MICHEL LAZARUS

Fermeture intégrale et changement de base

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 6, nº 2 (1984), p. 103-120
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1984_5_6_2_103_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol VI, 1984, P. 103 à 120

FERMETURE INTEGRALE ET CHANGEMENT DE BASE

Michel Lazarus (1)

(1) Laboratoire de Mathématiques Fondamentales, U.E.R. 48, Université Pierre et Marie Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cédex 05 - France.

Résumé : Cet article contient quelques résultats liés au comportement des éléments entiers par changement de base. On montre d'abord que si A est un anneau local noethérien, A' un anneau local et $f : A \rightarrow A'$ un morphisme local plat tel que pour tout morphisme $A \rightarrow k$ où k est un corps, les anneaux locaux de $A' \otimes_A k$ soient intègres, alors l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A' est fini ; on en déduit que si f est normal, les A-algèbres intègres et intégralement closes se comportent bien par le changement de base f. On étend aussi le résultat de ([5]) au cas où A n'est plus noethérien, mais où f est essentiellement de type fini. Enfin, la recherche de contre exemples nous amène à montrer qu'un module est plat si et seulement si il est universellement sans torsion.

Summary : This paper contains some results linked with the behaviour of integral elements through base change. First, we show that if A is a local noetherian ring, A' a local ring and $f : A \rightarrow A'$ a flat local morphism such that for every morphism $A \rightarrow k$ where k is a field the local rings of $A' \otimes_A k$ are domains, then the set of minimal prime ideals of A' is finite ; as a consequence we show that if f is normal, the integrally closed A-algebras have a good behaviour through the base change f. We extend the result of ([5]) too, to the case where A is no more noetherian but where f is essentially of finite type. Finally, seeking counterexamples bring us to show that a module is flat if and only if it is universally torsion free.

INTRODUCTION

La première partie est consacrée à la démonstration du théorème (1.2) ; on y utilise les techniques habituelles des E.G.A.. Dans la deuxième partie, on étudie quelques corollaires du théorème (1.2) ainsi que divers compléments. La troisième partie est consacrée aux relations entre la platitude, les éléments nilpotents et les éléments entiers dans un changement de base et à quelques contre-exemples lorsqu'on supprime les hypothèses noethériennes ou qu'on affaiblit les hypothèses sur les fibres.

Je remercie Daniel FERRAND pour son aide et ses conseils.

Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires. Nous dirons qu'un anneau est normal si ses anneaux locaux sont intègres et intégralement clos. Nous dirons qu'un morphisme $f : A \to A'$ est réduit (resp. intègre, resp. normal) si f est plat et si pour tout morphisme $A \to k$ où k est un corps, les anneaux locaux de $A' \otimes_A k$ sont réduits (resp. intègres, resp. normaux) ; ces dernières propriétés sont stables par changement de base, par localisation et par limite inductive. On note $\overline{B}^C$ la fermeture intégrale de B dans C.

1. - FINITUDE DE MIN A'

(1.1) - Commençons par indiquer trois énoncés permettant de conclure qu'un changement de base conserve la fermeture intégrale. Soit $f : A \to A'$ un morphisme (le changement de base), $B \to C$ un morphisme de A-algèbres et notons $D = \overline{B}^C$, $B' = B \otimes_A A'$, $C' = C \otimes_A A'$, $D' = D \otimes_A A'$.

THEOREME ([3]). *Si* f *est normal et si* A *et* A' *sont noethériens, alors* $D' = \overline{B'}^{C'}$.

THEOREME ([6]). *Si* f *est absolument plat, alors* $D' = \overline{B'}^{C'}$.

THEOREME ([5]). *Si* f *est réduit et si* A *est noethérien, alors* $D' = \overline{B'}^{C'}$.

Sous certaines hypothèses, les propriétés de A liées aux éléments entiers se transmettent bien à A' :

THEOREME ([3]). *Si* f *est normal et si* A, A' *sont noethériens, pour toute* A*-algèbre* B *normale,* $B \otimes_A A'$ *est normal.*

THEOREME ([6]). *Si* f *est absolument plat et si* A *est normal, alors* A' *est normal.*

On se propose de démontrer le

THEOREME. *Si* f *est normal,* A *noethérien, et si* B *est une* A*-algèbre normale, alors* $B \otimes_A A'$ *est normal.*

Ceci sera fait dans la seconde partie et se déduira du résultat suivant, qui est plus intéressant :

THEOREME (1.2). *Soit* $f : A \to A'$ *un morphisme. On suppose* A *local noethérien,* A' *local,* f *local et intègre. Alors* Min A' *est un ensemble fini.*

Démonstration. Rappelons que Min A' désigne l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A'. La démonstration se fera par récurrence sur la dimension de A.

Si A est artinien, m = Rad A est nilpotent et par hypothèse la fibre $A'/_{m A'}$, étant locale, est intègre ; on en déduit que Min A' n'a qu'un élément.

(1.3.1). Dim A = 1.

Nous aurons besoin du

LEMME (1.3.2). *Soit* A *un anneau,* $t \in A$, α *un idéal premier de* A *ne contenant pas* t, β *un idéal tel que* $\beta \subset \beta t$. *Si* $\alpha_t + \beta_t = A_t$, *alors* $\alpha + \beta = A$.

Démonstration. L'hypothèse entraîne qu'il existe un entier p tel que t^p soit un élément de $\alpha + \beta$. On va démontrer le lemme par récurrence sur p. Le cas p = 0 étant trivial, supposons $p \geqslant 1$; on peut écrire $t^p = a + b$ où $a \in \alpha$ et $b \in \beta$; comme $\beta \subset \beta t$, on a $b = ct$ avec $c \in \beta$, d'où $(t^{p-1} - c)t = a \in \alpha$, mais par hypothèse α est premier et ne contient pas t, donc $t^{p-1} - c \in \alpha$, d'où $t^{p-1} \in \alpha + \beta$ donc $\alpha + \beta = A$ par hypothèse de récurrence.

(1.3.3). A de valuation discrète. Soit π une uniformisante de A, $K = A_\pi$ son corps des fractions. Par hypothèse, la fibre $A'/_{\pi A'}$, étant locale, est intègre, donc $\pi A'$ est un idéal premier de A' ; soit $p_0 \subset \pi A'$ un idéal premier minimal de A'. Montrons que $\pi \notin p_0$; sinon $p_0 = \pi A'$ serait un idéal premier minimal de A' et f étant plat, $(\pi A') \cap A$ = Rad A devrait être aussi minimal, ce qui n'est pas. Soit $x \in p_0$, alors $x = \pi a'$ et puisque $\pi \notin p_0$, on doit avoir $a' \in p_0$, ainsi $p_0 \subset \pi p_0$. Supposons qu'il existe dans A' un idéal premier minimal p distinct de p_0 ; naturellement $\pi \notin p$, donc $p_0 A'_\pi$ et $p A'_\pi$ sont deux idéaux premiers minimaux distincts de A'_π. Or, par hypothèse sur les fibres, les anneaux locaux de A'_π sont intègres, par conséquent $p_0 A'_\pi + p A'_\pi = A'_\pi$; on déduit alors du lemme (1.3.2) que $p_0 + p = A'$, ce qui est impossible puisque A' est local. Donc p_0 est le seul idéal premier minimal de A'.

(1.3.4). A intègre. Soit $\bar{A}$ la clôture intégrale de A. On sait ([2] , § 23) qu'il existe une sous A-algèbre B de $\bar{A}$, finie sur A, et telle que $\bar{A}$ soit radiciel sur B ; de plus A étant local noethérien de dimension 1, $\bar{A}$ est un anneau de Dedekind semi local. Désignons par B' et $\bar{A}'$ les anneaux obtenus par changement de base à partir de B et $\bar{A}$. f étant plat, A' est inclus dans B' et comme B' est fini sur A', tout élément de Min A' est la trace d'un élément de Min B'. D'autre part, $\bar{A}'$ étant radiciel sur B', Min $\bar{A}'$ est isomorphe à Min B' : on voit que pour montrer que Min A' est fini, il suffit de le faire pour $\bar{A}'$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \bar{A}'_{p'} \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & \bar{A}' \arrow[r] & \bar{A}'_{p} \arrow[u] \\
A \arrow[r] \arrow[u] & B \arrow[r] \arrow[u] & \bar{A} \arrow[r] \arrow[u] & \bar{A}_{p} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Soit p' un idéal maximal de $\bar{A}'$ et $p = p' \cap \bar{A}$, alors le morphisme de $\bar{A}_p$ dans $\bar{A}'_{p'}$ vérifie les hypothèses du théorème et de plus $\bar{A}_p$ est un anneau de valuation discrète, donc d'après (1.3.3) Min $\bar{A}'_{p'}$ est fini ; donc chaque idéal maximal de $\bar{A}'$ ne contient qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux. Or, A' étant local, B' fini sur A' et $\bar{A}'$ radiciel sur B', $\bar{A}'$ est semi-local, donc Min $\bar{A}'$ est fini.

(1.3.5). A réduit. Soient $p_1,\ldots,p_r$ les éléments de Min A ; l'homomorphisme canonique de A dans le produit des A/p_i est fini et injectif, il en est donc de même du morphisme $A' \to \Pi\, A'/p_i A'$; donc il suffit de montrer que pour chaque i, Min $(A'/p_i A')$ est fini ; or A/p_i est intègre de dimension au plus égale à 1 et on conclue à l'aide de (1.3.4).

(1.3.6). Enfin si on ne suppose plus A réduit, il suffit de voir que Min $(A'/(\mathrm{Nil}\ A)A')$ est fini, ce qui nous ramène à l'anneau réduit $A/\mathrm{Nil}\ A$, c'est-à-dire à (1.3.5).

(1.4.1). Dim A = n > 1.

On suppose le théorème démontré lorsque dim A < n.

LEMME (1.4.2). *Si* A *est noethérien intégralement clos de dimension au plus égale à* $n-1$, *alors* A' *est intègre.*

Démonstration. Soit K le corps des fractions de A et $A'_K = A' \otimes_A K$. Par platitude on a $\mathrm{Min}\ A'_K = \mathrm{Min}\ A'$ qui est fini par hypothèse de récurrence, et, par hypothèse sur f, les anneaux locaux de A'_K sont intègres ; on en déduit que A'_K est un produit fini d'anneaux intègres mais f, étant réduit, conserve la fermeture intégrale ([5]), donc A' est intégralement fermé dans A'_K, donc les idempotents de A'_K appartiennent à A' qui est local, donc en fait A'_K est intègre, donc A' aussi.

On suppose maintenant que $\dim A = n$.

(1.4.3). A local noethérien complet normal, à corps résiduel algébriquement clos.

PROPOSITION (1.4.4). *Il existe une* A*-algèbre finie* B *contenant* A, *intègre, intégralement close, et* $t \in \mathrm{Rad}\ B \setminus \{0\}$ *tels que* $B_{/tB}$ *soit réduit.*

La démonstration de cette proposition sera donnée plus loin ; observons seulement que A étant hensélien, B est nécessairement local.

(1.4.5). Posons maintenant $B' = B \otimes_A A'$; il suffit de voir que Min B' est fini, mais B' est semi local et ses idéaux maximaux sont au-dessus de Rad B, donc il suffit de le voir pour les localisés de B' en ses idéaux maximaux et, finalement, on peut supposer B' local. Comme $\dim(B_{/tB}) < n$ et que $B'_{/tB'}$ est local, on voit par récurrence que $\mathrm{Min}(B'_{/tB'})$ est fini, donc qu'il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers $q'_1,\dots,q'_r$ de B' minimaux parmi ceux contenant t et on a $q'_1 \cap \dots \cap q'_r = \mathrm{rac}(tB') = tB'$ puisque A est noethérien et que $B_{/tB}$ et f sont réduits.

Posons, pour $i = 1,\dots,r, q_i = q'_i \cap B$; comme $q'_i \in \mathrm{Min}(B'_{/tB'})$, par platitude les q_i sont des idéaux premiers de B minimaux parmi ceux contenant t, donc de hauteur 1, et comme B est intégralement clos, les localisés B_{q_i} sont des anneaux de valuation discrète, ce qui entraîne que les $B'_{q'_i}$ soient intègres (lemme (1.4.2)). Ainsi, chaque q'_i contient un unique $p'_i \in \mathrm{Min}\ B'$ et on va montrer que $\mathrm{Min}\ B' = \{p'_1,\dots,p'_r\}$. Par platitude $p'_i \cap B = 0$ donc $t \notin p'_i$ or on a $p'_1 \cap \dots \cap p'_r \subset q'_1 \cap \dots \cap q'_r = tB'$ d'où on déduit que $p'_1 \cap \dots \cap p'_r \subset t(p'_1 \cap \dots \cap p'_r)$. Supposons qu'il existe $p' \in \mathrm{Min}\ B'$, distinct de $p'_1,\dots,p'_r$; on a toujours $t \notin p'$ et $p'_t, p'_{1t},\dots,p'_{rt}$ sont dans $\mathrm{Min}\ B'_t$. Comme $\dim B_t < n$ et que B_t est intégralement clos, le lemme (1.4.2) montre que les anneaux locaux de B'_t sont intègres, donc deux idéaux premiers minimaux distincts de B'_t sont étrangers ; ainsi, dans B'_t on a, pour $i = 1,\dots,r, p'_t + p'_{it} = B'_t$, d'où $p'_t + (p'_1 \cap \dots \cap p'_r)_t = B'_t$. D'après le lemme (1.3.2) on a donc dans B', $p' + (p'_1 \cap \dots \cap p'_r) = B'$ ce qui est impossible puisque B' est local.

(1.4.6). A local noethérien complet à corps résiduel algébriquement clos. Soient $p_1,\dots,p_r$ les éléments de Min A ; toujours par platitude, tout élément de Min A' est au-dessus de l'un des p_i, on peut donc remplacer A par A/p_i et supposer A intègre. On sait alors que si $\bar{A}$ est la cloture intégrale de A, $\bar{A}$ est local, fini sur A, a même corps résiduel (algébriquement clos) que A et est encore complet ; ceci dit, il suffit de montrer que $\mathrm{Min}(\bar{A} \otimes_A A')$ est fini et ça provient, par localisation, de (1.4.3) puisque $\bar{A} \otimes_A A'$ est semi local.

(1.4.7). A local noethérien. On sait que si k est le corps résiduel de A et k' sa cloture algébrique, il existe une A-algèbre locale et plate B, noethérienne, telle que Rad B = (Rad A)B et de corps résiduel isomorphe à k'. Ces hypothèses entraînent que dim A = dim B. En composant avec le morphisme canonique de B dans son complété C, qui est à extension résiduelle triviale et conserve la dimension, on en déduit que C est une A-algèbre plate de dimension n vérifiant les hypothèses de (1.4.6). D'autre part, si $C' = C \otimes_A A'$, il existe $q' \in \mathrm{Max}\, C'$ tel que $q' \cap C = \mathrm{Rad}\, C$ et $q' \cap A' = \mathrm{Rad}\, A'$. Alors d'après (1.4.6), Min $C'_{q'}$ est fini ; mais $C'_{q'}$ est fidèlement plat sur A', donc tout élément de Min A' est la trace d'un élément de Min $C'_{q'}$, donc Min A' est bien fini.

(1.5.1). Revenons maintenant à la démonstration de la proposition (1.4.4). Le résultat est clair si dim A = 1 car alors A est de valuation discrète et on peut prendre B = A ; on suppose désormais que dim $A \geqslant 2$.

LEMME (1.5.2). *Soit* A *un anneau local noethérien régulier de dimension au moins égale à* 2 *et* K *son corps des fractions. Soit* L *une extension finie séparable de* K *et* $B = \bar{A}^L$. *Alors il existe* $t \in \mathrm{Rad}\, A \setminus \{0\}$ *tel que* B/tB *soit réduit.*

Démonstration. Comme le morphisme de A dans B est fini et que sa fibre générique est par hypothèse étale, on sait qu'il existe $u \in A \setminus \{0\}$, qu'on peut supposer dans Rad A, tel que $A_u \to B_u$ soit étale. B étant intégralement clos, les idéaux premiers $q_1,\dots,q_r$ de B associés à u sont de hauteur 1. Posons $p_i = q_i \cap A$, alors les p_i sont encore de hauteur 1 et comme dim $A \geqslant 2$, il existe $p \in \mathrm{Spec}\, A$ distinct de $p_1,\dots,p_r$, de hauteur 1 et ne contenant pas u. Comme A est régulier p est un idéal principal tA. Montrons que B/tB est réduit. Comme $u \notin p$, $(A/tA)_u$ est intègre, donc $(B/tB)_u$ est réduit et il ne reste plus qu'à constater que B/tB s'injecte dans $(B/tB)_u$, or t n'appartenant pas aux idéaux premiers associés à u dans B, u n'appartient pas aux idéaux premiers associés à t dans B puisque ceux-ci sont de hauteur 1.

Le lemme (1.5.2) étant démontré, soit K le corps des fractions de A.

(1.5.3). Si c(K) = 0, on sait qu'il existe un anneau régulier A_o et un morphisme injectif de A_o dans A faisant de A une A_o-algèbre finie ; alors K est une extension séparable finie du corps des fractions de A_o et on conclue en appliquant le lemme (1.5.2).

(1.5.4). Si $c(K) = p > 0$, alors on sait que, k étant le corps résiduel algébriquement clos de A, il existe un homomorphisme fini injectif de $A_0 = k\,[[X_1,\dots,X_n]]$ dans A. Soit K_0 le corps des fractions de A_0, alors $A = \bar{A}_0^{K}$; soit, dans $\bar{K}$, une extension normale finie L de K_0, contenant K, et K_1 la fermeture radicielle de K_0 dans L. L est donc séparable sur K_1 et on a $K_1 \subset K_0^{1/q} = K_2$ où q est une puissance convenable de p. Si L_2 est l'extension engendrée par L et K_2, L_2 est une extension finie séparable de K_2.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & K \arrow[r] & L \arrow[r] & L_2 \\
A_0 \arrow[r] \arrow[u] & K_0 \arrow[r] \arrow[u] & K_1 \arrow[r] \arrow[u] & K_2 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Supposons démontré que $\bar{A}_0^{K_2}$ est un anneau régulier et que K_2 est une extension finie de K, alors d'après le lemme (1.5.2) il existera $t \in \mathrm{Rad}\, \bar{A}^{L_2} \setminus \{0\}$ tel que $\bar{A}^{L_2}/t\bar{A}^{L_2}$ soit réduit. Comme A_0 est japonais, $\bar{A}^{L_2}$ sera une A-algèbre finie, ce qui achèvera la démonstration de la proposition (1.4.4), donc du théorème (1.2). Reste le

LEMME (1.5.5). *$\bar{A}_0^{K_2}$ est régulier et K_2 est une extension finie de K_0.*

Démonstration. Soient $Y_1,\dots,Y_n$ des indéterminées, posons $A_1 = k\,[[Y_1,\dots,Y_n]]$ et soit φ l'unique k-homomorphisme local de A_0 dans A_1 tel que $\varphi(X_i) = Y_i^q$ pour $i = 1,\dots,n$. φ est injectif, ce qui permet de considérer A_0 comme un sous anneau de A_1. On voit que si $x \in A_1$, alors $x^q \in A_0$ et que A_1 est de type fini sur A_0, engendré par les Y_i^r pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant r \leqslant q-1$, donc A_1 est fini sur A_0, donc le corps des fractions K_3 de A_1 est fini sur K_0 et $A_1 = \bar{A}_0^{K_3}$. Enfin, k étant algébriquement clos, on voit que si $x \in K_0$, il existe $y \in K_3$ tel que $x = y^q$, donc $K_3 = K_0^{1/q} = K_2$.

Remarque (1.6). La conclusion du théorème (1.2) reste vraie si on affaiblit les hypothèses de la façon suivante : A est noethérien (non nécessairement local), f est intègre et A' est semi local.

2. - COROLLAIRES ET COMPLEMENT

(2.1). Etablissons d'abord quelques conséquences du théorème (1.2).

COROLLAIRE (2.1.1). *Soit* $f : A \to A'$ *un morphisme intègre avec* A *noethérien,* B *une* A*-algèbre* *locale intègre géométriquement unibranche et* n' *un idéal premier de* $B' = B \otimes_A A'$ *relevant le radical de* B. *Alors* $B'_{n'}$ *est intègre.*

Démonstration. Supposons d'abord B normal. Par limite inductive, on peut supposer que B est la fermeture intégrale d'une A-algèbre intègre de type fini, donc noethérienne, et par localisation, on peut supposer que A, A' et f sont locaux et que B est la cloture intégrale de A, de corps des fractions K.

On sait qu'il existe une sous A-algèbre finie C de B telle que B soit radiciel sur C. $C \otimes_A A'$ étant semi local, on déduit du théorème (1.2) que $\mathrm{Min}(C \otimes_A A')$ est fini et B' étant radiciel sur $C \otimes_A A'$, min B' est aussi fini. Soit C' un anneau local de B' et $C'_K = C' \otimes_B K$, Min C'_K est donc aussi fini or, par hypothèse, les anneaux locaux de C'_K sont intègres, donc C'_K est un produit fini $C_1 \times \ldots \times C_n$ d'anneaux intègres ; B étant intégralement fermé dans K et f réduit, C' est intégralement fermé dans C'_K donc contient les idempotents de C'_K et comme C' est local, on voit que n = 1 ; donc C'_K est intègre et, par platitude, C' est aussi intègre.

Passons au cas où B est géométriquement unibranche. Soit $\overline{B}$ la cloture intégrale de B, k (resp. k', resp. $\overline{k}$) le corps résiduel de B (resp. $B'_{n'}$, resp. $\overline{B}$) ; comme $\overline{k}$ est une extension radicielle de k, l'anneau $k' \otimes_k \overline{k}$ est local, or si q est un idéal maximal de $D' = B'_{n'} \otimes_B \overline{B}$ il relève nécessairement le radical de $B'_{n'}$ (puisque D' est entier sur $B'_{n'}$) et comme Rad $(B'_{n'})$ relève Rad B, on voit que q relève aussi Rad $\overline{B}$ donc $q \in \mathrm{Spec}\,(k' \otimes_k \overline{k})$, donc D' est local. D'autre part on a vu que les anneaux locaux de $\overline{B}' = \overline{B} \otimes_A A'$ sont intègres ; comme D' est un localisé de $\overline{B}'$ et qu'il est local, c'est un anneau local de $\overline{B}'$, donc D' est intègre, donc $B'_{n'}$ aussi.

COROLLAIRE (2.1.2). *Soit* $f : A \to A'$ *un morphisme normal avec* A *noethérien,* B *une* A*-algèbre locale intègre géométriquement unibranche (resp. normale) et* n' *un idéal premier de* $B \otimes_A A'$ *relevant le radical de* B. *Alors* $B'_{n'}$ *est géométriquement unibranche (resp. normale).*

Démonstration. Notons d'abord que cet énoncé contient le théorème annoncé au début de la première partie. Supposons maintenant que B est géométriquement unibranche. On garde les notations de (2.1.1) et on désigne par L le corps des fractions de B. On a vu que D' est un anneau local intègre ; montrons que D' est intégralement clos. $\overline{B}$ étant intégralement fermé dans L et f réduit, $\overline{B}'$ est intégralement fermé dans $B'_L = B' \otimes_B L$ et, par localisation, D' est intégralement fermé dans $D'_L = D' \otimes_B L$;

$$\begin{tikzcd}
& B'_{n'} \arrow[r] & D' \arrow[r] & D'_L \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[u] & \bar{B}' \arrow[r] \arrow[u] & B'_L \arrow[u] \\
A \arrow[r] \arrow[u] & B \arrow[r] \arrow[u] & \bar{B} \arrow[r] \arrow[u] & L \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

mais par hypothèse sur f, B'_L est un anneau normal, il en est donc de même de D'_L , donc D' est intégralement clos, donc c'est la cloture intégrale de $B'_{n'}$ et il reste à voit que l'extension résiduelle correspondante est radicielle ; or le corps résiduel de D' est aussi celui de $k' \otimes_k \bar{k}$, qui est radiciel sur k' puisque $\bar{k}$ est radiciel sur k par hypothèse. Si on suppose de plus que B est normale, alors $\bar{B} = B$ et $D' = B'_{n'}$ qui est bien normale.

COROLLAIRE (2.1.3). *Soient* $f : A \to B$ *et* $g : B \to C$ *deux morphismes normaux avec* A *et* B *noethériens. Alors* $g \circ f$ *est normal.*

Démonstration. Soit k un corps et $A \to k$ un morphisme. Par hypothèse sur f, $B \otimes_A k$ est normal et par le corollaire (2.1.2) $C \otimes_B (B \otimes_A k) = C \otimes_A k$ est aussi normal ; il ne reste plus qu'à remarquer que f et g étant plats, il en est de même de $g \circ f$.

Remarque (2.1.4). Il n'est pas difficile de construire un morphisme fini étale (donc normal) $A \to A'$ avec A local noéthérien intègre unibranche, A' local, et cependant A' non intègre ([3], 6.15.11).

Remarque (2.1.5). Ce qui précède amène à poser la question suivante : soit $f : A \to A'$ un morphisme à fibres géométriquement connexes. On suppose que A est noethérien intègre et que f est, disons, normal. Les anneaux locaux de A' sont-ils intègres ?

(2.2). Comme complément, montrons qu'on peut libérer des hypothèses noethériennes dans le théorème de ([5]) lorsqu'on suppose que f est essentiellement de type fini :

PROPOSITION (2.2.1). *Soit* $f : A \to A'$ *un morphisme essentiellement de type fini et réduit. Alors* *pour tout morphisme* $B \to C$ *de* A*-algèbres, si* D *est la fermeture intégrale de* B *dans* C, $D \otimes_A A'$ *est la fermeture intégrale de* $B \otimes_A A'$ *dans* $C \otimes_A A'$.

Démonstration. On peut supposer $A = D$ et se ramener ainsi à montrer que si A est un sous-anneau intégralement fermé de B, alors A' est intégralement fermé dans $B' = B \otimes_A A'$; nous allons pour cela utiliser les résultats de ([6]) et traiter d'abord le cas où A est un anneau de valuation.

LEMME (2.2.2). *Soit* $f : A \to A'$ *un morphisme plat, essentiellement de type fini avec* A *de valuation. Alors il existe une* $\mathbb{Z}$*-algèbre locale essentiellement de type fini* A_o , *un morphisme local* $A_o \to A$ *et une* A_o*-algèbre plate de type fini* A'_o *tels que* A' *s'identifie à un anneau de fractions de la* A*-algèbre* $A'_o \otimes_{A_o} A$.

Démonstration. Ecrivons $A' = S_1^{-1} A_1$ où $A_1 = A[x_1,...,x_n]$ est une A-algèbre de type fini et S_1 une partie multiplicative de A_1 . Soit A_2 l'image, par le morphisme $A_1 \to S_1^{-1} A_1$, de A_1 , et S_2 celle de S_1 . A_2 est donc une sous A-algèbre de type fini de A', S_2 une partie multiplicative de A_2 , et $A' = S_2^{-1} A_2$. Comme A_2 est incluse dans la A-algèbre plate A' et que A est de valuation, A_2 est aussi une A-algèbre plate. Comme elle est aussi de type fini, on sait ([7]) qu'elle est de présentation finie. On termine alors la démonstration du lemme grâce aux résultats de ([4], § 11).

(2.2.3). Revenons, lorsque A est de valuation, à la proposition (2.2.1). On peut supposer A' et f locaux. D'après le lemme (2.2.2) on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} A'_o \arrow[r] & A'_1 \arrow[r] & A' = (A'_1)_{m'_1} \\ A_o \arrow[u] \arrow[r] & A \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

où A_o est un anneau local noethérien, A'_o une A_o-algèbre plate de type fini, $A_o \to A$ un homomorphisme local, $A'_1 = A'_o \otimes_{A_o} A$ et m'_1 un idéal premier de A'_1 au-dessus du radical m de A. Si $m_o = \text{Rad } A_o$ et $m'_o = m'_1 \cap A'_o$, le morphisme $f_o : A_o \to (A'_o)_{m'_o}$ est local, plat et sa fibre spéciale est géométriquement réduite puisque c'est le cas pour $A \to A'$ ([3], 4.6.10).

LEMME (2.2.4). *Soit* A *un anneau local noethérien,* B *une* A*-algèbre locale plate essentiellement de type fini, telle que le morphisme* $f : A \to B$ *soit local. Si la fibre spéciale de* f *est géométriquement réduite alors toutes les fibres le sont, autrement dit* f *est réduit.*

Démonstration. On peut écrire $B = C_p$ où C est une A-algèbre de type fini et $p \in \operatorname{Spec} C$. Quitte à modifier C, on peut supposer que C est plat sur A. Le lemme découle alors de ([4], 12.1.1).

(2.2.5). D'après le lemme (2.2.4) f_0 est réduit, il ne reste donc plus qu'à appliquer le théorème de ([5]) avec hypothèse noethérienne.

(2.2.6). La proposition (2.2.1) étant démontrée lorsque A est de valuation, passons au cas général. A étant intégralement fermé dans B, il existe d'après ([6]) un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ V \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

où V est semi-hériditaire d'anneau total des fractions K.
En tensorisant ce carré par A', on en déduit par platitude un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ V' \arrow[r] & K' \end{tikzcd}$$

et pour que A' soit intégralement fermé dans B' il suffit que V' le soit dans K'. On est donc ramené au cas où $A = V$, $B = K = S^{-1}V$, où S est l'ensemble des éléments réguliers de V (et où $A' = V'$) et il faut montrer que V' est intégralement fermé dans K' ou, ce qui est équivalent, que pour tout idéal premier p de V, V'_p est intégralement fermé dans K'_p ; or V_p est un anneau de valuation ou un corps et il est intégralement fermé dans $K_p = S^{-1}\ V_p$, on est donc ramené au cas où A est un anneau de valuation (ou un corps), cas qui a été traité plus haut.

Remarque (2.2.7). Lorsqu'on ne suppose plus A noethérien mais f essentiellement de type fini, la conclusion du théorème (1.2) est vraie dès que Min A est fini et ses corollaires sont des conséquences faciles de la proposition (2.2.1).

Remarque (2.3). Les définitions et les résultats des deux premières parties s'étendent sans problème aux schémas.

3. - PLATITUDE ET CONTRE-EXEMPLES

THEOREME (3.1). *Soit* A *un anneau (resp. un anneau réduit) et* M *un* A*-module. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) M *est plat.*

(ii) Pour toute A*-algèbre* B *de type fini (resp. de type fini et réduite), le* B*-module* $B \otimes_A M$ *est sans torsion.*

Démonstration. Si M est plat, pour toute A-algèbre B, $B \otimes_A M$ est un B-module plat, donc sans torsion d'où (i) $\Rightarrow$ (ii) ; montrons maintenant la réciproque. Pour cela nous allons montrer que si I est un idéal de type fini de A, alors l'application canonique $f : I \otimes_A M \to M$ est injective. Considérons le sous ensemble B de l'anneau de polynômes A[T,U] dont les éléments sont les polynômes $\Sigma\, a_{ij}\, T^i\, U^j$ tels que si $i \geqslant j$ alors $a_{ij} \in I^{i-j}$. Il est immédiat que B est une sous A-algèbre de A[T,U] et on voit que si I est engendré par $(x_1,\dots,x_n)$ alors B est de type fini, engendrée par $x_1T,\dots,x_nT,U$ et TU. Soient $t : I \to B$, $\varphi : B \otimes_A M \to B \otimes_A M$ et $\psi : M \to B \otimes_A M$ les applications A-linéaires telles que $t(x) = xT$, $\varphi(y) = Uy$ (multiplication par U dans le B-module $B \otimes_A M$) et $\psi(m) = TU \otimes m$. On a $\psi f = \varphi(t \otimes id_M)$ et pour montrer que f est injective, il suffit de montrer que φ et $t \otimes id_M$ le sont. Or par construction t identifie I à un sous A-module de B qui en est facteur direct ; autrement dit t est scindée et par suite $t \otimes id_M$ est aussi scindée, dont injective ; d'autre part U est non diviseur de zéro dans B (puisque c'est le cas dans A[T,U]) donc φ est injective par hypothèse. Enfin, il reste à constater que si A est réduit, il en est de même de B.

Remarque (3.1.1). Une section de t n'est autre que la restriction à B de l'application $P \to P'_T(o,o)$ définie sur A[T,U].

Remarque (3.1.2). Le théorème (3.1) se spécialise de la façon suivante : si A est local (resp. local et réduit) on peut, dans l'énoncé, supposer que B est local (resp. local et réduit) et essentiellement de type fini sur A. De même si A est intègre, on peut supposer B intègre...

PROPOSITION (3.2). *Soit* $f : A \to A'$ *un morphisme. Si* f *est réduit, alors pour toute* A*-algèbre réduite* B, $B \otimes_A A'$ *est réduit. Réciproquement, si* A *est réduit, cette dernière propriété entraîne que* f *est plat, donc réduit.*

Démonstration. Supposons d'abord f réduit et soit B une A-algèbre réduite, K le produit des corps résiduels de B en ses points génériques, $B' = B \otimes_A A'$ et $K' = B' \otimes_B K$; B est inclus dans K donc, par platitude, B' est inclus dans K' ; il suffit donc de montrer que K' est réduit et pour cela que si $q' \in \operatorname{Spec} K'$, alors $K'_{q'}$ est réduit ; or K étant absolument plat, $q = q' \cap K$ est un idéal maximal de K et K_q est un corps. Par hypothèse K'_q est donc réduit, donc $K'_{q'}$ aussi. Supposons maintenant que A est réduit, et que pour toute A-algèbre réduite B, $B \otimes_A A'$ soit réduit. Pour montrer que f est plat, il suffit, d'après le théorème (3.1), de montrer que pour toute A-algèbre réduite B, $B \otimes_A A'$ est sans B-torsion. On peut donc supposer B = A et on est ramené à montrer que A' est sans A-torsion. Soit S l'ensemble des éléments réguliers de A, $a \in S$ et $t' \in A'$ tels que $at' = 0$. Posons $B = \dfrac{A[X,Y]}{(Y^2-aX)}$; comme B est un A-module libre, il est sans torsion, donc $B \to S^{-1}B$ est injective ; or $S^{-1}B \cong S^{-1}A[Y]$ puisque a est alors inversible, donc B est réduit donc par hypothèse $B' = \dfrac{A'[X,Y]}{(Y^2-aX)}$ est réduit, mais dans B' on a, en désignant par x et y les images de X et Y, $y^2 = ax$, d'où $(yt')^2 = 0$, d'où $yt' = 0$ c'est-à-dire que $t'Y \in (Y^2 - aX)$ dans $A'[X,Y]$, donc $t' = 0$.

COROLLAIRE (3.2.1). *Soit* $f : A \to A'$ *un morphisme dans lequel on suppose que* A_{red} *est noethérien ou que* f *est essentiellement de type fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Pour tout morphisme $B \to C$ *de* A*-algèbres, si* $D = \overline{B}^C$, $B' = B \otimes_A A'$, $C' = C \otimes_A A'$ *et* $D' = D \otimes_A A'$, *alors* $\overline{B'}^{C'}$ *est l'image de* D' *par le morphisme canonique* $D' \to C'$.

(ii) Pour toute A*-algèbre réduite* B, $B' = B \otimes_A A'$ *est réduite.*

Démonstration. Montrons d'abord que (i) ⇒ (ii) : soit B une A-algèbre réduite, alors (cf. [5]) B est algébriquement fermée dans $B[T]$, donc l'image du morphisme $B' \to B'[T]$ est la fermeture intégrale de B' dans $B'[T]$, autrement dit B' est algébriquement fermée dans $B'[T]$, donc B' est réduite. Passons maintenant à l'implication (ii) ⇒ (i) ; pour montrer (i) il suffit de montrer que si C est une A-algèbre et B une sous A-algèbre de C intégralement fermée dans C, alors tout élément de C' entier sur B' provient en fait de B'. Pour cela montrons d'abord que le carré

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i"] & C \\
B_{red} \arrow[u, "p"] \arrow[r, "j"] & C_{red} \arrow[u, "q"']
\end{tikzcd}$$

où p et q sont les projections canoniques et où $j = i_{red}$, est cartésien, c'est-à-dire que le morphisme canonique $\varphi : B \to B_{red} \times_{C_{red}} C$ est un isomorphisme ; pour plus de commodités si $x \in B$ (resp. $x \in C$) nous noterons $\bar{x}$ l'élément $p(x)$ (resp. $q(x)$). Ceci dit, l'injectivité de φ découle de celle de i ; voyons la surjectivité : soient $\beta \in B_{red}$ et $c \in C$ tels que $j(\beta) = \bar{c}$ et soit $b \in B$ tel que $\beta = \bar{b}$, alors $\overline{i(b)} = \bar{c}$ donc $c - i(b) \in \mathrm{Nil}\, C$ or B étant intégralement fermé dans C, $\mathrm{Nil}\, C = i(\mathrm{Nil}\, B)$, ainsi il existe $b_1 \in \mathrm{Nil}\, B$ tel que $i(b1) = c - i(b)$; alors si $b_2 = b + b_1$, on a $i(b_2) = i(b) + i(b_1) = c$ et $\bar{b}_2 = \bar{b} + \bar{b}_1 = \beta$. Donc la suite

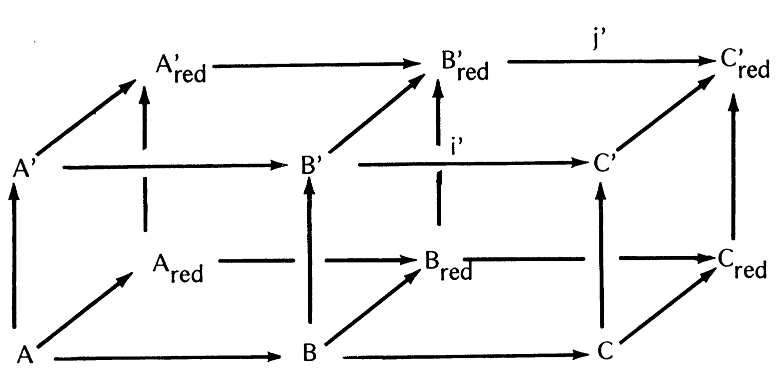
$$B \xrightarrow{\varphi} B_{red} \times C \xrightarrow{q-j} C_{red} \longrightarrow 0$$

est exacte, or il résulte de (ii) que $B_{red} \otimes_A A' = B'_{red}$ et $C_{red} \otimes_A A' = C'_{red}$, ainsi la suite

$$(*) \qquad B' \xrightarrow{\varphi'} B'_{red} \times C' \xrightarrow{q'-j'} C'_{red}$$

est exacte (où p', i', j', q', $\varphi' = (p', i')$ sont les morphismes déduits de p, i, j, q, φ par produit tensoriel sur A avec id_A' ; si $x \in B'$ (resp. $x \in C'$) on notera encore $p'(x) = \bar{x}$ (resp. $q'(x) = \bar{x}$)). Notons aussi que j est injective puisque i l'est, et que B_{red} est intégralement fermé dans C_{red} car si $c \in C$ et si $\bar{c} \in C_{red}$ est entier sur B_{red}, on a une égalité $\bar{c}^n + j(\bar{b}_1)\bar{c}^{n-1} + \ldots = 0$ avec $b_1, \ldots \in B$ d'où $c^n + i(b_1)c^{n-1} + \ldots \in \mathrm{Nil}\, C$, il existe donc N tel que $(c^n + i(b_1)c^{n-1} + \ldots)^N = 0$ ce qui montre que c est entier sur B, donc il existe $b \in B$ tel que $c = i(b)$, d'où $\bar{c} = j(\bar{b})$, ce qu'on voulait.

L'hypothèse (ii) entraîne que $A_{red} \otimes_A A' = A'_{red}$, et la proposition (3.2) montre que f_{red} est plat, donc ([5] si A_{red} est noethérien et (2.2.1) si f est essentiellement de type fini) conserve la fermeture intégrale. Considérons le diagramme



où les carrés verticaux sont cocartésiens. B_{red} étant intégralement fermé dans C_{red}, B'_{red} est intégralement fermé dans C'_{red}. Soit $c' \in C'$ entier sur B', il existe une égalité $c'^n + i'(b'_1)c'^{n-1} + \ldots = 0$ avec $b'_1, \ldots \in B'$ et on en déduit dans C'_{red} l'égalité $\bar{c}'^n + j'(b'_1)\bar{c}'^{n-1} + \ldots = 0$, donc il existe $b' \in B'$ tel que $\bar{c}' = j'(\bar{b}')$; si $c'_1 = i'(b')$, alors $\overline{c' - c'_1} = 0$ dans C'_{red}, donc l'élément $(0, c'-c'_1) \in B'_{red} \times C'$ se relève en $b'_1 \in B'$ puisque la suite (*) est exacte ; alors on voit que l'élément $b' + b'_1$ de B' relève c', ce qui achève la démonstration de l'implication (ii) ⇒ (i), et celle de (3.2.1).

Remarque (3.2.2). Si f conserve la fermeture intégrale (i.e. on suppose de plus que D' est inclus dans C' dans l'hypothèse (ii) ci-dessus) mais si A n'est pas noethérien ni réduit, alors f n'est pas nécessairement plat comme le montre l'exemple suivant : soit A un anneau local de radical m tel que m soit un nilidéal non nul et que $m^2 = m$. Considérons le morphisme $A \to A' = A/m$; alors il n'est pas plat, cependant si $B \to C$ est un morphisme de A-algèbres, $\overline{B}^C \otimes_A A'$ est inclus dans $C \otimes_A A'$ et y est intégralement fermé. Si k est un corps algébriquement clos de caractéristique 2, on peut prendre pour A le quotient de l'anneau de polynômes $k[X_1, \ldots, X_n, \ldots]$ par l'idéal engendré par X_1 et les éléments $(X_n - X_{n+1}^2)_{n \geqslant 1}$.

(3.3). Pour terminer, donnons des contre-exemples au théorème (1.2) et à celui de ([5]) lorsqu'on ne fait plus d'hypothèses noethériennes.

PROPOSITION (3.3.1). *Il existe un morphisme normal* $f : A \to A'$ *avec* A *de valuation de hauteur* 1 (*donc complètement intégralement clos) tel que si* K *est le corps des fractions de* A, A' *ne soit pas intégralement fermé dans* $A' \otimes_A K$.

Démonstration. Partons d'un anneau de valuation de hauteur 1, A, dont le radical m ne soit pas principal et définissons deux suites $(s_n)_{n \geqslant 0}$ et $(t_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $m \setminus \{0\}$ de la façon suivante : $s_0 \in m \setminus \{0\}$ est quelconque et comme m n'est pas principal, il existe $t_1 \in m \setminus As_0$; A étant de valuation, on a nécessairement $s_0 = s_1 t_1$ avec $s_1 \in m \setminus \{0\}$ et on recommence en remplaçant s_0 par s_1 ; les deux suites sont donc liées par la relation $s_n = s_{n+1} t_{n+1}$ pour $n \geqslant 0$. Toujours pour $n \geqslant 0$, désignons par A_n le quotient de l'anneau de polynômes $A[U, X_n]$ par l'idéal principal $(X_n^2 + s_n^2 U)$, par u et x_n les images de U et X_n dans A_n et par φ_n le A-homomorphisme de A_n dans A_{n+1} tel que $\varphi_n(u) = u$ et $\varphi_n(x_n) = t_{n+1} x_{n+1}$, φ_n étant bien défini grâce à la relation $s_n = s_{n+1} t_{n+1}$. On obtient ainsi un système inductif (A_n, φ_n) de A-algèbres dont on désigne par A' la limite. On désigne par ψ_n l'homomorphisme canonique de A_n dans A' et par f celui de A dans A'. Chacun des A_n étant libre sur A, A' est plat sur A. Soient k le corps résiduel de A et K son corps des fractions. On a $A_n \otimes_A k \cong \dfrac{k[U, X_n]}{(X_n^2)}$ et $\varphi'_n = \varphi_n \otimes 1_k$ est telle que $\varphi'_n(u) = u$, $\varphi'_n(x_n) = 0$; on en déduit que $A' \otimes_A k = \varinjlim (A_n \otimes_A k) \cong k[U]$. D'autre part on a

$A_n \otimes_A K \cong K[X_n]$ car s_n est inversible dans K et si $\varphi'' = \varphi_n \otimes 1_k$ on a alors $\varphi''_n(X_n) = t_{n+1} X_{n+1}$; les φ''_n sont donc des isomorphismes et on en déduit que $\varinjlim (A_n \otimes_A K) = A' \otimes_A K$ est isomorphe à un anneau de polynomes à une indéterminée sur K, ainsi f est normal. Désignons encore par u et x_n les images de u et x_n dans A' par ψ_n . Comme dans A' on a $\psi_o(x_o)^2 = s_o^2$ u, on voit que l'élément $\dfrac{\psi_o(x_o)}{s_o}$ de $A' \otimes_A K = A'_K$ est entier sur A'. Montrons cependant que $\dfrac{\psi_o(x_o)}{s_o} \notin A'$: sinon il existerait un entier n et P, $Q \in A[U,X_n]$ tels que $x'_o = s_o P + (X_n^2 + s_n^2 U)Q$, où x'_o désigne l'image dans $A[U,X_n]$ de $X_o \in A[U,X_o]$ par les morphjsmes φ_n , or on trouve facilement que $x'_o = t_1 \dots t_n X_n$ et on aurait ainsi l'égalité $t_1 \dots t_n X_n = s_o P + (X_n^2 + s_n^2 U)Q$ dans $A[U,X_n]$ d'où on déduit par comparaison des termes en X_n que $t_1 \dots t_n = \lambda s_o$ pour un $\lambda \in A$, or $s_o = t_1 \dots t_n s_n$, ainsi $s_o = \lambda s_o s_n$ et $1 = \lambda s_n$ ce qui signifierait que s_n est inversible dans A, ce qui n'est pas le cas.

Remarque (3.3.2). Le morphisme f vérifie des hypothèses plus fortes que celle d'être normal : on a vu dans la démonstration ci-dessus que si B est une A-algèbre qui est un corps, alors $B \otimes_A A'$ est un anneau de polynomes à une indéterminé sur B ; on en déduit que si B est intègre, $B \otimes_A A'$ l'est aussi.

PROPOSITION (3.3.3). *Il existe un morphisme normal* $f : A \to A''$ *avec* A *de valuation de hauteur* 1, A'' *et* f *locaux et* Min A'' *infini.*

Démonstration. Reprenons l'anneau de valuation A, que nous supposerons de plus de caractéristique différente de 2, la suite $(s_n)_{n \geq 0}$ et la suite $(t_n)_{n \geq 1}$ introduits dans la démonstration de la proposition (3.3.1).

Soient $(X_{n,m})_{\substack{n \geq 0 \\ m \geq 1}}$ et $(T_m)_{m \geq 1}$ des indéterminées et désignons par A_n l'anneau $A[X_{n,1}, \dots, X_{n,m}, \dots ; T_1, T_1^{-1}, \dots, T_m, T_m^{-1}, \dots]$, par I_n l'idéal de A_n engendré par les $(X_{n,m}^2 - s_n^2 T_m^2)_{m \geq 1}$, par p_n l'idéal premier de A_n engendré par le radical de A et les éléments $(X_{n,m})_{m \geq 1}$ et enfin par B_n l'anneau local $(A_{n/I_n})_{p_n}$. Pour chaque n le A-homomorphisme $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$ tel que $\varphi_n(X_{n,m}) = t_{n+1} X_{n+1,m}$ et $\varphi_n(T_m) = T_m$ $(m \geq 1)$ induit un homomorphisme ψ_n de B_n dans B_{n+1} ; on obtient ainsi un système inductif de A-algèbres (B_n, ψ_n) dont on désigne par A'' la limite. A'' et le morphisme canonique $g : A \to A''$ sont locaux ; A'' est plat sur A car pour tout n A_{n/I_n} , donc B_n , l'est. Comme dans la démonstration de la proposition (3.3.1) on calcule sans mal la fibre spéciale de $g : A'' \otimes_A k$ est k-isomorphe à un localisé de $k[T_1, T_1^{-1}, \dots, T_m, T_m^{-1}, \dots]$. D'autre part $\psi_n \otimes 1_K$ est un isomorphisme pour tout n donc pour étudier $A'' \otimes_A K$, il suffit d'étudier $B_o \otimes_A K$; cet anneau est isomorphe à un localisé du quotient de $B'_o = K[X_{o,1}, \dots, X_{o,m}, \dots ; T_1, T_1^{-1}, \dots, T_m, T_m^{-1}, \dots]$ par I_o ; montrons donc que B'_{o/I_o} est normal. Or si q est un idéal premier de B'_o contenant I_o , pour tout $m \geq 1$, q contient un des deux éléments $X_{o,m} + s_o T_m$, $X_{o,m} - s_o T_m$ et un seul, puisque s_o et T_m sont inversibles dans B'_o, donc un des deux éléments ci-dessus devient inversible dans $(B'_o)_q$, par suite on voit que $(B'_{o/I_o})_q$ est un localisé de $K[T_1, T_1^{-1}, \dots, T_m, T_m^{-1}, \dots]$ (les $(X_{o,m})_{m \geq 1}$ disparaissant d'après ce qui précède), donc B'_{o/I_o} est normal. Ainsi g est bien normal. Pour étudier Min A" considérons d'abord une suite $\epsilon = (\epsilon_m)_{m \geq 1}$ où $\epsilon_m = -1$ ou $+1$. Pour tout n, l'idéal premier de A_n engendré par les $(X_{n,m} - \epsilon_m s_n T_m)_{m \geq 1}$ est minimal parmi ceux contenant I_n (car, par exemple, il ne contient pas $X_{n,m} + \epsilon_m s_n T_m$) et induit un idéal premier minimal q_n de B_n ; de plus $q_n \in \mathrm{Spec}(B_n \otimes_A K)$ et $(\psi_n \otimes 1_K)(q_n) = q_{n+1} \in \mathrm{Spec}\,(B_{n+1} \otimes_A K)$; comme $\psi_n \otimes 1_K$ est un isomorphisme, on déduit de ce qui précède que $\psi_n^{-1}(q_{n+1}) = q_n$ et que par conséquent $q = \varinjlim q_n$ est un idéal premier minimal de A" dont l'image réciproque dans B_n est exactement q_n pour $n \geq 0$. Ceci dit si ϵ et ϵ' sont deux suites distinctes, les idéaux premiers minimaux de A" correspondants sont distincts puisqu'il en est ainsi de leurs images réciproques dans B_o, donc Min A" est bien infini.

Remarque (3.3.4). Pour tout morphisme $k \to k'$ où k' est un corps, $A'' \otimes_A k'$ est un anneau intègre et intégralement clos. Soit A_o un anneau de valuation discrète de caractéristique différente de 2 ; en construisant l'anneau de valuation de hauteur 1, A, par le procédé décrit dans ([1], § 10), on en déduit un morphisme composé $A_o \to A \to A''$ local, plat, dont la fibre générique est (géométriquement) normale et la fibre spéciale géométriquement irréductible bien que Min A" soit infini.

REFERENCES

[1] N. BOURBAKI. *«Algèbre commutative»*. Chap. VI, Hermann, Paris, 1954.

[2] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNE. *«Eléments de géométrie algébrique»*. Chap. IV, première partie, Pub. Math. de l'I.H.E.S., n° 20, 1964.

[3] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNE. *«Eléments de géométrie algébrique»*. Chap. IV, deuxième partie, Pub. Math. de l'I.H.E.S., n° 24, 1965.

[4] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNE. *«Eléments de géométrie algébrique»*. Chap. IV, troisième partie, Pub. Math. de l'I.H.E.S., n° 28, 1966.

[5] M. LAZARUS. *«Fermeture intégrale et changement de base»*. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 289 (1979), p. 51-53.

[6] J.P. OLIVIER. *«Fermeture intégrale et changements de base absolument plats»*. Colloque d'Algèbre, Rennes (1972).

[7] M. RAYNAUD et L. GRUSON. *«Critères de platitude et de projectivité»*. Inventiones Math., n° 13 (1971), p. 1-89.

(Manuscrit reçu le 15 mai 1983)