ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PIERRE BARAS

Non-unicité des solutions d'une équation d'évolution non-linéaire

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 5, nº 3-4 (1983), p. 287-302
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1983_5_5_3-4_287_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol V, 1983, P. 287 à 302

NON-UNICITE DES SOLUTIONS D'UNE EQUATION D'EVOLUTION NON-LINEAIRE

Pierre Baras [(1)]

(1) Laboratoire IMAG, B.P. 68, 38042 Grenoble Cédex - France.

Résumé : Soient $\gamma > 1$, et N un entier tels que $1 < \frac{N}{2}(\gamma-1) < \inf(\gamma,(\gamma+3)/2)$ et Ω une boule de R^N. Nous montrons que l'équation $\frac{du}{dt} - \Delta u = |u|^{\gamma-1} u$, $u(0) = u_o$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ qui admet, pour u_o dans $L^\gamma(\Omega)$ positive radiale décroissante une seule solution maximale u_m appartenant à $C([0,T_m[\,;L^\gamma(\Omega))$ a une infinité d'autres solutions de durée de vie $0 < T < T_m$ arbitraire, appartenant à $C([0,T[\,;L^q(\Omega))$ pour $q < \frac{N}{2}(\gamma-1)$.

Summary : We prove a non-uniqueness result for a parabolic semi-linear equation. If $1 < \frac{N}{2}(\gamma-1) < (\gamma, \frac{\gamma+3}{2})$ and Ω is a ball of IR^N, the equation $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = u\,|u|^{\gamma-1}$, $u(0) = u_o$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ possesses an infinite number of solutions such that $\lim_{t\to 0} \|u(t) - u_o\|_q = 0$ where $1 \leqslant q < \frac{N}{2}(\gamma-1)$.

INTRODUCTION

On considère l'équation d'évolution suivante :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \Delta u = |u|^{\gamma-1} u & \text{sur } \Omega \times\ ]0,T[\\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \Gamma \times\ ]0,T[\\ u(x,0) = u_o(x) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Ω est un ouvert borné de R^N de frontière Γ régulière.

Les conditions d'existence d'une solution locale ou globale de cette équation ont été étudiées par de nombreux auteurs (cf. [4]). Le problème abordé ici est celui de l'uncitié de ces solutions. Dans le cas $\Omega = R^N$ et $u_o = 0$, A. HARAUX et F.B. WEISSLER (cf. [2]) ont montré l'existence d'une solution globale non triviale et positive pour des valeurs γ telles que $1 < \frac{N}{2}(\gamma-1) < \gamma+1$. Notre but est d'étendre ce résultat au cas où Ω est une boule de R^N et u_o positive, radiale, décroissante.

La méthode utilisée oblige à se restreindre au cas où γ vérifie :

$$1 < \frac{N}{2}(\gamma-1) < \inf(\gamma,(\gamma+3)/2) \quad (N=3,\ \gamma=2 \text{ par exemple}). \tag{2}$$

Etant donné u_o appartenant à $L^\gamma(\Omega)$, on rappelle que le problème (1) a une unique solution maximale u telle que :

$$u \in C([0,T_m[\,; L^\gamma(\Omega)) \cap C^2(\bar{\Omega} \times]0,T_m[\,)$$

$$\text{si } T_m < \infty\ , \quad \lim_{t \to T_m} \| u(t) \|_p = +\infty \qquad \forall\, p, p > N(\gamma-1)/2.$$

Nous montrons que pour chaque T, $0 < T < T_m$, il existe une autre fonction u solution du problème (1) avec :

$$u \in C([0,T[\,; L^q(\Omega)) \cap C^2(\bar{\Omega} \times]0,T[\,) \qquad \forall\, q, 1 \leqslant q < N(\gamma-1)/2$$

$$\lim_{t \to 0} \| u(t) - u_o \|_q = 0 \qquad \forall\, q, 1 \leqslant q < N(\gamma-1)/2$$

$$\lim_{t \to 0} \| u(t) \|_\gamma = +\infty$$

$$\lim_{t \to T} \| u(t) \|_p = +\infty \qquad \forall\, p, p > N(\gamma-1)/2.$$

Dans une première partie nous établissons quelques résultats préliminaires et dans une seconde partie nous prouvons le résultat principal.

1. - RESULTATS PRELIMINAIRES

Nous supposons ici $\frac{N}{2}(\gamma-1) > 1$, Ω est un ouvert borné de R^N de frontière Γ régulière. Une solution sur $[0,T]$ de (1) est une fonction u de $L^\gamma(\Omega \times (0,T))$ telle que :

$$u(t) = e^{\Delta t} u_o + \int_o^t e^{\Delta(t-s)} |u|^{\gamma-1} u(s)ds. \tag{3}$$

Lorsque u_o est dans $L^1(\Omega)$, toute solution appartient à $C([0,T] ; L^1(\Omega)), e^{\Delta t}$ est le semi-groupe engendré par Δ, avec condition de Dirichlet nulle et a les propriétés régularisantes suivantes :

$$\| e^{\Delta t} u \|_q \leqslant c \frac{\| u \|_p}{t^{N(1/p-1/q)/2}} \quad \text{pour } t > 0 \text{ et } 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty \tag{4}$$

$\| \ \|_p$ désigne la norme de $L^p(\Omega)$.

PROPOSITION 1. *Soit* $p > \frac{N}{2}(\gamma-1)$ *et* $u_o \geqslant 0$ *appartenant à* $L^p(\Omega)$.

1a) Il existe $T_m > 0$ *et* u_m *appartenant à* $C([0,T_m[\, ; L^p(\Omega)) \cap C^2(\Omega \times]0,T_m[)$ *solution du problème (1). Si* $T_m < +\infty$, $\lim_{t \to T_m} \| u_m(t) \|_p = +\infty$.

1b) Il existe une constante $c(p) > 0$ *telle que :*

$$T_m^{1-\frac{N(\gamma-1)}{2p}} \| u_o \|_p^{\gamma-1} \geqslant c(p). \tag{5}$$

1c) Il existe deux constantes strictement positives $c'(p)$ *et* c *telles que si* T *vérifie :*

$$T^{1-\frac{N}{2}\frac{\gamma-1}{p}} \| u_o \|_p^{\gamma-1} \leqslant c'(p) \tag{5'}$$

alors :

$$\| u_m(t) \|_q \leqslant c \frac{\| u_o \|_p}{t^{N(1/p-1/q)/2}} \quad \textit{pour } 0 < t \leqslant T \textit{ et } \frac{N}{2}(\gamma-1) < p \leqslant q \leqslant \infty. \tag{6}$$

1d) Il existe une constante $c_o > 0$ *telle que si* $\| u_o \|_{N(\gamma-1)/2} \leqslant c_o$ *alors :*

$$T_m = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{t \to +\infty} \| u_m(t) \|_\infty = 0.$$

1e) Si $p \geqslant \gamma$, *pour tout* $T < T_m$, u_m *est la seule solution de (1) appartenant à* $L^\infty([0,T], L^p(\Omega))$.

Démonstration. Soit la suite u_n définie par :

(7) $$u_{n+1}(t) = e^{\Delta t}\, u_o + \int_o^t e^{\Delta(t-s)}\, (u_n(s))^\gamma\, ds \qquad u_1(t) = e^{\Delta t}\, u_o$$

Soit (m,r) dans R^{+2} tel que :

(8) $$r > \frac{N}{2}(\gamma-1)\ ;\ r \geqslant \sup(m,\gamma)\ ;\ m \geqslant \frac{N}{2}(\gamma-1)\ ;\ \frac{N}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{r}\right)\gamma < 1.$$

(4) implique :

$$\| u_{n+1}(t) \|_r \leqslant c\, \frac{\| u_o \|_m}{t^{N(1/m-1/r)/2}} + \int_o^t c\, \frac{\| u_n(s) \|_r^\gamma}{(t-s)^{N(\gamma-1)/2r}}\, ds.$$

Soit T vérifiant :

(9) $$\frac{c^\gamma \gamma^\gamma}{(\gamma-1)^{\gamma-1}} \left(\int_o^1 \frac{d\sigma}{(1-\sigma)^{N(\gamma-1)/2r}\sigma^{N(1/m-1/r)\gamma/2}} \right) \| u_o \|_m^{\gamma-1}\, T^{1-N(\gamma-1)/2m} < 1$$

On vérifie alors par récurrence que :

$$\| u_n(t) \|_r \leqslant c \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{\| u_o \|_m}{t^{N(1/m-1/r)/2}} \quad \text{pour } n \geqslant 1 \text{ et } 0 < t \leqslant T$$

puisque $u_o \geqslant 0$, la suite u_n est croissante, elle converge donc vers une fonction u vérifiant :

(10) $$\| u(t) \|_r \leqslant c\, \frac{\| u_o \|_m}{t^{N(1/m-1/r)/2}} \quad \text{pour } 0 < t \leqslant T$$

Démonstration de 1a). On fait $m = p$, $r = p\gamma$. (10) implique alors que u^γ est dans $L^1((0,T);L^p(\Omega))$. En passant à la limite dans (7), on vérifie que u satisfait (3) ; u est donc solution de (1) et appartient à $C([0,T[\,;L^p(\Omega))$. On prolonge u en une solution maximale continue dans $L^p(\Omega)$ notée u_m. Soit $[0,T_m[$ son intervalle de définition.

Si $\liminf_{t\to T_m} \| u(t) \|_p = A < +\infty$ et si $T_A > 0$ satisfait (9) dans lequel on a fait $\| u_o \|_m = 2A$, on peut trouver t_o dans $[T_m - T_A/2, T_m[$ tel que $\| u(t_o) \|_p \leqslant 2A$; la démonstration précédente affirme l'existence d'une solution de (1) de donnée initiale $u(t_o)$ et appartenant à $C([0,T_A]\,;\,L^p(\Omega))$, on peut donc prolonger u à l'intervalle $[0,T_m + T_A/2]$, contradiction, et donc :

$$\lim_{t\to T_m} \| u(t) \|_p = +\infty.$$

Pour montrer que u_m appartient à $C^2(\overline{\Omega} \times\,]0,T_m[\,)$, admettons pour l'instant le 1c). Soit $\epsilon > 0$, puisque u_m appartient à $C([0,T_m[\,,L^p(\Omega))$, il existe $h > 0$ tel que :

$$\forall\, t\ [0,T_m - \epsilon[\,,\ h^{1-N(\gamma-1)/2p}\, \| u_m(t) \|_p^{\gamma-1} \leqslant c'(p).$$

(6) appliqué avec $q = +\infty$ et $u_o = u(t_o)$ permet de conclure que $u_m(t)$ est uniformément bornée dans $L^\infty(\Omega)$ sur tout intervalle de la forme $[t_o + \inf(\epsilon,h)/2, t_o + h]$ pour tout t_o dans $[0, T_m - \epsilon]$. u_m appartient donc à $L^\infty(\Omega \times (\epsilon, T_m - \epsilon))$ pour tout $\epsilon > 0$ d'où le résultat (u_m a toute la régularité qu'autorise l'application $x \to x^\gamma$ (cf. [3])).

Remarque 1. On a montré ici que $u_m(x,t)$ est borné sur $\Omega \times [\epsilon, T-\epsilon]$ par une quantité ne dépendant que de la forme de u_m dans $L^\infty((0,T_m-\epsilon)\,;L^p(\Omega))$ et de $p > N(\gamma-1)/2$.

Démonstration du 1b). On fait encore $m = p$, $r = p\gamma$, comme T_m est supérieur à tout T vérifiant (9), on a (5).

Démonstration du 1c). Il suffit de démontrer (6) pour $q = p$ et $q = +\infty$. Pour $q = p$, on a :

$$\| u(t) \|_p \leqslant \| u_o \|_p + \int_o^t \| u(s) \|_{p\gamma}^\gamma \, ds$$

on conclut grâce à (9) et (10) où l'on a fait $m = p$, $r = p\gamma$.

Pour $q = +\infty$ et si $p > \frac{N}{2}\gamma$, (8) permet $r = +\infty$ et $m = p$ et (9) et (10) donnent encore le résultat.

Si $p \leqslant \frac{N}{2}\gamma$, soit a tel que :

$$0 < a < 1 \text{ et } a > \frac{N\gamma}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right).$$

On définit une suite q_i en posant :

$$q_1 = p\,,\quad \frac{N}{2}\gamma\left(\frac{1}{q_i} - \frac{1}{q_{i+1}}\right) = a.$$

On vérifie alors qu'il existe un entier k tel que $q_k > 0$ et $q_{k+1} \leqslant 0$, on vérifie aussi que (q_i, q_{i+1}) pour $i = 1,2,\ldots,k-1$ et $(q_k, +\infty)$ satisfont (8).

Dans (9), le facteur de $\| u_o \|_m^{\gamma-1} T^{1-N(\gamma-1)/2m}$ reste borné lorsque (m,r) décrit $\{(q_i,q_{i+1})_{i\in\{1,\ldots,k-1\}}, (q_k, +\infty)\}$ par un nombre noté b.

Soient $t > 0$ et $i \in \{1,\ldots,k-1\}$, on a en appliquant (9) et (10) :

$$\left\| u\left(\frac{(i+1)t}{k+1}\right)\right\|_{q_{i+1}} \leqslant c_1 (t/k+1)^{a/\gamma} \left\| u\left(\frac{(it)}{k+1}\right)\right\|_{q_i}.$$

pour tout $t > 0$ vérifiant :

$$b \left\| u\left(\frac{it}{k+1}\right)\right\|_{q_i}^{\gamma-1} (t/k+1)^{1-N(\gamma-1)/2q_i} \leqslant 1$$

d'où, en regroupant les inégalités :

$$\| u(t) \|_\infty \leqslant c_1 (k+1)^{N/2p} \frac{\| u_o \|_p}{t^{N/2p}}$$

pour tout t vérifiant une inégalité du type :

$$c \| u_o \|_p^{\gamma-1} t^{1-N(\gamma-1)/2p} \leqslant 1$$

où c est une constante convenable, d'où le résultat.

Démonstration du 1d). Soit $m = \frac{N}{2}(\gamma-1)$ et r vérifiant (8), (9) s'écrit $\| u_o \|_{N(\gamma-1)/2} \leqslant c(\gamma, r) = c_o$ et dans ce cas u(t) est définie pour tout $t \geqslant 0$. D'après 1a), on a $u(t) = u_m(t)$ sur $[0,T_m[$, on aura $T_m = +\infty$ si on montre que $\| u(t) \|_p$ reste bornée pour tout $t \geqslant 0$, ce qui sera acquis en montrant que $\lim_{t \to +\infty} \| u(t) \|_\infty = 0$. On a, d'après 1c):

$$\| u(t+h) \|_\infty \leqslant c' \frac{\| u(t) \|_r}{h^{N/2r}} \quad \text{dès que } h^{1-N(\gamma-1)/2} \| u(t) \|_r \leqslant c'(r)$$

ce qui autorise un choix de $h > 0$ indépendant de t ; en effet, d'après (10) (avec $m = \frac{N}{2}(\gamma-1)$) :

$$\| u(t) \|_r \leqslant c \frac{\| u_o \|_{N(\gamma-1)/2}}{t^{N(1/m-1/r)/2}}$$

ce qui prouve que $\lim_{t \to +\infty} \| u(t+h) \|_\infty = 0$ et que $\| u(t) \|_\infty$ est uniformément bornée sur $[2h,+\infty[$. u(t) appartient donc à $C([0,+\infty[\,;L^p(\Omega))$ puisqu'on peut avoir choisi h tel que $2h < T_m$, d'où le 1d).

Démonstration de 1e). On suppose ici $p \geqslant \gamma$. Soit v une autre solution de (1) appartenant à $L^\infty((0,T)\,;L^p(\Omega))$, et soit A un réel tel que :

$$\| u(t) \|_p \leqslant A \quad \text{et} \quad \| v(t) \|_p \leqslant A \qquad \forall\, t \in [0,T].$$

On a :

$$u(t) - v(t) = \int_o^t e^{\Delta(t-s)} (u^\gamma(s) - v^\gamma(s))ds$$

mais puisque $p \geqslant \gamma$:

$$\| u^\gamma - v^\gamma \|_p \leqslant \gamma \| u^{\gamma-1} + v^{\gamma-1} \|_{p/\gamma-1} \| u-v \|_p \leqslant 2\gamma A^{\gamma-1} \| u-v \|_p \ .$$

On a donc, grâce à (4) :

$$\| u(t) - v(t) \|_p \leqslant 2\, c\, A^{\gamma-1} \frac{t^{1-N(\gamma-1)/2p}}{1-N(\gamma-1)/2p} \sup_{[0,t]} \| u-v \|_p$$

ce qui n'est possible pour t petit que si $u = v$.

Ω est maintenant une boule de R^N. Si u_o est positive radiale décroissante et vérifie les hypothèses de la proposition (1), u_m est aussi positive radiale décroissante puisque toutes les u_n le sont.

PROPOSITION 2. *Si* u *est une solution positive radiale décroissante de* (1), *il existe des constantes* c *telles que :*

(11) $$u(t,x) \leqslant \frac{c(T',R)}{|x|^{2/\gamma-1}} \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant T' < T \text{ et } |x| \leqslant R$$

(12) $$\| u(t) \|_q \leqslant c(T',q) \quad \text{pour } 1 \leqslant q < \frac{N(\gamma-1)}{2} \text{ et } 0 \leqslant t \leqslant T'$$

(13) $$\int_0^{T'} \| u(t) \|_\gamma^\gamma \, dt \leqslant c(T') \quad \text{pour } T' < T.$$

En corollaire de cette proposition, on obtient des résultats de non-existence. Par exemple :

COROLLAIRE 1. *Si* u_o *est positive, radiale et décroissante et n'appartient pas à* $L^q(\Omega)$ *pour un* $q < \frac{N}{2} (\gamma-1)$, *alors* (1) *n'a pas de solution positive.*

COROLLAIRE 2. *Le problème* (1) *n'a pas de solution positive si* u_o *est une masse de Dirac à l'origine.*

Démonstration de la proposition. On sait que si il existe u solution de (1) sur [0,T] alors (cf. [4]) :

(14) $$t^{1/\gamma-1} (e^{\Delta t} u_o)(x) < c(\gamma) \qquad \forall\, (x,t) \in \Omega \times [0,T]$$

où $c(\gamma)$ est une constante ne dépendant que de γ. On a donc :

$$s^{1/\gamma-1} (e^{\Delta s} u(t))(x) < c(\gamma) \qquad \forall\, (x,s) \in \Omega \times [0,T-t]$$

(11) sera la conséquence du lemme suivant.

LEMME 1. *Soit* $\alpha \geqslant 0$, *si* v *appartenant à* $L^1(\Omega)$ *est positive radiale décroissante et vérifie :*

$$t^\alpha (e^{\Delta t} v)(x) \leqslant C \quad \text{pour tout } (x,t) \text{ dans } \Omega \times [0,T]$$

alors :

$$v(x) \leqslant C \frac{e^{k\,T/R^2}}{|x|^{2\alpha}} (R^2/T)^{\alpha} \quad \textit{pour } |x| \leqslant R$$

où $k > 0$ *ne dépend que de* N *et où* $R \leqslant \dfrac{\text{diam}\,\Omega}{2}$.

Démonstration du lemme. Soit η une fonction régulière positive, radiale, décroissante à support compact telle que :

$$-\Delta\eta \leqslant k\eta, \ \eta(x) = 0 \quad \text{si } |x| \geqslant 1$$

(une telle η existe si k est assez grand). En posant $\eta_\lambda(x) = \eta(\lambda x)$, on a :

$$-\Delta\,\eta_\lambda \leqslant k\lambda^2 \eta_\lambda$$

d'où :

$$(15) \qquad e^{-k\lambda^2 t}\eta_\lambda(x) \leqslant (e^{\Delta t}\,\eta_\lambda)(x) \qquad \forall\ (x,t) \in \Omega \times [0,+\infty[$$

dès que supp η_λ est inclus dans Ω, c'est-à-dire $\lambda \geqslant \dfrac{2}{\text{diam}(\Omega)}$.

L'hypothèse du lemme implique alors :

$$C\int_\Omega \eta_\lambda(x)dx \geqslant \int_o t^\alpha (e^{\Delta t}\,v)(x)\eta_\lambda(x)dx = t^\alpha \int_\Omega v(x)e^{\Delta t}\,\eta_\lambda(x)dx \geqslant t^\alpha e^{-k\lambda^2 t}\int_\Omega v(x)\eta_\lambda(x)$$

mais $v(x) \geqslant v\,(\frac{1}{\lambda})$ sur supp(η_λ) d'où :

$$v(\frac{1}{\lambda}) \leqslant C\,t^{-\alpha}\,e^{k\lambda^2 t} \quad \text{pour } \lambda \geqslant \frac{2}{\text{diam}(\Omega)} \quad \text{et } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

On obtient le lemme en posant :

$$|x| = \frac{1}{\lambda} \ \text{ et } \ t = \frac{T}{R^2}\,|x|^2$$

(12) se déduit de (11) par intégration.

Pour obtenir (13), on multiplie (3) par η_λ et on intègre, on a :

$$\int_\Omega (e^{\Delta t}\,u_o)(x)\,\eta_\lambda(x)dx + \int_o^t \int_\Omega (e^{\Delta(t-s)}u(s)^\gamma)\,(x)\eta_\lambda(x)dx\,ds = \int_\Omega u(x,t)\eta_\lambda(x)dx$$

On en déduit que pour $\lambda \geqslant \dfrac{2}{\operatorname{diam}\Omega}$, on a :

$$\int_0^t \int_\Omega (u(x,s))^\gamma e^{-k\lambda^2(t-s)} \eta_\lambda(x)dx\,ds \leqslant \int_\Omega u(x,t)\eta_\lambda(x)dx.$$

En fixant $\lambda = \lambda_o \geqslant \dfrac{2}{\operatorname{diam}\Omega}$, $T' < T$ et $r_o > 0$ tel que $\eta_{\lambda_o}(r_o) > 0$, on obtient :

$$e^{-k\lambda_o^2 T'} \eta_{\lambda_o}(r_o) \int_o^t \int_{r_o} (u(x,s))^\gamma\,dx\,ds \leqslant \int_\Omega u(x,t)\eta_{\lambda_o}(x)dx$$

Le membre de droite est majoré indépendamment de u et $t \in [0,T']$ d'après (11) d'où (13).

Démonstration des corollaires. Le corollaire (1) est une conséquence de (12) appliquée en $t = 0$.

Quand δ est une masse de Dirac à l'origine, $e^{\Delta t}\,\delta$ est positive radiale et décroissante et plus petite que la solution éventuelle, on aurait donc à cause de (12) $\| e^{\Delta t}\,\delta \|_q < +\infty$ pour tout q tel que : $1 \leqslant q < \frac{N}{2}(\gamma-1)$ et $t \geqslant 0$. Ce qui est faux, d'où le corollaire 2.

PROPOSITION 3. *Soient* γ *tel que* $1 < \frac{N}{2}(\gamma-1) < \inf\left(\gamma, \frac{\gamma+3}{2}\right)$ *et* $E_T = \{u \in C^2(\Omega \times]0,T[)$, u *positive radiale décroissante telle qu'il existe* $u_o \in L^1(\Omega)$ *telle que* u *soit solution de* (1) *sur* $(0,T)\}$. *Pour tout* $\delta > 0$, E_T *est borné dans* $C^2(\Omega \times]\delta,T-\delta[)$.

Démonstration. D'après les résultats de régularité classiques et [3], il suffit de montrer que E_T est borné dans $L^\infty(\Omega \times (\delta,T-\delta))$ pour tout $\delta > 0$. On procède par l'absurde, soit $\delta > 0$ et u_n une suite non bornée d'éléments de E_T. Les u_n vérifient (11), (12), (13) et d'après la compacité de l'opérateur «solution» (cf. [1]) forment donc un ensemble relativement compact dans $L^1(\Omega \times (0,T'_1))$ donc, encore à cause de (13) dans $L^s(\Omega \times (0,T'_1))$ pour tout s tel que $1 \leqslant s < \gamma$ et $T'_1 < T$.

Pour la suite, on fixe s vérifiant $\frac{N}{2}(\gamma-1) < s < \inf(\gamma,(\gamma+3)/2)$. On peut donc extraire une suite notée encore u_n convergeant vers u presque partout et dans $L^s(\Omega \times (0,T'_1))$; u vérifie encore (11), (12), (13). Recommençant le raisonnement pour une suite $T'_k \to T$, et par extraction diagonale, on peut supposer que les convergences ont lieu pour tout $T' < T$.

Soit $\delta > 0$. Puisque u_n converge vers u dans $L^s(\Omega \times (0,T-\delta/2))$, il existe t_1 et t_2 tels que :

$$t_1 \text{ appartient à } [0,\delta/4[\text{ et } \sup_n \| u_n(t_1) \|_s < \infty$$

$$t_2 \text{ appartient à } [T-\delta,T[\text{ et } \sup_n \| u_n(t_2) \|_s < \infty$$

1c) implique alors qu'il existe h, $0 < h < \delta/4$, indépendant de n tel que

$$\| u_n(t) \|_\infty \leqslant c \frac{\| u_n(t_i) \|_s}{(t-t_i)^{N/2s}} \quad \forall\, n \quad \forall\, t \in [t_i, t_i+h] \quad i = 1,2$$

On peut donc trouver un nombre M tel que :

(16) $$\| u_n(t) \|_\infty \leqslant M \quad \forall\, n \text{ et } \forall\, t \in [t_i+h/2, t_i+h] \quad i = 1,2.$$

Si on pose :

$$E(v) = \frac{1}{2} \| \nabla v \|_2^2 - \frac{1}{\gamma+1} \int_\Omega |v|^{\gamma+1} (x) dx,$$

il existe alors A et $t'_2 \in [T-\delta, T[$ tels que pour tout n :

$$E(u_n(t'_2)) \geqslant A.$$

En multipliant par u_n puis par $\frac{du_n}{dt}$ et en intégrant, on obtient :

(17) $$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \dfrac{d}{dt} \| u_n \|_2^2 + \| \nabla u_n \|_2^2 = \displaystyle\int_\Omega u_n^{\gamma+1} \\[2ex] \left\| \dfrac{du_n}{dt} \right\|_2^2 + \dfrac{1}{2} \dfrac{d}{dt} \| \nabla u_n \|_2^2 = \dfrac{1}{\gamma+1} \dfrac{d}{dt} \displaystyle\int_\Omega u_n^{\gamma+1}. \end{cases}$$

On en déduit pour $0 < t_o < t'_1 < T$:

$$\int_{t_o}^{t'_1} (t-t_o) \left\| \frac{du_n}{dt} \right\|_2^2 dt + (t'_1-t_o) E(u_n(t'_1)) = \frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)} \int_{t_o}^{t'_1} \int_\Omega u_n^{\gamma+1} + \frac{1}{4} (\| u_n(t_o) \|_2^2 - \| u_n(t'_1))$$

Lorsque $t_o = t_1 + h/2$ et $t'_1 = t_1 + h$, d'après (14), le membre de droite reste uniformément borné. Il existe donc un nombre B tel que :

$$E(u_n(t'_1)) \leqslant B \qquad \forall\, n$$

De plus, t'_1 appartient à l'intervalle $[0, \delta/2]$ (puisque t_1 et h sont inférieurs à $\delta/4$). En intégrant (17) entre t'_1 et t'_2, on obtient :

$$(18)\begin{cases} \frac{1}{2}\|u_n(t'_2)\|_2^2-\frac{1}{2}\|u_n(t'_1)\|_2^2=-2\int_{t'_1}^{t'_2}E(u_n(s))\,ds+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\int_{t'_1}^{t'_2}\int_\Omega u_n(s)^{\gamma+1}\,ds \\ \int_{t'_1}^{t'_2}\|\frac{du_n}{dt}\|_2^2\,dt=E(u_n(t'_1))-E(u_n(t'_2))\leqslant B-A \quad \forall\, n \end{cases}$$

(17) implique que $E(u_n(t))$ est décroissante, on déduit donc de (16) et de la première ligne de (18) qu'on a :

$$\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\int_{t'_1}^{t'_2}\int_\Omega u_n^{\gamma+1}\,dx\,ds\leqslant 2\,TE\,(u_n(t'_1))+\frac{1}{2}\|u_n(t'_2)\|_2^2\leqslant 2\,TB+\frac{1}{2}|\Omega|^2M^2$$

d'où :

$$\int_{t'_1}^{t'_2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_n^{(\gamma+3)/2}\,dxds\leqslant\frac{\gamma+3}{2}\left(\int_{t'_1}^{t'_2}\|\frac{du_n}{dt}\|_2^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int_{t'_1}^{t'_2}\int_\Omega u_n^{\gamma+1}\,dxds\right)^{1/2}$$

La suite u_n est donc uniformément bornée dans $L^\infty((\delta/2,T-\delta):L^{(\gamma+3)/2})$. L'hypothèse (2) implique $N(\gamma-1)/2<(\gamma+3)/2$; 1c) s'applique avec $p=(\gamma+3)/2$ et les mêmes arguments que dans la démonstration de 1a) prouvent que les u_n sont bornées indépendamment de n dans $L^\infty(\Omega\times(\delta,T-\delta))$ (cf. remarque n° 1).

II. - NON-UNICITE DES SOLUTIONS DE (1)

On se propose d'établir le théorème suivant :

THEOREME 1. *Soient* γ *tel que* $1<\frac{N}{2}(\gamma-1)<\inf(\gamma,(\gamma+3)/2)$ *et* u_0 *positive radiale décroissante appartenant à* $L^\gamma(\Omega)$, *soit* u_m *la solution maximale de* (1) *appartenant à* $C([0,T_m];L^\gamma(\Omega))$.

(a) Pour chaque T *dans* $]0,T_m[$, *il existe une fonction* u *solution de* (1) *distincte de* u_m. u *est positive radiale décroissante,* $u\geqslant u_m$ *et :*

$$u\in C([0,T[\,;L^q(\Omega))\cap C^2(\Omega\times\,]0,T[\,)\quad\forall\, q,\ 1\leqslant q<\frac{N}{2}(\gamma-1)$$

$$(19)\qquad \lim_{t\to 0}\|u_0-u(t)\|_q=0\qquad \forall\, q\quad 1\leqslant q<\frac{N}{2}(\gamma-1).$$

$$(20)\qquad \lim_{t\to 0}\|u(t)\|_\gamma=+\infty$$

$$\lim_{t \to T} \| u(t) \|_p = +\infty \qquad \forall\, p,\ p > \frac{N}{2}(\gamma-1). \tag{21}$$

(b) Si $\| u_o \|_{N(\gamma-1)/2} \leqslant c_o$, $T_m = +\infty$ *et il existe une fonction* u *solution globale de* (1) *distincte de* u_m. u *est positive, radiale décroissante et* $u \geqslant u_m$. *On a :*

$$u \in C([0,+\infty[\ ;\ L^q(\Omega)) \cap C^2(\bar{\Omega} \times\ ]0,+\infty[) \qquad \forall\, q,\ 1 \leqslant q < \frac{N}{2}(\gamma-1)$$

u *vérifie* (19), (20) *et :*

$$\| u(t) \|_{N(\gamma-1)/2} \geqslant c_o \qquad \forall\, t \geqslant 0. \tag{22}$$

Soient u_o vérifiant les hypothèses et η une fonction régulière positive radiale décroissante à support dans Ω. On pose $u_{o\alpha} = u_o + \alpha\eta$ où α est un réel positif et on appelle $u_\alpha(t)$ la solution maximale unique définie sur $[0,T_m(\alpha)[$ vérifiant $u_\alpha(0) = u_{o\alpha}$ et appartenant à $C([0,T_m(\alpha)[\ ;\ L^\gamma(\Omega)) \cap C^2(\bar{\Omega} \times\ ]0,T_m(\alpha)[\ )$.

PROPOSITION 4. *(4a)* $\alpha \to T_m(\alpha)$ *est décroissante continue de* R^+ *vers* $[0,T_m]$ $(T_m \leqslant +\infty)$ $T_m(o) = T_m$ *et* $\lim_{\alpha \to \infty} T_m(\alpha) = 0$.

(4b) $\alpha \to u_\alpha(x,t)$ *est croissante continue de* $[0,+\infty[$ *vers* $C(\ldots\ ;\ L^\gamma(\Omega))$. *(i.e.* $\forall$ I *intervalle de* R_+ *et* $\forall\, T < \inf_I T(\alpha)$, $\alpha \to u_\alpha(x,t)$ *est continue de* I *vers* $C([0,T]\ ,\ L^\gamma(\Omega)))$.

Démonstration. $\alpha \to u_{o\alpha}$ et $u_o \to u_m$ sont deux applications croissantes, $\alpha \to T_m(\alpha)$ et $\alpha \to u_\alpha(x,t)$ sont donc respectivement décroissante et croissante. Montrons qu'elles sont continues.

Lorsque $\alpha_n \uparrow \alpha$, $T(\alpha_n)$ et u_{α_n} convergent vers $T(\alpha^-)$ et u_{α^-}. Puisque $T(\alpha_n) \geqslant T(\alpha)$ les u_{α_n} appartiennent à $E_{T(\alpha_n)}$ et sont donc uniformément bornés dans $L^\infty(\Omega \times\ ]\delta,T(\alpha^-)-\delta[\ )$ d'après la proposition 3. Comme sur $[0,\delta]$ pour $\delta < T(\alpha)$, u_{α_n} est majorée par u_α, on obtient que u_{α^-} , limite des u_{α_n} , est solution de (1) avec donnée initiale $u_{o\alpha}$ et appartient à $C\ (\Omega \times\ ]0,T(\alpha^-)[\ )$ et $L^\infty(\Omega \times (0,T(\alpha^-)-\delta))$, $\forall\, \delta > 0$. On déduit alors de 1e) que $u_{\alpha^-} = u_\alpha$ sur $[0,T(\alpha)[$ et de la maximalité de $T(\alpha)$ que $T(\alpha^-) = T(\alpha)$. Si maintenant $\alpha_n \downarrow \alpha$ soient $T(\alpha^+)$ et u_{α^+} les limites de $T(\alpha_n)$ et u_{α_n}. Puisque u_{α_n} est une suite décroissante de fonction positive de $C\ ([0,T[\ ;\ L^\gamma(\Omega))$ pour $T < T(\alpha^+)$, on a immédiatement $u_{\alpha^+} \in L^\infty((0,T)\ ;\ L^\gamma(\Omega))$ $\forall T < T(\alpha^+)$. On vérifie avec (3) par exemple, que u_{α^+} est solution de (1) de donnée initiale $u_{o\alpha}$. Admettons pour l'instant que $T(\alpha^+) = T(\alpha)$. Dans le cas $\alpha_n \uparrow \alpha$ comme dans le cas $\alpha_n \downarrow \alpha$, u_{α_n} est une suite monotone de fonction de $C\ ([0,T]\ ;\ L^\gamma(\Omega))$ qui converge vers un élément de $C\ ([0,T[,\ L^\gamma(\Omega))$, la convergence a donc lieu dans cet espace pour tout $T < T(\alpha)$ d'où le 4b). Pour montrer que

$T(\alpha^+) = T(\alpha)$, on procède par l'absurde. Supposons $T(\alpha^+) < T(\alpha)$ et appelons $A = \sup_{[0,T(\alpha^+)]} \| u_\alpha(t) \|_\gamma$. Soit T_A un réel strictement positif vérifiant (5') dans laquelle on a fait $p = \gamma$, $T_m = T_A$ et $\| u_o \|_p = 2A$. Puisque $u_{\alpha_n}(t)$ converge vers $u_\alpha(t)$ dans $C([0,T]\,;L^\gamma(\Omega))$ pour tout $T < T(\alpha^+)$, il existe n et t_o dans l'intervalle $[T(\alpha^+) - T_A/2,\ T(\alpha^+)]$ tels que $\| u_{\alpha_n}(t_o) \|_\gamma < 2A$.

La proposition (1) permet alors d'affirmer que cette u_{α_n} se prolonge à l'intervalle $[0,T(\alpha^+) + T_A/2]$. Mais elle n'est définie que sur $[0,T(\alpha_n)[$ et $T(\alpha_n) \leqslant T(\alpha^+)$ puisqu'ici $\alpha_n \geqslant \alpha$: contradiction.

Reste à montrer que $\lim_{\alpha \to +\infty} T_m(\alpha) = 0$. Si ce n'était pas le cas, d'après (14), il existerait $t > 0$ tel que pour tout $\alpha \geqslant 0$:

$$t^{1/\gamma-1}\,(e^{\Delta t}\,u_o)(x) + \alpha t^{1/\gamma-1}(e^{\Delta t}\eta)(x) < c(\gamma) \qquad \forall\, x \in \Omega$$

ce qui est impossible puisque $\eta \neq 0$ et $\eta \geqslant 0$ (on fait $\alpha \to +\infty$). 4a) est établi.

Démonstration du théorème (a). Soit maintenant η_n une suite de fonctions régulières, positives, radiales, décroissantes telles que $\operatorname{supp} \eta_n = B(0,\frac{1}{n}) = \{ x \,/\, |x| < \frac{1}{n} \}$, et T fixé dans $]0,T_m[$. D'après la proposition 4, il existe $\alpha_n > 0$ tel que la solution maximale u_n de (1) de donnée initiale $u_o^n = u_o + \alpha_n \eta_n$ et appartenant à $C\,([0,T[\,;L^\gamma(\Omega))$ ait une durée de vie égale à T. Soit $\delta_k > 0$ tendant vers 0 quand $k \to +\infty$, la proposition 3 implique que les u_n sont uniformément bornés dans $C^2(\overline{\Omega} \times [\delta_k,T-\delta_k])$ pour tout k. Par extraction diagonale, on peut donc extraire une sous-suite encore notée u_n qui converge vers u dans $C^1(\overline{\Omega} \times [\delta,T-\delta])$ pour tout $\delta > 0$. On a par passage à la limite :

$$u(t) = e^{\Delta(t-s)}\,u(s) + \int_s^t e^{\Delta(t-\sigma)}(u(\sigma))^\gamma\, d\sigma. \tag{23}$$

Enfin u étant limite des u_n vérifie aussi (11), (12) et (13) grâce au lemme de Fatou.

A cause de (12) et parce que $e^{\Delta t}$ est compact pour $t > 0$, il existe L dans $L^q(\Omega)$ et une suite $s_n \to 0$ tels que :

- $u(s_n)$ converge faiblement vers L dans $L^q(\Omega)$
- $e^{\Delta(t-s_n)}\,u(s_n)$ converge vers $e^{\Delta t}L$ dans $L^q(\Omega)$.

Comme u^γ appartient à $L^1(\Omega \times (0,T'))$ pour tout $T' < T$ (c'est (13)), on a, en faisant $s = s_n \to 0$ dans (24) :

$$u(t) = e^{\Delta t}L + \int_{\Omega}^{t} e^{\Delta(t-s)}\,(u(s))^{\gamma}\,ds. \tag{24}$$

On va montrer que $L = u_o$ pp x dans Ω. On a pour Φ fonction C^{∞} à support compact inclus dans Ω et puisque u_n est solution de (1) :

$$\int_{\Omega} u_n(x,t)\Phi(x)dx - \int_{\Omega} u_o^n(x)\Phi(x)dx + \int_o^t \int_{\Omega} u_n(x,t)(-\Delta\Phi)dx\,ds =$$

$$= \int_o^t \int_{\Omega} (u_n(x,s))^{\gamma}\Phi(x)dx\,ds.$$

Si $\Phi = 0$ sur une boule de centre 0, on peut, grâce à (11) et au théorème de Lebesgue, passer à la limite. On obtient :

$$\int_{\Omega} u(x,t)\Phi(x)dx - \int_{\Omega} u_o(x)\Phi(x)dx + \int_o^t \int_{\Omega} u(x,s)(-\Delta\Phi)(x)dx\,ds = \int_o^t \int_{\Omega} u(x,s)^{\gamma}\Phi(x)dx\,ds$$

Par ailleurs, (23) permet d'écrire :

$$\int_{\Omega} u(x,t)\Phi(x)dx - \int_{\Omega} u(x,s_n)\Phi(x)dx + \int_{s_n}^t \int_{\Omega} u(x,s)(-\Delta\Phi)(x)dx\,ds =$$

$$= \int_{s_n}^t \int_{\Omega} u(x,s)^{\gamma}\,\Phi(x)dx\,ds.$$

En comparant ces deux égalités après être passé à la limite dans la seconde, on constate :

$$\int_{\Omega} u_o(x)\Phi(x)dx = \int_{\Omega} L(x)\Phi(x)dx$$

pour toute fonction Φ nulle sur un voisinage de 0, d'où $u_o(x) = L(x)$ presque partout. u est donc solution de (1), $u(0) = u_o$. De plus, (24) implique maintenant $\| u_o - u(t) \|_1 \to 0$ quand $t \to 0$ ce qui, avec (12), donne (19).

Reste à montrer (20) et (21). $u \geqslant u_m$ est une conséquence de $u_n \geqslant u_m$ $\forall$ n. Commençons par montrer (21). S'il existe p, $N(\gamma-1)/2 < p < (\gamma+3)/2$, tel que $\liminf_{t\to T} \| u(t) \|_p =$ $= A < +\infty$, alors puisque u_n converge vers u dans $C([\delta,T-\delta,L^2(\Omega))$ $\forall\, \delta > 0$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n(\epsilon)$ et $t(\epsilon)$ appartenant à l'intervalle $[T-\epsilon, T]$ tels que :

$$\| u_{n(\epsilon)}\,(t(\epsilon)) \|_p \leqslant 2A.$$

Soit T_A satisfaisant (5') dans lequel on a fait $\| u_o \|_p = 2A$, la proposition 1 permet d'affirmer que $u_{n(\epsilon)}$ se prolonge à $[0,T + T_A - \epsilon[$. Mais T_A ne dépend pas de ϵ, pour ϵ assez petit, $u_{n(\epsilon)}$ se prolongerait au-delà de T : contradiction. On a $\lim\limits_{t \to T} \| u(t) \|_p = + \infty$ et u est donc distincte de u_m.

Démontrons maintenant (20). Si $\liminf\limits_{t \to 0} \| u(t) \|_\gamma < + \infty$, 1c) appliqué avec $p = q = \gamma$ implique $\limsup\limits_{t \to 0} \| u(t) \|_\gamma < + \infty$. u(t) resterait bornée dans $L^\gamma(\Omega)$ au voisinage de $t = 0$, on aurait donc, d'après 1e), $u = u_m$ ce qui n'est pas le cas, d'où le (20).

Démonstration du théorème (b). D'après le 1d), il existe une constante c_o telle que si $\| u_o \|_{N(\gamma-1)/2} \leqslant c_o$, u_m est une solution globale de (1). Reprenons la construction faite au début. Pour chaque fonction η, la proposition 4 permet d'affirmer l'existence d'un unique β tel que si $\beta \geqslant \alpha$, $T_m(\alpha) = + \infty$ et si $\beta < \alpha$, $T_m(\alpha) < + \infty$. u_β est une solution globale de (1). On va montrer que :

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad \| u_\beta(t) \|_{N(\gamma-1)/2} \geqslant c_o . \tag{25}$$

En effet, si il existe t_o tel que : $\| u_\beta(t_o) \|_{N(\gamma-1)/2} < c_o$, alors, d'après 1d), $\lim\limits_{t \to \infty} \| u_\beta(t) \|_{N(\gamma-1)/2} = 0$ et d'après la proposition 4, il existerait $\alpha_1 > \beta$ tel que $\| u_{\alpha_1}(t) \|_{N(\gamma-1)/2} < c_o$, u_{α_1} serait une solution globale de (1) (toujours à cause de 1d)), ce qui est en contradiction avec la définition de β.

On construit alors comme précédemment $u_{o_n} = u_o + \beta_n \eta_n$, où β_n est le nombre qui vient d'être défini correspondant à η_n , on obtient ainsi une suite u_n de solutions globales de (1) appartenant à $C([0,+ \infty[\, ; L^\gamma(\Omega))$ et à $C^2(\overline{\Omega} \times [0,+ \infty[\,)$. Soit $T > 0$, les mêmes arguments que dans (a) permettent d'affirmer qu'on peut extraire une sous-suite notée $\{ u_n^1 \}$ telle que $u_n^1 \to u^1$ dans $C([\delta,T - \delta]\, ; L^m(\Omega))$ pour tout $\delta > 0$, $1 \leqslant m < (\gamma+3)/2$, u^1 a les mêmes propriétés que u sauf (20) et (21). u^1 vérifie (25) puisque l'hypothèse (2) implique que la convergence de u_n^1 vers u^1 a aussi lieu dans $C([\delta, T - \delta] : L^{N(\gamma-1)/2}(\Omega))$.

De même, on peut extraire de $\{ u_n^1 \}$ une sous-suite $\{ u_n^2 \}$ ayant les mêmes propriétés que u_n^1 mais qui converge sur $[\delta,2T - \delta]$ $\forall\, \delta > 0$ vers une fonction u^2 avec les mêmes propriétés que u^1 mais sur (0,2T) et égale à u^1 sur $[0,T[$. En itérant le procédé, on obtient une solution globale de (1) ayant les propriétés démandées. En effet, u vérifie (22) puisque pour tout $t \geqslant 0$, il existe n tel que $u(t) = u^n(t)$, $u^n(t)$ vérifiant (25). u est donc distincte de u_m , on en déduit (20) de la même façon que dans le a). La démonstration du théorème est terminée.

REFERENCES

[1] P. BARAS. *«Compacité de l'opérateur* $f \to u$ *solution d'une équation non linéaire* $(\frac{du}{dt}) + Au \ni f$». Note au C.R.A.S., t. 286, série A, (1978), p. 1113-1116.

[2] A. HARAUX, F.B. WEISSLER. *«Non-uniqueness for a semi-linear initial value problem»*. Indiana University Mathematics Journal, vol. 31, n° 2, (1982), p. 167-189.

[3] A. HARAUX, M. KIRANE. *«Estimations* C^1 *pour des problèmes paraboliques semi-linéaires»*. Université Pierre et Marie Curie. Paris V.

[4] F.B. WEISSLER. *«Local existence and non-existence for semilinear parabolic equations in* L^p*»*. Indiana University Mathematics Journal, vol. 29, n° 1, (1980), p. 79-102.

(Manuscrit reçu le 28 octobre 1982)