ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

FRANCIS GIMBERT

Équations de Hamilton-Jacobi-bellmann avec hamiltoniens quasilinéaires

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 6, nº 3-4 (1984), p. 171-184
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1984_5_6_3-4_171_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse
Vol VI, 1984, P 171 à 184

EQUATIONS DE HAMILTON-JACOBI-BELLMANN AVEC HAMILTONIENS QUASILINEAIRES

Francis Gimbert [1]

(1) E.N.S. St Cloud, 2 avenue Pozzo di Borgo, 92210 Saint-Cloud - (France).

Résumé : Le contrôle stochastique de processus de diffusion stoppés à la sortie d'un ouvert Ω de R^n conduit à des équations de Hamilton-Jacobi-Bellmann à hamiltoniens quasilinéaires. Dans des situations où des contrôles non bornés sont admis les nonlinéarités peuvent devenir surlinéaires, ou même surquadratiques. Nous prouvons sous des hypothèses d'uniforme ellipticité sur les opérateurs, et des conditions de structure très générales sur les nonlinéarités, qu'il existe une unique solution du problème étudié dans $W^{2,\infty}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Summary : Stochastic control of diffusion processes stopped at the exit of an open set Ω of R^n leads to Hamilton-Jacobi-Bellmann equations with quasilinear operators. If we admit nonbounded controls, the nonlinearities can be superlinear or even superquadratic. We prove, assuming that the operators are uniformly elliptic and very general structure conditions about nonlinearities that there exists a unique solution of the studied problem in $W^{2,\infty}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

I. - INTRODUCTION ET NOTATIONS

1. - Introduction

Le contrôle stochastique de processus de diffusion stoppés à la sortie d'un ouvert Ω de R^n (supposé dans tout ce qui suit borné régulier) conduit aux équations suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} [-a_{ij}^k(x)u_{ij}(x) + H^k(x,u(x),Du(x)] = 0 \text{ dans } \Omega \\ u=\phi \quad \text{sur } \partial\Omega, \qquad u\in W^{2,\infty}_{loc}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}), \end{cases}$$

où les opérateurs $-a_{ij}^k\,\partial_{ij}$ sont uniformément elliptiques à coefficients réguliers, et les nonlinéarités H^k (appelées Hamiltoniens) sont données. De plus ϕ est donnée dans $C(\partial\Omega)$. On note $u_{ij} = \partial_{ij}\,u$. Bien sûr si m = 1, on retrouve l'équation elliptique quasilinéaire :

$$(2)\quad \begin{cases} -a_{ij}(x)u_{ij}(x) + H(x,u(x),Du(x)) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u=\phi \quad \text{sur } \partial\Omega, \qquad u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}). \end{cases}$$

Dans ce cas particulier, ce type de problème a été étudié par de nombreux auteurs, citon 0. Ladyzenskaya et N.N. Uraltseva [4] , D. Gilbarg et N. Trudinger [3] , J. Serrin [9] , P.L. Lions [6] . Il est classiquement résolu par l'obtention d'estimées $W^{1,\infty}(\Omega)$ basées sur des idées de Bernstein.

Toutefois de telles estimées ne conviennent pas pour le problème (2) et a fortiori pour le problème (1) dans le cas où ϕ est seulement continue sur $\partial\Omega$: il nous faut alors obtenir des estimées locales sur Du. Dans ce qui suit, en vue de la résolution de (1), nous obtenons des résultats généraux portant :

1) sur l'obtention d'estimées locales de Du où u est solution de (2),

2) sur l'existence de solutions de (2).

En combinant alors ces résultats avec les méthodes d'estimation a priori introduites dans le cadre des équations de Hamilton-Jacobi-Bellmann par P.L. Lions [7] et L.C. Evans et P.L. Lions [2] (voir aussi S. Lenhart [5]), nous en déduisons des résultats d'existence de solutions de (1). A titre d'exemple, signalons le résultat suivant démontré ci-dessous s'il existe $\underline{u}$ vérifiant :

$$(3)\quad \begin{cases} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} [-a_{ij}^k\,\underline{u}_{ij} - f^k + |\nabla\underline{u}|^p\,] \leqslant 0 \text{ dans } \Omega \\ \underline{u}=\phi \quad \text{sur } \partial\Omega, \qquad \underline{u}\in W^{2,\infty}_{loc}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}) \end{cases}$$

où $1 < p < +\infty$ et $f^k \in W^{2,\infty}(\Omega)$, alors il existe une unique solution u de :

$$(4)\quad \begin{cases} \max\,[-a_{ij}^k\,u_{ij} - f^k + |\nabla u|^p\,] = 0 \text{ dans } \Omega \\ u=\phi \quad \text{sur } \partial\Omega, \qquad u\in W^{2,\infty}_{loc}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}) \end{cases}$$

Mentionnons également que le problème où les H^k sont linéaires (le cas des équations de Hamilton-Jacobi-Bellmann «standard») a été résolu par P.L. Lions [7] [8] , L.C. Evans et P.L. Lions [1] . Enfin des problèmes de type (1) sont considérés dans N.S. Trudinger [10] en supposant que les non-linéarités H^k satisfont les conditions dites naturelles (i.e. $p \leqslant 2$ dans l'exemple ci-dessus).

Ainsi que nous le verrons plus loin, l'obtention d'estimées locales pour les solutions de (2) joue un rôle fondamental dans cette étude, et pour ce faire nous avons adapté les méthodes d'obtention d'estimées globales de P.L. Lions [6] et J. Serrin [9] .

2. - Notations et hypothèses

Dans tout ce qui suit, on suppose que l'opérateur $-a_{ij}\partial_{ij}$ du problème (2) ainsi que les opérateurs $-a^k_{ij}\partial_{ij}$ du problème (1) vérifient les hypothèses suivantes :

$$\exists \nu,\mu > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \forall \xi \in \mathrm{IR}^n, \quad \nu\, |\xi|^2 \leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\, |\xi|^2,$$

$$\exists c > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \forall \alpha \quad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant 2, \quad |D^\alpha a_{ij}(x)| \leqslant c.$$

On suppose par ailleurs que l'hamiltonien H est localement lipschitzien sur $\Omega \times \mathrm{IR} \times \mathrm{IR}^n$ et qu'il vérifie, uniformément pour t borné, $x \in \overline{\Omega}$:

$$(5) \qquad \frac{\partial H}{\partial t}(x,t,p) \geqslant 0,$$

$$(6) \qquad \exists \epsilon > 0, \quad \varliminf_{|p| \to +\infty} \frac{1}{\epsilon}\, |p|^4 + |p|^2 (H_p \,.\, p - H) > 0,$$

$$(7) \quad \exists k \in\,]0,1[\,, \quad \varliminf_{|p| \to +\infty} \left[\frac{1}{\epsilon}\, |p|^4 + |p|^2 (H_p \,.\, p - H)\right]^{-1} \left[H_t\, |p|^2 + H_x \,.\, p + \frac{k\nu H^2}{2n\mu^2}\right] \geqslant 0,$$

$$(8) \qquad \exists \rho > 0, \quad (\,|H_p|\,|p|^2)^{1+\rho} \leqslant C\, \left|\frac{1}{\epsilon}|p|^4 + |p|^2 (H_p \,.\, p - H)\right| + CH^2 + C.$$

On suppose également que $H^k \in W^{2,\infty}_{loc}(\Omega \times \mathrm{IR} \times \mathrm{IR}^n)$ vérifie :

$$(9) \qquad \exists \gamma > 0, \frac{\partial H^k}{\partial t}(x,t,p) \geqslant \gamma,$$

$$(10) \qquad \exists \epsilon > 0, \quad \forall (\theta_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}, \ \theta_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^m \theta_i = 1,$$

$$\varliminf_{|p| \to +\infty} \frac{1}{\epsilon}\, |p|^4 + |p|^2 \theta_i (H^i_p \,.\, p - H^i) > 0,$$

(11) $$\exists\, k \in]0,1[\,,\ \forall\, (\theta_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}\,,\ \theta_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1,$$

$$\lim_{|p| \to +\infty} \left[\frac{1}{\epsilon}\ |p|^4 + |p|^2\, \theta_i (H^i_p \cdot p - H^i)\right]^{-1} \left[\theta_i H^i_x \cdot p + \theta_i H^i_t\, |p|^2 + \frac{k\nu}{2n\mu^2}\left(\sum_{i=1}^{m} \theta_i H^i\right)^2\right] \geqslant 0,$$

(12) $$\exists\, \rho > 0,\ \forall\, (\theta_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}\,,\ \theta_i \geqslant 0,\ \Sigma\, \theta_i = 1,$$

$$(\,|\theta_i H^i_p|\, |p|^2)^{1+\rho} \leqslant C\, |\frac{1}{\epsilon} |p|^4 + |p|^2\, \theta_i (H^i_p \cdot p - H^i)| + C(\Sigma\, \theta_i H^i)^2 + C.$$

On suppose l'existence de $\bar{u}$ (resp. $\underline{u}$) $\in W^{2,\infty}_{loc}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ sur-solution (resp. sous-solution) du problème (2) vérifiant

(13) $$-\, a_{ij} \bar{u}_{ij} + H(x,\bar{u},D\bar{u}) \geqslant 0 \quad (\text{resp.} \leqslant 0) \text{ dans } \Omega,$$

$$\bar{u} = \underline{u} = \phi \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

On suppose enfin l'existence de $\bar{v}$ (resp. $\underline{v}$) $\in W^{2,\infty}_{loc}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ sur-solution (resp. sous-solution) du problème (1) vérifiant :

(14) $$\max_k \ [-\, a^k_{ij} \bar{v}_{ij} + H^k(x,\bar{v},D\bar{v})] \geqslant 0 \quad (\text{resp.} \leqslant 0) \text{ dans } \Omega,$$

$$\bar{v} = \underline{v} = \phi \text{ sur } \partial\Omega.$$

Pour toute fonction f(x,t,p) on note :

$$f_x = D_x f,\ f_t = D_t f,\ f_p = D_p f,\ f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

II. - RESOLUTION ET ESTIMEES LOCALES DES SOLUTIONS DU PROBLEME QUASILINEAIRE

1. - Principaux résultats

Dans cette partie on résout le problème (2). Pour cela on va tout d'abor obtenir des estimations locales sur Du où u est solution de (2). On a :

THEOREME 1. *On fait les hypothèses (5)-(6)-(7)-(8). Soit* u *solution de (2), alors pour tout ouvert*

Ω' strictement inclus dans Ω, on a :

$$\| u \|_{W^{1,\infty}(\Omega')} \leqslant C,$$

(où C *ne dépend que de* $d(\Omega',\partial\Omega)$, a_{ij} *, des constantes intervenant dans les hypothèses et de* $\| u \|_{L^\infty(\Omega)}$*).*

Dans un deuxième temps, en supposant l'existence d'une sur-solution et d'une sous-solution de (2), et en utilisant le théorème 1, on prouve l'existence de u solution de (2) :

THEOREME 2. *Sous les hypothèses (5)-(6)-(7)-(8) le problème (2) a une unique solution dans* $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

2. - Obtention des estimées locales

On cherche ici des estimées locales sur Du, et pour cela on choisit Ω' strictement inclus dans Ω, et on considère la fonction :

$$w = \xi^2(1+\lambda e^{(c-u)^2}) \,|\, Du \,|^2,$$

où $\xi \in \mathscr{D}(\Omega')$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $| D\xi | \leqslant C_0 \xi^\theta$, $| D^2\xi | \leqslant C_0 \xi^{\theta'}$, $0 < \theta' < 1$, $2\theta = 1 + \theta'$, $\lambda > 0$ et $C > \| u \|_{L^\infty(\Omega)} + \dfrac{1}{\epsilon\nu}$. Les exposants θ et θ' seront choisis suffisamment proches de 1, et λ suffisamment petit pour obtenir l'estimation désirée.

On s'intéresse à la quantité :

$$-a_{ij}w_{ij} + H_p \,.\, Dw.$$

On a :

$$\begin{aligned} w_i = {} & 2\xi\xi_i(1+\lambda e^{(c-u)^2}) \,|\, Du \,|^2 - 2\lambda\xi^2 e^{(c-u)^2} (c-u)u_i \,|\, Du \,|^2 \\ & + 2\xi^2(1+\lambda e^{(c-u)^2})\, u_k u_{ki} \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{ij} = {} & 2(\xi\xi_{ij}+\xi_i\xi_j)(1+\lambda e^{(c-u)^2}) \,|\, Du \,|^2 - 4\lambda\xi(c-u) \,|\, Du \,|^2\, c^{(c-u)^2} (\xi_i u_j + \xi_j u_i) \\ & - 2\lambda\xi^2(c-u)u_{ij} \,|\, Du \,|^2\, e^{(c-u)^2} - 4\lambda\xi^2(c-u)e^{(c-u)^2}\, u_k(u_i u_{kj} + u_j u_{ki}) \\ & + 4\xi(1+\lambda e^{(c-u)^2})\, u_k(\xi_i u_{kj} + \xi_j u_{ki}) + 2\lambda\xi^2(1+2(c-u)^2) \,|\, Du \,|^2\, u_i u_j e^{(c-u)^2} \\ & + 2\xi^2(1+\lambda e^{(c-u)^2})(u_{ki}u_{kj} + u_k u_{kij}). \end{aligned}$$

De ce qui précède on déduit :

$$-a_{ij}w_{ij} \leqslant c_1\xi^{2\theta}(1+\lambda e^{(c-u)^2})\,|Du|^2 + 8\lambda\xi(c-u)\,|Du|^2\,e^{(c-u)^2}\,a_{ij}\xi_j u_i$$
$$-2\lambda\nu\xi^2(1+2(c-u)^2)\,|Du|^4\,e^{(c-u)^2} + 2\lambda\xi^2(c-u)\,|Du|^2\,e^{(c-u)^2}\,H$$
$$-2\nu\xi^2(1+\lambda e^{(c-u)^2})\,|D^2u|^2 - 2\xi^2(1+\lambda e^{(c-u)^2})\,u_k a_{ij}u_{kij}$$
$$-\frac{4a_{ij}\xi_j}{\xi}\left[w_i - 2\xi\xi_i(1+\lambda e^{(c-u)^2})\,|Du|^2 + 2\lambda\xi^2(c-u)u_i e^{(c-u)^2}\,|Du|^2\right]$$
$$+\frac{4\lambda(c-u)e^{(c-u)^2}}{1+\lambda e^{(c-u)^2}}\,a_{ij}u_j\left[w_i - 2\xi\xi_i(1+\lambda e^{(c-u)^2})\,|Du|^2 + 2\lambda\xi^2(c-u)u_i e^{(c-u)^2}\,|Du|\right]$$

où c_1 ne dépend que de $\| a_{ij} \|_{L^\infty(\Omega)}$ et c_o.

En un point x_o où w atteint son maximum, l'inégalité qui précède peut s'écrire :

$$0 \leqslant -a_{ij}w_{ij} \leqslant -2\lambda\nu\xi^2(1+2(c-u)^2)\,|Du|^4 - 2\nu\xi^2(1+\lambda e^{(c-u)^2})\,|D^2u|^2$$
$$+c_2\xi^{2\theta}(1+\lambda e^{(c-u)^2})\,|Du|^2 + \lambda c_2(c-u)e^{(c-u)^2}\,\xi^{1+\theta}\,|Du|^3$$
$$+\frac{8\lambda^2\xi^2(c-u)^2e^{2(c-u)^2}\,\mu\,|Du|^4}{1+\lambda e^{(c-u)^2}} + 2\lambda\xi^2(c-u)\,|Du|^2\,e^{(c-u)^2}\,H$$
$$-2\xi^2(1+\lambda e^{(c-u)^2})\,u_k(-a_{ij,k}u_{ij}+H_k+H_t u_k+h_p.D_{u_k}),$$

où c_2 ne dépend que de $\| a_{ij} \|_{L^\infty(\Omega)}$ et c_o.

On a par ailleurs, toujours en x_o :

$$0 = H_p\,.\,Dw = 2\xi\,H_p\,.\,D\xi(1+\lambda e^{(c-u)^2})\,|Du|^2$$
$$-2\lambda\xi^2(c-u)H_p\,.\,Du\;e^{(c-u)^2}\,|Du|^2$$
$$+2\xi^2(1+\lambda e^{(c-u)^2})\,u_k H_p\,.\,Du_k\,.$$

Ces deux dernières inégalités nous donnent en x_o :

$$0 \leqslant \left[-2\lambda\nu(1+2(c-u)^2)e^{(c-u)^2} + \frac{8\lambda^2\mu(c-u)^2e^{2(c-u)^2}}{1+\lambda e^{(c-u)^2}}\right]\xi^2\,|Du|^4$$

$$+ c_2(1+\lambda e^{(c-u)^2})\xi^{2\theta} \,|Du|^2 + \lambda c_2(c-u)e^{(c-u)^2}\,\xi^{1+\theta}\,|Du|^3$$

$$-2\nu\xi^2(1+\lambda e^{(c-u)^2})\,|D^2u|^2 + 2\lambda\xi^2(c-u)e^{(c-u)^2}\,|Du|^2\,(H-H_p.Du)$$

$$-2\xi^2(1+\lambda e^{(c-u)^2})u_k(-a_{ij,k}u_{ij}+H_k+H_tu_k) + 2c_o\xi^{1+\theta}(1+\lambda e^{(c-u)^2})|H_p\|Du|^2.$$

Ceci peut encore s'écrire :

$$0 \leqslant \left[-2\lambda\nu(1+2(c-u)^2)e^{(c-u)^2} + \frac{8\lambda^2\mu(c-u)^2e^{2(c-u)^2}}{1+\lambda e^{(c-u)^2}} + \delta\right]\xi^2\,|Du|^4 + c_3$$

$$+2\xi^2\,|D^2u|^2\,(1+\lambda e^{(c-u)^2})(-\nu+\eta) - 2\lambda\xi^2(c-u)e^{(c-u)^2}\,|Du|^2(H_p.Du-H)$$

$$-2\xi^2(1+\lambda e^{(c-u)^2})(H_x.Du+H_t\,|Du|^2) + 2c_o\xi^{1+\theta}(1+\lambda e^{(c-u)^2})\,|H_p|\,|Du|^2,$$

où c_3 dépend de $\|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$, c_o, c, $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$, λ,η' et δ.

On choisit successivement $\eta < \dfrac{\nu}{2}$,

$$\lambda \text{ tel que } \frac{4\lambda(c-u)^2e^{(c-u)^2}}{1+\lambda e^{(c-u)^2}} < \nu\,\frac{1+2(c-u)^2}{4}$$

$$\text{et } \delta < \lambda\nu\,\frac{1+2(c-u)^2}{2}\,e^{(c-u)^2}.$$

Et il vient alors :

$$0 \leqslant -\lambda\nu(1+2(c-u)^2)e^{(c-u)^2}\xi^2\,|Du|^4 - \nu(1-k)\xi^2\,|D^2u|^2\,(1+\lambda e^{(c-u)^2}) + c_3$$

$$-2\lambda\xi^2(c-u)e^{(c-u)^2}\,|Du|^2\,(H_p.Du-H)$$

$$-2\xi^2(1+\lambda e^{(c-u)^2})\left[H_x.Du+H_t\,|Du|^2 + \frac{k\nu}{2n\mu^2}\,H^2\right]$$

$$+2c_o(1+\lambda e^{(c-u)^2})\xi^{1+\theta}\,|H_p|\,|Du|^2.$$

Dès que $\theta \geqslant \dfrac{1-2\rho}{1+\rho}$, on a d'après (8) :

$$\xi^{1+\theta}\,|H_p|\,|Du|^2 \leqslant K\,\xi^{\frac{2}{1+\rho}}\left[\,\Big|\frac{1}{\epsilon}\,|Du|^4 + |Du|^2\,(H_p.Du-H)\Big|^{\frac{1}{1+\rho}} + |H|^{\frac{2}{1+\rho}} + 1\right].$$

Donc on a :

$$0 \leqslant -\lambda e^{(c-u)^2}\left[\nu(1+2(c-u)^2)-2\frac{c-u}{\epsilon}\right]\xi^2\,|Du|^4-\frac{\nu(1-k)}{n\mu^2}\xi^2(1+\lambda e^{(c-u)^2})H^2+c_4$$

$$-2\xi^2\left[\frac{1}{\epsilon}\,|Du|^4+|Du|^2\,(H_p.Du-H)\right]\Big[\lambda(c-u)e^{(c-u)^2}$$

$$+(1+\lambda e^{(c-u)^2})\,(\frac{1}{\epsilon}|Du|^4+|Du|^2\,(H_p.Du-H))^{-1}(H_x.Du+H_t\,|Du|^2+\frac{k\nu}{n\,\mu^2}H^2)\Big]$$

$$+2c_o\,K(1+\lambda e^{(c-u)^2})\xi^{2/1+\rho}\left[|\frac{1}{\epsilon}|Du|^4+|Du|^2\,(H_p.Du-H)|^{\frac{1}{1+\rho}}+|H|^{2/1+\rho}\right]$$

On remarque que $\nu(1+2(c-u)^2)-\dfrac{2c-u}{\epsilon}>\nu$, et on a

$$\xi^2(x_o)\,|Du(x_o)|^4 \leqslant c_5\,,$$

où c_5 dépend de $\| a_{ij} \|_{W^{1,\infty}}$, c_o, c, $\| u \|_{L^\infty}$, ρ et des constantes intervenant dans les hypothèses.

Donc on a :

$$w \leqslant w(x_o) \leqslant (1+e^{(c-u(x_o))^2})\sqrt{c_5}\,,$$

et on conclut.

3. - Existence d'une solution du problème quasilinéaire

Pour démontrer ce résultat, on introduit le problème approché suivant :

$$-a_{ij}(x)u_{ij}^{\epsilon\lambda}(x)+H_\lambda(x,u^{\epsilon\lambda}(x),Du^{\epsilon\lambda}(x)) \text{ dans } \Omega_\epsilon\,,$$

(15)

$$u^{\epsilon\lambda}=\underline{u} \text{ sur } \partial\Omega_\epsilon\,,$$

où $\Omega_\epsilon=\{x\in\Omega \mid d(x,\partial\Omega)>\epsilon\}$,

et $H_\lambda(x,t,p)=\sup\left[\inf(H(x,t,p),c+\lambda\,|p|^{3/2}),-c-\lambda\,|p|^{3/2}\right]$,

avec $c>\max\left[\| H(x,\bar{u}(x),0) \|_{L^\infty(\Omega)}, \| H(x,\underline{u}(x),0 \|_{L^\infty(\Omega)}\right]$,

et ϵ étant choisi suffisamment petit pour que Ω_ϵ soit un ouvert régulier.

On remarque que H_λ vérifie les hypothèses (5)-(6)-(7)-(8) uniformément pour $\lambda \geqslant 1$. De plus H_λ est sous-quadratique, et pour $\lambda \geqslant \lambda(\epsilon)$, $\bar{u}$ et $\underline{u}$ sont respectivement sur-solution et sous-solution du problème (15). On sait alors (cf. par exemple Gilbarg-Trudinger [3]) que le problème (15) a une solution $u^{\epsilon\lambda} \in C^2(\bar{\Omega}_\epsilon)$.

D'après le théorème 1, pour tout $\delta > 0$, il existe une constante c indépendante de ϵ et λ telle que si $\epsilon \leqslant \epsilon_0(\delta)$, alors :

$$\| u^{\epsilon\lambda} \|_{W^{1,\infty}(\Omega_\delta)} \leqslant c.$$

De cette majoration et de la définition de H_λ, on déduit pour $\lambda \geqslant \lambda_0(\epsilon)$ et $\epsilon \leqslant \epsilon_0(\delta)$:

$$H_\lambda(x,u^{\epsilon\lambda}(x),Du^{\epsilon\lambda}(x)) = H(x,u^{\epsilon\lambda}(x),Du^{\epsilon\lambda}(x)) \text{ dans } \Omega_\delta \text{ , et il vient :}$$

$$-a_{ij}(x)u_{ij}^{\epsilon\lambda}(x) + H(x,u^{\epsilon\lambda}(x),Du^{\epsilon\lambda}(x)) = 0 \text{ dans } \Omega_\delta .$$

On sait que $u^{\epsilon\lambda}$ est borné dans $W^{1,\infty}(\Omega_\delta)$ indépendamment de $\epsilon \leqslant \epsilon_0(\delta)$, $\lambda \geqslant \lambda_0(\epsilon)$, donc $H(x,u^{\epsilon\lambda},Du^{\epsilon\lambda})$ est borné dans $L^\infty(\Omega_\delta)$, $L^p(\Omega_\delta)$, $1 < p < +\infty$, et $L^p_{loc}(\Omega_\delta)$ indépendamment de $\epsilon \leqslant \epsilon_0(\delta)$, $\lambda \geqslant \lambda_0(\epsilon)$. Alors $u^{\epsilon\lambda}$ est borné dans $W^{2,p}_{loc}(\Omega_\delta)$ $1 < p < +\infty$, et $C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega_\delta)$, $\alpha \in [0,1[$, indépendamment de $\epsilon \leqslant \epsilon_0(\delta)$, $\lambda \geqslant \lambda_0(\epsilon)$. Et $H(x,u^{\epsilon\lambda},Du^{\epsilon\lambda})$ est borné dans $C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega_\delta)$, $\alpha \in [0,1]$ indépendamment de $\epsilon \leqslant \epsilon_0(\delta)$ et $\lambda \geqslant \lambda_0(\epsilon)$. Donc $u^{\epsilon\lambda}$ est borné dans $C^{2,\alpha}_{loc}(\Omega_\delta)$ indépendamment de $\epsilon \leqslant \epsilon_0(\delta)$, et $\lambda \geqslant \lambda_0(\epsilon)$.

D'après ce qui précède, quitte à extraire une sous-suite (ϵ_n,λ_n), $u^{\epsilon\lambda}$ converge vers u dans $C^2_{loc}(\Omega)$, et on a sur Ω_δ , pour tout δ :

$$-a_{ij}u_{ij} + H(x,u,Du) = 0.$$

Il reste à montrer que $u \in C(\bar{\Omega})$.

Soit $x \in \partial\Omega$, soit $y \in \Omega$, on a :

$$\bar{u}(y) - \bar{u}(x) \geqslant u(y) - \phi(x) \geqslant \underline{u}(y) - \underline{u}(x).$$

Soit $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|y-x| < \delta$, alors on a :

$$\max [\, |\bar{u}(y)-\bar{u}(x)| , \, |\underline{u}(y)-\underline{u}(x)| \,] < \epsilon,$$

et il vient :

$$|u(y) - \phi(x)| < \epsilon,$$

donc u se prolonge par continuité à $\overline{\Omega}$ et $u = \phi$ sur $\partial\Omega$, et u est solution du problème (2).

II. - EQUATIONS DE HAMILTON-JACOBI-BELLMANN AVEC HAMILTONIENS QUASI-LINEAIRES

1. - Résultat

Dans cette deuxième partie on résout le problème (1) et on démontre :

THEOREME 3. *Sous les hypothèses (9)-(10)-(11)-(12) et (14) le problème (1) a une unique solution* $u \in W^{2,\infty}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Pour démontrer ce théorème on introduit un problème approché et on obtient des estimations des solutions de ce problème approché en utilisant les résultats de N.S. Trudinger [10], ainsi que l'existence de ces solutions.

2. - Problème approché

Soit G^α une fonction C^∞ positive, croissante, convexe, définie sur IR et vérifiant $G^\alpha(t) = t$ si $t \geqslant \alpha$, $G^\alpha(t) = 0$ si $t \leqslant -\alpha$. On note $F_1^\alpha(t) = t$, $F_n^\alpha(t_1,\ldots,t_n) = t_n + G^\alpha(F_{n-1}^\alpha(t_1,\ldots,t_{n-1}) - t_n)$. On remarque que $\dfrac{\partial F_m}{\partial t_i} \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_m}{\partial t_i} = 1$.

On définit, comme dans la partie précédente un hamiltonien approché :

$$H_\alpha^k(x,t,p) = F_2^\alpha\left[-F_2^\alpha(-H^k(x,t,p), -c - \frac{1}{\alpha}|p|^{3/2}), -c - \frac{1}{\alpha}|p|^{3/2}\right]$$

où $c > \sup\left[\|H(x,\overline{v}(x),0)\|_{L^\infty(\Omega)}, \|H(x,\underline{v}(x),0)\|_{L^\infty(\Omega)}\right]$.

L'hamiltonien H^k vérifie les hypothèses (10)-(11)-(12).

On définit $F^\alpha(x,t,p,r) = F_m^\alpha(\ldots, -a_{ij}^k r_{ij} + H_\alpha^k(x,t,p), \ldots)$ et on considère le problème

$$(16)\quad \begin{cases} F^\alpha(x,u(x),Du(x),D^2u(x)) = 0 \text{ dans } \Omega_\epsilon, \\ u = \underline{v} \text{ sur } \partial\Omega_\epsilon,\ u \in C(\overline{\Omega}_\epsilon) \cap C^2(\Omega_\epsilon), \end{cases}$$

où $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega \mid d(x,\partial\Omega) > \epsilon\}$.

D'après N.S. Trudinger [10] , ce problème admet une unique solution u^α. De plus $u^\alpha \in C^3(\Omega_\epsilon)$.

3. - Estimées locales

On note $F = F^\alpha$, $u = u^\alpha$, $H^k = H^k_\alpha$ et on considère sur Ω' strictement inclus dans Ω_ϵ la fonction :

$$w = \xi^2(1+\lambda e^{(c-u)^2}) \mid Du \mid^2,$$

où ξ, λ et c vérifient les mêmes hypothèses que dans la partie précédente.

On étudie la quantité :

$$F_{r_{ij}} w_{ij} + F_p \,.\, Dw,$$

et on a comme précédemment en un point x_o où w atteint son maximum :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant & -2\lambda\nu(1+2(c-u)^2)e^{(c-u)^2}\xi^2 \mid Du \mid^4 - 2\nu(1+\lambda e^{(c-u)^2})\xi^2 \mid D^2u \mid^2 + c_1 \\ & -2\lambda\xi^2(c-u)e^{(c-u)^2} \mid Du \mid^2 (F_p.Du+F_{r_{ij}}u_{ij}) \\ & +2c_o(1+\lambda e^{(c-u)^2})\xi^{1+\theta} \mid F_p \mid \mid Du \mid^2 \\ & +2\xi^2(1+\lambda e^{(c-u)^2})u_\ell(F_p.Du_\ell+F_{r_{ij}}u_{\ell_{ij}}). \end{aligned}$$

En dérivant l'équation (16) on a :

$$\theta_k \left[-a^k_{ij,\ell}u_{ij} - a^k_{ij}u_{ij\ell} + H^k_\ell + H^k_t u_\ell + H^k_p \,.\, Du_\ell \right] = 0,$$

où $\theta_k = \dfrac{\partial F^\alpha}{\partial t_k}$.

On remarque que $\theta_k \geqslant 0$, $\Sigma\theta_k = 1$ et on a :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant & -\lambda\nu(1+2(c-u)^2)e^{(c-u)^2}\xi^2 \mid Du \mid^4 - \nu(1+\lambda e^{(c-u)^2})\xi^2 \mid D^2u \mid^2 + c_2 \\ & - 2\lambda\xi^2(c-u)e^{(c-u)^2} \mid Du \mid^2 (H^k_p \,.\, Du - a^k_{ij}u_{ij})\theta_k \\ & + 2c_o(1+\lambda e^{(c-u)^2})\,\xi^{1+\theta} \mid \theta_k H^k_p \mid \mid Du \mid^2 \end{aligned}$$

$$-2\xi^2(1+\lambda e^{(c-u)^2})\theta_k\left[H_x^k.Du + H_t^k\,|Du|^2\right].$$

On remarque que F_m est convexe et on a :

$$\theta_k\left[-a_{ij}^k u_{ij} + H^k(x,u,Du) - H^k(x,0,0)\right] \geqslant F(x,u,Du,D^2u) - F(x,0,0,0).$$

Donc il existe une constante c_3 telle que :

$$-\theta_k\, a_{ij}^k u_{ij} \geqslant -\theta_k H^k(x,u,Du) - c_3\,,$$

et il vient :

$$-\theta_k\left[H_p^k\,.\,Du - a_{ij}^k u_{ij}\right] \leqslant -\theta_k\left[H_p^k\,.\,Du - H^k\right] + c_3.$$

On a alors, toujours au point x_o :

$$0 \leqslant -\lambda e^{(c-u)^2}\left[\nu(1+2(c-u)^2) - \frac{2(c-u)}{\epsilon}\,\xi^2\,|Du|^4 - \nu\,\frac{1-k}{n\mu^2}(1+\lambda e^{(c-u)^2})\right]\xi^2\Big(\sum_1^m \theta_i H^i\Big)^2$$

$$-2\xi^2\left[\frac{1}{\epsilon}|Du|^4 + |Du|^2\,\theta_i(H_p^i\,.\,Du-H^i)\right]\Big[\lambda(c-u)e^{(c-u)^2}$$

$$+(1+\lambda e^{(c-u)^2})\,\Big(\frac{1}{\epsilon}|Du|^4 + |Du|^2\,\theta_i(H_p^i.Du-H^i)\Big)^{-1}(\theta_i H_x^i.Du+\theta_i H_t^i\,|Du|^2 + \frac{k\nu}{2n\mu^2}(\Sigma\theta_i H^i)^2$$

$$-2\xi^2 c_o K(1+\lambda e^{(c-u)^2})\xi^{2/1+\rho}\left[\Big|\frac{1}{\epsilon}|Du|^4 + |Du|^2\,\theta_i(H_p^i.Du-H^i)\Big|^{\frac{1}{1+\rho}} + |\Sigma\theta_i H^i|^{\frac{2}{1+\rho}}\right]$$

Et on a :

$$\| u \|_{W^{1,\infty}(\Omega')} \leqslant c.$$

4. - Résolution du problème (1)

La solution u^α du problème (16) est bornée dans $W^{1,\infty}_{loc}(\Omega_\epsilon)$. En utilisant alors les estimations $W^{2,\infty}$ de L.C. Evans-P.L. Lions [2] et leur version locale due à S. Lenhart [5], on en déduit que u^α est borné dans $W^{2,\infty}_{loc}(\Omega_\epsilon)$ donc dans $W^{2,p}_{loc}(\Omega_\epsilon)$. On a par ailleurs :

$$F^\alpha_{r_{ij}} u^\alpha_{k_{ij}} = -F^\alpha_p.Du_k - F^\alpha_t u^\alpha_k - F^\alpha_k\,,$$

où le second nombre est borné dans $L^p_{loc}(\Omega_\epsilon)$. Donc u^α est borné dans $W^{3,p}_{loc}(\Omega_\epsilon)$ et dans $C^{2,\theta}_{loc}(\Omega_\epsilon)$ pour tout $\theta \in\,]0,1[$.

Et quitte à extraire une sous-suite, lorsque ϵ et α tendent vers 0, u^α tend vers u dans $C^2_{loc}(\Omega)$ et on a :

$$\max_k \; [-a^k_{ij}u_{ij} + H^k.(x,u,Du)] = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Il reste à montrer que $u \in C(\overline{\Omega})$. Il existe $\epsilon_o(\delta)$ et $\alpha_o(\epsilon)$ tel que si $\epsilon \leqslant \epsilon_o(\delta)$ et $\alpha \leqslant \alpha_o(\epsilon)$, alors dans Ω_δ on a $H^k_\alpha(x,u^\alpha,Du^\alpha) = H^k(x,u^\alpha,Du^\alpha)$, et $H^k_\alpha(x,\underline{v},D\underline{v}) = H^k(x,\underline{v},D\underline{v})$. Et pour $\epsilon \leqslant \epsilon_o(\delta)$, $\alpha \leqslant \alpha_o(\epsilon)$, on a dans Ω_δ $F^\alpha(x,\underline{v},D\underline{v},D^2\underline{v}) \leqslant F^\alpha_m(0)$, et il vient :

$$\underline{v} - u^\alpha \leqslant \frac{F_m(0)}{\gamma} \text{ dans } \Omega_\delta .$$

De la même façon on a pour $\epsilon \leqslant \epsilon_o(\delta)$ et $\alpha \leqslant \alpha_o(\epsilon)$ on a

$H^k_\alpha(x,\overline{v},D\overline{v}) = H^k(x,\overline{v},D\overline{v})$ dans Ω_δ et $F^\alpha(x,\overline{v},D\overline{v},D^2\overline{v}) \geqslant 0$ dans Ω_δ , $\overline{v} \geqslant \underline{v}$

sur $\partial\Omega_\delta$.

Donc on a dans Ω_δ :

$$\underline{v} - \frac{F^\alpha_m(0)}{\gamma} \leqslant u^\alpha \leqslant \overline{v},$$

et en faisant tendre ϵ et α vers 0 :

$$\underline{v} \leqslant u \leqslant \overline{v} \text{ dans } \Omega_\delta .$$

Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$, on a dans Ω :

$$\underline{v} \leqslant u \leqslant \overline{v}.$$

Soient $x \in \partial\Omega$, $y \in \Omega$, on a

$$\overline{v}(y) - \overline{v}(x) \geqslant u(y) - \phi(x) \geqslant \underline{v}(y) - \underline{v}(x),$$

et u se prolonge par continuité à Ω, $u = \phi$ sur $\partial\Omega$, et u est solution du problème (1).

REFERENCES

[1] L. C. EVANS - P.L. LIONS. *«Résolution des équations de Hamilton-Jacobi-Bellmann».* C.R.A.S. Paris 290 (1980), 1049-1052.

[2] L.C. EVANS - P.L. LIONS. *«Second derivative estimates for the Bellman equation».*

[3] D. GILBARG - N.S. TRUDINGER. *«Elliptic partial differential equations of second order».* Springer Verlag, New-York, 1977.

[4] O.A. LADYZENSKAYA - N.N. URALTSEVA. *«Linear and quasilinear elliptic equations».*

[5] S. LENHART. *«Partial differential equations from dynamic programming equations».* Ph. D., University of Kentucky-Lexington, 1981.

[6] P.L. LIONS. *«Résolution de problèmes elliptiques quasilinéaires».* Arch. Rat. Mech. Anal., 74 (1980), 335-354.

[7] P.L. LIONS. *«Résolution des problèmes de Bellmann-Dirichlet».*

[8] P.L. LIONS. *«Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellmann equations».* Part III : Regularity of the optimal cost function.

[9] J. SERRIN. *«The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables».* Phil. Trans. Roy. Soc. London, A264, 413-469, 1969.

[10] N.S. TRUDINGER. *«Fully nonlinear, uniformly elliptic equations under natural structure conditions».* Trans. Amer. Math. Soc.

(Manuscrit reçu le 27 novembre 1983)