ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

DOMINIQUE CERVEAU
ALCIDES LINS NETO

Formes tangentes à des actions commutatives

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 6, nº 1 (1984), p. 51-85
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1984_5_6_1_51_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol VI, 1984, P. 51 à 85

FORMES TANGENTES A DES ACTIONS COMMUTATIVES

Dominique Cerveau (1) **et Alcides Lins Neto** (2)

(1) Département de Mathématiques, Laboratoire de Topologie, ERA no 07-945, Faculté des Sciences Mirande, 21000 Dijon - France.

(2) Instituto de mathematica pura e aplicada (IMPA), Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro Brésil.

Résumé : On étudie les formes intégrables ω sur $\mathbb{C}^n$, 0 dont le $(n-1)$ jet $\bar{\omega}_{n-1}$ est tangent à une action linéaire générique de $\mathbb{C}^{n-1}$, i.e $\bar{\omega}_{n-1}$ est du type $x_1 \dots x_n \ \Sigma\lambda_i \dfrac{dx_i}{x_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{C} - \{0\}$. On s'intéresse notamment au problème de la détermination finie et on établit le fait que ω est elle-même tangente à une action commutative (pas toujours linéarisable), ceci lorsque les λ_i sont distincts. Ce type de singularités joue dans la théorie des feuilletages singuliers un rôle analogue à celui des singularités de Morse dans le cas des fonctions. C'est ce qui motive leur étude.

Summary : Integrable forms $\omega = \bar{\omega}_{n-1} + \dots$ with $(n-1)$ jet of type $\bar{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \ \Sigma\lambda_i \dfrac{dx_i}{x_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{C} - \{0\}$ are studied. We give results of finite determinacy and we prove that if the λ_i are distinct ω is tangent to an abelian action. These singularities, in theory of singular foliations, are analogous to Morse functions in theory of functions.

0. - INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude des «perturbations» des formes intégrables tangentes à des actions linéaires commutatives naturelles. Un germe de 1-forme ω ($\mathscr{C}^\infty$, analytique ou holomorphe) à l'origine de K^n (où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dit intégrable lorsque $\omega \wedge d\omega = 0$. Lorsque ω

ne s'annule pas à l'origine, le théorème de Frobenius classique assure l'existence de (n−1) champs de vecteurs commutants dont l'intégration donne les feuilles du «feuilletage» $\mathcal{F}_\omega$ défini par ω. Nous nous proposons ici de donner des critères pour que subsiste un résultat analogue en présence de singularités.

D'une façon générale, soit ω un germe de 1-forme holomorphe intégrable à l'origine de K^n. Nous dirons que ω est tangente à une action de groupe s'il existe une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de champs de vecteurs ($\mathcal{C}^\infty$, analytiques ou holomorphes) de dimension finie sur K telle que :

1) $\omega(X) = 0$ pour tout X dans $\mathcal{G}$
2) $\dim \mathcal{G}_x = n-1$ pour x dans un ouvert dense.

L'intégration des champs de $\mathcal{G}$ conduit à un groupe G de germes de difféormorphismes qui agit naturellement sur K^n,o. Les feuilles du feuilletage singulier $\mathcal{F}_\omega[M,M]$ sont alors les orbites de dimension n−1, suivant G, des points de K^n.

Avant d'énoncer nos résultats, donnons quelques exemples bien classiques.

Le premier exemple est donné comme il a déjà été dit par le théorème de *Frobenius. Vient ensuite le phénomène de Kupka-Reeb* [K] ; on autorise ici ω à s'annuler : $\omega(0) = 0$, mais $d\omega(0) \neq 0$. Le théorème de Darboux assure alors l'existence de coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$ dans lesquelles $d\omega$ s'écrit $d\omega = dx_1 \wedge dx_2$ (en effet $d\omega \wedge d\omega = 0$) ; l'intégrabilité implique alors que ω ne dépend que de deux variables :

$$\omega = A(x_1,x_2)dx_1 + B(x_1,x_2)dx_2$$

On obtient une action de K^{n-1} en intégrant l'algèbre commutative :

$$\mathcal{G} = K \left\{ B\frac{\partial}{\partial x_1} - A\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$$

Dans ces deux exemples, la propriété «être tangent à une action» est déterminée par un jet d'ordre fini de ω. Dans cet ordre d'idée voici un résultat qui a été prouvé indépendemment par les deux auteurs (A.L.N. avec C. Camacho dans [C.L.]) :

Soit $\omega = \omega_\nu + \ldots$ un germe de forme holomorphe intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^3$; on suppose que le premier jet non nul $j^\nu\omega = \omega_\nu$ de ω en 0 est d'ordre au moins 3 ($\nu \geqslant 3$) et que 0 est une singularité isolée de $d\omega_\nu$. Il existe alors un germe de difféomorphisme $\phi : \mathbb{C}^3, 0 \circlearrowleft$ tel que $\phi^*(\omega) = \omega_\nu$. De plus ω est tangente à une action du groupe affine (puisqu'un calcul simple prouve qu'il en est ainsi pour ω_ν).

Il y a en fait plus surprenant [C.L] : soit ω un germe de forme holomorphe intégrable en $0 \in \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 4$. On suppose qu'il existe un plongement $i : \mathbb{C}^3, 0 \to \mathbb{C}^n, 0$ tel que 0 soit une singularité isolée de $d\bar{\omega}$, où l'on a posé $\bar{\omega} = i^*\omega$. Alors ω est triviale au-dessus de $\bar{\omega}$, i.e il existe une submersion $\psi : \mathbb{C}^n,0 \to \mathbb{C}^3,0$ telle que $\omega = \psi^*\bar{\omega}$.

Venons en maintenant aux formes tangentes à des actions commutatives génériques.

On se donne dans $\mathbb{C}^n$ une algèbre de Lie $\mathcal{G}_1$ de champs linéaires commutants engendrée par les champs $A_1,\dots,A_{n-1}$, dim $\mathcal{G}_1 = n-1$. Nous ferons les hypothèses génériques suivantes sur $\mathcal{G}_1$:

1) les champs A_i sont simultanément diagonalisables, de sorte que dans des coordonnées diagonalisantes $x_1,\dots,x_n$ la forme

$$\bar{\omega}_{n-1} = i_{A_1} i_{A_2} \dots i_{A_{n-1}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

s'écrit $\bar{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{dx_i}{x_i}$

2) les a_i sont deux à deux distincts et non nuls.

Notons d'emblée que les «plans de coordonnées» $x_i = 0$ sont des séparatrices de $\bar{\omega}_{n-1}$. Une première condition d'indépendance entière des a_i intervient lorsque l'on recherche les courbes solutions de $\bar{\omega}_{n-1}$, i.e les applications $\gamma : \mathbb{C},0 \to \mathbb{C}^n,0$, $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ telles que $\gamma^*\bar{\omega}_{n-1} = 0$; comme $\bar{\omega}_{n-1}$ est homogène, on peut supposer les γ_i homogènes, i.e :

$$\gamma_i = \alpha_i t^{p_i} \quad , \quad \alpha_i \in \mathbb{C} \quad , \quad p_i \in \mathbb{N}$$

Les solutions contenues dans les plans $x_i = 0$ étant déjà envisagées, supposons les $\alpha_i \neq 0$. Lorsque l'on explicite $\gamma^*\bar{\omega}_{n-1} = 0$ il vient :

$$\alpha_1 \dots \alpha_n t^{(\Sigma p_i)-1} . \Sigma a_i p_i = 0$$

De sorte que lorsque les a_i sont $\mathbb{N}$ indépendants, toutes les courbes intégrales holomorphes de $\bar{\omega}_{n-1}$ sont contenues dans les séparations canoniques $(x_i = 0)$.

Disons que $\bar{\omega}_{n-1}$ est *non-résonnante* si la condition (*) suivante est satisfaite :

(*) il existe un couple d'indice (i,j) tel que a_i / a_j n'appartiennent pas à $\mathbb{Z} \cup \frac{1}{\mathbb{Z}} \cup \mathbb{Q}_+$.

Un premier résultat formel, qui s'apparente aux théorèmes de linéarisation formelle des champs, (bien qu'il n'en découle pas directement) est le :

THEOREME 1 (de conjugaison formelle). *Soit* ω *un germe de forme intégrable holomorphe à l'origine* 0 *de* $\mathbb{C}^n$ *(ou plus généralement une forme intégrable formelle) dont le* n–1 *jet en* 0 *est :*

$$j^{n-1}\,\omega = \bar{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \,\Sigma\, a_i \frac{dx_i}{x_i}, \quad a_i \neq a_j \neq 0 \qquad \textit{pour } i \neq j.$$

Si $\bar{\omega}_{n-1}$ *est non résonnante il existe un difféomorphisme formel* $\phi = \mathrm{id} + \dots$ *tel que* $\phi^* \bar{\omega}_{n-1} = \omega$.

Lorsque $n = 2$, le théorème 1 est impliqué par le théorème de linéarisation formelle d'un champ de vecteur dont la partie linéaire a ses valeurs propres non résonnantes (condition (*)). Pour n quelconque (*) est une condition de non résonnance à la Poincaré portant cette fois sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_1$ des champs linéaires annulés par $\bar{\omega}_{n-1}$. Des conditions de petits diviseurs apparaissent déjà dans le cas $n = 2$ pour obtenir la linéarisation holomorphe, il n'est donc pas étonnant que des conditions analogues apparaissent dans ce contexte :

THEOREME 2 (de conjugaison holomorphe). *Soit* ω *un germe de forme intégrable holomorphe à l'origine de* $\mathbb{C}^n$ *dont le* n–1 *jet est* $\bar{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \,\Sigma\, a_i \frac{dx_i}{x_i}$ $a_i \neq a_j \neq 0$ *pour* $i \neq j$. *Sous réserve que l'une des conditions* a,b,c *qui suivent soit satisfaite, il existe un germe de difféomorphisme holomorphe* ϕ *tel que* $\omega = \phi^* \bar{\omega}_{n-1}$

a) il existe un couple (i,j) *tel que* $a_i / a_j \notin \mathbb{R}$

b) tous les a_i *sont alignés,* i.e. $(a_1,\dots,a_n) = \lambda(b_1,\dots,b_n)$ *avec* $b_i \in \mathbb{R}$, *mais les* b_i *ne sont pas tous de même signe et vérifient la condition* (*).

c) les a_i *sont alignés,* i.e. $(a_1,\dots,a_n) = \lambda(b_1,\dots,b_n)$ *où les* b_i *sont réels tous de même signe, et il existe un couple* (b_i,b_j) *satisfaisant une condition diophantienne :*

$$|kb_i - \ell b_j| \geqslant \frac{1}{|k+\ell|^{\epsilon}}$$

pour tout (k,ℓ) *dans* $\mathbb{N}^2 - \{(0,0)\}$; ϵ *est un réel positif.*

En utilisant les résultats de [L] et [CL] , on obtient un résultat de persistance des singularités des formes $\bar{\omega}_{n-1}$:

COROLLAIRE. *Soit* ω *une forme intégrable holomorphe définie sur un ouvert* U *de* $\mathbb{C}^n$ *contenant* 0, *telle que* $j^{n-1}\,\omega = \bar{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{dx_i}{x_i}$ *vérifie la condition a) ainsi que* $\Sigma\, a_i \neq 0$ *(on dit que* $\bar{\omega}_{n-1}$ *est non dicritique). Alors si* Ω *est une forme intégrable suffisamment proche de* ω, *il existe un point* p *de* U *et des coordonnées* $y_1,\dots,y_n$ *en* p *telles que* $\Omega = y_1 \dots y_n \,\Sigma\, a_i' \frac{dy_i}{y_i}$ *au* *voisinage du point* p. *Les* a_i' *sont des nombres complexes voisins des* a_i.

Disons qu'une forme intégrable ω est tangente à une action commutative, si l'on peut réaliser le feuilletage singulier $\mathscr{F}_\omega$ définie par ω au moyen d'un algèbre de Lie (de dimension finie) $\mathscr{G}$ de champs de vecteurs commutants (i.e. $\mathscr{F}_\omega = \mathscr{F}_{\mathscr{G}}$). Ceci est notamment le cas lorsque l'on peut écrire $\omega = i_{X_1} i_{X_2} \dots i_{X_{n-1}}$ (vol) où les X_i sont des champs commutants.

D'après ce qui précède une forme $\omega = \overline{\omega}_{n-1} + \dots$ satisfaisant aux hypothèses du théorème 2 *est tangente à une action commutative (linéarisable).*

Lorsque $\overline{\omega}_{n-1}$ est résonnante on peut écrire $\overline{\omega}_{n-1} = \lambda \, . \, x_1 \dots x_n \, \Sigma \, k_i \dfrac{dx_i}{x_i}$ où les $k_j \in \mathbb{Z}$ sont sans diviseurs communs. On peut d'ailleurs résorber le coefficient λ par une homothétie. Dans ce cas, il est possible d'établir un résultat de «formes normales» :

THEOREME 3. *Soit* ω *un germe de forme intégrable holomorphe à l'origine de* $\mathbb{C}^n$ *telle que :*

$$j^{n-1}\,\omega = \overline{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \, \Sigma \, k_i \frac{dx_i}{x_i} \, , \; k_i \in \mathbb{Z} \, , \;\; k_i \neq k_j \neq 0 \quad \textit{pour } i \neq j$$

a) Lorsque tous les k_i *sont de même signe* ω *est holomorphiquement conjuguée à* $\overline{\omega}_{n-1}$ *si et seulement si* ω *possède une intégrale première formelle (faible au sens de* [*M,M*] *).*

b) Lorsque les k_i *ne sont pas tous de même signe* ω *est conjuguée à une forme intégrable polynomiale* $\overline{\omega}_{n-1} + P$, $j^{n-1} P = 0$, *tangente à une action commutative non linéarisable en général dans le cas résonnant.*

Une étude plus précise du cas $j^{n-1}\,\omega = x_1 \dots x_n \, \Sigma \, b_i \dfrac{dx_i}{x_i}$ où les b_i sont réels positifs permet alors d'énoncer le :

THEOREME 4. *Soit* ω *un germe de* 1*-forme holomorphe intégrable dont le* $n-1$ *jet est :*

$$\overline{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \, \Sigma \, a_i \frac{dx_i}{x_i}, \quad a_i \neq a_j \neq 0 \qquad \textit{pour } i \neq j$$

Alors ω *est tangente à une action commutative.*

Pour terminer nous énonçons une généralisation du phénomène de *Kupka-Reeb* qui dit que les formes $\overline{\omega}_{n-1} + \dots$ n'admettent que des extensions triviales :

THEOREME 5. *Soit* ω *un germe de forme holomorphe intégrable à l'origine de* $\mathbb{C}^m$. *Supposons qu'il existe un plongement* $i : \mathbb{C}^n{}_{,0} \to \mathbb{C}^m{}_{,0}$ $\;n \leqslant m$ *tel que :*

$$j^{n-1}(i^*\omega) = \overline{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \, \Sigma \, a_k \frac{dx_k}{x_k} \quad a_k \neq a_\ell \neq 0 \quad \textit{pour } k \neq \ell$$

Il existe alors un germe de submersion $F : \mathbb{C}^m,_0 \to \mathbb{C}^n,_0$ *tel que* $\omega = F^*(i^*\omega)$; ω *ne dépend donc que de* n *variables et est tangente à une action commutative.*

En utilisant les récents travaux de Marc Chaperon [Ch] on adaptera ensuite les résultats précédents au cas réel C^∞.

I. - DETERMINATION FINIE FORMELLE DES FORMES NON RESONNANTES

Le but de ce chapitre est d'établir le

THEOREME 1. *Soit* ω *un germe de forme intégrable holomorphe à l'origine* 0 *de* $\mathbb{C}^n$ *(ou plus généralement une forme intégrable formelle) dont le* (n−1) *jet en* 0 *est*

$$j^{n-1}\,\omega = \overline{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \,\Sigma\, a_i \frac{dx_i}{x_i}, \quad a_i \neq a_j \neq 0 \qquad \textit{pour } i \neq j.$$

Si $\overline{\omega}_{n-1}$ *est non résonnante, il existe un difféomorphisme formel* $\phi = \mathrm{id} + \dots$ *tel que* $\phi^*\omega = \overline{\omega}_{n-1}$.

Démonstration. D'après la condition de non résonnance (*), il existe deux indices i_o , j_o tels que $a_{i_o} / a_{j_o} \notin \mathbb{Z} \cup \frac{1}{\mathbb{Z}} \cup \mathbb{Q}_+$. Supposons que $(i_o , j_o) = (1,2)$.

Ecrivons formellement $\omega = \sum_{j=n-1}^{\infty} \omega_j$ où chaque ω_j est une forme homogène de degré j. Nous allons construire par induction des difféomorphismes f_m , $f_1 = \mathrm{id},\dots,f_m = f_{m-1} \circ g_m$ avec $g_m(x) = x + \Delta_m(x)$, Δ_m homogène de degré m, qui vérifient $j^{n+m-2} . f_m^* \omega = \overline{\omega}_{n-1}$. Il est clair que ce procédé nous conduira à un difféomorphisme formel $\phi = \lim_m f_m$ répondant à la question.

Supposons que l'on ait construit $f_{\ell-n+1}$, $\ell > n-1$. Nous avons

$$f^*_{\ell-n+1}\,\omega = \overline{\omega}_{n-1} + \omega_\ell + \dots$$

où ω_ℓ est homogène de degré ℓ. Il nous faut trouver :

$$g_{\ell-n+2}(x) = x + \Delta_{\ell-n+2}(x)$$

de sorte que :

$$f^*_{\ell-n+2}\,\omega = g^*_{\ell-n+2}\;(f^*_{\ell-n+1}(\omega)) = \overline{\omega}_{n-1} + \omega_{\ell+1} + \dots$$

avec $\omega_{\ell+1}$ homogène de degré $\ell+1$.

Nous avons :

$$j^{\ell}(g^*_{\ell-n+2}(f^*_{\ell-n+2}\omega)) = \overline{\omega}_{n-1} + \omega_{\ell} + L_{\Delta_{\ell-n+2}}(\overline{\omega}_{n-1})$$

où $L_{\Delta_{\ell-n+2}}(\overline{\omega}_{n-1})$ est la dérivée de Lie de $\overline{\omega}_{n-1}$ suivant le champ de vecteur $z \to \Delta_{\ell-n+2}(z)$.
Nous devons donc résoudre l'équation : $L_{\Delta_{\ell-n+2}}(\overline{\omega}_{n-1}) = -\,\omega_{\ell}$. Ecrivons

$$\omega_{\ell} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\mu|=\ell}} b^i_{\mu}\, x^{\mu}\, dx_i \;, \quad \mu = (\mu_1,\dots,\mu_n), \quad x^{\mu} = x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}$$

$$= \sum_{|\sigma|=\ell+1} x^{\sigma} \cdot \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \sigma_i \cdot c^i_{\sigma} \frac{dx_i}{x_i} \right) = \sum_{|\sigma|=\ell+1} \alpha_{\sigma}$$

avec $\sigma_i \cdot c^i_{\sigma} = b^i_{\sigma-e_i}$, $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$.

De la même manière écrivons :

$$\overline{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{dx_i}{x_i}$$

$$d\overline{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \sum_{i<j} (a_j - a_i) \cdot \frac{dx_i \wedge dx_j}{x_i\, x_j}$$

$$d\omega_{\ell} = \sum_{|\sigma|=\ell+1} x^{\sigma} \cdot \sum_{i<j} \sigma_i\, \sigma_j\, (c^j_{\sigma} - c^i_{\sigma}) \frac{dx_i \wedge dx_j}{x_i\, x_j}$$

Le condition d'intégrabilité implique l'égalité :

$$\overline{\omega}_{n-1} \wedge d\omega_{\ell} + \omega_{\ell} \wedge d\overline{\omega}_{n-1} = 0$$

soit :

$$0 = \sum_{|\sigma|=\ell+1} x^{\sigma+(1,\dots,1)} \sum_{i<j<k} \Big[a_i\, \sigma_j\, \sigma_k (c^k_{\sigma} - c^j_{\sigma}) + a_j \sigma_k \sigma_i (c^i_{\sigma} - c^k_{\sigma}) +$$

$$a_k \sigma_i \sigma_j (c^j_{\sigma} - c^i_{\sigma}) + \sigma_i c^i_{\sigma}(a_k - a_j) + \sigma_j \cdot c^j_{\sigma}(a_i - a_k) + \sigma_k c^k_{\sigma}(a_j - a_i) \Big] \frac{dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k}{x_i \cdot x_j \cdot x_k}$$

et donc :

$$(1) \qquad \ell_\sigma^{ijk} = \sigma_i \, . \, c_\sigma^i \left[(\sigma_k-1)a_j - (\sigma_j-1)a_k\right] + \sigma_j c_\sigma^j \left[(\sigma_i-1)a_k - (\sigma_k-1)a_i\right] + \sigma_k c_\sigma^k \left[(\sigma_j-1)a_i - (\sigma_i-1)a_j\right] = 0 \qquad \forall\, i,j,k, \forall\, \sigma, \; |\sigma| = \ell+1$$

Nous cherchons $\Delta_{\ell-n+2}$ sous la forme suivante : $\Delta_{\ell-n+2} = -\Sigma\,\Delta_\sigma$, avec Δ_σ homogène de degré $\ell-n+2$, de sorte que $L_{\Delta_\sigma}\,\bar{\omega}_{n-1} = \alpha_\sigma$. Remarquons d'abord que si $\sigma_i = \sigma_j = 0$ alors $\alpha_\sigma = 0$. En effet, d'après (1) pour tout k :

$$\sigma_k \, . \, c_\sigma^k (a_j - a_i) = 0 \qquad \text{i.e.} \qquad \sigma_k \, . \, c_\sigma^k = 0 \qquad k \neq i,j$$

Or $\alpha_\sigma = x^\sigma \, . \displaystyle\sum_{k=1} \sigma_k \, . \, c_\sigma^k \frac{dx_k}{x_k}$. Dans ce cas nous prendrons $\Delta_\sigma = 0$.

Supposons maintenant qu'il existe un i unique tel que $\sigma_i = 0$. Il vient alors pour tout $j \neq i$, $k \neq i$:

$$(2) \qquad \sigma_k \, . \, c_\sigma^k \left[a_j + (\sigma_j-1) \, . \, a_i\right] = \sigma_j \, c_\sigma^j \left[a_k + (\sigma_k-1)a_i\right]$$

Nous cherchons alors Δ_σ sous la forme :

$$\Delta_\sigma = \lambda \, . \, x^\mu \, \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{avec } \mu = \sigma - (1,\dots,1) + e_i$$

Nous avons :

$$L_{\Delta_\sigma}\,\bar{\omega}_{n-1} = \lambda x^\sigma \, . \sum_k \, (a_k + (\sigma_k-1)a_i) \, \frac{dx_k}{x_k}$$

L'égalité $L_{\Delta_\sigma}\,\bar{\omega}_{n-1} = \alpha_\sigma$ sera réalisée si pour tout k :

$$\lambda(a_k + (\sigma_k-1)a_i) = \sigma_k \, . \, c_\sigma^k$$

Si i = 2 la condition $\dfrac{a_1}{a_2} \notin \mathbb{Z}$ assure que $a_1 + (\sigma_1-1)a_2 \neq 0$ et $\lambda = \dfrac{\sigma_1 \, c_\sigma^1}{a_1+(\sigma_1-1)a_2}$ convient d'après les égalités (2).

Si i = 1, on utilisera la condition $\dfrac{a_2}{a_1} \notin \mathbb{Z}$ et on prendre $\lambda = \dfrac{\sigma_2 \, c_\sigma^2}{a_2+(\sigma_2-1)a_1}$.

Si $i \neq 1$, $i \neq 2$, comme $\dfrac{a_1}{a_2}$ n'est pas rationnel positif, l'une des deux quantités $a_1 + (\sigma_1-1)a_i$ ou $a_2 + (\sigma_1-1)a_i$ est non nulle ; s'il s'agit par exemple de la première nous prendrons $\lambda = \dfrac{\sigma_1 \, c_\sigma^1}{a_1+(\sigma_1-1)a_i}$ quantité qui convient puisque $\ell_\sigma^{1ik} = 0$ pour tout k.

Etudions enfin le cas où tous les σ_i sont supérieurs ou égaux à 1. Nous recherchons cette fois Δ_σ sous la forme :

$$\Delta_\sigma = x^\mu \sum_{j=1}^{n} d_j\, x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad \text{avec} \quad \mu = \sigma - (1,\dots,1)$$

Nous avons :

$$L_{\Delta_\sigma} \overline{\omega}_{n-1} = x^\sigma . \sum_k \sum_j (a_k + (\sigma_k - 1)a_j)d_j \frac{dx_k}{x_k}$$

et l'équation $L_{\Delta_\sigma} \overline{\omega}_{n-1} = \alpha_\sigma$ s'écrit maintenant :

$$\sigma_k \,.\, c_\sigma^k = \sum_{j=1}^{n} (a_k + (\sigma_k - 1)a_j)d_j\,, \qquad k = 1,\dots,n.$$

Introduisons les notations suivantes :

$$b_j = \sigma_j\, c_\sigma^j\,, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad A_{kj} = a_k + (\sigma_k - 1)a_j$$

La matrice (A_{kj}) est de rang supérieur ou égal à 2 ; en effet il existe k tel que $\sigma_k \geqslant 2$ puisque $|\sigma| = \sigma_1 + \dots + \sigma_n \geqslant n+1$; alors l'un des deux mineurs :

$$\begin{vmatrix} A_{1i} & A_{1j} \\ A_{ki} & A_{kj} \end{vmatrix} = (a_j - a_i) \left[(\sigma_k - 1)a_1 - (\sigma_1 - 1)a_k\right]$$

$$\begin{vmatrix} A_{2i} & A_{2j} \\ A_{ki} & A_{kj} \end{vmatrix} = (a_j - a_i) \left[(\sigma_k - 1)a_2 - (\sigma_2 - 1)a_k\right]$$

est non nul puisque $a_1/a_2 \notin \mathbb{Q}_+$.

D'autre part pour tout i,j,k,ℓ,m on a

$$\begin{vmatrix} A_{ki} & A_{kj} & b_k \\ A_{\ell i} & A_{\ell j} & b_\ell \\ A_{mi} & A_{mj} & b_m \end{vmatrix} = (a_j - a_i) \,.\, \ell_\sigma^{ijk} = 0$$

Le vecteur b est donc dans l'image de (A_{kj}). Q.E.D.

II. - DETERMINATION FINIE HOLOMORPHE DES FORMES NON RESONNANTES EN PRESENSE DE PETITS DIVISEURS

Comme on peut s'y attendre l'homogenisation formelle des perturbations des formes non résonnantes ne va pas toujours conduire à une homogénisation holomorphe ; pour s'en convaincre il suffit de se placer en dimension $n = 2$ où les formes $\bar{\omega}_{n-1}$ s'écrivent :

$$\bar{\omega}_1 = a_1\, y\, dx + a_2\, x\, dy$$

Pour être assuré de la 1-détermination finie on demande usuellement que l'une des trois conditions suivantes soit réalisées :

a) le quotient a_1 / a_2 n'est pas réel.

b) $a_1 / a_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ mais la condition (*) de non résonnance est satisfaite et λ est négatif.

c) $a_1 / a_2 = \mu$, où μ est un réel positif vérifiant les conditions diophantiennes :

$$|\mu - \frac{i}{j}| \geqslant \frac{1}{|i+j|^{\epsilon}} \qquad \forall\, (i,j) \in \mathbb{N}^2.$$

Suivant l'usage les conditions a) et b) définissent le domaine de Poincaré c) celui de Siegel. Ceci se généralise de la façon suivante :

THEOREME 2. *Soit ω un germe de forme holomorphe intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^n$ dont le $(n-1)$ jet est*

$$j^{n-1}\, \omega = \bar{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n\, \Sigma\, a_i \frac{dx_i}{x_i}, \quad a_i \neq a_j \neq 0 \qquad \textit{pour } i \neq j.$$

Sous réserve que l'une des conditions a) b) c) suivantes soit satisfaite, il existe un germe de difféomorphisme holomorphe ϕ tel que $\omega = \phi^* \bar{\omega}_{n-1}$.

a) il existe un couple (i,j) tel que $a_i / a_j \notin \mathbb{R}$.

b) tous les a_i sont alignés, i.e. $(a_1,\dots,a_n) = \lambda(b_1,\dots,b_n)$ *où les b_i sont réels tous de même signe et vérifient* (*).

c) les a_i sont alignés, i.e. $(a_1,\dots,a_n) = \lambda(b_1,\dots,b_n)$ *où les b_i sont réels de même signe et il existe un couple (b_i,b_j) satisfaisant des conditions diophantiennes :*

$$|k\, b_i - \ell\, b_j| \geqslant \frac{1}{|k+\ell|^{\epsilon}}$$

pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 - \{(0,0)\}$; ϵ est un réel positif.

Démonstration. Dans quelque hypothèse a, b ou c que l'on soit, la condition (*) de conjugaison formelle est vérifiée ; ω est donc formellement conjuguée à $\bar{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \Sigma a_i \dfrac{dx_i}{x_i}$. Introduisons les objets suivantes pour $\alpha \in \Lambda^1(n)$:

$$D_\alpha = \{X \in \chi(n),\ \ \alpha(X) = 0\}$$

$$\widehat{D}_\alpha = \{\widehat{X} \in \widehat{\chi(n)},\ \ \alpha(\widehat{X}) = 0\}$$

$$D_\alpha(0) = \{X(0), X \in D_\alpha\},\ j^1 D_\alpha = \{j^1 X, X \in D_\alpha\}$$

Si α est intégrable D_α (resp. $\widehat{D}_\alpha$) est une distribution involutive au sens de $[C_1]$. D'après le théorème 1, il existe un difféomorphisme formel qui envoie $\widehat{D}_\omega$ sur $\widehat{D}_{\bar{\omega}_{n-1}}$. Il en résulte que :

$$j^1 \widehat{D}_\omega = j^1 \widehat{D}_{\bar{\omega}_{n-1}}.$$

De la platitude de $\widehat{\mathcal{O}}_n$ sur $\mathcal{O}_n$, nous tirons les égalités :

$$j^1 D_\omega = j^1 \widehat{D}_\omega = j^1 D_{\bar{\omega}_{n-1}}.$$

Remarquons maintenant que $j^1 D_\omega$ est engendré par les champs linéaires :

$$A_i = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{a_1}{a_i} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad i = 2,\dots,n.$$

Soit $t = (t_2,\dots,t_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$; désignons par $A(t)$ le champ

$$A(t) = \sum_{i=2}^{n} t_i A_i$$

et par $\lambda(t) = (\lambda_1(t),\dots,\lambda_n(t))$ le spectre de $A(t)$,

$$\lambda_i(t) = -t_i \frac{a_1}{a_i} \text{ si } i \neq 1 \quad \text{et} \quad \lambda_1(t) = \sum_{i=2}^{n} t_i .$$

La condition (*) étant satisfaite, supposons que a_1 / a_2 et a_2 / a_1 n'appartiennent pas à $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}_+$. Nous avons les lemmes suivants :

LEMME 1. *L'ensemble* Σ *des* $t \in \mathbb{C}^{n-1}$ *tel que* $\lambda(t)$ *vérifie les conditions de non résonnance de Poincaré :*

$$< \lambda(t), \sigma > - \lambda_j(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) \cdot \sigma_k - \lambda_j(t) \neq 0$$

pour $\sigma \in \mathbb{N}^n$, $|\sigma| \geqslant 2$, $j \in [1 \dots n]$, *est un ensemble résiduel.*

LEMME 2. *Sous les hypothèses a) ou b), il existe* $t \in \mathbb{C}^{n-1}$ *tel que l'enveloppe convexe des* $\lambda_i(t)$ *dans le plan complexe ne contienne pas* 0 *dans son intérieur.*

Des lemmes 1 et 2 on tire le résultat suivant : dans les cas a) et b) il existe t tel que le champ $A(t) \in j^1 D_\omega$ vérifie les conditions de non résonnance de Poincaré et tel que 0 ne soit pas dans l'enveloppe convexe des $\lambda_i(t)$. Notamment il résulte du théorème de linéarisation de Poincaré qu'un champ de vecteur holomorphe ayant A(t) pour 1-jet est linéarisable.

LEMME 3. *Sous l'hypothèse c) il existe* t *tel que les valeurs propres du champ* A(t) *vérifient des conditions de petits diviseurs.*

$$|<\lambda(t), \sigma> - \lambda_j(t)| \geqslant \frac{1}{|\sigma|^\alpha}, \quad \forall \sigma \in \mathbb{N}^n,\ |\sigma| \geqslant 2,\ j = 1 \dots n$$

Preuve. Supposant que $(i_o, j_o) = (1,2)$: $|kb_1 - \ell b_2| \geqslant \dfrac{1}{|k+\ell|^\epsilon}$, nous recherchons t sous la forme :

$$t = (t_2, \dots, t_n) = \left(-\frac{b_2}{b_1}, -s\frac{b_3}{b_1}, \dots, -s\frac{b_n}{b_1}\right) \quad \text{où} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Nous avons alors :

$$\lambda(t) = \left(-\frac{b_2}{b_1} - s \,.\, \sum_{j \geqslant 3} \frac{b_j}{b_1}, 1, s \dots, s\right)$$

Si $\displaystyle\sum_{j \geqslant 3} \frac{b_j}{b_1} = 0$ on peut prendre s = 1 puisque le couple (b_1, b_2) vérifie des conditions de petits diviseurs. Nous supposons donc $\beta = \displaystyle\sum_{j \geqslant 3} \frac{b_j}{b_1} \neq 0$. Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ un multi-indice $\Sigma \mu_i \geqslant 1$, où tous les μ_i sont positifs sauf éventuellement un valant -1 ; nous avons :

$$|<\lambda(t), \mu>| = |\mu_2 - \mu_1 \frac{b_2}{b_1} + s[-\mu_1 \beta + \mu_3 + \dots + \mu_n]|$$

$$|<\lambda(t), \mu>| = \frac{|s|}{|b_1|} |b_1\mu_2 - \mu_1 b_2| \left|\frac{1}{s} + b_1 \frac{-\mu_1\beta + \mu_3 + \dots + \mu_n}{(b_1\mu_2 - \mu_1 b_2)}\right|$$

$$|<\lambda(t), \mu>| \geqslant \frac{|s|}{|b_1|} \frac{1}{|\mu|^\epsilon} \left|\frac{1}{s} + b_1 \frac{-\mu_1\beta + \mu_3 + \dots + \mu_n}{(b_1\mu_2 - \mu_1 b_2)}\right|$$

Soit m un entier positif fixé ; l'ensemble $c_{\mu,m}$ des $u \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\left| u + b_1 \frac{-\mu_1\beta + \mu_3 + \dots + \mu_n}{(b_1\mu_2 - \mu_1 b_2)} \right| \geqslant \frac{1}{|\mu|^m} \tag{3}$$

est l'extérieur d'un intervalle $I_{\mu,m} = [u,u']$ de longueur $u'-u = \frac{2}{|\mu|^m}$. Si m est choisi assez grand la série $\sum_{\mu} \frac{1}{|\mu|^m}$ converge ; il existera alors u_o tel que l'inégalité (3) soit vraie pour tous les μ.

Si $s_o = \frac{1}{u_o}$ et $\lambda(t_o) = \left(-\frac{b_2}{b_1} - s_o \sum_{j\geqslant 3} \frac{b_j}{b_1}, 1, s_o, \ldots, s_o\right)$ nous avons :

$$|<\lambda(t_o),\mu>| \geqslant \frac{s_o}{|b_1|} \frac{1}{|\mu|^{m+\epsilon}}.$$

Si $\sigma \in \mathbb{N}^n$; $|\sigma| \geqslant 2$ et $\mu = \sigma - e_j$ on a :

$$|<\lambda(t_o),\sigma> - \lambda_j(t)| \geqslant \frac{s_o}{|b_1|} \frac{1}{|\mu|^{m+\epsilon}} \geqslant \frac{s_o}{|b_1|} \frac{1}{|\sigma|^{m+\epsilon}} \geqslant \frac{1}{|\sigma|^\alpha}$$

pour α assez grand. q.e.d.

Soit maintenant un champ $X \in D_\omega$ tel que $j^1X = A$ vérifie ou bien des conditions de petits diviseurs $|\Sigma \lambda_k\sigma_k - \lambda_j| \geqslant \frac{1}{|\sigma_1+\ldots+\sigma_n|^\alpha}$ dans le cas c) ou bien les conditions des lemmes 1 et 2 dans les cas a) et b). Comme $i_X\, \omega = 0$, utilisant la condition d'intégrabilité de ω il vient :

$$\omega \wedge i_X\, d\omega = 0$$

et d'après le théorème de division de Saïto [S] :

$$i_X\, d\omega = f.\omega, \quad f \in \mathcal{O}_n.$$

En remarquant que $i_A\, d\overline{\omega}_{n-1} = f(0)\, .\, \overline{\omega}_{n-1}$ nous avons $f(0) = \text{trace } A \neq 0$ puisque A n'a pas de résonnances.

Soit Y le champ $\frac{X}{f}$. Visiblement $j^1Y = \frac{A}{f(0)}$ vérifie les mêmes conditions aux valeurs propres que A. En outre, nous avons :

$$\begin{cases} L_Y\omega = i_Y\, d\omega = \omega \\ \text{trace}\, j^1Y = +1. \end{cases}$$

Des théorèmes de linéarisations de Poincaré et Siegel [Sg] résulte l'existence d'un système de coordonnées dans lequel $Y = B = j^1Y$. Utilisant alors le fait que trace $B = 1$ et que B n'a pas de résonnance, on montre par un calcul direct (cf $[C_2]$) que dans ces coordonnées ω est homogène de degré n–1. En combinant le théorème 2 et un résultat de [C.L.], on obtient un résultat de persistance des singularités $\overline{\omega}_{n-1}$.

COROLLAIRE. *Soit ω une forme intégrable holomorphe définie sur un ouvert* U *de* $\mathbb{C}^n$ *contenant* 0, *telle que*

$$j^{n-1}\,\omega = \overline{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \,\Sigma\, a_i \frac{dx_i}{x_i}$$

on suppose que $\overline{\omega}_{n-1}$ *vérifie a) du théorème 2 et est non dicritique, i.e.* $\Sigma\, a_i \neq 0$. *Si* Ω *est une forme intégrable définie sur* U *suffisamment proche de* ω, *il existe un point* $p \in U$ *et des coordonnées* $y_1,\dots,y_n$ *en* p *telles que au voisinage de* p *on ait :*

$$\Omega = y_1 \dots y_n \,\Sigma\, a'_i \frac{dy_i}{y_i}; \quad a'_i \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. D'après [C.L.] si Ω est suffisamment proche de ω il existe un point $p \in U$ tel que $j_p^{n-2}\,\Omega = 0$; i.e. $\Omega,p = \overline{\omega}'_{n-1} + \dots$ où $\overline{\omega}'_{n-1}$ est une forme homogène proche de $\overline{\omega}_{n-1}$. On prouve alors dans [L] que le cône tangent P_n en p de ω'_{n-1} est du type (c'est ici qu'intervient l'hypothèse $\Sigma\, a_i \neq 0$) : $P_n = \varphi_1 \dots \varphi_n$ où les φ_i sont des formes linéaires.

De sorte que $\overline{\omega}'_{n-1}$ s'écrit :

$$\overline{\omega}'_{n-1} = \varphi_1 \dots \varphi_n \,\Sigma\, a'_i \frac{d\varphi_i}{\varphi_i}$$

Comme $\overline{\omega}'_{n-1}$ est voisin de $\overline{\omega}_{n-1}$ un certain quotient a'_i / a'_j sera non réel. On conclut en utilisant le théorème 2.

III. - STABILITE DU LIEU SINGULIER ET DE L'IDEAL $\mathscr{I}(\overline{\omega}_{n-1})$

Dans ce court chapitre la lettre K désigne l'un des corps IR ou $\mathbb{C}$; le lemme qui suit permet de présenter des démonstrations élémentaires des théorèmes 3, 4, 5 ; sa démonstration fait appel à des techniques très différentes de celles utilisées dans le reste de ce travail. Aussi le lecteur pourra l'admettre sans nuire à la compréhension des chapitres suivants.

LEMME FONDAMENTAL. *Soit ω un germe de 1-forme intégrable à l'origine* 0 *de* K^n *de classe* C^r ($r = \infty$ *ou analytique réel si* K = IR, r = *holomorphe si* K = C). *Supposons que le* $n-1$ *jet de* ω *soit égal à :*

$$j^{n-1}\,\omega = \overline{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \,\Sigma\, a_i \frac{dx_i}{x_i}, \quad a_i \in K - \{0\},\ a_i \neq a_j \quad \textit{pour } i \neq j.$$

Alors les lieux singuliers $S(\omega) = \{x, \omega(x) = 0\}$ *et* $S(\overline{\omega}_{n-1}) = \bigcup_{i \neq j} (x_i = x_j = 0)$ *sont* C^r *difféomorphes.*

Notamment les idéaux $\mathcal{I}(\omega)$ *et* $\mathcal{I}(\bar{\omega}_{n-1})$ *des composantes de* ω *et* $\bar{\omega}_{n-1}$ *respectivement, sont* C^r *conjugués.*

La démonstration s'appuie sur divers résultats de [C.L] que nous allons mentionner. Tout d'abord voici quelques notations et définitions :

- Si V est un ouvert de K^n contenant 0, $\mathcal{I}^r(V)$ désigne l'ensemble des formes intégrables de classe C^r définies sur V.

- *Définition.* Soit $\omega \in \mathcal{I}^r(V)$ et p une singularité de ω telle que $j_p^{k-1}(\omega) = 0$, $j_p^k(\omega) = \omega_k$. Nous dirons que p est une singularité régulière d'ordre k si la condition suivante est satisfaite ; soit α_j une forme homogène de degré j, $0 \leqslant j \leqslant k-1$, vérifiant :

$$(*) \qquad \alpha_j \wedge d\omega_k + \omega_k \wedge d\alpha_j = 0$$

alors $\alpha_j = 0$ si $j \leqslant k-2$ et $\alpha_j = L_a(\omega_k)$ si $j = k-1$, où a est un champ de vecteur constant sur K^n et L_a la dérivée de Lie suivant a.

- Si $\omega \in \mathcal{I}^r(V)$ nous désignons par $M_k(\omega)$ l'ensemble des singularités régulières d'ordre k de ω dans V et par $M_k^\ell(\omega)$ l'ensemble suivant :

$$M_k^\ell(\omega) = \left\{ p \in M_k(\omega), \ \dim \operatorname{Im} L \ j_p^k(\omega) = \ell \right\}$$

où $L\, j_p^k(\omega)$ est l'opérateur linéaire : $a \in K^n \to L_a\, j_p^k(\omega)$.

PROPOSITION A [CL]. $M_k^\ell(\omega)$ *est une* C^r*-sous variété de codimenskon* ℓ *de* V ; *de plus il existe un voisinage* U *de* $M_k^\ell(\omega)$ *dans* V *tel que* :

$$U \cap M_k^\ell(\omega) = \left\{ q \in U, \ j_q^{k-1}(\omega) = 0 \right\}.$$

La variété $M_k^\ell(\omega)$ *est localement stable par petites perturbations de* ω *dans* $\mathcal{I}^r(V)$.

COROLLAIRE A [CL]. *Soit* ω_c, $c \in K^m$, *une famille* C^r *d'éléments de* $\mathcal{I}^r(V)$, $V \subset K^n$, *et* $p \in M_k^n(\omega_0)$. *Alors il existe des voisinages* U *de* p *dans* K^n, W *de* 0 *dans* K^m *et une application* $h : W \to U$ *de classe* C^r *telle que :*

a) pour tout $c \in W$, $h(c) \in M_k^n(\omega_c)$

b) $h(c) = \left\{ q \in U, \ j_q^{k-1}(\omega_c) = 0 \right\}$.

PROPOSITION B [CL]. *Soit* $\omega = \omega_0 + \dots + \omega_k$ *une forme intégrable polynômiale,* ω_j *homogène de degré* j. *Si* ω_k *est régulière, il existe une translation* $f(x) = x + a$ *telle que* $f^*(\omega) = \omega_k$.

PROPOSITION C [CL]. *Soit* $\omega \in \mathscr{I}^r(V)$, $p \in V$. *Supposons qu'il existe un plan* K^ℓ *passant par* $p \in V$ *tel que* $p \in M_k^\ell(\omega \mid K^\ell)$, i.e. $j_p^k(\omega \mid K^\ell) = \tilde{\omega}_k$ *est régulière. Si* $d\tilde{\omega}_k \not\equiv 0$ *alors* $p \in M_k^\ell(\omega)$, i.e. $j_p^{k-1}(\omega) = 0$ *et* $j_p^k(\omega) = \omega_k$ *est régulière.*

PROPOSITION D [CL]. *Soit* $\omega = \overline{\omega}_{n-1} + R \in \mathscr{I}^r(V)$, $0 \in V \subset K^n$, $\overline{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{dx_i}{x_i}$, $a_i \in K$, $a_i \neq a_j \neq 0$, $j_0^{n-1}(R) = 0$. *Alors* $0 \in M_{n-1}^n(\omega)$.

Plan de la démonstration du lemme. Soit $J = (j_1, \dots, j_s)$ un sous-ensemble de $(1, \dots, n)$ tel que $j_1 < \dots < j_s$ nous désignons par $\# J$ le nombre d'éléments de J et par E_J le sous espace vectoriel de K_n engendré par les vecteurs $e_{j_1}, \dots, e_{j_s}$ (e_i étant la base canonique de K^n). Pour $\# J = 0$ i.e. $J = \emptyset$ on pose $E_\emptyset = 0$.

Nous allons prouver qu'il existe, pour chaque $J \subset (1, \dots, n)$ tel que $\# J = n-2$, une sous-variété de classe C^r A_J tangente en 0 à l'espace E_J, contenue dans le lieu singulier $S(\omega)$. Ceci entrainera l'existence d'un germe de difféomorphisme C^r $f : K^n, 0 \to K^n, 0$ tel que $j_0^1 f = id$ et $f(E_J) = A_J$ pour tout J, $\# J = n-2$. La forme $\eta = f^*\omega$ est telle que :

a) $j^{n-1} \eta = j^{n-1} \omega = \overline{\omega}_{n-1}$

b) $S(\eta) \supset \bigcup_{\# J = n-2} E_J$

$\bigcup_{\# J = n-2} E_J$ est définie par l'idéal des germes de fonctions C^r engendré par les monômes $\frac{x_1 \dots x_n}{x_i} = \widehat{x_i}$. Il en résulte que η s'écrit $\eta = \overline{\omega}_{n-1} + \Sigma \widehat{x_i} . \eta_i$ où les η_i sont des germes de formes C^r nuls en 0. L'idéal $\mathscr{I}(\eta)$ des composantes de η est alors égal à celui des composantes de $\overline{\omega}_{n-1}$ puisqu'une matrice inversible fait passer de l'un à l'autre. Nous avons $\mathscr{I}(\eta) = \mathscr{I}(\overline{\omega}_{n-1}) = (\widehat{x_i})$ et donc $S(\eta) = \bigcup_{\# J = n-2} E_J = S(\omega_{n-1})$.

Démonstration de l'existence des A_J *et de* f. Nous choisissons un voisinage U de 0 sur lequel est définie un représentant du germe ω, noté encore ω. Pour chaque entier s, $0 \leqslant s \leqslant n-2$ considérons l'affirmation (s) suivante :

(s) : Il existe un voisinage U_s de 0, $U_s \subset U$, et pour chaque $J \subset (1, \dots, n)$ $\# J = s$, une sous variété C^r de U_s, tels que :

c) A_J est tangente à E_J en 0 et $A_J \subset N_s \cap U_s$, $\forall J, \# J = s$, où $N_s = \bigcup_{j=n-s}^{n} M_{j-1}^j(\omega)$.

d) $\bigcup_{\# J = s} A_J$ est difféomorphe à $U_s \cap \bigcup_{\# J = s} E_J$.

La démonstration du lemme résultera alors de l'affirmation (n − 2).

Preuve de (s) $0 \leqslant s \leqslant n-2$. Elle se fait par induction sur $s = 0,\dots,n-2$.

Pour s = 0, d'après les propositions D et A, $M^n_{n-1}(\omega)$ est de dimension 0 ; donc si U_o est un voisinage suffisamment petit de 0, on a :

$$\{0\} = M^n_{n-1}(\omega) \cap U_o = E_\phi .$$

Supposons (s) démontrée pour $0 \leqslant s \leqslant k-1 < n-2$. D'après l'hypothèse d'induction nous pouvons supposer que

$$\bigcup_{j=n-k+1}^{n} M^j_{j-1}(\omega) \cap U_{k-1} \supset \bigcup_{\# J = k-1} E_J \cap U_{k-1}$$

après un changement de coordonnées convenable.

Ecrivons $\omega = \overline{\omega}_{n-1} + R$, $j_0^{n-1}(R) = 0$; d'après la définition de $M^j_{j-1}(\omega)$ nous avons pour chaque point $p \in \bigcup_{\# J = k-1} E_j \cap U_{k-1}$, $J_p^{n-k-1}(R) = 0$ (il est en effet clair que $j_p^{n-k-1}(\overline{\omega}_{n-1}) = 0$). Nous voulons prouver (k).

1. - Désignons par $x = (y,z) = (y_1,\dots,y_k \,;\, z_{k+1},\dots,z_n)$ les coordonnées de K^n et par i_c le plongement de K^{n-k} dans K^n défini par $i_c(z) = (c,z)$ où $c = c_1,\dots,c_k$ est un point de K^k. La forme $i_c^*(\omega)$:

$$i_c^*(\omega) = c_1 \dots c_k\, z_{k+1} \dots z_n \cdot \sum_{j \geqslant k+1} a_j \frac{dz_j}{z_j} + \sum_{j \geqslant k+1} R_j(c,z)\, dz_j$$

est une forme intégrable de K^{n-k} à paramètre $c \in K^k$.

2. - Effectuons l'éclatement $z = \rho \,.\, u$ où $\rho = c_1 \dots c_k$, $u = (u_{k+1},\dots,u_n)$. Après éclatement, $i_c^*(\omega)$ s'écrit :

$$\omega_c = \rho^{n-k+1}\, u_{k+1} \dots u_n \, \Sigma\, a_j \frac{du_j}{u_j} + \rho\, \Sigma\, R_j(c,\rho u)\, du_j$$

3. - Comme $j^{n-k-1}(R) = 0$ le long de E_j , $\# J = k-1$ et $j_0^{n-1}(R) = 0$, on a :

$$R_j(c,\rho u) = R_j(c,c_1 \dots c_k \,.\, u) = \rho^{n-k}\, \widetilde{R}_j(c,u)$$

avec $\widetilde{R}j(0,u)$ polynomial de degrés n−k−2 en u. Ainsi ω_c se laisse écrire :

$$\omega_c = \rho^{n-k+1}\,(\omega_{n-k-1} + \sum_{j\geqslant k+1} \tilde{R}_j(c,u)du_j) = \rho^{n-k+1}\,.\,\tilde{\omega}_c$$

où $\tilde{\omega}_{c=0} = \omega_o + \ldots + \omega_{n-k-1}$ est polynomiale intégrable, ω_i étant la composante homogène de $d^o i$ de $\tilde{\omega}_{c=0}$ et $\omega_{n-k-1} = u_{k+1} \ldots u_n \sum_{j\geqslant k+1} a_i \dfrac{du_i}{u_i}$.

4. - D'après la proposition B il existe un unique point $a \in K^{n-k}$ tel que $j_a^{n-k-2}(\tilde{\omega}_{c=0}) = 0$ et a est une singularité régulière d'ordre n–k–1 de $\tilde{\omega}_{c=0}$. En appliquant le corollaire A on obtient des voisinages U_1 de $c = 0$, U_2 de a et une application $p : U_1 \to U_2$ de classe C^r tels que p(c) est l'unique singularité régulière d'ordre n–k–1 de $\tilde{\omega}_c$ dans U_2 ; de plus

$$p(c) = \{ q \in U_2 \,,\, j_q^{n-k-2}(\tilde{\omega}_c) = 0 \}$$

5. - La variété de $U_1 \times U_2$ paramétrée par $c \to (c,p(c))$ est l'éclatement de la variété A_{J_o} paramétrée par $c \to (c,\rho.p(c))$, $\rho = c_1 \ldots c_k$, $J_o = (1\ldots k)$ variété qui est tangente au sous espace $E_{J_o} = \{ (c,0),\ c \in K^k \}$. Comme p(c) est une singularité régulière de $\tilde{\omega}_c$, $z(c) = \rho$. p(c) est une singularité régulière de la forme $i_c^*(\omega)$; il résulte alors de la proposition C que le point (c,z(c)) est une singularité régulière de ω d'ordre n–k–1 dès que $\rho = c_1 \ldots c_k \neq 0$. Lorsque l'un des c_j est nul il est clair que $(c,z(c)) \in E_J$, $\# J \leqslant k-1$ et d'après l'hypothèse d'induction (c,z(c)) est une singularité régulière d'ordre plus grand que n–k–1 et donc $j^{n-k-2}_{(c,z(c))}(\omega) = 0$ pour tout $c \in E_{J_o}$ i.e. en tout point de A_{J_o} .

Pour chaque $J = \{ j_1,\ldots,j_k \}$, $j_1 < \ldots < j_k$ nous pouvons ainsi construire des variétés A_J définies sur un certain voisinage U_k , paramétrées par des applications du type : $c \in E_J \to (c,z_J(c))$ où $K^n = E_J \times E_{\hat{J}}$ $\hat{J} = (1,\ldots,n) - J$. Ceci prouve le point c).

6. - *Nous redressons maintenant les* $\bigcup_{\# J=k} A_J$.

Soit $y \to (y,z_{J_o}(y))$ la paramétrisation de A_{J_o} et $f_{J_o}(y,z) = (y,z-z_{J_o}(y))$, $J_o = (1,\ldots,k)$.

1. f_{J_o} envoie A_{J_o} sur E_{J_o}.

2. f_{J_o} laisse invariant les axes E_I , $\# I \leqslant k-1$ et les E_J , $\# J = k$, $J \neq J_o$; ceci résulte du fait que $z_{J_o}(y) = y_1 \ldots y_k\, P(y)$.

La composition $f = f_{J_N} \circ \ldots \circ f_{J_o}$ de tous les f_J , $\# J = k$, envoie alors $\bigcup_{\# J=k} A_J$ sur $\bigcup_{\# J=k} E_J$.
Ceci achève la preuve du lemme fondamental.

De lemme fondamental on déduit facilement le :

COROLLAIRE. *Soit* $\omega = \overline{\omega}_{n-1} + \ldots$ *un germe de forme intégrable de classe* C^r *en* $0 \in K^n$, $j^{n-1}\ \omega = \overline{\omega}_{n-1} = x_1 \ldots x_n\ \Sigma\ a_i\ \dfrac{dx_i}{x_i}$, $a_i \neq a_j \neq 0$. *Si* A *est un champ linéaire annulant* $\overline{\omega}_{n-1}$, *il existe un germe* X *de champ de vecteurs* C^r *ayant pour* 1*-jet* A *et tel que* $\omega(X) = 0$.

En effet, d'après le lemme nous pouvons supposer que $\mathscr{I}(\omega) = \mathscr{I}(\overline{\omega}_{n-1})$ quitte à faire agir un difféomorphisme C^r. Nous pouvons trouver un champ Y, $j^1 Y = 0$ tel que

$$\omega(Y) = -\,\omega(A).$$

Mais il est clair que $\omega(A) \in \mathscr{M}^2 . \mathscr{I}(\overline{\omega}_{n-1}) = \mathscr{M}^2 . \mathscr{I}(\omega)$ et donc un tel Y existe.

En utilisant le corollaire on peut montrer directement, i.e. sans utiliser le théorème 1, le théorème 2. (Mais ce n'est pas une méthode plus rapide !).

IV. - PERTURBATIONS DES FORMES RESONNANTES ET ACTIONS COMMUTATIVES SOUS JACENTES

§ 1. - Perturbation des formes résonnantes

Lorsque $\overline{\omega}_{n-1} = x_1 \ldots x_n\ \Sigma\ a_i\ \dfrac{dx_i}{x_i}$, $a_i \neq a_j \neq 0$ est résonnante tous les quotients $a_i\ /\ a_j$ sont dans $\mathbb{Z} \cup \dfrac{1}{\mathbb{Z}} \cup \mathbb{Q}_+$. Quitte à multiplier les a_i par une même constante (ou bien à faire un changement de coordonnées $x \to \rho . x$) on peut supposer que :

$$\overline{\omega}_{n-1} = x_1 \ldots x_n\ \Sigma\ k_i\ \frac{dx_i}{x_i}$$

où cette fois, les k_i sont des entiers relatifs premiers dans leur ensemble. Deux éventualités se présentent :

a) les k_i sont de même signe et le monôme $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ est une intégrale première de $\overline{\omega}_{n-1}$

b) les k_i ne sont pas de même signe, i.e. quitte à changer les indices :

$$(k_1,\ldots,k_n) = (p_1,\ldots p_s, -q_{s+1},\ldots,-q_n)$$

où les p_i et q_j sont des entiers positifs. Puisque $\overline{\omega}_{n-1}$ est résonnante, nécessairement tous les quotients $p_i\ /\ q_j$ sont dans $\mathbb{N} \cup \dfrac{1}{\mathbb{N}}$.

Nous avons le :

THEOREME 3. *Soit* ω un germe de forme holomorphe intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^n$ telle que

$$j^{n-1}\omega = \overline{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \Sigma k_i \frac{dx_i}{x_i}, \quad k_i \in \mathbb{Z} - \{0\}, \ k_i \neq k_j \ \textit{pour} \ i \neq j$$

a) Si tous les k_i *sont de même signe* ω *est holomorphiquement conjuguée à* $\overline{\omega}_{n-1}$ *si et seulement si* ω *possède une intégrale première formelle* $\hat{f}$ *(faible au sens de* [M,M] i.e. $\omega \wedge d\hat{f} = 0$).

b) Si les k_i *ne sont pas de même signe* ω *est conjuguée à une forme intégrable polynomiale* $\overline{\omega}_{n-1} + P$, $j^{n-1} P = 0$, *tangente à une action commutative (non linéarisable en général lorsque* $\overline{\omega}_{n-1}$ *est résonnante).*

Démonstration. La partie a) se déduit très facilement des résultats de [M,M] (On peut trouver les détails dans [C_2]). Etablissons la partie b).

Le Corollaire du lemme fondamental dit que $j^1 D_\omega = j^1 D_{\overline{\omega}_{n-1}}$; dans $j^1 D_\omega$ on peut trouver un champ $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ n'ayant pas de résonnances «positives» i.e. :

$$\sum_{k=1}^{n} i_k \lambda_k = 0, \ i_k \geq 0 \Rightarrow i_k = 0 \quad \forall k.$$

Un tel champ ne peut alors présenter qu'un nombre *fini* de résonnances qui seront du type suivant :

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^{n} i_k \lambda_k \quad \text{avec} \quad i_j = 0 \qquad \Sigma i_k \geq 2.$$

En fait de tels champs constituent un ensemble résiduel de $j^1 D_\omega$. Les k_i n'étant pas de même signe, on peut choisir une base $A_1, \dots, A_{n-1}$ de $j^1 D_\omega$ telle que :

1) A_1 est «contractant» (i.e. spectre $A_1 \subset \{z, \operatorname{Re} z < 0\}$)

2) les A_j n'ont pas de résonnance positives (dans le sens précédent)

3) les A_j ont les mêmes résonnances, i.e. si $\lambda^j = (\lambda_1^j, \dots, \lambda_n^j)$ est le spectre de A_j , on a l'équivalence : il existe ℓ tel que

$$\lambda_{j_o}^{\ell} - \langle \lambda^{\ell}, i_o \rangle = 0 \iff \lambda_{j_o}^{k} - \langle \lambda^{k}, i_o \rangle = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n-1.$$

La condition 3) signifie que les opérateurs crochets $[A_k, .] : \widehat{\chi(n)} \circlearrowleft$ ont même noyau et même image. Soit $X_1 \in D_\omega$ tel que $j^1X_1 = A_1$.

D'après $[C_1]$ on peut trouver des éléments $\hat{X}_2,\ldots,\hat{X}_{n-1}$ de $\hat{D}_\omega$ tels que :

$$\begin{cases} X_1,\hat{X}_2,\ldots,\hat{X}_{n-1} \text{ engendre } \hat{D}_\omega \\ j^1\hat{X}_j = A_j \quad j = 1,\ldots,n-1 \\ [X_1,\hat{X}_j] = 0 \quad \text{pour } j = 1,\ldots,n-1 \end{cases}$$

(X_1 est holomorphe alors que les $\hat{X}_j$ sont a priori formels).

Puisque le champ A_1 est «contractant» et n'a qu'un nombre fini de résonnances nous savons depuis Poincaré qu'il existe une mise sous forme normale (holomorphe) polynomiale, i.e. qu'à un changement de coordonnée holomorphe près on peut écrire :

$$X_1 = A_1 + P_1$$

où P_1 est un champ polynomial, $j^1\, P_1 = 0$, contenu dans le noyau de A_1 : $[A_1 , P_1] = 0$. Notant que Ker $[A_1\ ]$ et Im $[A_1,]$ induisent une décomposition en somme directe de $\widehat{\mathcal{M}}^2 . \widehat{\chi(n)}$ nous écrivons :

$$\hat{X}_j = A_j + P_j + N_j$$

où $A_j + P_j$, $j^1P_j = 0$, est la composante de $\hat{X}_j$ sur Ker $[A_1, .]$ = Ker $[A_j, .]$ et N_j la composante de $\hat{X}_j$ sur Im $[A_1,]$. Nous avons

$$0 = [X_1,\hat{X}_j] = [P_1,P_j] + [A_1+P_1,N_j]$$

De l'identité de Jacobi, il ressort clairement :

$$[P_1,P_j] \in \text{Ker}\,[A_1,\ ]$$

et en écrivant $N_j = [A_1,Y_j]$:

$$0 = \Big[A_1+P_1,\ [A_1,Y_j]\Big] + \Big[A_1,\ [Y_j,A_1+P_1]\Big]$$

et par suite $[A_1+P_1,N_j] \in \text{Im}\,[A_1,\ ]$.

Il en résulte :

$$0=[P_1,P_j]=[A_1+P_1,N_j].$$

Comme $N_j \in \mathrm{Im}\,[A_1,\ ]$ il est facile de constater que $N_j=0$.

Ainsi tous les champs $\hat{X}_j$ sont mis simultanément sous forme normale *polynomiale :*

$$X_j=\hat{X}_j=A_j+P_j \quad ; \quad P_j \in \mathrm{Ker}\,[A_1,\ ]=\mathrm{Ker}\,[A_j,\ ]$$

et donc sont des champs *convergents* engendrant $\widehat{D_\omega}$ donc D_ω.

La «distribution» D_ω est involutive au sens de $[C_1]$; il existe donc des $f^\ell_{jk} \in \mathcal{O}_n$ tels que :

$$[X_j,X_k]=\Sigma\, f^\ell_{jk}\, X_\ell.$$

En appliquant une fois encore l'identité de Jacobi il vient :

$$0=\Big[X_1,[X_j,X_k]\Big]=\Sigma\, X_1(f^\ell_{jk})\,.\,X_\ell$$

et puisque $X_1,\dots,X_{n-1}$ est une base du module libre D_ω :

$$X_1(f^\ell_{jk})=0 \qquad\qquad \forall\, j,k,\ell\,.$$

Mais le champ A_1 n'ayant pas de résonnances positives les f^ℓ_{jk} sont nuls et $[X_j,X_k]=0$.

Soit $\tilde{\omega}=i_{X_1}\dots i_{X_{n-1}}(dx_1\wedge\dots\wedge dx_n)$ alors $\tilde{\omega}$ est une forme polynômiale intégrable tangente à une action commutative de $\mathbb{C}^{n-1}$ et ω est conjuguée à $\tilde{\omega}$. q.e.d.

Remarque. Comme l'a suggéré l'un des référés, on peut prouver une partie de b), en procédant comme dans le théorème 2 : On cherche un champ X_1 convenable tel que $L_{X_1}\,\omega=\omega$ et on normalise X_1 . On constate que la normalisation rend ω polynomiale. Mais trouver des champs commutants tangents à ω n'est alors pas tout à fait immédiat.

§ 2. - Actions commutatives sous jacentes

Une conséquence immédiate des théorèmes 2 et 3 est la suivante : Soit ω une forme intégrable sur $\mathbb{C}^n$,o telle que

$$j^{n-1}\,\omega=x_1\dots x_n\,\Sigma\, a_i\,\frac{dx_i}{x_i},\quad a_i\neq a_j\neq 0 \quad \text{pour } i\neq j\ ;$$

si les a_i / a_j ne sont pas réels positifs alors ω est tangente à une action commutative. Pour généraliser ce résultat au cas où les a_i sont quelconques, nous utiliserons un :

LEMME D'EXISTENCE DE VARIETES INVARIANTES. *Soit* ω *un germe en* $0 \in \mathbb{C}^n$ *de forme intégrable, avec :*

$$j^{n-1}\,\omega = \bar{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \, \Sigma\, a_i \frac{dx_i}{x_i}, \quad a_i \neq a_j \quad \textit{pour } i \neq j \ \textit{ et } \ a_i > 0.$$

Il existe n *variétés holomorphes* F_j *de codimension un,* F_j *tangente à* $x_j = 0$ *et invariantes par* ω *en ce sens : si* φ_j *est l'inclusion de* F_j *dans* $\mathbb{C}^n$, $\varphi_j^*\omega = 0$.

Preuve. Soient $s_2,\dots,s_n$ des nombres réels positifs. Le champ linéaire $A' = -(s_2a_2 + \dots + s_na_n)x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_i} + a_1 \sum\limits_{i=2}^{n} s_i x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ annule la forme $\bar{\omega}_{n-1}$. Puisque les a_i sont distincts on peut choisir des s_i de telle façon que trace $A' \neq 0$; si $A = \dfrac{A'}{\text{trace } A'}$, on a $i_A\, d\bar{\omega}_{n-1} =$ trace $A \,.\, \bar{\omega}_{n-1} = \bar{\omega}_{n-1}$. Nous choisissons de plus les s_i de telle sorte qu'ils soient indépendants sur $\mathbb{Z}$ et vérifient des conditions de petits diviseurs ; si $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n$ sont les valeurs propres de A nous avons :

1) $\mu_2,\dots,\mu_n$ sont indépendants sur $\mathbb{Z}$ et vérifient des conditions de petits diviseurs.

2) μ_1 est négatif et les autres μ_i sont positifs. Soit X un champ holomorphe ayant pour 1-jet A et annulant ω ; nous avons $i_X\, d\omega = L_X\, \omega = f \,.\, \omega$ où $f \in \mathcal{O}_n$, $f(0) = 1$. Le champ $Y = \dfrac{X}{f}$ a pour 1-jet A et vérifie

$$L_Y\, \omega = i_Y\, d\omega = \omega.$$

Puisque μ_1 est négatif et les autres μ_i positifs, le champ Y possède une variété invariante holomorphe F_1 tangente à $x_1 = 0$; nous allons montrer que F_1 est invariante par ω. Par un premier difféomorphisme, on peut déjà ramener F_1 sur $(x_1 = 0)$; à ce moment le champ Y s'écrit :

$$Y(x_1,\dots,x_n) = x_1 \,.\, \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \,.$$

Soit Y_1 la restriction de Y à l'hyperplan invariant $x_1 = 0$:

$$Y_1(x_2,\dots,x_n) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i(0,x_2,\dots,x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \,.$$

Soit ω_1 la restriction de ω à $x_1 = 0$; nous avons clairement $L_{Y_1}\, \omega_1 = \omega_1$. Maintenant puisque les μ_i , i = 2...n, (qui sont les valeurs propres de $j^1 Y_1$) vérifient des conditions de petits diviseurs on peut, quitte à faire agir un difféomorphisme de l'hyperplan $x_1 = 0$, supposer que $Y_1 = \sum_{i=2}^{n} \mu_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Comme les μ_i, $i \geqslant 2$ sont positifs indépenants sur $\mathbb{Z}$, la condition $L_{Y_1} \omega_1 = \omega_1$ implique que ω_1 est homogène de degré n−1. Ainsi ω_1 coïncide avec la restriction à $(x_1 = 0)$ de la forme homogène $\overline{\omega}_{n-1}$; il en résulte que $\omega_1 \equiv 0$ et $(x_1 = 0)$ est une variété invariante de ω. On peut répéter cette manipulation parallèlement à chaque $(x_i = 0)$ pour obtenir le résultat souhaité.

Moyennant ce lemme nous sommes en mesure d'établir le :

THEOREME 4. *Soit ω un germe de forme holomorphe intégrable à l'origine de $\mathbb{C}^n$ dont le* n−1 *jet est :*

$$j^{n-1}\,\omega = \overline{\omega}_{n-1} = x_1 \ldots x_n\, \Sigma\, a_i \frac{dx_i}{x_i}, \quad a_i \neq a_j \neq 0 \qquad \textit{pour } i \neq j.$$

Alors ω est tangente à une action commutative.

Démonstration. Il suffit d'établir le résultat dans le cas où les a_i sont des réels positifs. Dans un premier temps, au moyen d'un difféomorphisme adéquat on redresse les variétés invariantes de ω, dont l'existence est assurée par le lemme, i.e. $F_j = (x_j = 0)$. Une fois fait ce changement de coordonnées la forme ω s'écrit :

$$\omega = x_1 \ldots x_n \sum_{i=1}^{n} a_i(1 + \psi_i(x)) \frac{dx_i}{x_i}$$

où $\psi_i \in \mathcal{O}_n$, $\psi_i(0) = 0$. On se donne (n−1)-champs linéaires diagonaux $A_1,\ldots,A_{n-1}$ engendrant l'algèbre sous jacente à $\overline{\omega}_{n-1}$ i.e. $\overline{\omega}_{n-1} = i_{A_1} \ldots i_{A_{n-1}} (dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)$.

Soient $X_1,\ldots,X_{n-1}$ les champs suivants :

$$X_j = A_j - \left[\frac{1}{a_1(1+\psi_1)} \;\Sigma\, a_i\, \psi_i \frac{dx_i}{x_i}(A_j)\right] \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} = A_j - f_j \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Les champs X_j annulent ω :

$$\omega(X_j) = 0.$$

Visiblement les crochets

$$[X_i, X_j] = f_{ij} \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{où } f_{ij} \in \mathcal{O}_n,$$

doivent aussi annuler ω, i.e.

$$a_1(1+\psi_1)f_{ij} = 0.$$

Il en résulte que $f_{ij} = 0$ et les X_i commutent. Q.E.D.

Remarque. Au moyen du théorème 4 on peut exhiber des formes normales formelles pour les formes

$$\omega = x_1 \dots x_n \Sigma a_i \frac{dx_i}{x_i} + \dots$$

Ceci n'a d'intérêt que lorsque les a_i sont des entiers positifs k_i (distincts) ; pour cela on met sous forme normale un champ générique de l'algèbre de Lie engendrée par les X_i ; la commutation fait que tous les X_i se mettent alors simultanément sous forme normale formelle ; dans les coordonnées y normales ω s'écrit :

$$y_1 \dots y_n \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}) \frac{dy_j}{y_k}$$

où les α_j sont des séries à une variable t, $\alpha_j(0) = k_j$ satisfaisant les équations différentielles d'intégrabilité :

$$\alpha_\ell[k_i \alpha'_j - k_j \alpha'_i] + \alpha_j[k_\ell \alpha'_i - k_i \alpha'_\ell] + \alpha_i[k_j \alpha'_\ell - k_\ell \alpha'_j] = 0.$$

V. - TRIVIALITE DES EXTENSIONS DES FORMES $\overline{\omega}_{n-1} + \dots$

§ 1. - Un lemme de géométrie analytique.

Rappelons la définition suivante introduite dans [MM] :

DEFINITION. *Un plongement* $i : \mathbb{C}^n,0 \to \mathbb{C}^m,0 \quad m \geqslant n > 0$, *est transverse à la forme* $\omega \in \Lambda^1_m$ *si*

1) $S(i^*\omega) = i^{-1}(S\omega)$

2) i *est transverse à* $S(\omega)$, i.e. *si* Z *est une branche de* $S(\omega)$ *alors* $\mathrm{cod}(i^{-1} Z) = \inf(n, \mathrm{cod}\, Z)$.

Dans [MM] on montre que les k-jets de plongements transverses à ω, $k \geqslant 2$, constituent un ouvert dense dans les k-jets d'applications de $\mathbb{C}^n,0$ dans $\mathbb{C}^m,0$.

Nous utiliserons le lemme suivant, sans doute bien connu :

LEMME. *Soient Z un sous ensemble analytique de* $\mathbb{C}^m,0$ *et* I *un idéal de* $\mathcal{O}_m$ *s'annulant précisément sur* Z, i.e. $\sqrt{I} = \mathcal{I}(Z)$ *où* $\mathcal{I}(Z)$ *est l'idéal de définition de Z. Soit* $i : \mathbb{C}^n,0 \to \mathbb{C}^m,0$ *un plongement transverse à Z et* $I_o = I \circ i = \{ f \circ i, f \in I \}$, $I_o \subset \mathcal{O}_n$. *Alors si* I_o *vérifie la propriété des zéros, il en est de même pour* I, i.e. *on a l'implication :*

$$\sqrt{I_o} = I_o \Rightarrow \sqrt{I} = I.$$

Preuve. Il est clair qu'il suffit de prouver le lemme lorsque $n = m-1$. Soient $f_1,\dots,f_p$ des générateurs de I et (x,t) des coordonnées de $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ telles que :

a) i s'identifie à l'injection canonique $x \to (x,0)$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$

b) $f_j(0,t) \not\equiv 0 \qquad j = 1,\dots,p.$

Soit g un élément de $\mathcal{O}_m$ s'annulant sur Z, nous voulons prouver que $g = \Sigma\ h_i\, f_i$, $h_i \in \mathcal{O}_n$.

De par la condition b) on peut supposer que les f_i sont des polynômes génériques :

$$f_i(x,t) = t^{\mu_i} + a^i_{\mu_i-1}(x)t^{\mu_i-1} + \dots + a^i_o(x)$$

ordonnés de sorte que $\mu_1 \leqslant \dots \leqslant \mu_p$. En effectuant la division de g par f_p : $g = g_p \,.\, f_p + r_p$, ensuite celle de r_p par f_{p-1} et ainsi de suite, on obtient :

(1) $$g(x,t) = g_1 \,.\, f_1 + \dots + g_p \,.\, f_p + \sum_{j=0}^{\mu_1-1} t^j\, R_j(x)$$

où $g_k \in \mathcal{O}_m$ et $R_j \in \mathcal{O}_n$.

En faisant $t = 0$ dans (1), il vient :

(2) $$g(x,0) = (g_1 \,.\, f_1 + \dots + g_p \,.\, f_p)\ (x,0) + R_o(x).$$

Sur l'ensemble analytique $Z_o = Z \cap (\mathbb{C}^n \times \{0\})$ nous avons :

$$0 = g(x,0) = R_o(x).$$

Comme $I_o = \sqrt{I_o}$ et que les $f_j(x,0)$ engendrent I_o , il existe $g'_1(x),\dots,g'_p(x)$ tels que :

(3) $$R_o(x) = \Sigma\ g'_j(x) \,.\, f_j(x,0).$$

Soient $G_j(x,t) = g_j(x,t) + g_j'(x)$; nous avons clairement :

$$g(x,t) = \sum_{j=1}^{p} G_j \cdot f_j + t \cdot H_1(x,t)$$

i.e. $g \in I(\mathrm{mod}(t))$.

Sur l'ensemble analytique Z nous avons :

$$0 = t \cdot H_1(x,t) \qquad (x,t) \in Z$$

et comme i est transverse à Z nous avons sur Z_o :

$$0 = H_1(x,0).$$

Nous réécrivons de nouveau :

$$H_1(x,0) = \sum g_j'' \; f_j(x,0)$$

et

$$H_1(x,t) = \sum g_j'' \; f_j(x,t) + t\, H_2(x,t).$$

Donc :

$$g(x,t) = \sum (G_j + t\, g_j'')\, f_j(x,t) + t^2 \cdot H_2(x,t)$$

et ainsi de suite : $g \in I \bmod(t^k)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, i.e. $g \in I$. Q.E.D.

§ 2. - Trivialisation des extensions.

Nous proposons d'établir le :

THEOREME 5. *Soit* ω *un germe de forme holomorphe intégrable à l'origine de* $\mathbb{C}^m,0$. *Supposons qu'il existe un plongement* $i : \mathbb{C}^n,0 \to \mathbb{C}^m,0 \quad n \leqslant m$ *tel que :*

$$j^{n-1}(i^*\omega) = \overline{\omega}_{n-1} = x_1 \ldots x_n \,\Sigma\, a_k \frac{dx_k}{x_k}, \quad a_k \neq a_\ell \neq 0 \quad \textit{pour } k \neq \ell$$

Il existe alors un germe de submersion $F : \mathbb{C}^m,0 \to \mathbb{C}^n,0$ *tel que* $\omega = F^*(i^*\omega)$. *Ainsi* ω *ne dépend que de* n *variables et est tangente à une action commutative.*

Démonstration. Supposons dans un premier temps que le plongement i soit transverse à ω au sens de § 1. Soit (x,t) un système de coordonnées de $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n}$ qui identifie i à l'inclusion canonique $x \to (x,0)$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^m$. Nous écrivons :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i(x) (+\sum_j t_j \beta_{i,j}(x,t))\right] dx_i + \sum_{j=n+1}^{m} \gamma_j(x,t)dt_j$$

et nous désignons par ω_o , ω_1 , ω_2 les formes suivantes :

$$\omega_o = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)dx_i = i^*(\omega) = \overline{\omega}_{n-1} + \dots$$

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i(x) + \sum_j t_j \beta_{i,j}(x,t))dx_i$$

$$\omega_2 = \sum_{j=n+1}^{m} \gamma_j(x,t)dt_j .$$

L'intégrabilité de $\omega = \omega_1 + \omega_2$ conduit à :

$$(1) \qquad 0 = \omega \wedge d\omega = \omega_1 \wedge d\omega_1 + \omega_1 \wedge d\omega_2 + \omega_2 \wedge d\omega_1 + \omega_2 \wedge d\omega_2$$

$d\omega_1$ s'écrit :

$$d\omega_1 = d_x\omega_1 + \Sigma\, \eta_j \wedge dt_j \quad , \quad \eta_j \in \Lambda^1_m ,$$

d_x est la différentielle relative aux coordonnées x.

Il en résulte que sur l'ensemble analytique $Z = S(\omega_1)$, nous avons d'après (1) :

$$\omega_2 \wedge d_x\omega_1 = 0.$$

Comme $a_i \neq a_j$, $d\omega_o$ s'annule sur un ensemble analytique de codimension $\geqslant 3$ et il en est donc de même pour $d_x\omega_1$.

D'après le lemme fondamental $S(\omega_o)$ est équidimentionnel de codimension 2 ; il en est de même pour $S(\omega)$ puisque i est transverse à ω. Nous remarquons maintenant que $S(\omega_1) \supset S(\omega)$ et donc chaque branche de $S(d_x\omega_1) \cap S(\omega_1)$ est de codimension $\geqslant 1$ dans $S(\omega_1)$; puisque $d_x\omega_1$ n'a pas de composante sur les dt_j visiblement $\omega_2\,_{|S(\omega_1)} = 0$ et donc $S(\omega) = S(\omega_1)$.

Nous avons vu dans le corollaire du lemme fondamental que $\mathcal{I}\,(\omega_o) \subset \mathcal{O}_n$ est difféomorphe à $\mathcal{I}(\overline{\omega}_{n-1}) = \left\{ \dfrac{x_1 \dots x_n}{x_i}, \; i = 1 \dots n \right\}$; $\mathcal{I}(\omega_o)$ vérifie donc la propriété des zéros.

Mais d'après le lemme l'idéal $\mathcal{I}(\omega_1)$ vérifie aussi la propriété des zéros ; en effet $\mathcal{I}(\omega_1) \circ i = \mathcal{I}(\omega_o)$. $\mathcal{I}(\omega_1)$ est donc l'idéal de définition de $S(\omega_1)$; comme ω_2 s'annule sur $S(\omega_1)$ nous avons :

$$\gamma_j(x,t) \in \mathcal{I}(\omega_1).$$

Il existe donc des champs $X_j = \dfrac{\partial}{\partial t_j} + \Sigma \; a_{ij}(x,t) \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ tels que $\omega(X_j) = 0$.

En redressant ces champs (par récurrence ou bien suivant [C_1]) on construit un difféomorphisme $\phi(x,t) = (x,\psi(x,t))$ tel que $\phi^*\omega \wedge \omega_o = 0$, i.e. $\phi^*\omega = H \, . \, \omega_o$ où $H \in \mathcal{O}_m$ est une unité. En fait on peut absorber H en construisant un difféomorphisme ϕ_o tel que $H \, . \, \omega_o = \phi_o^* \, . \, \omega_o$ [C_2] .

Si maintenant $i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n}$; $i(x) = (x,0)$, n'est pas transverse nous faisons une petite perturbation de i : $i'(x) = (x,P(x))$ où $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{m-n}$ est polynomial d'ordre supérieur à n, de sorte qu'il soit transverse à ω ; ω est alors triviale au dessus de $i^*\omega$, i.e. ω annule m–n champs indépendants $X_j = \dfrac{\partial}{\partial t_j} + \dots$, et donc triviale au dessus de $i^*\omega$ (et a posteriori i était transverse à ω). Q.E.D.

VI. - EXCURSION DANS LE CHAMP REEL

Remarquons d'abord que le théorème 1 (formel) est valable en réel et que les autres théorèmes (2,3,4,5) le sont en analytique réel.

Nous désignons par $\mathcal{E}_n$ l'anneau des germes de fonctions C^∞ en 0 ; nous conservons dans ce chapitre les notations des chapitres précédents, notamment dans les démonstrations, les objets holomorphes devenant C^∞.

THEOREME 2^∞. *Soit ω un germe de forme intégrable C^∞ à l'origine de $\mathbb{R}^n$ ayant pour n–1 jet* $j^{n-1}\omega = \overline{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \, . \, \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \dfrac{dx_i}{x_i}$, $a_i \in \mathbb{R} - \{0\}$, $a_i \neq a_j$ *pour* $i \neq j$. *Si $\overline{\omega}_{n-1}$ vérifie la condition* (*), *ω est C^∞-conjuguée à $\overline{\omega}_{n-1}$* , i.e. *il existe un germe de difféomorphisme ϕ, C^∞ à l'origine de $\mathbb{R}^n$, tel que $\phi^*\omega = \overline{\omega}_{n-1}$; plus généralement la conjugaison formelle de ω à $\overline{\omega}_{n-1}$ implique la conjugaison* C^∞.

THEOREME 3^∞. *Soit* ω *un germe de forme intégrable* C^∞ *à l'origine de* IR^n *ayant pour* $(n-1)$*-jet :*

$$\bar{\omega}_{n-1} = \lambda x_1 \dots x_n \Sigma k_i \frac{dx_i}{x_i} \quad k_i \in \mathbb{Z} - \{0\}, k_i \neq k_j \qquad \textit{pour } i \neq j$$

a) si les k_i *sont tous de même signe,* ω *est* C^∞ *conjuguée à* $\bar{\omega}_{n-1}$ *si et seulement si* ω *possède une intégrale première formelle.*

b) si les k_i *ne sont pas tous de même signe,* ω *est* C^∞ *conjuguée à une forme polynomiale intégrable* $\bar{\omega}_{n-1} + P$, $j^{n-1}P = 0$, *tangente à une action commutative* C^∞.

THEOREME 4^∞. *Soit* ω *un germe de 1-forme intégrable* C^∞ *en* $0 \in IR^n$ *ayant pour* $(n-1)$*-jet :*

$$\bar{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \Sigma a_i \frac{dx_i}{x_i}, \quad a_i \in IR - \{0\} \quad a_i \neq a_j \neq 0 \qquad \textit{pour } i \neq j.$$

Alors ω *est tangente à une action commutative* C^∞.

Remarque. Les formes homogènes $\bar{\omega}_{n-1} = x_1 \dots x_n \Sigma a_i \frac{dx_i}{x_i}$, $a_i \in IR$, sont les formes obtenues à partir d'actions linéaires de IR^{n-1} diagonalisables en réel. Nous pensons que les résultats précédents restrent vrais lorsque l'action n'est plus diagonalisable en réel mais l'est en complexe. Les formes associées sont du type suivant dans un système de coordonnées linéaires convenable :

$$\bar{\omega}'_{n-1} = (x_1 \dots x_k) \cdot (u_1^2 + v_1^2) (\dots) (u_\ell^2 + v_\ell^2) \left[\sum_{i=1}^{k} a_i \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{j=1}^{\ell} \frac{(\alpha_j u_j + \beta_j v_j) du_j + (-\beta_j u_j + \alpha_j v_j) dv_j}{u_j^2 + v_j^2} \right]$$

où $(x,u,v) \in IR^n = IR^k \times IR^{2\ell}$; le théorème 1 par exemple ne pose pas de problème. Pour les autres propositions il faut franchir une difficulté purement technique à savoir prouver le lemme fondamental C^∞ pour ce type de forme.

Au cours des démonstrations nous utiliserons une généralisation du théorème de division de K. Saïto, généralisation due à J.C. Tougeron.

Si f est un germe de fonction C^∞ on note $\hat{f}$ son développement en série formelle. Soit $\mathcal{I} = (f_1,\dots,f_p)$ un idéal de type fini de $\mathcal{E}_n$ engendré par $f_1,\dots,f_p$; on dit que $\mathcal{I}$ est fermé s'il existe un voisinage U de $0 \in IR^n$ et des représentants f_{i_U} des f_i sur U tel que l'idéal $\mathcal{I}_U = \{f_{1_U},\dots,f_{p_U}\}$ soit fermé dans l'anneau $\mathcal{E}(U)$ des fonctions C^∞ sur U muni de la topologie faible de Whitney.

LEMME [T]. *Soit* $\omega = \sum_{i=1}^{p} \omega_i \, dx_i$ *un germe de 1-forme* C^∞ *en* $0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{I}(\omega) = (\omega_1,\dots,\omega_n)$ *l'idéal des composantes de* ω. *On suppose que le lieu singulier formel de* ω *est de codimension* $\geqslant 2$ (*i.e. la hauteur de l'idéal formel engendré par les* ω_i *est supérieure ou égale à* 2). *Si* $\mathcal{I}$ *est fermé les conditions suivantes sont équivalentes pour un germe* ω' *de* 1*-forme* C^∞ *en* 0 :

a) $\omega \wedge \omega' = 0$

b) il existe $f \in \mathcal{E}_n$ *tel que* $\omega' = f\omega$.

Pour des raisons techniques nous ne donnons pas les démonstrations dans l'ordre de leur énumération.

§ 1. - Démontration du Théorème 4^∞ lorsque tous les a_i sont de même signe

(La démonstration dans le cas général va résulter des théorèmes 2^∞ et 3^∞).

Elle est identique à celle de IV § 2 (sauf que l'on n'a pas à se soucier de questions de petits diviseurs), jusqu'au stade suivant : nous avons le champ $Y_1 = \sum_{i=2}^{n} \mu_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ (les μ_i sont tous de même signe) et la forme ω_1 ; alors comme dans IV § 2,ω est formellement nulle, i.e. ω_1 est plate en 0. Il s'agit donc de prouver que l'égalité $L_{Y_1} \omega_1 = i_{Y_1} d\omega_1 = \omega_1$ avec ω_1 plate en 0, implique la nullité de ω_1. Il s'agit d'une manipulation classique. Ecrivons $\omega_1 = \sum_{i=2}^{n} P_i \, dx_i$; les conditions $\omega_1(Y_1) = 0$ et $L_{Y_1} \omega_1 = \omega_1$ se traduisent par les suivantes :

$$0 = \Sigma \, \mu_j x_j P_j \tag{1}$$

$$P_i = \Sigma \, \mu_j x_j \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j}{\partial x_i} \right) \tag{2}$$

en dérivant (1) par rapport à x_i il vient :

$$0 = \Sigma \, \mu_j x_j \frac{\partial P_j}{\partial x_i} + \mu_i P_i$$

En reportant dans (2) nous obtenons :

$$(1-\mu_i)P_i = \sum_{j=2}^{n} \mu_j x_j \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \qquad i = 2 \dots n. \tag{3}$$

Soient P_i des représentants des germes P_i définis sur une boule B_o fermée. En intégrant (3) le long des orbites de Y_1 on obtient :

(4) $$P_i(e^{\mu t}.x) = e^{(1-\mu_i)t}.P_i(x)$$

où $e^{\mu t}.x = (e^{\mu_2 t}x_2,\dots,e^{\mu_n t}x_n)$ est le flot de Y_1.

Supposons par exemple les $\mu_i > 0$; alors puisque $-Y_1$ contracte vers 0 l'égalité (4) est vraie pour tout $t < 0$.

Comme les P_i sont plats en 0, pour tout entier m il existe des constantes $C_m > 0$ telles que :

$$|P_i(x)| \leqslant C_m \|x\|^m \qquad \text{pour } x \in B_o,$$

où $\| \quad \|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Alors d'après (4) il vient pour tout t négatif :

(5) $$|P_i(x)| = e^{-(1-\mu_i).t} |P_i(e^{\mu t}.x)| \leqslant C_m e^{-(1-\mu_i)t} \sup_j e^{m\mu_j t} \|x\|^m$$

$$= C_m \sup e^{(m\mu_j - 1 + \mu_i)t} \|x\|^m.$$

Si on choisit m assez grand les $m\mu_j - 1 + \mu_i$ sont positifs et lorsque t tend vers $-\infty$ le second membre est nul ; donc $P_i = 0$.

§ 2. - Démonstration du Théorème 2^∞

a) les a_i sont tous de même signe

D'après § 1 il existe des champs $X_1,\dots,X_{n-1}$ commutants tels que $\omega(X_i) = 0$ et $i_{j^1 X_1} \dots i_{j^1 X_{n-1}} (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \overline{\omega}_{n-1}$; puisque $\overline{\omega}_{n-1}$ vérifie la condition (*), on peut supposer que $j^1 X_1 = \Sigma \lambda_i x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ vérifie les conditions de non résonnance $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i - \lambda_j \neq 0$ $\forall \sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\sigma| \geqslant 2$, $\forall j = 1,\dots,n$. D'après [Ch] il existe un système de coordonnées dans lequel les X_i sont linéaires. Dans ce système de coordonnées nous avons d'après le lemme [T] :

$$\omega = (1+h).\overline{\omega}_{n-1} \qquad \text{où} \quad h \in \mathcal{E}_n, \quad h(0) = 0$$

(en effet un idéal engendré par des polynômes est fermé).

Parce que les a_i sont deux à deux distincts il existe un germe de difféomorphisme ψ tel que $\psi^*\omega = \overline{\omega}_{n-1}$ (exercice).

b) les a_i *ne sont pas de même signe.*

Ici on reprend la technique de II ; on peut trouver, via le lemme fondamental, un champ Y «contractant», vérifiant les conditions de non résonnances, tel que $L_Y\omega = \omega$ et $\omega(Y) = 0$; alors dans des coordonnées où le champ Y est linéaire on a $\omega = \overline{\omega}_{n-1} + \omega_\infty$ où ω_∞ est une forme plate en 0 ; écrivant $\omega_\infty(Y) = 0$ et $L_Y\omega_\infty = \omega_\infty$ et utilisant la même technique que dans § 1, on montre que $\omega_\infty = 0$.

§ 3. - Démonstration du théorème 3^∞

a) Le théorème (3 § IV) permet d'affirmer que dans un système de coordonnées convenablement choisi on a

$$\omega = \overline{\omega}_{n-1} + \omega_\infty$$

où ω_∞ est une forme plate en 0.

En utilisant § 1 on peut trouver des champs $X_j = A_j + P_j$, où les A_j sont linéaires et les P_j plats en 0, tels que :

$$\omega(X_j) = 0$$

$$[X_i,X_j] = 0.$$

D'après [Ch] on peut linéariser simultanément les X_i ; ce qui permet de conclure. Remarquons que l'on obtient l'implication : ω a une intégrale première formelle $\Rightarrow$ ω a une intégrale première C^∞ (non plate en 0).

b) Suivant la démarche de la démonstration du théorème 3(b)(IV)), on peut trouver une forme normale C^∞ cette fois, du champ X_1 i.e. dans un bon système de coordonnées C^∞ $X_1 = A_1 + P_1$ où A_1 est linéaire contractant et P_1 polynomial ; alors les champs X_j s'écrivent :

$$X_j = A_j + P_j + Q_{j\infty}$$

A_j linéaire, P_j polynomial et $Q_{j\infty}$ plat en 0 ;

l'égalité $[X_1,X_j]=0$ implique que $[X_1,Q_{j\infty}]=0$.

En utilisant le fait que le champ X_1 est contractant, on peut démontrer que $Q_{j\infty}$ est nul (cf $[C_1]$, [R]) ; l'idée est la même que dans § 1. On conclut alors comme dans IV. Q.E.D.

INDEX DES NOTATIONS

$\mathcal{O}_n$ = l'anneau des germes de fonctions holomorphes en $0 \in \mathbb{C}^n$.

$\mathcal{M}$ = l'idéal maximal de $\mathcal{O}_n$.

$\widehat{\mathcal{O}}_n$ = l'anneau des séries formelles à n indéterminées.

$\chi(n)$ = le $\mathcal{O}_n$ module des germes de champs holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$.

$\widehat{\chi(n)}$ = le $\widehat{\mathcal{O}}_n$ module des champs formels.

$\Lambda^p(n)$ = le $\mathcal{O}_n$-module des germes de p-formes holomorphes en $0 \in \mathbb{C}^n$.

$j^\ell\beta$ signifie le jet d'ordre ℓ en 0 de l'objet β.

REFERENCES

[CL] C. CAMACHO, A. LINS NETO. *«The topology of integrable forms near a singularity».* Publications Math. IHES n° 55, p. 5-36.

[C_1] D. CERVEAU. *«Distributions involutives singuliers».* Ann. Inst. Fourier t. XXIX, Fasc. 3, 1979, p. 262-294.

[C_2] D. CERVEAU. Thèse Dijon (1981).

[Ch] M. CHAPERON. *«Sur la linéarisation* C^∞ *des germes hyperboliques d'actions* C^∞ *de* $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^m$». Thèse Ecole Polytechnique.

[K] I. KUPKA. *«singularities of integrable structurally stable Pfaffian forms».* Proc. Nat. Acad. Sciences 52 (1964).

[L] A. LINS NETO. *«Integrable homogeneous forms».* Preprint Rio.

[Ma] J. MARTINET. *«Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d'après Brujno)»* Séminaire Bourbaki, nov. 80.

[MM] J.F. MATTEI, R. MOUSSU. *«Holonomie et intégrales premières».* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. t. 13, (1980), p. 469-523.

[R] R. ROUSSARIE. *«Modèles locaux de champs et de formes».* Astérisque n° 30.

[S] K. SAITO. *«On a generalisation of de Rham lemma».* Ann. Inst. Fourier t. XXVI fasc. 2, 1976, p. 1237.

[Sg] Cl. SIEGEL. *«Uber die Normal form analytischer differentialgleichungen in der Nähe einer gleichgewitsislösung».* Göttinger Nachrichten der Akademie des Wissenschaften (1952), p. 21-30.

[T] J.C. TOUGERON. *«A propos du complexe de Koszul».* Preprint.

(Manuscrit reçu le 3 mars 1983)