ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

BENOÎT PERTHAME

**Inéquations quasi-variationnelles et équations de Hamilton-Jacobi-Bellman dans $R^N$**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série*, tome 5, nº 3-4 (1983), p. 237-257
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1983_5_5_3-4_237_0>

© Université Paul Sabatier, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol V, 1983, P. 237 à 257

# INEQUATIONS QUASI-VARIATIONNELLES ET EQUATIONS DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN DANS $R^N$

**Benoît Perthame** *(1)*

*(1) E.N.S. 45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cédex 05 - France.*

**Résumé** : Nous étudions dans cet article l'existence et l'unicité des solutions d'inéquations quasi-variationnelles pour les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman : On cherche u solution de

$$\mathrm{Max}\left(\underset{1 \leqslant i \leqslant m}{\mathrm{Max}} \quad (A^i u - f^i), u - Mu\right) = 0 \quad \text{p.p. dans } R^N,\ u \in W^{2,\infty}(R^N),$$

où $(A^i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ sont des opérateurs uniformément elliptiques du 2ème ordre et où $Mu(x) = k + \inf\limits_{\xi \geqslant 0} u(x+\xi)$. Nous résolvons ainsi un problème mixte de contrôle impulsionnel et de contrôle continu de diffusions dans $R^N$.

**Summary** : We study in this paper the existence and uniqueness of solutions of quasi-variational inequalities for Hamilton-Jacobi-Bellman equations : we look for u solution of

$$\mathrm{Max}\left(\underset{1 \leqslant i \leqslant m}{\mathrm{Max}} \quad (A^i u - f^i), u - Mu\right) = 0 \quad \text{a.e. in } R^N,\ u \in W^{2,\infty}(R^N)$$

where $(A^i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ are uniformly second-order elliptic operators and $Mu(x) = k + \inf\limits_{\xi \geqslant 0} u(x+\xi)$.

This solves a mixed problem of impulse and continuous control of diffusion processes in $R^N$.

## INTRODUCTION

Dans cet article, nous nous intéressons à la résolution des inéquations quasi-variationnelles pour les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman c'est-à-dire à la résolution de problèmes du type :

$$(1)\qquad \operatorname{Max}\left(\operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant m}(A^i u-f^i),\ u-Mu\right)=0 \quad \text{p.p. dans } R^N,\ u\in W^{2,\infty}(R^N),$$

où les opérateurs $(A^i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ sont uniformément elliptiques du second ordre à coefficients réguliers (les hypothèses précises sont détaillées ci-dessous) et où l'opérateur M est défini sur $C_b(R^N)$ par :

$$(2)\qquad Mu(x)=k+\inf_{\xi\geqslant 0} u(x+\xi),$$

où $k>0$ est donné et $\xi\geqslant 0$ signifie : $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_N)$ avec $\xi_i\geqslant 0$ pour tout i. Enfin les fonctions $(f^i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ sont des données régulières.

L'étude de (1) (avec M donné par (2)) est motivée par le contrôle stochastique. Rappelons que les inéquations quasi-variationnelles i.e. (1) dans le cas où $m=1$, ont été introduites par A. Bensoussan et J.L. Lions [1], [2] en vue de résoudre les problèmes de contrôle impulsionnel stochastique. D'autre part si l'obstacle Mu n'est pas présent dans (1) (i.e. si $k=+\infty$) alors (1) se réduit aux équations de Hamilton-Jacobi-Bellman intervenant en contrôle stochastique continu (cf. N.V. Krylov [9], P.L. Lions [11], [12]) : ce problème a été résolu par P.L. Lions [12], L.C. Evans et P.L. Lions [7]. Dans le cas général, (1) correspond à un problème mixte de contrôle impulsionnel et continu de diffusions dans $R^N$ : nous détaillerons cette interprétation dans [16].

Signalons également que la formulation même du problème (de par la non-linéarité dûe au Max) nécessite la recherche de solutions «régulières» i.e. appartenant à $W^{2,\infty}(R^N)$. Ceci correspond dans le cas particulier où $m=1$ à l'existence de solutions régulières des I.Q.V. (ou à la régularité des solutions faibles déterminées dans [1], [2]), rappelons que ce problème a été résolu par L.Caffarelli et A. Friedman [4], [5], U. Mosco [15]...

Nous montrons dans ce qui suit que (1) admet une unique solution (cf. section I pour un énoncé précis). Nous indiquons également dans la section V quelques extensions, notamment au cas d'opérateurs M plus généraux (nous utiliserons une représentation des opérateurs M introduite dans P.L. Lions et B. Perthame [14]).

Pour résoudre (1), nous étudierons tout d'abord (cf. section II) l'existence et l'unicité pour le problème de l'obstacle associé aux équations de H.J.B. :

$$(3)\qquad \operatorname{Max}\left(\operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant m}(A^i u-f^i),\ u-\psi\right)=0, \quad \text{p.p. dans } R^N,\ u\in W^{2,\infty}(R^N),$$

où $\psi$ est donnée. De tels problèmes ont été étudiés par S. Lenhart [10] dans le cas où $\psi \in W^{2,\infty}(R^N)$. Il nous sera ici nécessaire de traiter le cas d'obstacles $\psi$ plus généraux (cf. II). Nous montrons ensuite (cf. section III) l'unicité d'une solution de (1) : pour cela nous adaptons un argument dû à B. Hanouzet et J.L. Lions [8] . Enfin la section IV est consacrée à la preuve de l'existence par des techniques d'estimations a priori fortement inspirées de P.L. Lions [12] et de L.C. Evans et P.L. Lions [7] : nous étendons légèrement la méthode introduite dans [7] , [12] afin de pouvoir montrer des estimations a priori uniformes pour la suite construite par le procédé itératif introduit dans [1] , [2] , utilisé dans la résolution des I.Q.V. .

Signalons que dans une étude ultérieure (B. Perthame [16] ) nous traiterons le cas où (1) est posé dans un ouvert borné de $R^N$ avec des conditions aux limites de Dirichlet, l'interprétation probabiliste de (1) et le cas d'opérateurs $A^i$ dégénérés.

## I. - NOTATIONS ET RESULTAT PRINCIPAL

Dans tout ce qui suit nous ferons les hypothèses suivantes :

$$a^i_{jk}\,,\ b^i_j\,,\ c^i \text{ et } f^i \in W^{2,\infty}(R^N), \tag{4}$$

$$\exists\, \nu > 0,\ \forall\, i,\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ \ \forall\, \xi = (\xi_1,\dots,\xi_N) \in R^N, \tag{5}$$

$$\sum_{j,k} a^i_{jk}\, \xi_j\, \xi_k \geqslant \nu\, |\xi|^2,$$

$$\exists\, \lambda_o > 0,\ \forall\, x \in R^N \qquad c^i(x) \geqslant \lambda_o\,. \tag{6}$$

Nous noterons $A^i$ l'opérateur défini par :

$$A^i = -\sum_{j,k} a^i_{jk}(x)\ \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k} + \sum_j b^i_j(x)\ \frac{\partial}{\partial x_j} + c^i(x).$$

Sous les hypothèses (4)-(6) nous avons le :

THEOREME 1. *Il existe une unique solution de (1) appartenant à* $W^{2,\infty}(R^N)$.

Par la suite nous noterons $D^2_+$ le cône des fonctions $\psi$ semi-concaves sur $R^N$ c'est-à-dire des fonctions $\psi$ bornées vérifiant :

$$\exists\, C > 0,\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} \leqslant C \quad \text{dans } \mathcal{D}'(R^N),\ \ \forall\, \chi \in R^N : |\chi| = 1.$$

Cette condition est d'ailleurs équivalente au fait suivant :

$$\psi(x) - \frac{1}{2} C\,|x|^2 \quad \text{est concave sur } R^N.$$

Nous noterons pour une telle fonction :

$$\| \psi \|_{2,+} = \inf \left\{ C \geqslant 0,\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} \leqslant C,\quad \forall \chi \in R^N,\quad |\chi| = 1 \right\}. \tag{7}$$

Remarquons également que si $\psi \in D^2_+$ alors nécessairement $\psi \in W^{1,\infty}(R^N)$ et :

$$\| D\psi \|_{L^\infty(R^N)} \leqslant 2\, \| \psi \|^{1/2}_{2,+}\ \| \psi \|^{1/2}_{L^\infty(R^N)}.$$

Nous utiliserons fréquemment la convention de sommation par rapport à l'indice répété.

## II. - LE PROBLEME DE L'OBSTACLE

PROPOSITION 1. *Soit* $\psi \in D^2_+$ *; sous les hypothèses* (4)-(6) *il existe une unique solution de* (3).

*Remarque.* Le cas $\psi \in W^{2,\infty}(R^N)$ est traité dans S. Lenhart [10]. Il nous est nécessaire de généraliser ce résultat car même si $u \in C^\infty_b(R^N)$, $Mu \notin W^{2,\infty}(R^N)$ ; par contre $Mu \in D^2_+$ .

*Démonstration.* La démonstration de cette proposition s'obtient facilement à l'aide des estimations introduites dans [7], [12]. Pour cela nous introduisons le système pénalisé suivant :

**1. - Le problème pénalisé**

$$(8)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} A^1 u^1_\epsilon + \beta_\epsilon(u^1_\epsilon - u^2_\epsilon) + \beta_\epsilon(u^1_\epsilon - \psi) = f^1, & \text{p.p. dans } R^N, \\ A^2 u^2_\epsilon + \beta_\epsilon(u^2_\epsilon - u^3_\epsilon) + \beta_\epsilon(u^2_\epsilon - \psi) = f^2, & \text{p.p. dans } R^N, \\ \vdots & \\ A^m u^m_\epsilon + \beta_\epsilon(u^m_\epsilon - u^1_\epsilon) + \beta_\epsilon(u^m_\epsilon - \psi) = f^m, & \text{p.p. dans } R^N, \end{array} \right.$$

où $\beta_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\beta$ pour $\epsilon > 0$, avec $\beta \in C^\infty(\mathrm{IR})$, $\beta$ est croissante convexe, $\beta(t) = 0$ si $t \leqslant 0$ et $\beta(t) > 0$ si $t > 0$. De plus nous confondrons $u^1_\epsilon$ et $u^{m+1}_\epsilon$.

Comme les estimations a priori démontrées ci-dessous ne dépendent que des normes $W^{2,\infty}$ des coefficients $a^i_{jk}$, $b^i_j$, $c^i$ et $f^i$ et de $\| \psi \|_{2,+}$, nous pouvons supposer sans restreindre la généralité que ces fonctions sont régulières ($C^\infty_b(R^N)$) ; le cas général s'en déduisant par un passage à limite semblable à celui du 4). On obtient facilement le :

LEMME 1. *Il existe une unique solution* $(u^i_\epsilon)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in (C^4_b(R^N))^m$ *de* (8), *de plus :*

(9) $$\| u^i_\epsilon \|_{L^\infty(R^N)} \leqslant \operatorname{Max}\left( \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{\| f^i \|_{L^\infty(R^N)}}{\lambda_o}, \| \psi \|_{L^\infty} \right).$$

La proposition (1) se démontre alors par l'obtention d'estimations $W^{2,\infty}$.

## 2. - Estimation $W^{1,\infty}$

Pour $f \in W^{1,\infty}(R^N)$, notons $Z[f]$ la fonction définie par :

(10) $$Z[f]\,(x) = | Df(x)|^2 + \mu_o(C_o - f(x))^2,$$

où $C_o$ et $\mu_o$ sont des constantes fixées ultérieurement. On obtient des majorations de $\| u^i_\epsilon \|_{W^{1,\infty}(R^N)}$, indépendamment de $\epsilon$, grâce au :

LEMME 2. *Il existe* $\mu_o > 0$ *(dépendant de* $a^i_{jk}$, $b^i_j$ *et* $c^i$ *uniquement) tel que, si*

$$C_o \geqslant \operatorname{Max}\left( \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{\| f^i \|_{L^\infty}}{\lambda_o}, \| \psi \|_{L^\infty} \right)$$

*alors :*

(11) $$\| Z\,[u^i_\epsilon] \|_{L^\infty} \leqslant \operatorname{Max}\left( C, \| Z\,[\psi] \|_{L^\infty} \right),$$

*où* $C > 0$, *ne dépend que du choix de* $C_o$ *et des coefficients* $a^i_{jk}$, $b^i_j$, $c^i$ *et* $f^i$.

Ce lemme se démontre comme le résultat analogue de [12] ; un calcul facile donne :

(12) $$\begin{aligned} - a^i_{jk} \frac{\partial^2 Z\,[u^i_\epsilon]}{\partial x_j\, \partial x_k}(x) &\leqslant -2\mu_o\, \nu\, | Du^i_\epsilon(x)|^2 + C\, | Du^i_\epsilon(x)|^2 + C\mu_o \\ &\quad - \beta'_\epsilon(u^i_\epsilon - u^{i+1}_\epsilon) \left\{ Z\,[u^i_\epsilon] - Z\,[u^{i+1}_\epsilon] \right\}(x) \\ &\quad - \beta'_\epsilon(u^i_\epsilon - \psi) \left\{ Z\,[u^i_\epsilon] - Z\,[\psi] \right\}(x)\ . \end{aligned}$$

Le principe du maximum montre alors que s'il existe un point $x_o$ et un indice $i_o$ tels que :

(13)
$$\sup_{i,x} Z[u_\epsilon^i](x) = \delta = Z[u_\epsilon^{i_o}](x_o),$$

nous savons :

$$-a_{jk}^{i_o} \frac{\partial^2 Z[u_\epsilon^{i_o}]}{\partial x_j \, \partial x_k}(x_o) \geqslant 0.$$

La formule (12) donne alors le résultat par un choix convenable de $\mu_o$. Le problème est que la borne supérieure dans (13) n'est pas toujours atteinte car $u_\epsilon^i$ n'est pas définie sur un compact mais sur $R^N$ entier. Nous sommes alors amenés à poser :

$$Z_\alpha^i(x) = e^{-\alpha |x|^2} Z[u_\epsilon^i](x),$$

et on vérifie que :

(14)
$$e^{\alpha |x|^2}\left(-a_{jk}^i \frac{\partial^2 Z_\alpha^i}{\partial x_j \, \partial x_k}\right)(x) = -a_{jk}^i \frac{\partial^2 Z[u_\epsilon^i]}{\partial x_j \, \partial x_k}(x) +$$
$$+ (a_{jk}^i + a_{kj}^i)(2\alpha x_k) \frac{\partial [u_\epsilon^i]}{\partial x_j}(x) - a_{jk}^i (4\alpha^2 x_j x_k) Z[u_\epsilon^i](x) + 2\alpha a_{jk}^i \delta_{jk} Z[u_\epsilon^i](x).$$

Puisque $Z_\alpha^i$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini nous avons maintenant :

$$\exists\, x_\alpha \in R^N, \quad \exists\, i_\alpha \quad \text{tels que : } \max_{x,i} Z_\alpha^i(x) = Z_\alpha^{i_\alpha}(x_\alpha) = \delta_\alpha .$$

Mais on a évidemment :

$$\delta_\alpha \underset{\alpha \to 0}{\rightarrow} \delta,$$

et donc :

$$\alpha |x_\alpha|^2 \underset{\alpha \to 0}{\rightarrow} 0 .$$

Il s'ensuit d'après (14) que :

$$0 \leqslant -a_{jk}^{i_\alpha} \frac{\partial^2 Z[u_\epsilon^{i_\alpha}]}{\partial x_j \, \partial x_k}(x_\alpha) + 0(\alpha),$$

ou encore :

$$0 \leqslant 2\mu_o \nu \,|Du_\epsilon^{i_\alpha}(x_\alpha)|^2 + C\,|Du_\epsilon^{i_\alpha}(x_\alpha)|^2 + C\mu_o$$
$$-\beta'_\epsilon\,(u_\epsilon^{i_\alpha} - u_\epsilon^{i_\alpha+1})\left\{ Z\,[u_\epsilon^{i_\alpha}] - Z\,[u_\epsilon^{i_\alpha+1}]\right\}(x_\alpha)$$
$$-\beta'_\epsilon\,(u_\epsilon^{i_\alpha} - \psi)\left\{ Z\,[u_\epsilon^{i_\alpha}] - Z\,[\psi]\right\}(x_\alpha) + 0(\alpha),$$

i.e. :

$$Z\,[u^{i_\alpha}]\,(x_\alpha) \leqslant \mathrm{Max}\,(C, Z\,[\psi]\,(x_\alpha)) + 0(\alpha).$$

Quand $\alpha$ tend vers $0^+$, nous obtenons le résultat.

*Remarque.* Dans toutes les estimations qui suivent la même difficulté apparaîtra et pourra être traitée par le même argument de troncature. Aussi ne le répéterons-nous pas et supposerons toujours que les extrema sont atteints.

## 3. - Estimations $W^{2,\infty}$

Comme précédemment nous adaptons convenablement les méthodes de P.L. Lions [12] et L.C. Evans et P.L. Lions [7] . Introduisons l'ensemble V des matrices $\alpha$, symétriques, de dimension N X N, telles que :

$$\alpha_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \geqslant \nu\,|\xi|^2 \qquad \forall\, \xi \in R^N,$$

$$\|\alpha\| \leqslant \sup_{i,x}\ \|(a^i_{jk})\,(x)\|\quad (\text{norme de la matrice } (a^i_{jk})_{j,k}).$$

Supposons de plus, pour simplifier les notations, que $\nu = 1$. Soient $\alpha \in V$ et $K \geqslant 0$ ; notons, pour $f \in W^{2,\infty}(R^N)$, $W^\alpha_K\,[f]$ la fonction définie par :

$$W^\alpha_K\,[f]\,(x) = \|D^2 f(x)\|^2 + 2N^2 K\,\mathrm{tr}(\alpha\,.\,D^2 f)(x) + \mu\,|Df(x)|^2, \tag{15}$$

où $\mu$ est fixé dans la démonstration du lemme ci-dessous ($\mu$ dépend uniquement de $a^i_{jk}$, $b^i_j$ , $c^i$).

LEMME 3. *Pour tout* K *vérifiant :* $K \geqslant \sup_{i,x}\ \|D^2 u^i_\epsilon(x)\|$, *pour tout* $\alpha \in V$, *nous avons :*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m}\ \|W^\alpha_K\,[u^i_\epsilon]\|_{L^\infty} \leqslant \mathrm{Max}\left(C + CK + \frac{K^2}{2}, C + C\,\|\psi\|_{2,+}\,K\right), \tag{16}$$

*où* C *ne dépend que de* $a^i_{jk}$ , $b^i_j$ , $c^i$, $f^i$ *et* $\|\psi\|_{W^{1,\infty}}$.

*Démonstration.* On suppose que :

$$\exists\, x_1 \in R^N,\ \exists\, i_1,\qquad \underset{1\leqslant i\leqslant m}{\mathrm{Max}}\ W_K^\alpha[u_\epsilon^i] = W_K^\alpha[u_\epsilon^{i_1}](x_1),$$

(rappelons que si ce n'est pas le cas on considère la fonction définie par : $e^{-\beta|x|^2}\, W_K^\alpha[u_\epsilon^i]$ et on adapte le raisonnement du lemme 2).

Par un calcul facile et le principe du maximum on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant -a_{jk}^{i_1}(x_1)\,\frac{\partial^2 W_K^\alpha[u_\epsilon^{i_1}](x_1)}{\partial x_j\,\partial x_k}\\
&\leqslant -\mu \,\| D^2u_\epsilon^{i_1}(x_1)\|^2 + C\,\| D^2u_\epsilon^{i_1}(x_1)\|^2 + CK^2 + C\mu\\
&\quad -\beta'_\epsilon\,(u_\epsilon^{i_1} - u_\epsilon^{i_1+1})\,\Big\{ W_K^\alpha[u_\epsilon^{i_1}] - W_K^\alpha[u_\epsilon^{i_1+1}]\Big\}(x_1)\\
&\quad -\beta'_\epsilon\,(u_\epsilon^{i_1} - \psi)\,\Big\{ W_K^\alpha[u_\epsilon^{i_1}] - \mathrm{tr}\,[\,(D^2u_\epsilon^{i_1} + 2N^2K\alpha)\,.\,D^2\psi]\\
&\quad -\mu\,(D\psi, Du_\epsilon^{i_1})\Big\}\,(x_1).
\end{aligned}$$

Mais en choisissant $\mu$ convenablement, et en remarquant que la matrice $(D^2u_\epsilon^{i_1} + 2N^2K\alpha)$ est positive, il vient :

ou bien :

$$\begin{aligned}
W_K^\alpha[u_\epsilon^{i_1}](x_1) &\leqslant \mathrm{tr}\ \Big\{ (D^2u_\epsilon^{i_1} + 2N^2K\alpha)\,.\,D^2\psi \Big\}\ (x_1) + \mu\,(D\psi, Du_\epsilon^{i_1})\,(x_1)\\
&\leqslant CK\,\|\psi\|_{2,+} + C\mu,
\end{aligned}$$

ou bien :

$$(\mu - C)\,\| D^2u_\epsilon^{i_1}(x_1)\|^2 \leqslant C\,K^2 + C\,\mu,$$

d'où, dans tous les cas, l'inégalité (16).

Les estimations $W^{2,\infty}$ s'obtiennent à partir du lemme 3 grâce à un choix convenable de $\alpha$ et K (comme dans [7]) :

(17) $$K_\epsilon = \sup_{i,x}\ \| D^2u_\epsilon^i(x)\|,$$

On choisit $x_0 \in R^N$ et $i_0$ tels que :

(18) $$\| D^2u_\epsilon^{i_0}(x_0)\|^2 \geqslant \frac{3}{4}K_\epsilon^2,$$

la matrice symétrique $D^2 \overset{i}{u}{}^{o}_{\epsilon}(x_o)$ est diagonalisable dans une base orthonormée $B$ et on note $\alpha$ la matrice :

(19) $$\alpha = (\overset{i}{a}{}^{o}_{jk}(x_0)\delta_{jk}) \qquad \text{dans la base } B.$$

D'après le choix de $\alpha$ nous avons, dans la base $B$ :

$$\mathrm{tr}(\alpha \,.\, D^2 \overset{i}{u}{}^{o}_{\epsilon}(x_o)) = \overset{i}{a}{}^{o}_{jj} \frac{\partial^2 \overset{i}{u}{}^{o}}{\partial x_j \,\partial x_j}(x_o) = \left\{ -\overset{i}{f}{}^{o} + \overset{i}{b}{}^{o}_{j} \frac{\partial \overset{i}{u}{}^{o}_{\epsilon}}{\partial x_j} + \overset{i}{c}{}^{o}\, \overset{i}{u}{}^{o}_{\epsilon} + \beta_\epsilon(\overset{i}{u}{}^{o}_{\epsilon} - \overset{i+1}{u}{}^{o}_{\epsilon}) \right\}(x_o)$$
$$\geqslant -C,$$

et donc :

(20) $$\frac{3}{4}K_\epsilon^2 - CK_\epsilon - C \leqslant W_K^\alpha [\overset{i}{u}{}^{o}_{\epsilon}]\,(x_o)$$
$$\leqslant \underset{1 \leqslant i \leqslant m}{\mathrm{Max}} \; \| W_K^\alpha [u_\epsilon^i]\,(x) \|_{L^\infty}$$
$$\leqslant \mathrm{Max}\left( C + CK_\epsilon + \frac{K_\epsilon^2}{2},\; C + CK_\epsilon \,\|\psi\|_{2,+} \right),$$

d'où : $$K_\epsilon \leqslant C,$$

avec C constante ne dépendant que de $a^i_{jk}$, $b^i_j$, $c^i$, $f^i$ et $\|\psi\|_{2,+}$. Et finalement :

$$\| D^2 u_\epsilon^i \|_{L^\infty} \leqslant C \qquad \forall\, i,\ 1 \leqslant i \leqslant m.$$

**4. - Passage à la limite**

Pour obtenir (3) à partir de (8) il suffit de faire tendre $\epsilon$ vers 0. Ce passage à la limite se fait exactement comme dans [6] , nous ne le reprenons donc pas ici et la proposition (1) est démontrée.

## III. - UNICITE DE LA SOLUTION DE (1)

Adaptons la démonstration dûe à B. Hanouzet et à J.L. Joly [8] . Nous nous ramenons au cas où les fonctions $f^i$ et $\psi$ sont non-négatives par addition de constantes à u et $f^i$. Il vient alors :

LEMME 4. *Toute solution de* (1) (*ou de* (3)) *est non-négative.*

*Démonstration.* Pour (1) par exemple. Soit u une solution de (1). On peut supposer (cf. remarque du II.2) que :

$$\exists\, x_o\,,\ u(x_o) = \min_{x \in R^N} u(x) = \delta.$$

Mais alors :

$$Mu(x_o) = k + \inf_{\xi \geqslant 0} u(x_o+\xi) = \delta + k > u(x_o),$$

il s'ensuit que dans une boule B de centre $x_o$, on a :

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} (A^i u - f^i) = 0 \qquad \text{p.p. dans B.}$$

Mais le principe du maximum de Bony [3] montre alors que si $\delta > 0$ :

$$\forall\, i\,,\ \liminf_{x \to x_o} \operatorname{ess} (A^i u(x)) \leqslant \lambda_o\, \delta < 0,$$

d'où une contradiction et $\delta \geqslant 0$.

Grâce à ce résultat nous sommes ramenés à montrer l'unicité des solutions positives de (1). Pour cela construisons un opérateur T, qui à $\omega \in D^2_+$, $\omega \geqslant 0$, associe $u = T(\omega)$, solution de (3) avec $\psi = M(\omega)$. (Remarquons que si $\omega \in D^2_+$, $M\omega \in D^2_+$ ; un résultat analogue est montré dans le V). On vérifie facilement que T *est croissant et concave.*

Notons alors $u^o$ la solution de :

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} (A^i u^o - f^i) = 0 \qquad \text{p.p. dans } R^N,\ u^o \in W^{2,\infty}(R^N)\ ; \tag{21}$$

l'existence de $u^o$ est montrée dans [7], [12]. Choisissons $\mu_1 \in\, ]0,1[$ tel que :

$$\mu_1 \, \| u^o \|_{L^\infty} \leqslant k. \tag{22}$$

Nous pouvons établir, comme dans [8], le :

LEMME 5. *Soient* $\theta \in [0,1]$, $\varphi$ *et* $\psi$ *deux fonctions positives de* $W^{2,\infty}(R^N)$ *vérifiant* $\psi - \varphi \leqslant \theta\psi$, *alors :*

$$T(\psi) - T(\varphi) \leqslant \theta(1-\mu_1)T(\psi).$$

*Démonstration.* L'hypothèse du lemme s'écrit :

$$(1-\theta)\psi + \theta\ .\ 0 \leqslant \varphi,$$

la concavité et la croissance de T donnent donc :

$$(1-\theta)\ T(\psi) + \theta T(0) \leqslant T(\varphi).$$

Il reste à montrer que :

$$-T(0) \leqslant -\mu_1 T(\varphi),$$

Or on a aisément :

$$u^o \geqslant T(\varphi),$$

il suffit donc de vérifier que :

$$T(0) \geqslant \mu_1 u^o.$$

Mais la solution v de :

$$\text{(23)} \qquad \operatorname{Max}\left( \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant m} (A^i v - f^i),\ v - \mu_1 \ \| u^o \|_{L^\infty} \right) = 0 \quad \text{p.p. dans } R^N,\ v \in W^{2,\infty}(R^N),$$

vérifie $v \leqslant T(0)$ grâce au choix de $\mu_1$ en (22) et par croissance de T. De plus en comparant (23) et :

$$\operatorname{Max}\left( \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant m} (A^1(\mu_1 u^o) - f^i),\ \mu_1 u^o - \mu_1 \ \| u^o \|_{L^\infty} \right) \leqslant 0,$$

on obtient que :

$$\mu_1 u \leqslant v,$$

d'où l'inégalité du lemme 5.

PROPOSITION 2. *La solution de* (1), *si elle existe, est unique.*

*Démonstration.* D'après le lemme 4, deux éventuelles solutions u et v de (1) sont positives, donc :

$$u - v \leqslant u,$$

en appliquant le lemme 5, il vient :

$$Tu - Tv \leqslant (1-\mu_1)Tu,$$

Comme $Tu = u$ et $Tv = v$, nous obtenons :

$$u - v \leqslant (1-\mu_1)^p\, u, \quad \forall\, p \in N,$$

i.e. : $$u \leqslant v.$$

De même $v \leqslant u$, d'où le résultat.

*Remarque.* Cette démonstration est tout à fait semblable à celle de B. Hanouzet et J.L. Joly [8].

## IV. - EXISTENCE

On se ramène comme précédemment au cas où $f^i \geqslant 0$. On utilise alors la méthode itérative introduite dans [1], [2]. Soit $u^o$ la solution de (21), on construit par récurrence la suite $(u^n)$ : $u^{n+1} = T\, u^n$ pour $n \geqslant 0$. On montre facilement que $u^n \geqslant 0$, $u^n$ décroît avec n vers une fonction u. L'étape fondamentale est alors d'obtenir des estimations $W^{1,\infty}$ puis $W^{2,\infty}$ et de passer à la limite lorsque n tend vers l'infini.

### 1. - Estimations $W^{1,\infty}$

Puisque la suite $u^n$ est décroissante et positive, nous avons :

$$\| u^n \|_{L^\infty} \leqslant \| u^o \|_{L^\infty},$$

on peut alors choisir $C_o = k + \| u^o \|_{L^\infty}$ dans le lemme 2 et il existe donc $C > 0$ tel que :

$$\| Z\,[u^{n+1}] \|_{L^\infty} \leqslant \operatorname{Max}\left( C, \| Z\,[Mu^n] \|_{L^\infty} \right).$$

On conclut alors en utilisant le :

LEMME 6.

$$\| Z\,[Mu] \|_{L^\infty} \leqslant \| Z\,[u] \|_{L^\infty},\ \forall\, u \in W^{1,\infty}(R^N),\ 0 \leqslant u \leqslant C_o\,.$$

*Démonstration.* Soient $u_n \in C_b^\infty(R^N)$ une suite de fonctions telles que :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\to} u \quad \text{dans } C_b(R^N),$$

$$\| Z[u_n] \|_{L^\infty} \leqslant \| Z[u] \|_{L^\infty}.$$

En notant $(e_1,\ldots,e_N)$ la base canonique de $R^N$, il vient :

$$Z[Mu_n](x) = \sum_{i=1}^{n} \left( \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\inf\limits_{\xi\geqslant 0} u_n(x+he_i+\xi) - \inf\limits_{\xi\geqslant 0} u_n(x+\xi)}{h} \right)^2$$

$$+ \mu_o \left| C_o - k - \inf_{\xi\geqslant 0} u_n(x+\xi) \right|^2$$

$$\leqslant \liminf_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \sup_{\xi\geqslant 0} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{u_n(x+he_i+\xi) - u_n(x+\xi)}{h} \right)^2 + \mu_o (C_o - u_n(x+\xi))^2 \right\}$$

car on a bien sûr :

$$0 \leqslant C_o - k - \inf_{\xi\geqslant 0} u_n(x+\xi) \leqslant C_o - \inf_{\xi\geqslant 0} u_n(x+\xi),$$

et :

$$0 \leqslant \frac{1}{h}\left( \inf_{\xi\geqslant 0} u_n(x+he_i+\xi) - \inf_{\xi\geqslant 0} u_n(x+\xi) \right).$$

Nous avons donc :

$$Z[Mu_n](x) \leqslant \liminf_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \sup_{\substack{\xi\geqslant 0\\ 0\leqslant\theta\leqslant 1}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x+\xi+\theta he_i) \right)^2 + \mu_o [C_o - u_n(x+\xi)]^2 \right\}$$

$$\leqslant \| Z[u_n] \|_{L^\infty}.$$

Remarquant alors que :

$$Mu_n \overset{n\to\infty}{\to} Mu \qquad \text{dans } C_b(R^N),$$

il vient :

$$\| Z\,[Mu] \|_{L^\infty} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \| Z\,[Mu_n] \|_{L^\infty} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \| Z\,[u_n] \|_{L^\infty}$$

$$\leqslant \| Z\,[u] \|_{L^\infty} ,$$

d'où le lemme 6.

## 2. - Estimations $W^{2,\infty}$

Nous utiliserons, pour obtenir ces estimations, un lemme préliminaire :

LEMME 7. *Soient $\alpha$ une matrice positive, $\beta \in R^N$ et $v \in W^{2,\infty}(R^N)$, on a :*

(24) $$\mathrm{tr}(\alpha\,.\,D^2(Mv)) + \beta\,.\,D(Mv) \leqslant \| \mathrm{tr}(\alpha\,.\,D^2 v) + \beta\,.\,Dv \|_{L^\infty} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(R^N).$$

*Démonstration.* Comme pour le lemme 6, soit $v_n \in C_b^\infty(R^N)$ une suite de fonctions telles que :

$$v_n \underset{n\to\infty}{\to} v \qquad \text{dans } C_b(R^N),$$

$$\| \mathrm{tr}(\alpha\,.\,D^2 v_n) + \beta\,.\,Dv_n \|_{L^\infty} \leqslant \| \mathrm{tr}(\alpha\,.\,D^2 v) + \beta\,.\,Dv \|_{L^\infty}.$$

On montre d'abord le résultat pour les fonctions $v_n$ ; pour cela choisissons une base orthonormée $(\chi_1,\dots,\chi_N)$ de $R^N$ où $\alpha$ est diagonale, notons $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ cette diagonale et, quitte à changer $\chi_i$ en $-\chi_i$, supposons $\beta \geqslant 0$. Soit alors P la matrice de passage de la base canonique de $R^N$ à $(\chi_1,\dots,\chi_N)$ :

$$[\mathrm{tr}(\alpha\,.\,D^2(Mv_n)) + \beta\,.\,D(Mv_n)]\,(x)$$

$$\leqslant \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \left\{ \alpha_i \,\frac{\inf\limits_{P\xi\geqslant 0} v_n(x+h\chi_i+\xi) + \inf\limits_{P\xi\geqslant 0} v_n(x-h\chi_i+\xi) - 2\inf\limits_{P\xi\geqslant 0} v_n(x+\xi)}{h^2} \right.$$
$$\left. + \beta_i\, \frac{\inf\limits_{P\xi\geqslant 0} v_n(x+h\chi_i+\xi) - \inf\limits_{P\xi\geqslant 0} v_n(x+\xi)}{h} \right\}$$

$$\leqslant \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \sup_{P\xi\geqslant 0} \left\{ \alpha_i \frac{v_n(x+h\chi_i+\xi)+v_n(x-h\chi_i+\xi)-2v_n(x+\xi)}{h^2} + \beta_i \frac{v_n(x+h\chi_i+\xi)-v_n(x+\xi)}{h} \right\}$$

$$\leqslant \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \sup_{P\xi\geqslant 0} \left\{ \alpha_i . \sup_{|\theta|<1} \frac{\partial^2 v_n}{\partial \chi_i^2}(x+\theta h\chi_i+\xi) + \beta_i . \sup_{|\theta|<1} \frac{\partial v_n}{\partial \chi_i}(x+\theta h\chi_i+\xi) \right\}$$

$$\leqslant \| \mathrm{tr}(\alpha . D^2 v_n) + \beta . Dv_n \|_{L^\infty}.$$

En passant à la limite dans le premier membre de l'inégalité on obtient alors :

$$\mathrm{tr}(\alpha . D^2(Mv)) + \beta . D(Mv) \leqslant \| \mathrm{tr}(\alpha . D^2 v) + \beta . Dv \|_{L^\infty} \text{ dans } \mathcal{D}'(R^N)$$

et le lemme 7 est démontré.

Il est alors facile de raffiner le lemme 3 pour obtenir le :

LEMME 3'. *Sous les hypothèses et avec les notations du lemme 3, si de plus* $\psi = Mv$ *où* $v \in W^{2,\infty}(R^N)$, *on a :*

(25) $$\| W_K^\alpha [u_\epsilon^i] \|_{L^\infty} \leqslant \mathrm{Max}\left( C + CK + \frac{K^2}{2}, \ \| W_K^\alpha [v] \|_{L^\infty} \right).$$

*Démonstration.* Soit $\psi_n \in C_b^\infty(R^N)$ une suite d'obstacles réguliers tels que :

$$\psi_n \overset{n\to\infty}{\to} \psi \quad \text{dans } C_b(R^N).$$

On peut supposer que pour toute matrice $\alpha$ et pour tout vecteur $\beta$ tels que :

$$\exists K(\alpha,\beta) \geqslant 0, \ \mathrm{tr}(\alpha . D^2\psi) + \beta . D\psi \leqslant K(\alpha,\beta) \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(R^N),$$

on ait :

(26) $$\mathrm{tr}(\alpha . D^2\psi_n) + \beta . D\psi_n \leqslant K(\alpha,\beta).$$

On montre alors (25) pour la solution du problème (8) associé à $\psi_n$ et le cas de $\psi$ s'en déduit facilement par passage à la limite. On reprend, pour cela, la démonstration du lemme 3, mais dans le cas où :

$$W_K^\alpha [u_\epsilon^{i_1}] (x_1) \leqslant \operatorname{tr} [(D^2 u_\epsilon^{i_1} + 2NK\alpha) \,.\, D^2\psi_n] (x_1) + \mu(D\psi_n, Du_\epsilon^{i_1}) (x_1) ,$$

il vient :

$$W_K^\alpha [u_\epsilon^{i_1}] (x_1) \leqslant \| \operatorname{tr} [(D^2 u_\epsilon^{i_1}(x_1) + 2NK\alpha) \,.\, D^2 v] + \mu(Du_\epsilon^{i_1}(x_1), Dv \|_{L^\infty},$$

d'après (26) et le lemme 7. Finalement on obtient :

$$W_K^\alpha [u_\epsilon^{i_1}] (x_1) \leqslant \| W_K^\alpha [v] \|_{L^\infty}.$$

Dans l'autre cas la démonstration reste identique à celle du II.3, et dans tous les cas nous obtenons (25).

Nous pouvons alors obtenir l'estimation $W^{2,\infty}$ grâce à la méthode utilisée dans le paragraphe II.3 : notons R la plus grande valeur de X telle que :

$$3/4\, X^2 - CX + C \leqslant C + CX + \frac{X^2}{2},$$

inégalité introduite dans le II.3 (cf. (20)). Etablissons par récurrence le résultat suivant :

LEMME 8. *Pour* $p \geqslant 1$ *et pour* $0 < \epsilon \leqslant 1$, *notons* $(u_{p,\epsilon}^i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ *la solution de* (8) *avec* $\psi = M\, u^{p-1}$, *alors :*

$$\text{(27)} \qquad \forall\, K \geqslant R,\ \forall\, \alpha \in V : \ \| W_K^\alpha [u_{p,\epsilon}^i] \|_{L^\infty} \leqslant C + CK + \frac{K^2}{2}$$

Remarquons avant de montrer ce lemme que s'il est vrai à l'ordre $p - 1$ alors : $\| D^2 u_{p,\epsilon}^i \|_{L^\infty} \leqslant R$ ; en effet si ce n'est pas le cas on choisit $K_\epsilon = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant m} \| D^2 u_{p,\epsilon}^i \|_{L^\infty} > R$ et $\alpha$ comme en II.2 (19). Appliquant alors le lemme 8 à l'ordre $p - 1$ et le lemme 3' nous obtenons une inégalité analogue à (20), d'où une contradiction. Remarquons également que ce lemme est vrai pour $p = 0$ et $\psi = +\infty$ d'après [7].

*Démonstration.* Supposons le résultat vrai à l'ordre $p - 1$, d'après la Remarque ci-dessus $\| D^2 u_{p,\epsilon}^i \| \leqslant R \quad \forall\, \epsilon,\ \ \forall\, i$. L'hypothèse sur K du lemme 3' est donc automatiquement vérifiée pour $K \geqslant R$, et (27) n'est que (25) avec $\psi = u^{p-1}$.

En particulier nous avons donc établi :

$$\exists\, C \geqslant 0, \quad \| u^n \|_{W^{2,\infty}(R^N)} \leqslant C.$$

**3. - Passage à la limite**

Encore une fois le passage à la limite ne pose aucun problème, il se fait comme dans [6], à l'aide du crochet d'accrétivité. On obtient facilement :

$$u^n \underset{n\to\infty}{\overset{W^{1,\infty}}{\rightarrow}} u \in W^{2,\infty},$$

d'autre part le lemme 5 montre que :

$$u^n - u^{n+1} \leqslant (1-\mu_1)^n \, \| u^o \|_{L^\infty},$$

ce qui prouve que :

$$u^n \overset{n\to\infty}{\rightarrow} u \quad \text{dans } C_b(R^N),$$

et donc :

$$Mu^n \overset{n\to\infty}{\rightarrow} Mu \quad \text{dans } C_b(R^N).$$

Nous sommes donc dans la situation de [6] et le théorème 1 s'en déduit :

$$\operatorname{Max}\left( \underset{1\leqslant i\leqslant m}{\operatorname{Max}} \; (A^i u - f^i),\ u - Mu \right) = 0 \qquad \text{p.p. dans } R^N.$$

## V. - EXTENSIONS

Le théorème 1 s'étend facilement au cas d'opérateur M plus généraux que celui présenté ci-dessus. L'interprétation et la représentation de ces opérateurs est donnée dans P.L. Lions et B. Perthame [14].

Remarquons que l'opérateur donné par (2) vérifie :

(28) M est croissant : $u \leqslant v \Rightarrow M[u] \leqslant M[v]$,

(29) M est concave : $M[\theta u + (1-\theta)v] \geqslant \theta\, M[u] + (1-\theta)\, M[v]$,

(30) $M[u+\lambda] = M[u] + \lambda$ pour $\lambda \in R$, $u \in C_b(R^N)$,

(31) $M[u](x+h) = M[u(.+h)](x)$, $\forall\, x \in R^N$, $\forall\, h \in R^N$,

(32) $$M[0] \geq k > 0.$$

Soit alors un opérateur sur $C_b(R^N)$, encore noté M, vérifiant (28)-(31). D'après [14] on a la représentation suivante :

(33) $$M[u] = \inf_{\alpha} [C(\alpha) + u * P_\alpha],$$

où les $P_\alpha$ sont des mesures de probabilités sur $R^N$. Le problème (1) pour un tel opérateur M correspond alors à un problème de contrôle continu de diffusions et de contrôle impulsionnel, la loi de l'amplitude des impulsions étant donnée par $P_\alpha$. On démontre que ce problème a une solution grâce au :

THEOREME 2. *Si* M *est donné par* (33), *et sous les hypothèses* (4)-(6) *et* (32), *il existe une unique solution de :*

$$\operatorname{Max}\left( \operatorname*{Max}_{1 \leq i \leq m} (A^i u - f^i),\ u - Mu \right) = 0 \quad \text{p.p. dans } R^N,\ u \in W^{2,\infty}(R^N).$$

*Remarque.* Pour montrer l'unicité (cf. III) il nous est nécessaire de supposer (32) i.e. $\inf_{\alpha} C(\alpha) > 0$ dans (33). Par contre l'existence, dans le théorème 2, ne nécessite pas cette hypothèse.

Le point principal de la démonstration est d'obtenir à nouveau les lemmes 6 et 7. Pour cela notons :

$$v_{(h)}(.) = v(. + h),$$

et (comme dans le lemme 7) soient $\alpha_i \geq 0$ et $\beta_i \geq 0$, pour $i \leq N$. Montrons alors le lemme 7 : soit $h > 0$ :

$$\alpha_i \frac{Mv_{(h\chi_i)} + Mv_{(-h\chi_i)} - 2Mv}{h^2} + \beta_i \frac{Mv_{(h\chi_i)} - Mv}{h}$$

$$\leq \frac{1}{h^2}\left( (\alpha_i + \beta_i h)\, Mv_{(h\chi_i)} + \alpha_i\, Mv_{(-h\chi_i)} - (Mv)\left(2\,\mathrm{tr}\alpha + \sum_{i=1}^{N} \beta_i h\right)\right)$$

$$\leq \left(\frac{2\,\mathrm{tr}\,\alpha}{h^2} + \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{N}\beta_i\right)\left[ M\left( \frac{\alpha_i + \beta_i h}{2\mathrm{tr}\,\alpha + h\sum_{i=1}^{N}\beta_i}\, v_{(h\chi_i)} + \frac{\alpha_i}{2\mathrm{tr}\,\alpha + h\sum_{i=1}^{N}\beta_i}\, v_{(-h\chi_i)}\right) - Mv \right] \quad \text{(par concavité de M)}$$

$$\leqslant \left(\frac{2\,\mathrm{tr}\,\alpha}{h^2} + \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{N} \beta_i\right) \left\| \frac{\alpha_i + \beta_i h}{2\mathrm{tr}\,\alpha + h\sum_{i=1}^{N}\beta_i}\, v(h\chi_i) + \frac{\alpha_i}{2\mathrm{tr}\,\alpha + h\sum_{i=1}^{N}\beta_i}\, v(-h\chi_i) - v \right\|_{L^\infty}$$

(car $\| Mu - Mv \| \leqslant \| u - v \|$ cf. [14] )

$$\leqslant \left\| \alpha_i \frac{v(x+h\chi_i) + v(x-h\chi_i) - 2v(x)}{h^2} + \beta_i \frac{v(x+h\chi_i) - v(x)}{h} \right\|_{L^\infty}$$

et quand $h \to 0$ nous obtenons le résultat désiré.

*Remarques.* 1) Notons que l'on peut traiter de la même façon le cas d'une infinité d'opérateurs $A^i$.

2) On peut également obtenir des résultats de régularité $W^{2,\infty}_{loc}$ grâce à la méthode de L. Caffarelli et A. Friedman [4] , [5] . Celle-ci permet de traiter le cas d'obtacles plus généraux que (2) (par exemple $Mu(x) = k(x) + \inf\limits_{\xi \geqslant 0} [u(x+\xi) + Co(\xi)]$ ) mais semble mal adaptée pour des obtacles implicites aussi généraux que (33) comme par exemple :

$$Mu(x) = k + \int_B u(x+\xi)\, dP(\xi).$$

## REFERENCES


[1] A. BENSOUSSAN et J.L. LIONS. C.R. Acad. Sc. Paris, 276 (1973), p. 1189-1192.

[2] A. BENSOUSSAN et J.L. LIONS. *«Contrôle impulsionnel et Inéquations quasi-variationnelles»* Dunod, Paris (1982).

[3] J.M. BONY. *«Principe du maximum dans les espaces de Sobolev»*. C.R. Acad. Sc. Paris, 265 (1967), p. 333 à 335.

[4] L. CAFFARELLI et A. FRIEDMAN. Comm. in P.D.E., 3(8) (1978), p. 745-753.

[5] L. CAFFARELLI et A. FRIEDMAN. Comm. in P.D.E., 4(3) (1979), p. 279-291.

[6] L.C. EVANS et A. FRIEDMAN. *«Optimal Switching and the Dirichlet problem for Bellman equations»*. Trans. Amer. Math. Soc., 253, 1979, p. 365-389.

[7] L.C. EVANS et P.L. LIONS. *«Résolutions des équations de H.J.B. pour les opérateurs uniformément elliptiques»*. C.R. Acad. Sc. Paris. 290 (1980), p. 1049-1052.

[8] B. HANOUZET et J.L. JOLY. *«Convergence uniforme des itérés définissant la solution faible d'une I.Q.V.»*. C.R. Acad. Sc. Paris, 286 (1978).

[9] N.V. KRYLOV. *«On control of the solution of a stochastic integral equation»*. Th. Proba. and appl. 17 (1972), p. 114-131.

[10] S. LEHNART. *«Partial differential equations for dynamical programming»*. Thèse-Univ. of Kentucky-Lexington (1981).

[11] P.L. LIONS. *«Control of diffusion processes in $R^N$»*. Comm. Pure Appl. Math., 34 (1981), p. 121-147.

[12] P.L. LIONS. *«Résolution analytique des problèmes de Bellman-Dirichlet»*. Acta Mathematica, 146 (1981) p. 151-166.

[13] P.L. LIONS et J.L. MENALDI. *«Control of stochastic integrals and equations of H.J.B.»*. S.I.A.M. J. Control, optim., 20 (1982), p. 82-95.

[14] P.L. LIONS et B. PERTHAME. *«Une remarque sur les opérateurs non-linéaires intervenant dans les inéquations quasi-variationnelles»*. A paraître.

[15] U. MOSCO. *«Implicit variational problems and quasi-variational inequalities. In Non linear operators and the Calculus of Variations»*. Bruxelles, 1975, Springer Berlin (1976).

[16] B. PERTHAME. Thèse de 3ème cycle, Univ. Paris VI, (1983).

(Manuscrit reçu le 20 décembre 1982)