\mathscr{U}_{b,\Omega}$, which arises in the control of a punctually located heat source.

An integral characterization of this space has been stated by several authors. We prove that this characterization is wrong by constructing some suitable test functions, and we give a new characterization as a limit of integrals.

INTRODUCTION

Rappel du problème de contrôle ; l'espace $\mathscr{U}_{b,\Omega}$.

Considérons la solution y de l'équation de la chaleur avec un second membre ponctuel en espace, et avec des données sur le bord nulles. Plus précisément

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = v\delta_b = v(t)\delta_b(x), \qquad x \in \Omega,\ 0 < t < T,$$

où δ_b est la masse de Dirac en x de support b.

On se place en dimension 3, i.e. $\Omega \subset R^3$. Alors pour toute fonction v de $L^2(0,T)$, il existe une solution faible unique $y = y_v$ qui appartient à $L^2(\Omega \times]0,T[\,)$, et qui admet pour $t = T$ une trace $y(T)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Le problème de contrôle de $y_v(T)$ dans $L^2(\Omega)$, consiste à déterminer v et b de façon que $y_v(T)$ approche au mieux un état z donné dans $L^2(\Omega)$. Ce problème a été exposé et étudié par J.L. LIONS [2], en utilisant l'espace

$$\mathscr{U}_{b,\Omega} = \left\{ v \mid v \in L^2(0,T) \text{ et } y_v(T) \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Cet espace intervient de façon essentielle, cf. également J.L. LIONS [3] et J. SIMON [9]. Des propriétés d'invariance de cet espace ont été établies par LI TA-TSIEN [4].

Rappel d'une caractérisation (erronée) de l'espace $\mathscr{U}_{b,\Omega}$.

Une caractérisation de cet espace a été donnée par J.L. LIONS et des caractérisations analogues ont été données pour des variantes de ce problème par divers auteurs, dont l'auteur de ces lignes. Elle s'obtient ainsi :

Les propriétés régularisantes de l'équation de la chaleur montrent que l'espace $\mathscr{U}_{b,\Omega}$ est inchangé si on remplace Ω par R^3 et b par 0. Dans ce cas on sait expliciter y_v et

$$\int_{R^3} |y_v(x,T)|^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^3} \int_{R^3} \int_0^T \int_0^T (T-t)^{-3/2}\,(T-s)^{-3/2} \exp\left(- \frac{|x|^2(2T-t-s)}{4(T-t)(T-s)} \right) v(t)v(s)\,dt\,ds\,dx.$$

Une fonction v de $L^2(0,T)$ appartient à $\mathscr{U}_{b,\Omega}$ si et seulement si cette intégrale est finie.

En admettant (ce qui est faux comme on le verra) qu'on puisse permuter l'ordre des intégrations les auteurs des caractérisations en déduisent, en effectuant en premier l'intégration en x, que v appartient à $\mathscr{U}_{b,\Omega}$ si et seulement si

(1) $$c \int_0^T \int_0^T (2T-t-s)^{-3/2}\, v(t)v(s)\,dt\,ds < \infty .$$

Objet de ce travail.

Notre but est de montrer que la caractérisation (1) est erronée. On se propose également de donner une caractérisation correcte de l'espace $\mathscr{U}_{b,\Omega}$, et de donner quelques propriétés supplémentaires de cet espace et de son dual.

Principaux résultats.

On montrera (§ 2) que $\mathscr{U}_{b,\Omega}$ coïncide avec l'ensemble U des fonctions v de $L^2(0,T)$ telles que

(2) $$\int_0^T \int_0^T (2T+h-t-s)^{-3/2}\, v(t)v(s)dtds \quad \text{a une limite quand } h \to 0_+.$$

On montrera ensuite (§ 3) que l'espace W des fonctions v de $L^2(0,T)$ telles que

(3) $$(s,t) \to (2T-t-s)^{-3/2}\, v(t)v(s) \quad \text{est intégrable sur }]0,T[^2$$

est strictement inclus dans U.

On montrera enfin (§ 4) que l'espace V des fonctions v de $L^2(0,T)$ telles que

(4) $$\int_0^{T-k} \int_0^{T-k} (2T-t-s)^{-3/2}\, v(t)v(s)dtds \quad \text{a une limite quand } k \to 0_+$$

est strictement compris entre W et U.

Identifions $L^2(0,T)$ a son dual de sorte que les espaces U' et W', duals de U et W, deviennent des espaces de fonctions mesurables sur $]0,T[$. On montrera (§ 6) que pour tout $v \in W$ et $p \in W'$ on a $vp \in L^1(0,T)$, et que le produit de dualité dans $W \times W'$ est égal à l'intégrale de vp.

On verra de même que, pour tout $v \in W$, on a

$$[v,p]_{U \times U'} = \int_0^T v(t)p(t)dt \qquad \forall\, p \in U'$$

mais on montrera (§ 8) que cette égalité n'est pas vérifiée pour tout $v \in U$, car on trouvera un couple tel que $vp \notin L^1(0,T)$.

Enfin on montrera (§ 9) que W est «presque égal» à un espace à poids.

Commentaires.

i) L'inclusion stricte de W dans U = $\mathscr{U}_{b,\Omega}$ montre qu'il existe (au moins) une fonction w de $\mathscr{U}_{b,\Omega}$ qui ne vérifie pas (3). Alors l'intégrale

$$\int_0^T \int_0^T (2T-t-s)^{-3/2}\, w(t)w(s)dtds$$

n'est pas définie, donc w ne vérifie pas (1).

Ceci prouve que (1) ne caractérise pas les fonctions de $L^2(0,T)$ appartenant à $\mathscr{U}_{b,\Omega}$.

ii) Cela entraîne que, contrairement à ce qu'on admettait, il existe des fonctions v de $\mathscr{U}_{b,\Omega}$ pour lesquelles l'intégrale en x,s,t ci-dessus est pathologique au sens où on ne peut pas permuter l'ordre des intégrations. Là est la source de l'erreur.

iii) Il convient donc de remplacer dans le théorème 2.2 de J.L. LIONS [3] la condition (1) par (2), et de modifier de façon analogue les résultats suivants et (ou) leurs démonstrations en rempaçant certaines intégrales par des limites d'intégrales : thm. de LI TA-TSIEN [4], thm. 2.1 de LI TA-TSIEN [5] et thm. 1 de SHI CHU-CHUNG et J. SIMON [8].

iv) L'inclusion stricte de V dans U montre qu'il existe (au moins) une fonction w de $\mathscr{U}_{b,\Omega}$ qui ne vérifie pas (4).

Ceci prouve que, même en définissant (1) par une intégrale semi-convergente en T X T, (1) ne caractérise pas les fonctions de $L^2(0,T)$ appartenant à $\mathscr{U}_{b,\Omega}$.

v) Signalons enfin que de nombreux résultats sur le contrôle de $y_v(T)$ s'expriment à l'aide du produit de dualité, cf. J.L. LIONS [2], [3] et J. SIMON [9].

L'auteur remercie vivement Alain DAMLAMIAN pour des discussions fructueuses et Jacques Louis LIONS pour ses nombreux conseils.

1. - RAPPELS SUR L'ESPACE $\mathscr{U}_{b,\Omega}$

Soit Ω un ouvert de R^3 de frontière régulière Γ. La masse de Dirac de support $b \in \Omega$ est définie par

$$(\delta_b,\varphi) = \varphi(b) \qquad \forall\, \varphi \in C^0(\Omega).$$

Etant donné $v = v(t)$, l'état du système $y = y_v(x,t)$ est défini par

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = v\delta_b \qquad \text{dans } \Omega \times]0,T[$$

$$y = 0 \qquad \text{sur } \Gamma \times]0,T[$$

$$y(x,0) = 0 \qquad \text{pour } x \in \Omega$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^{3} \partial^2/\partial x_i^2$.

D'après le théorème de Sobolev (R.A. ADAMS [1], Théorème 5.4) on a

$$H^2(\Omega) \subset C^0(\Omega)$$

d'où $\delta_b \in H^{-2}(\Omega)$.

Pour tout $v \in L^2(0,T)$ il existe alors une solution faible unique y définie par la méthode de transposition (J.L. LIONS [2], § 1.2) telle que $y \in L^2(\Omega \times]0,T[\,)$.

Cette solution vérifie $\Delta y_v \in L^2(0,T\,;\,H^{-2}(\Omega))$, donc l'équation entraîne $\frac{\partial y_v}{\partial t} \in L^2(0,T\,;H^{-2}(\Omega))$ d'où $y_v \in C(0,T\,;H^{-1}(\Omega))$.

On note alors $y_v(t)$ la distribution $x \to y_v(x,t)$ et on introduit l'espace

$$\mathscr{U}_{b,\Omega} = \{v \mid v \in L^2(0,T) \text{ et } y_v(T) \in L^2(\Omega)\}$$

On le munit de la norme

$$|v|_{\mathscr{U}_{b,\Omega}} = \left(\int_0^T |v(t)|^2\,dt + \int_\Omega |y_v(x,T)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

qui en fait un espace de Hilbert (J.L. LIONS [2] § 1.4).

Remarque. J.L. LIONS ([2], § 1.3, exemple 1.1) a montré qu'il existe $v \in L^2(0,T)$ tel que $y_v(T) \notin L^2(\Omega)$, ce qui prouve que $\mathscr{U}_{b,\Omega}$ est strictement inclus dans $L^2(0,T)$.

En utilisant les propriétés régularisantes de l'équation de la chaleur, J.L. LIONS [2], § 1.5, a montré que l'espace $\mathscr{U}_{b,\Omega}$ est indépendant de b et de Ω. Plus précisément

$$\mathscr{U}_{b,\Omega} = \mathscr{U}_{0,R^3} \text{ et leurs normes sont équivalentes.}$$

Remarque. On peut également remplacer $-\Delta$ par un opérateur elliptique du 2ème ordre sans changer d'espace. Ce résultat est énoncé dans LI TA-TSIEN [4], mais sa démonstration utilise au lemme 5 la caractérisation formelle (1). Une démonstration complète est donnée dans J. SIMON [9], théorème 1.1. ∎

Remarque. Des espaces analogues à $\mathscr{U}_{b,\Omega}$ interviennent dans de nombreuses variantes :

- quand b dépend de t (SHI CHU-CHUNG et J. SIMON [8]) ;
- pour des opérateurs elliptiques d'ordre supérieur (LI TA-TSIEN [5]) ;
- dans le cas d'opérateurs $A\frac{\partial}{\partial t}+B$, A et B étant elliptiques (L. WHITE [10]) ;
- pour des équations hyperboliques linéaires (J.L. LIONS [2], § 4) ou non linéaires (J.L. LIONS [3], § 6). ∎

2. - L'ESPACE U EST IDENTIQUE A $\mathscr{U}_{0,R^3}$

Soit

$$U=\Big\{v \mid v\in L^2(0,T) \text{ et}$$
$$\int_0^T\int_0^T (2T+h-t-s)^{-3/2}\, v(t)v(s)\,dtds \text{ a une limite quand } h\to 0_+\Big\}.$$

Cette définition est loisible car l'intégrale double est définie pour tout $v\in L^2(0,T)$ et $h>0$ puisque $(2T+h-t-s)^{-3/2}\leqslant h^{-3/2}$.

On note

$$F(v)=\int_0^T v(t)^2dt+\lim_{h\to 0_+}\int_0^T\int_0^T (2T+h-t-s)^{-3/2}\, v(t)v(s)\,dtds$$

THEOREME 1. $\mathscr{U}_{0,R^3}=U$ *et* $F(v)=(|v|_{\mathscr{U}_{0,R^3}})^2$ *pour tout* v *dans* U. ∎

Ceci montre que U est un espace de Hilbert, qu'on munit de la norme

$$|v|_U=\sqrt{F(v)}.$$

Démonstration du théorème 1.

i) Calcul d'un prolongement $\tilde{y}$ *de* y_v.

Quand $\Omega = R^3$ et b = 0 la solution de l'équation d'état est

$$y_v(x,\tau) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3} \int_0^\tau \frac{1}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(\tau-t)}\right) v(t)dt \qquad \forall\, x \neq 0.$$

En prolongeant v par 0 pour $t > T$ on obtient un prolongement $\tilde{y}$ de y_v qui est solution de l'équation d'état sur $R^3 \times]0,\infty[$. Il vient, pour $h \geqslant 0$,

$$|\tilde{y}(x,T+h)|^2 = \frac{1}{(4\pi)^3} \int_0^T \int_0^T g(x,t,s)\, v(t)v(s)dtds$$

où

$$g(x,t,s) = (T+h-t)^{-3/2}\,(T+h-s)^{-3/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4}\,\frac{2T+2h-t-s}{(T+h-t)(T+h-s)}\right)$$

La fonction g est continue et bornée et $v \in L^2(0,T)$, donc $g(x,t,s)\, v(t)v(s)$ est intégrable en x,t,s. Le théorème de Fubini montre alors que

$$\int_{R^3} |\tilde{y}(x,T+h)|^2\, dx = \frac{1}{(4\pi)^3} \int_0^T \int_0^T \left(\int_{R^3} g(x,t,s)dx\right) v(t)v(s)dtds.$$

En effectuant le changement de variable $z = x\left(\dfrac{2T+2h-t-s}{(T+h-t)(T+h-s)}\right)^{1/2}$ il vient

$$(|\tilde{y}(T+h)|_{L^2(R^3)})^2 = c \int_0^T \int_0^T (2T+2h-t-s)^{-3/2}\, v(t)v(s)dtds$$

où

$$c = \frac{1}{(4\pi)^3} \int_{R^3} \exp\left(-\frac{|z|^2}{4}\right) dz.$$

ii) Pour montrer que $\mathscr{U}_{0,R^3} = U$ *il reste donc à établir que*

$$y_v(T) \in L^2(R^3) \iff |\tilde{y}(T+h)|_{L^2(R^3)} \text{ a une limite quand } h \to 0_+.$$

Or la remarque 1.6 de J.L. LIONS [2] , § 1.2, montre que $\tilde{y} \in C(0,\infty\,;\, H^{-1}(R^3))$. Donc si $|\tilde{y}(T+h)|_{L^2(R^3)}$ a une limite quand $h \to 0_+$, alors $\tilde{y}(T+h)$ converge dans $L^2(R^3)$ faible vers $\tilde{y}(T) = y_v(T)$.

Réciproquement pour $t \geqslant T$ on a $\dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - \Delta\tilde{y} = 0$. Donc si $y_v(T) \in L^2(R^3)$, on a $\tilde{y} \in C(T,\infty\,;\, L^2(R^3))$ d'où $|\tilde{y}(T+h)|_{L^2(R^3)} \to |y_v(T)|_{L^2(R^3)}$ quand $h \to 0_+$.

Ceci prouve également que

$$F(v) = \int_0^T v(t)^2 dt + \int_\Omega |y_v(x,T)|^2\, dx = (\,|v|_{\mathscr{U}_{0,R^3}})^2. \qquad \blacksquare$$

Remarque. La condition (1) est obtenue en faisant ce calcul pour $h=0$ ce qui n'est pas loisible. ∎

3. - L'ESPACE W EST STRICTEMENT INCLUS DANS U

Soit

$$W=\left\{v \mid v\in L^2(0,T) \text{ et } (2T-t-s)^{-3/2}\, v(t)v(s)\in L^1(\,]0,T[^{\,2})\right\}.$$

On le munit de la norme

$$|v|_W=\left(\int_0^T v(t)^2\,dt+\int_0^T\int_0^T (2T-t-s)^{-3/2}\,|v(t)|\,|v(s)|\,dtds\right)^{1/2}.$$

Le lemme de Fatou montre que, quand $v\in W$, on a

$$\int_0^T\int_0^T (2T+h-t-s)^{-3/2}\,v(t)v(s)dtds\to\int_0^T\int_0^T (2T-t-s)^{-3/2}\,v(t)v(s)dtds$$

donc $v\in U$. Cela établit le

LEMME 2. *Si* $v\in W$, *on a*

$$|v|_U=\left(\int_0^T v(t)^2dt+\int_0^T\int_0^T (2T-t-s)^{-3/2}\,v(t)v(s)dtds\right)^{1/2}.$$ ∎

Cela prouve également que

$$W=\left\{v \mid |v|\in U\right\}.$$

THEOREME 3. *L'inclusion de* W *dans* U *est stricte.* ∎

Démonstration. On va construire une fonction f oscillante au voisinage de T qui appartient à U mais pas à W.

Soit $g_{A,a}$ l'oscillation élémentaire définie pour $0\leqslant a\leqslant A\leqslant\frac{T}{2}$ par

$$g_{A,a}(t)=\begin{cases}1 & \text{si } T-A-a<t<T-A\\ -1 & \text{si } T-A<t<T-A+a\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Admettons un instant le

LEMME 4.
$$|g_{A,a}|_U = \left(2a + \frac{15}{64}\sqrt{2A}\,\left(\frac{a}{A}\right)^4 \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{a}{A}\right)\right)\right)^{1/2}$$
$$|g_{A,a}|_W = \left(2a + 4\sqrt{2A}\,\left(\frac{a}{A}\right)^2 \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{a}{A}\right)\right)\right)^{1/2}$$

où $|\mathcal{O}(s)| \leqslant c\,|s|$, c indépendant de s. ■

On considère
$$f = \sum_{i=I}^{\infty} f_i\,, \quad f_i = i^{12}\, g_{i^{-24},\, i^{-28}}$$

où I est choisi assez grand pour que les oscillations f_i aient des supports disjoints et inclus dans $]0,T[$.

Le lemme 4 donne $|f_i|_U \cong c\, i^{-2}$ et comme U est complet (d'après le théorème 1) il en résulte que $f \in U$. Les supports des f_i étant disjoints, on a $|f| = \sum_{i \geqslant I} |f_i|$ donc la définition de la norme de W montre que $|f|_W \geqslant |f_i|_W$. Le lemme 4 donnant $|f_i|_W \cong 2^{\frac{5}{4}}\, i^2$, il en résulte que $f \notin W$, ce qui termine la démonstration du théorème 3. ■

Démonstration du lemme 4. Notons d'abord que
$$\int_{T-b}^{T-c}\int_{T-d}^{T-e} (T-t-s)^{-3/2}\,dtds = 4\left(-\sqrt{c+e} + \sqrt{c+d} + \sqrt{b+e} - \sqrt{b+d}\right)$$

i) Par définition de $g_{A,a}$ on a
$$\int_0^T\int_0^T (2T-t-s)^{-3/2}\, g_{A,a}(t) g_{A,a}(s)\,dtds$$
$$= \left(\int_{T-A-a}^{T-A}\int_{T-A-a}^{T-A} + \int_{T-A}^{T-A+a}\int_{T-A}^{T-A+a} - 2\int_{T-A-a}^{T-A}\int_{T-A}^{T-A+a}\right)(2T-t-s)^{-3/2}dtds$$
$$= 4\Big\{\left(-\sqrt{2A} + 2\sqrt{2A+a} - \sqrt{2A+2a}\right) + \left(-\sqrt{2A-2a} + 2\sqrt{2A-a} - \sqrt{2A}\right)$$
$$-2\left(-\sqrt{2A-a} + 2\sqrt{2A} - \sqrt{2A+a}\right)\Big\}.$$

On pose $d = \frac{a}{2A}$ et on utilise le développement limité $\sqrt{1+d} = 1 + \frac{d}{2} - \frac{d^2}{8} + \frac{d^3}{16} - \frac{5}{128} d^4 + \mathcal{O}(d^5)$.
Il vient

$$= 4\sqrt{2A}(-\sqrt{1-2d} + 4\sqrt{1-d} - 6 + 4\sqrt{1+d} - \sqrt{1+2d})$$

$$= \frac{15}{4}\sqrt{2A}\,(d^4 + \mathcal{O}(d^5)).$$

On a donc

$$\left(\int_0^T |g_{A,a}(t)|^2\,dt + \int_0^T \int_0^T (2T-t-s)^{-3/2}\, g_{A,a}(t) g_{A,a}(s)\,dtds\right)^{1/2}$$

$$= \left(2a + \frac{15}{64}\sqrt{2A}\,\left(\frac{a}{A}\right)^4 \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{a}{A}\right)\right)\right)^{1/2}$$

ce qui, d'après le lemme 2, est égal à $|g_{A,a}|_U$.

ii) On a de même

$$\int_0^T \int_0^T (2T-t-s)^{-3/2}\, |g_{A,a}(t)|\,|g_{A,a}(s)|\,dtds$$

$$= \int_{T-A-a}^{T-A+a} \int_{T-A-a}^{T-A+a} (2T-t-s)^{-3/2}\,dtds$$

$$= 4\,(-\sqrt{2A-2a} + 2\sqrt{2A} - \sqrt{2A+2a})$$

$$= \sqrt{2A}\left(\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{a}{A}\right)^3\right)\right)$$

d'où la valeur annoncée de $|g_{A,a}|_W$. ∎

4. - L'ESPACE V EST STRICTEMENT COMPRIS ENTRE W ET U

Comme on a construit une fonction oscillante de U qui n'appartient pas à W, il est naturel de se demander si U peut être caractérisé à l'aide d'une intégrale semi-convergente en T X T.

Plus précisément on se demande si U coïncide avec l'espace

$$V = \Big\{ v \mid v \in L^2(0,T) \text{ et}$$

$$\int_0^{T-k} \int_0^{T-k} (2T-t-s)^{-3/2}\, v(t)v(s)dtds \text{ a une limite quand } k \to 0_+ \Big\}.$$

Cette définition est loisible car l'intégrale double est définie pour tout $v \in L^2(0,T)$ puisque $(2T-t-s)^{-3/2} \leqslant (2k)^{-3/2}$ sur $]0,T-k[^{\,2}$.

THEOREME 5. $W \subset V \subset U$ *avec des inclusions strictes.* ■

Démonstration. i) La première inclusion étant évidente, commençons par vérifier que $V \subset U$. Pour $h > 0$ on introduit

$$q_h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \leqslant T-h, \\ 0 & \text{si} \quad t > T-h. \end{cases}$$

Etant donné $v \in L^2(0,T)$ le lemme 2 montre que

$$|q_h v|_U = \left(\int_0^{T-h} v(t)^2\, dt + \int_0^{T-h} \int_0^{T-h} (2T-t-s)^{-3/2}\, v(t)v(s)dtds \right)^{1/2};$$

d'autre part $q_h v \to v$ dans $L^2(0,T)$ quand $h \to 0_+$.

Si $v \in V$ il en résulte que $q_h v$ est borné dans U d'où, U étant un espace de Hilbert (d'après le théorème 1) inclus dans $L^2(0,T)$, $v \in U$.

ii) Vérifions que la fonction f de U, introduite dans la démonstration du théorème 3, n'appartient pas à V.

La restriction de f à $]0,T-j^{-24}[$ est égale à $\sum_{i=1}^{j-1} f_i + f_j^+$, le lemme 2 montre alors que

$$\left| \sum_{i=1}^{j-1} f_i + f_j^+ \right|_U = \left(\int_0^{T-j^{-24}} f(t)^2\, dt + \int_0^{T-j^{-24}} \int_0^{T-j^{-24}} (2T-t-s)^{-3/2}\, f(t)f(s)dtds \right)^{1/2}.$$

Quand $j \to \infty$, $\int_0^{T-j^{-24}} f(t)^2\, dt$ converge trivialement et on a vu dans la démonstration du théorème 3 que $\sum_{i=1}^{j-1} f_i$ converge dans U.

D'autre part $g^+_{A,a} = \left| g_{A+\frac{a}{2},\frac{a}{2}} \right|$ donc $\left| g^+_{A,a} \right|_U = \left| g_{A+\frac{a}{2},\frac{a}{2}} \right|_W$. Comme $f_j = j^{12}\, g_{j^{-24},j^{-28}}$ la deuxième majoration du lemme 4 donne $|f_j^+|_U \cong 2^{1/4} j^{-2}$. Il en résulte que

$$\int_0^{T-j^{-24}} \int_0^{T-j^{-24}} (2T-t-s)^{-3/2} f(t)f(s)dtds \to \infty \quad \text{quand } j \to \infty$$

et donc $f \notin V$.

iii) Construisons enfin une fonction φ qui appartient à V mais pas à W. On définit

$$\varphi = \sum_{i \geqslant I} \varphi_i\,,\ \varphi_i = i^{9/2}\, g_{i^{-12},i^{-14}}$$

où I est choisi assez grand pour que les oscillations φ_i aient des supports disjoints et inclus dans $]0,T[$.

On a donc $|\varphi| = \sum_{i \geqslant I} |\varphi_i|$ donc la définition de la norme de W montre que $|\varphi|^2_W \geqslant \sum_{i \geqslant I} |\varphi_i|^2_W$. Le lemme 4 donnant $|\varphi_i|_W \cong 2^{5/4}\, i^{-1/2}$ il en résulte que $\varphi \notin W$.

La restriction de φ à $]0,T-h[$ est égale à $\sum_{i=I}^{j-1} \varphi_i + q_h\, \varphi_j$ où $j^{-12} + j^{-14} \geqslant h > (j+1)^{-12} + (j+1)^{-14}$. Le lemme 2 montre alors que

$$\left| \sum_{i=I}^{j-1} \varphi_i + q_h\, \varphi_j \right|_U = \left(\int_0^{T-h} \varphi(t)^2\, dt + \int_0^{T-h} \int_0^{T-h} (2T-t-s)^{-3/2}\, \varphi(t)\varphi(s)dtds \right)^{1/2}.$$

Le lemme 4 donne $|\varphi_i|_U \cong c\, i^{-5/2}$ donc $\sum_{i=I}^{j-1} \varphi_i$ converge dans U quand $j \to \infty$. De plus $|q_h\, \varphi_j|_U \leqslant |\varphi_j|_W$ qui tend vers 0. D'où

$$\int_0^{T-h} \int_0^{T-h} (2T-t-s)^{-3/2}\, \varphi(t)\varphi(s)dtds \ \text{ a une limite quand } h \to 0_+$$

donc $\varphi \in V$. ∎

5. - APPROXIMATION DANS U ET DANS W

On cherche comment peut-on approcher les fonctions de U ou de W par des fonctions nulles au voisinage de T. Cela nous servira dans les paragraphes suivants. Notons que toute fonction de $L^2(0,T)$ qui est nulle sur un voisinage de T appartient à W, donc à U.

Considérons d'abord l'approximation obtenue en remplaçant v(t) par 0 sur $]T-h,T]$, c'est-à-dire obtenue en multipliant v par la fonction q_h caractéristique de $[0,T-h]$.

LEMME 6. *Si* $v \in W$ *on a* $q_h v \to v$ *dans* W, *quand* $h \to 0_+$.
Il existe $f \in U$ *tel que* $q_h f \not\to f$ *dans* U, *quand* $h \to 0_+$. ■

Démonstration. i) Soit $v \in W$. On a

$$|q_h v - v|_W = \left(\int_{T-h}^{T} v(t)^2 \, dt + \int_{T-h}^{T} \int_{T-h}^{T} (2T-t-s)^{-3/2} \, |v(t)| \, |v(s)| \, dtds \right)^{1/2}$$

qui converge vers 0 quand $h \to 0_+$.

ii) On a vu dans la partie ii) de la démonstration du théorème 5 que la fonction oscillante f de U introduite dans la démonstration du théorème 3 vérifie $|q_{j^{-24}} f|_U \to \infty$ quand $j \to \infty$. ■

Considérons maintenant l'approximation par translation introduite par J.L. LIONS [2] (démonstration du théorème 1.1). Pour $h > 0$ on note

$$v_h(t) = \begin{cases} v(t+h) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant T-h, \\ \\ 0 & \text{si} \quad T-h < t \leqslant T. \end{cases}$$

LEMME 7. *Si* $v \in W$ *on a* $v_h \to v$ *dans* W, *quand* $h \to 0_+$.
Si $v \in U$ *on a* $v_h \to v$ *dans* U, *quand* $h \to 0_+$. ■

Démonstration. i) Soit $v \in W$. On a

$$|v_h|_W^2 = \int_0^{T-h} |v(t+h)|^2 \, dt + \int_0^{T-h} \int_0^{T-h} (2T-t-s)^{-3/2} \, |v(t+h)| \, |v(s+h)| \, dtds$$

$$= \int_h^{T} |v(t)|^2 \, dt + \int_h^{T} \int_h^{T} (2T+2h-t-s)^{-3/2} \, |v(t)| \, |v(s)| \, dtds.$$

Soit $X_h =]0,T[^2 /]h,T[^2$. On a

$$\int_{X_h} (2T+2h-t-s)^{-3/2} \, |v(t)| \, |v(s)| \, dtds \leqslant (T+h)^{-3/2} \int_{X_h} |v(t)| \, |v(s)| \, dtds$$

qui converge vers 0 avec h. Donc

$$|v_h|^2_W \cong \int_0^T |v(t)|^2\,dt + \int_0^T \int_0^T (2T+2h-t-s)^{-3/2}\,|v(t)|\,|v(s)|\,dtds$$

et le lemme de Fatou montre que $|v_h|^2_W \to |v|^2_W$ quand $h \to 0_+$.

De plus $v_h \to v$ dans $L^2(0,T)$ donc $v_h \to v$ dans W faible et

$$|v_h - v|^2_W = |v_h|^2_W - 2(v_h,v)_{W \times W} + |v|^2_W \to 0.$$

ii) Soit $v \in U$. Le lemme 2 donne

$$|v_h|^2_U = \int_0^{T-h} |v(t+h)|^2\,dt + \int_0^{T-h}\int_0^{T-h} (2T-t-s)^{-3/2}\, v(t+h)v(s+h)\,dtds.$$

On montre, comme ci-dessus, que

$$|v_h|^2_U \cong \int_0^T |v(t)|^2\,dt + \int_0^T\int_0^T (2T+2h-t-s)^{-3/2}\, v(t)v(s)\,dtds.$$

La définition de la norme de U montre que $|v_h|^2_U \to |v|^2_U$, et on en déduit, comme ci-dessus, que $|v_h - v|^2_U \to 0$.

Remarque. On peut également (J.L. LIONS [2], théorème 1.1) a prouver que $v_h \to v$ dans U en montrant, grâce à l'équation d'état, que $y_{v_h}(T) \to y_v(T)$ dans $L^2(R^3)$.

6. - LE PRODUIT DE DUALITE DANS W × W EST UNE INTEGRALE

On situera W' à l'aide du

LEMME 8. *Pour* $r > 4$ *et* $\theta < T$, *l'espace* $L^2(0,\theta) \oplus L^r(\theta,T)$ *est inclus dans* W *avec injection continue et densité.*

On note $L^\sigma(0,\theta) \oplus L^r(\theta,T)$ l'ensemble des (classes de) fonctions sur $]0,T[$ dont les restrictions à $]0,\theta[$ et à $]\theta,T[$ appartiennent respectivement à $L^\sigma(0,\theta)$ et à $L^r(\theta,T)$.

Démonstration. i) Soit $v \in L^2(0,\theta) \oplus L^r(\theta,T)$ et soit r' tel que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Comme $\frac{3r'}{2} < 2$ on a

$$\int_\theta^T\int_\theta^T (2T-t-s)^{-3/2}\,|v(t)|\,|v(s)|\,dtds$$
$$\leqslant \left(\int_0^T\int_0^T (2T-t-s)^{-(3r')/2}\,dtds\right)^{1/r'} \left(\int_\theta^T |v(t)|^r\,dr\right)^{2/r}.$$

En dehors de $]\theta,T[^2$ on a $(2T-t-s)^{-3/2} \leqslant (T-\theta)^{-3/2}$ d'où

$$\left(\int_0^T\int_0^T - \int_\theta^T\int_\theta^T\right)(2T-t-s)^{-3/2}\,|v(t)|\,|v(s)|\,dtds \leqslant (T-\theta)^{-3/2}\left(\int_0^T |v(t)|\,dt\right)^2$$

On a donc $v \in W$, avec

$$|v|_W \leqslant (1 + T(T-\theta)^{-3/4})\,|v|_{L^2(0,T)} + d_r\,|v|_{L^r(\theta,T)}$$

ce qui établit la continuité de l'injection de $L^2(0,\theta) \oplus L^r(\theta,T)$ dans W.

ii) Soit $w \in W$. Etant donné $v^n \in L^r(0,T)$ tel que $|v^n - w|_{L^2(0,T)} \leqslant \frac{1}{n^2}$, la majoration précédente avec $\theta = T - \frac{1}{n}$ donne

$$|q_{1/n}(v^n - v)|_W \leqslant (1 + T\,(\frac{1}{n})^{-3/4})\frac{1}{n^2}.$$

Comme $q_{1/n}\, v \to v$ dans W d'après le lemme 6, il en résulte que $q_{1/n}\, v^n \to v$ dans W ce qui prouve la densité puisque $q_{1/n}\, v^n \in L^r(0,T)$. ∎

On complète le lemme 8 en notant que W est inclus dans $L^2(0,T)$ avec injection continue et densité. Par passage au dual on obtient, pour tout $r' < \frac{4}{3}$ et tout $\theta < T$,

$$L^2(0,T) \subset W' \subset L^2(0,\theta) \oplus L^{r'}(\theta,T)$$

avec injections continues et densité.

On identifie $L^2(0,T)$ a son dual et on définit le produit de dualité comme l'unique forme bilinéaire continue sur $W \times W'$ telle que

$$[v,p]_{W \times W'} = \int_0^T v(t)p(t)dt \qquad \forall\, v \in W,\ p \in L^2(0,T).$$

THEOREME 9. *Pour tout* $v \in W$ *et tout* $p \in W'$ *on a* $vp \in L^1(0,T)$ et

$$[v,p]_{W \times W'} = \int_0^T v(t)\,p(t)dt.$$ ∎

Démonstration. On définit $w \in W$ par

$$w(t) = \begin{cases} |v(t)| & \text{si} \quad p(t) \geqslant 0, \\ -|v(t)| & \text{si} \quad p(t) < 0. \end{cases}$$

On a $q_h\, w \in L^2(0,T-h) \oplus L^\infty(T-h,T)$ où q_h est la fonction caractéristique de $[0,T-h]$. Comme $p \in L^2(0,T-h) \oplus L^{r'}(T-h,T)$ où $r' > 1$,

$$[q_h w,p]_{W \times W'} = \int_0^T q_h(t)w(t)p(t)dt = \int_0^{T-h} |v(t)|\, |p(t)|\, dt.$$

Quand $h \to 0$ le lemme 6 montre que le premier membre converge, ce qui prouve que $vp \in L^1(0,T)$. De même on a

$$[q_h v,p]_{W \times W'} = \int_0^{T-h} v(t)p(t)dt$$

et en passant à la limite on obtient l'expression intégrale du produit de dualité. ∎

7. - OBTENTION D'UNE FONCTION DE U'

On se propose d'établir le

LEMME 10. *La fonction* $t \to (T-t)^{-\sigma}$ *appartient à* U' *si* $\sigma < \frac{3}{4}$. ∎

Ce résultat est évident pour $\sigma < \frac{1}{2}$ puisqu'alors $(T - \cdot\,)^{-\sigma} \in L^2(0,T)$, et on suppose maintenant que $\frac{1}{2} \leqslant \sigma < \frac{3}{4}$. Soit $z \in L^2(R^3)$, et soit q la solution de

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q}{\partial t} - \Delta q = 0 & \text{dans } R^3 \times\,]0,T[\\[2ex] q(T) = z & \text{dans } R^3. \end{cases}$$

On a $q \in L^2(0,T\,;\,H^1(R^3))$ et les propriétés régularisantes des équations paraboliques montrent que q est continue pour $t < T$, donc $q(0,t)$ est défini. On va démontrer le lemme 10 en utilisant le

LEMME 11. *La fonction* $t \to q(0,t)$ *appartient à* U'. ∎

Démonstration du lemme 11. Soit v une fonction de $L^2(0,T)$ nulle au voisinage de T, et soit y_v l'état correspondant pour $\Omega = R^3$ et $b = 0$. En multipliant l'équation d'état par q et en intégrant par parties il vient

$$\int_0^T v(t)q(0,t)dt = \int_{R^3} y_v(x,T)z(x)dx$$

donc

$$\left| \int_0^T v(t)q(0,t)dt \right| \leqslant |v|_{\mathscr{U}_{0,R^3}} |z|_{L^2(\Omega)}.$$

Les normes de U et de $\mathscr{U}_{0,R^3}$ étant égales, et l'ensemble des fonctions de $L^2(0,T)$ nulles au voisinage de T étant dense dans U d'après le lemme 7, il en résulte que $q(0,.) \in U'$. ∎

Signalons qu'on peut obtenir $q(0,.) \in U'$ pour une classe de fonctions q plus générales (J. SIMON [9], théorème 2.1).

Démonstration du lemme 10 pour $\frac{1}{2} \leqslant \sigma < \frac{3}{4}$. On a

$$q(x,t) = (4\pi(T-t))^{-3/2} \int_{R^3} \exp\left(-\frac{|\zeta-x|^2}{4(T-t)}\right) z(\xi)d\xi.$$

On prend

$$z(\zeta) = \begin{cases} |\zeta|^{-2\sigma} & \text{si} \quad |\zeta|<1 \\ 0 & \text{si} \quad |\zeta|\geqslant 1 \end{cases}$$

et on effectue le changement de variable $\zeta = \mu\sqrt{T-t}$. Il vient

$$q(0,t) = (4\pi)^{-3/2} (T-t)^{-\sigma} \int_{|\mu|<\frac{1}{\sqrt{T-t}}} \exp\left(-\frac{|\mu|^2}{4}\right) |\mu|^{-2\sigma} d\mu$$

$$= m(T-t)^{-\sigma} - g(t)$$

où $m = (4\pi)^{-3/2} \int_{R^3} \exp\left(-\frac{|\mu|^2}{4}\right) |\mu|^{-2\sigma} d\mu$ et où

$$g(t) = (4\pi)^{-3/2} (T-t)^{-\sigma} \int_{|\mu|>\frac{1}{\sqrt{T-t}}} \exp\left(-\frac{|\mu|^2}{4}\right) |\mu|^{-2\sigma} d\mu.$$

Pour $\sigma < \frac{3}{4}$ on a $z \in L^2(R^3)$ donc $q(0,.) \in U'$. Pour obtenir $m(T-\cdot)^{-\sigma} \in U'$ il reste donc a prouver que $g \in U'$.

Comme $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ on majore $|\mu|^{1-2\sigma} \leqslant (T-t)^{\sigma-\frac{1}{2}}$ et, en utilisant les coordonnées sphériques, il vient

$$|g(t)| \leqslant (4\pi)^{-3/2} (T-t)^{-1/2} \int_{r>\frac{1}{\sqrt{T-t}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4}\right) \frac{4\pi r^2 dr}{r} = \frac{1}{\sqrt{\pi(T-t)}} \exp\left(-\frac{1}{4(T-t)}\right)$$

d'où g est borné sur]0,T[, donc il appartient à U' (puisque $L^2(0,T) \subset U'$). ∎

Remarque. Le lemme 10 est équivalent (puisque $\mathscr{D}$ (]0,T[ ) est dense dans $\mathscr{U}$ d'après J.L. LIONS [2], § 1.4, Remarque 1.9) à la majoration :

$$\left|\int_0^T (T-t)^{-\sigma} v(t)dt\right| \leqslant c\left(\int_0^T v(t)^2 dt + \int_0^T \int_0^T (2T-t-s)^{-3/2} v(t)v(s)dtds\right)^{1/2}$$

pour tout $v \in \mathscr{D}$ (0,T).

Mais nous ne savons pas établir directement cette inégalité, pour $\sigma < \frac{3}{4}$. ∎

8. - LE PRODUIT DE DUALITE DANS U X U' N'EST PAS TOUJOURS UNE INTEGRALE

L'espace W est inclus dans U avec injection continue et densité, d'après les lemmes 2 et 7. De plus U est inclus dans $L^2(0,T)$ avec injection continue et densité. Par passage au dual il vient

$$L^2(0,T) \subset U' \subset W'.$$

Comme précédemment $L^2(0,T)$ est identifié à son dual et le produit de dualité dans U X U' est l'unique forme bilinéaire continue telle que

$$[v,p]_{U \times U'} = \int_0^T v(t)p(t)dt \quad \forall\, v \in U,\ p \in L^2(0,T)$$

Ce produit de dualité coïncide donc avec $[v,p]_{W \times W'}$ dans $U \times U' \cap W \times W' = W \times U'$. Le théorème 9 montre alors que cette expression intégrale est vérifiée pour tout couple $v \in W$, $p \in U'$.

Mais le produit de dualité n'est pas l'intégrale du produit pour tout couple $v \in U$, $p \in U'$. En effet

THEOREME 12. *Il existe* $f \in U$ *et* $p \in U'$ *tels que* $fp \notin L^1(0,T)$. ∎

Remarque. Par contre le produit de dualité est une limite d'intégrales :

$$[v,p]_{U \times U'} = \lim_{h \to o} \int_0^{T-h} v(t+h)p(t)dt \quad \forall\, v \in U,\ p \in U'.$$

L'intégrale considérée ici a un sens puisque $p \in L^2(0,T-h)$, et le lemme 7 donne ce résultat puisque $v_h \in W$ et $v_h \to v$ dans U. ■

Démonstration du théorème 12. On va utiliser la fonction oscillante f introduite dans la démonstration des théorèmes 3 et 5, et on va prendre $p(t) = (T-t)^{-\sigma}$ avec $\sigma = \frac{3}{4} - \frac{1}{24} = \frac{17}{24}$.

Rappelons que $f = \sum_{i \geqslant I} f_i$ et que, pour j assez grand, la restriction de f à l'intervalle $X_j^+ =]T-j^{-24}-j^{-28}, T-j^{-24}]$ est égale à $f_j^+ \equiv j^{12}$.

Or

$$\int_{T-A-a}^{T-A} (T-t)^{-\sigma}\, dt = \frac{1}{1-\sigma} (A^{1-\sigma} - (A+a)^{1-\sigma})$$

$$= A^{1-\sigma} \frac{a}{A} (1 + \mathcal{O}(\frac{a}{A})).$$

Donc pour j assez grand

$$\int_0^T |f(t)p(t)|\, dt \geqslant j^{12} \int_{T-j^{-24}-j^{-28}}^{T-j^{-24}} (T-t)^{-17/24}\, dt \cong j^{12}\, j^{-24 \times \frac{7}{24}}\, j^{-4} = j$$

ce qui prouve que $fp \notin L^1(0,T)$. ■

Remarque. A défaut d'intégrale convergente on pourrait espérer que le produit de dualité dans U X U' soit défini par une intégrale semi-convergente.

Ce n'est pas le cas car $\int_0^\theta f(t)p(t)dt$ ne converge pas quand $\theta \to T_-$ puisque $\int_{X_j^+} f(t)p(t)dt \geqslant \frac{j}{2}$. ■

9. - COMPARAISON AUX ESPACES A POIDS

On note, pour $q > 0$,

$$L^1_{-q}(0,T) = \left\{ v \mid \int_0^T (T-t)^{-q} |v(t)|\, dt < \infty \right\}.$$

$$L^\infty_q(0,T) = \left\{ v \mid \mathrm{Sup\ ess}\ (T-t)^q |v(t)| < \infty \right\}.$$

Notons que, quand q croît, L^1_{-q} décroît et L^∞_q croît.
On va montrer que W est presque égal à $L^2 \cap L^1_{-3/4}$ et que W' est presque égal à $L^2 + L^\infty_{3/4}$.

THEOREME 14. *Pour tout* $q < \frac{3}{4}$

$$L^2(0,T) \cap L^1_{-3/4}(0,T) \subset W \subset L^2(0,T) \cap L^1_{-q}(0,T)$$

$$L^2(0,T) + L^\infty_q(0,T) \subset W' \subset L^2(0,T) + L^\infty_{3/4}(0,T). \qquad \blacksquare$$

Démonstration. i) On a $(2T-t-s)^{-3/2} \leqslant 2^{-3/4}(T-t)^{-3/4}(T-s)^{-3/4}$ donc

$$\int_0^T \int_0^T (2T-t-s)^{-3/2} \, |v(t)| \, |v(s)| \, dtds \leqslant 2^{-3/4} \left(\int_0^T (T-t)^{-3/4} \, |v(t)| \, dt \right)^2$$

d'où $L^2(0,T) \cap L^1_{-3/4}(0,T) \subset W$.

ii) On a vu au lemme 10 que, pour $q < \frac{3}{4}$, $(T-\cdot)^{-q}$ appartient à U' ; donc $(T-\cdot)^{-q} \in W'$.

Le théorème 9 montre alors que, pour tout $v \in W$, on a $(T-\cdot)^{-q} v \in L^1(0,T)$ d'où $W \subset L^2(0,T) \cap L^1_{-q}(0,T)$.

iii) On obtient l'encadrement de W' par passage au dual car $(L^1_{-q}(0,T))' = L^\infty_q(0,T)$. $\blacksquare$

Remarque. On a $W \neq L^2(0,T) \cap L^1_{-3/4}(0,T)$.

Nous le montrons en construisant une fonction de $L^2 \cap L^1_{-3/4}$ qui n'appartient pas à W, ce que nous ne ferons pas ici car ce résultat est accessoire. $\blacksquare$

Remarque. L'espace U n'est pas voisin d'un de ces espaces à poids. On a au mieux

$$L^2(0,T) \cap L^1_{-3/4}(0,T) \subset U \subset L^2(0,T) \cap L^1_{-p}(0,T) \qquad \forall\, p < \frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

Remarque. Par analogie avec les espaces à poids on pourrait espérer que $W' = L^2(0,T) + X$ où

$$X = \left\{ v \mid \operatorname*{Sup\,ess}_{s,t} (2T-t-s)^{-3/2} \, |v(t)| \, |v(s)| < \infty \right\}.$$

Ceci est faux car $X = L^\infty(0,T)$ comme on le vérifie aisément en fixant s tel que $s < T$ et $|v(s)| > 0$. $\blacksquare$

REFERENCES

[1] R.A. ADAMS. *«Sobolev Spaces»*. Acad. Press, 1975.

[2] J.L. LIONS. *«Function spaces and optimal control of distributed systems, chapitre 2»*. Universidade Federal de Rio de Janeiro. Istituto de Matematico. Notes, 1980.

[3] J.L. LIONS. *«Some methods in the mathematical analysis of systems and their control Chapitre 4»*.

[4] LI TA-TSIEN (LI DA-QUIAN). *«Propriétés d'espaces fonctionnels intervenant en contrôle optimal»*. C.R.A.S., 289, 1979, p. 687-690.

[5] LI TA-TSIEN (LI DA-QUIAN). *«Propriétés d'espaces fonctionnels et problèmes de contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations paraboliques»*. C.R.A.S. 290, 1980, p. 697-700.

[6] LI TA-TSIEN (LI DA-QUIAN). *«Propriétés d'espaces fonctionnels intervenant en contrôle optimal dans le cas où les opérateurs elliptiques sont d'ordre 2m, $m \geqslant 1$ entier»*. A paraître.

[7] SHI CHU-CHUNG. *«Sur une classe d'espaces fonctionnels intervenant en contrôle optimal»*. C.R.A.S. 290, 1980, p. 761-764.

[8] SHI CHU-CHUNG et J. SIMON. *«Sur un espace intervenant en contrôle ponctuel»*. C.R.A.S. 290, 1980, p. 693-696.

[9] J. SIMON. *«Contrôle de la solution d'une équation parabolique avec données ponctuelles»*. J. of Systems Sci. and Math. Sci. n° 4 vol 2 (1982). Acad. Sinica, Pékin.

[10] L. WHITE. *«Point control of pseudo-parabolic problems»*. A paraître.

(Manuscrit reçu le 15 mai 1982)