ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

AMINA CHABI
ALAIN HARAUX

Un théorème de valeurs intermédiaires dans les espaces de Sobolev et applications

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 7, nº 2 (1985), p. 87-100
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1985_5_7_2_87_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol VII, 1985, P 87 à 100

UN THEOREME DE VALEURS INTERMEDIAIRES DANS LES ESPACES DE SOBOLEV ET APPLICATIONS

Amina Chabi (1) **et Alain Haraux** (2)

(1)(2) Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire d'Analyse Numérique (LA 189), Tour 55-65, 5ème étage, 4 place Jussieu, 75230 Paris Cédex 05 - France.

Résumé : Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $u \in W^{1,1}(\Omega)$: on établit que l'image $u(\Omega)$ ne peut pas avoir de «trous» d'intérieur non vide. On en déduit les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions multiples pour des problèmes elliptiques semi-linéaires de type monotone avec conditions aux limites de Neumann, ainsi que des résultats du même type pour les solutions périodiques en t des problèmes paraboliques correspondants.

Summary : Let Ω be a connected open subset of $\mathbb{R}^n$ and $u \in W^{1,1}(\Omega)$: we establish that $u(\Omega)$ does not have any open «hole». We deduce from this result the necessay and sufficient conditions for some elliptic semi-linear problems of monotone type with Neumann boundary conditions to have plural solutions. Analogous result are obtained for time-periodic solutions of corresponding parabolic problems.

0. - INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soit n un entier $\geqslant 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout réel $p \geqslant 1$, on désignera par $W^{1,p}(\Omega)$ l'espace des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles que

$$\forall\, j \in \{1,2,...,n\}\,,\ \ \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega).$$

Si $n = 1$, il est bien connu (cf. par exemple [1]) que toute fonction de $W^{1,p}(\Omega)$ est égale presque partout à une fonction continue sur $\overline{\Omega}$. Si $n > 1$, ce résultat ne subsiste que si $p > n$. Plus précisément, lorsque $p \leqslant n$, $W^{1,p}(\Omega)$ contient des fonctions *essentiellement non bornées,* même lorsque Ω est une boule.

Dans ce travail, nous généralisons pour les fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ le théorème bien connu des «valeurs intermédiaires» pour les fonctions continues sur un espace topologique connexe et à valeurs réelles : même lorsque $p < n$, on va voir que si Ω est connexe et $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $u(\Omega)$ ne peut pas avoir de «trous» d'intérieur non vide, en un sens qui sera précisé.

Cette propriété, qui traduit une différence fondamentale entre les fonctions de $L^{\infty}(\Omega)$ et les éléments de $W^{1,1}(\Omega)$, sera utilisée pour étudier *l'unicité* des solutions des problèmes aux limites suivantes :

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \beta(u) \ni f(x) \quad \text{p.p. sur } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad\qquad \text{p.p. sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \beta(u) \ni f(t,x) \quad \text{p.p. sur }]0,T[\times \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur }]0,T[\times \Omega \\ u(0,x) = u(T,x) \quad \text{p.p. sur } \Omega \end{cases}$$

où β est un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$.

1. - RESULTATS GENERAUX

Notons d'abord que pour toute partie mesurable A de $\mathbb{R}$, et toute fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, l'ensemble $u^{-1}(A) = \{x \in \Omega,\ u(x) \in A\}$ a une mesure indépendante du représentant choisi pour définir u, puisque deux tels représentants coïncident presque partout.

On peut alors énoncer le résultat suivant :

THEOREME 1. *Supposons* Ω *connexe et soit* $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Alors pour tous* a,b *réels tels que* $a < b$, *les conditions*

$$(3) \qquad \text{mes}\{x \in \Omega,\ u(x) \leqslant a\} > 0$$

(4) $$\operatorname{mes}\{x \in \Omega,\ u(x) \geqslant b\} > 0$$

entraînent

(5) $$\operatorname{mes}\{x \in \Omega,\ a \leqslant u(x) \leqslant b\} > 0$$

Démonstration. Il est immédiat de se ramener au cas où Ω *est borné,* ce que nous supposerons dès maintenant.

Posons

$$A = \{x \in \Omega,\ u(x) \leqslant a\}$$

$$B = \{x \in \Omega,\ u(x) \geqslant b\}.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant mes $(A) > 0$, mes$(B) > 0$ et mes $(\Omega \setminus (A \cup B)) = 0$. Posons

$$w(x) = \operatorname{Sup}\{a, \operatorname{Inf}\{b, u(x)\}\} \quad \text{p.p. sur } \Omega.$$

Alors $w \in W^{1,p}(\Omega)$ et il est clair que

(6) $$w(x) = \begin{cases} a & \text{p.p. sur } A \\ b & \text{p.p. sur } B \end{cases}$$

On a donc $$\nabla w = 0 \quad \text{p.p. sur } A \cup B,$$
d'où
(7) $$\nabla w = 0 \quad \text{p.p. sur } \Omega.$$

Puisque Ω est connexe, on en déduit immédiatement

(8) $$\exists\, c \in \mathbb{R},\ w(x) = c \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

Enfin comme $a < b$, les formules (6) et (8) sont incompatibles car mes$(A) > 0$ et mes$(B) > 0$. Cette contradiction achève la démonstration du Théorème 1. ∎

Remarques. a) La conclusion du Théorème 1 est vérifiée pour toute fonction $u \in C(\Omega)$: en ce sens le Théorème 1 étend à des éléments discontinus de $W^{1,p}(\Omega)$ le classique «théorème des valeurs intermédiaires».

b) Il résulte en fait du Théorème 1 que pour tous α, β tels que $a < \alpha < \beta < b$, on a encore mes $\{x \in \Omega,\ \alpha \leqslant u(x) \leqslant \beta\} > 0$. Donc si (3) et (4) sont vérifiés, pour tout représentant

$\tilde{u}(x)$ de la classe d'équivalence de u dans $L^p(\Omega)$, on a

$$[a,b] \subset \overline{\tilde{u}(\Omega)}.$$

Le résultat suivant, que l'on pourrait aussi établir par la méthode de [2], lemma 3.5, est une conséquence immédiate du Théorème 1.

THEOREME 2. *Soit* Ω *comme ci-dessus et* β *un graphe maximal monotone dans* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Soit* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \geqslant 1$ et $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ *tels que l'on ait*

$$\beta(u(x) + c) \cap \beta(u(x)) \neq \phi \text{ p.p. } sur\ \Omega. \tag{9}$$

Alors

$$\exists\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \in \beta(u(x) + c) \cap \beta(u(x)) \quad \text{p.p. } sur\ \Omega \tag{10}$$

et on a en particulier

$$\beta(u(x) + \frac{c}{2}) = \{\lambda\} \text{ p.p. } sur\ \Omega. \tag{11}$$

Démonstration. Posons

$$m = \operatorname*{Inf\,ess}_{x\in\Omega}\ u(x) \geqslant -\infty, \quad M = \operatorname*{Sup\,ess}_{x\in\Omega}\ u(x) \leqslant +\infty.$$

Deux cas peuvent se présenter :

i) $m = M$ et ii) $m < M$.

- Dans le cas i), on a $u = m$ p.p. sur Ω et $\lambda \in \beta(m) \cap \beta(m+c)$ avec $\lambda = \beta(m + \frac{c}{2})$. Donc (10) et (11) sont bien vérifiés.

- Dans le cas ii), soit $\tilde{u}$ un représentant de u et a, b des réels tels que $m < a < b < M$. Soit $x_0 \in \Omega$ avec $\tilde{u}(x_0) \in]a,b[$ et posons

$$\lambda = \beta(\tilde{u}(x_0) + \frac{c}{2}) \tag{12}$$

$$E = \left\{ t \in [a,b],\ \lambda \in \beta(t + \frac{c}{2}) \right\} \tag{13}$$

E est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ contenant l'ouvert non vide $]\tilde{u}(x_0), \tilde{u}(x_0) + c[\ \cap\ ]a,b[$. De plus, on a

$$\forall\, t \in E \cap \tilde{u}(\Omega),\ \forall\, w \in \,]0,c[\ ,\ \{\lambda\} = \beta(t+w) \tag{14}$$

Grâce à la remarque b) on a $E \cap \tilde{u}(\Omega) = E$ et donc E est ouvert dans [a,b] d'après (14). Il en résulte par connexité que $E = [a,b]$. La conclusion découle alors du fait que

$$\forall\, t \in [m,M] \cap \mathrm{IR}\ ,\quad \lambda \in \beta(t + \frac{c}{2}).$$

2. - APPLICATION AU PROBLEME (1)

Soit Ω un ouvert borné et connexe de IR^n, $n \geqslant 1$ et $f \in L^2(\Omega)$. On s'intéresse au problème d'existence et d'unicité des solutions u de (1) avec

$$u \in H^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{p.p. sur } \partial\Omega. \tag{15}$$

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes

$$\bar{f} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)dx,\quad g(x) = f(x) - \bar{f}$$

$$\beta^- = \operatorname*{Inf}_{w \in D(\beta)}\ [\operatorname{Inf}\beta(w)]\ ,\quad \beta^+ = \operatorname*{Sup}_{w \in D(\beta)}\ [\operatorname{Sup}\beta(w)]$$

[Bien sûr on peut avoir $\beta^- = -\infty$ ou $\beta^+ = +\infty$]

$$D(L) = \left\{u \in H^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{p.p. sur } \partial\Omega\right\}$$

$$\forall\, u \in D(L),\quad Lu = -\Delta u.$$

Il est bien connu que L est un opérateur auto-adjoint (non borné) et que l'on a

$$L^{-1}(\{0\}) = N = \text{fonctions constantes sur } \Omega$$

$$R(L) = N^\perp = \{\varphi \in L^2(\Omega),\ \bar{\varphi} = 0\}.$$

Pour tout $g \in N^\perp$, l'équation

$$w \in D(L) \cap N^\perp,\ Lw = g$$

a une solution et une seule. On pose $w = Kg$ et alors $K : N^{\perp} \to N^{\perp}$ est un opérateur auto-adjoint, positif et compact.

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons ci-dessous divers résultats relatifs au problème (1) (cf. [4], p. 66-67 et les travaux [5] et [6].

PROPOSITION 3. *Pour tout* $f \in L^2(\Omega)$ *on a les résultats suivants*

a) Si (1) *a une solution, alors* $\beta^- \leqslant \bar{f} \leqslant \beta^+$.

b) Si $\beta^- < \bar{f} < \beta^+$, *alors* (1) *a au moins une solution.*

c) Si u *et* v *sont deux solutions de* (1), *alors*

$$\exists c \in \mathbb{R}, \ v(x) - u(x) = c \quad \text{p.p. sur } \Omega. \tag{16}$$

Démonstration de c) : immédiate par monotonie de β.

Nous allons utiliser les résultats de la partie 1 pour préciser les cas où $c \neq 0$. *On a d'abord un résultat dans le cas où b) ci-dessus a lieu.*

THEOREME 4. *Soit* $f \in L^2(\Omega)$ *tel que l'on ait*

$$\beta < \bar{f} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x)dx < \beta^+ \tag{17}$$

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que (1) ait des solutions distinctes est que

1) $\beta^{-1}(\bar{f})$ *ne soit pas réduit à un point*

2) La fonction $z = Kg$ *soit dans* $L^\infty(\Omega)$ *et que*

$$\operatorname*{Sup\ ess}_{x \in \Omega} z(x) - \operatorname*{Inf\ ess}_{x \in \Omega} z(x) < |\beta^{-1}(\bar{f})| \tag{18}$$

Lorsque ces conditions sont vérifiées soit $J = \beta^{-1}(\bar{f})$. *Toutes les solutions de* (1) *sont alors données par la formule*

$$u(x) = z(x) + \mu = K(f(x) - \bar{f}) + \mu \tag{19}$$

où μ *est un réel quelconque tel que*

$$[m + \mu, M + \mu] \subset J \tag{20}$$

avec $m = \operatorname*{Inf\ ess}_{x \in \Omega} z(x)$, $M = \operatorname*{Sup\ ess}_{x \in \Omega} z(x)$.

Une conséquence immédiate du Théorème 4 est le

COROLLAIRE 5. *Supposons que* f *vérifie* (17).
Alors si $\beta^{-1}(\bar{f})$ *est réduit à un point* ou *si* $K(f-\bar{f}) \notin L^{\infty}(\Omega)$, *l'équation* (1) *a une solution et une seule.*

Démonstration du Théorème 4. Soit B le prolongement de β à $L^2(\Omega)$ et posons

$$A = L + B.$$

D'après [3] , Proposition 2. - 17 p. II-30, A est maximal monotone dans $L^2(\Omega)$. Donc pour tout f fixé dans $L^2(\Omega)$, l'ensemble des solutions de (1), qui est égal à $A^{-1}(f)$, est convexe.

En particulier, si u(x) et v(x) = u(x) + c sont deux solutions de (1) avec $c > 0$, alors $w(x) = \frac{1}{2}(u(x) + v(x)) = u(x) + \frac{c}{2}$ est encore solution de (1).

D'autre part on a presque-partout sur Ω

$$f(x) + \Delta u \in \beta(u(x)) \cap \beta(u(x) + c) \text{ avec } u \in H^2(\Omega). \tag{21}$$

D'après le Théorème 2, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda \in \beta(u(x) + c) \cap \beta(u(x)) \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

$$\beta(u(x) + \frac{c}{2}) = \{\lambda\} \text{ p.p. sur } \Omega$$

On a donc avec $w = u + \frac{c}{2}$:

$$f + \Delta w = \lambda \quad \text{p.p. sur } \Omega. \tag{22}$$

Comme $w \in D(L)$, en intégrant sur Ω les deux membres de (22) on obtient

$$\bar{f} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)dx + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \Delta w \, dx = \lambda.$$

Il résulte des diverses formules ci-dessus que l'on a

$$-\Delta u = -\Delta\,(u(x) + \frac{c}{2}) = f(x) - \bar{f} = g(x)$$

$$u(x) + \theta \in \beta^{-1}(\bar{f}), \text{ p.p. sur } \Omega, \ \forall\, \theta \in [0,c] \tag{23}$$

On a donc en particulier

$$u(x) = Kg(x) + \mu, \quad \mu \in \mathrm{IR}$$

ce qui démontre (19). De plus comme f vérifie (17), il est clair que $\beta^{-1}(\bar{f})$ est *borné*, donc $u \in L^{\infty}(\Omega)$ et $Kg \in L^{\infty}(\Omega)$.

La condition (20) est une conséquence immédiate de (23) et de (23) on déduit (18) en faisant varier θ de 0 à $c > 0$. Le Théorème 4 est donc entièrement démontré : si 1) et 2) sont vérifiés, il est en effet tout à fait clair que les formules (19) et (20) donnent toutes les solutions de (1) lorsque μ décrit un certain intervalle de longueur égale à $|J| - (M-m)$.

Remarque. Lorsque $\bar{f}$ est égal à l'un des nombres β^- ou β^+, en générale (1) n'a pas de solution.

Plus précisément, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 5. *Supposons* $\bar{f} = \beta^+$. *Alors* (1) *a des solutions si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1) On a $\beta(w) = \beta^+$ *pour* $w \geq A$ *avec* $[A, +\infty[\ \subset D(\beta)$.

2) $m = \operatorname*{Inf\ ess}_{x \in \Omega} Kg(x) > -\infty$.

Dans ce cas, les solutions de (1) *sont données par* $u(x) = Kg(u) + \mu$, *où* μ *est un réel quelconque tel que* $m + \mu \in \beta^{-1}(\beta^+)$.
(Donc μ *décrit une demi-droite* $[\mu_0, +\infty[$*).*

Remarques 6. a) La démonstration de la Proposition 5 est immédiate puisque si (1) a une solution $u(x)$, alors $u(x) \in \beta^{-1}(\beta^+)$ p.p. sur Ω comme on le voit en prenant la moyenne de la fonction $f + \Delta u$ sur Ω.

b) Si $n \leq 3$ ou $f \in L^{\infty}(\Omega)$ et n est quelconque, on a automatiquement $Kg(x) \in L^{\infty}(\Omega)$.

c) Le principal intérêt du Théorème 4 est d'établir *l'unicité de u* solution de (1) si f n'appartient pas à l'ensemble (au plus dénombrable) des «paliers horizontaux» du graphe monotone β. En dimension $n \leq 3$ ce résultat aurait pu se déduire de la simple *continuite* de $u(x)$. En dimension $n \geq 4$, l'utilisation du Théorème 2 nous permet d'obtenir le résultat *sans condition de régularité supplémentaire sur* f *ou* β.

Exemples 7. D'après la proposition 5, la situation où $\bar{f} \in \{\beta^-, \beta^+\}$ est essentiellement triviale et ne nécessite pas d'explication complémentaire. Nous illustrons maintenant le Théorème 4 par deux exemples où les conditions de non-unicité prennent une forme simple

a) Ω quelconque, $f(x) = \varphi(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ où φ est une solution de

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$\lambda > 0$ étant une *valeur propre* de $(-\Delta)$ avec conditions de Neuman.

Dans ce cas on a $\bar{f} = c$ (car $\bar{\varphi} = 0$) et $g = \varphi$, $K(g) = \frac{1}{\lambda}\varphi$. Les conditions de non-unicité se réduisent donc ici à

$$|\beta^{-1}(c)| > \frac{1}{\lambda}\left\{\operatorname*{Sup}_{\bar{\Omega}} \varphi - \operatorname*{Inf}_{\bar{\Omega}} \varphi\right\} .$$

b) $\Omega =]0,\ell[$, $\ell > 0$

On a ici

$$z(x) = a - \int_0^x (x-y)g(y)dy$$

avec a choisi pour que $\bar{z} = 0$.

Il est inutile d'expliciter a et la condition de non-unicité est donnée ici par

$$|\beta^{-1}(\bar{f})| > \operatorname*{Sup}_{[0,\ell]} h(x) - \operatorname*{Inf}_{[0,\ell]} h(x)$$

avec

$$h(x) = -\int_0^x (x-y)g(y)dy, \quad \forall\, x \in [0,\ell]$$

$$h'(x) = -\int_0^x g(y)dy, \quad \forall\, x \in [0,\ell].$$

Dans la pratique, il n'est pas difficile d'évaluer l'oscillation de $h(x)$ à partir des formules ci-dessus. Par exemple si $\ell = 1$ et $f(x) = \bar{f} + \sin 2\pi x$, on trouve $h'(x) = \frac{1}{2\pi}(\cos 2\pi x - 1) \leqslant 0$, donc

$$\operatorname{osc}(h) = |h(0) - h(1)| = \frac{1}{2\pi}.$$

3. - APPLICATION AU PROBLEME (2)

On reprend les notations du §2 avec les modifications suivantes : ici $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et on utilisera la notation $Q =]0,T[\times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

On pose d'autre part

$$\bar{f} = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(t,x)\,dx\,dt$$

$$g(t,x) = f(t,x) - \bar{f}$$

$$g = g_1 + g_2$$

avec

$$g_1(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega g(t,x)\,dx, \quad g_2 = g - g_1 = f - \bar{f} - g_1.$$

Les fonctions f, g, g_1 et g_2 seront étendues pour $t \in \mathbb{R}$ par périodicité de période T. On identifie chaque fonction avec son prolongement.

Enfin on désignera par $S(t) = N^\perp \to N^\perp$ le semi-groupe engendré par $(-L)$ sur $N^\perp$. Il est clair que $S(t)$ est «exponentiellement amorti» avec en fait $\| S(t) \|_{\mathcal{L}(N^\perp,N^\perp)} \leq \exp(-\lambda_2 t)$ où λ_2 désigne la 2ème valeur propre de $(-\Delta)$ avec conditions aux limites de Neumann dans Ω (on a $\lambda_1 = 0$).

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons ici divers résultats relatifs au problème (2) (cf. [4] , p. 171). Le point c) de la proposition 8 ci-dessous est par exemple une conséquence de la proposition 3, c) et de [3] , Théorème 4 p. 168.

PROPOSITION 8. *Pour tout* $f \in L^2(Q)$ *on a les résultats suivants :*

a Si (2) *a une solution, alors* $\beta^- \leq \bar{f} \leq \beta^+$.

b) Si $\beta^- < \bar{f} < \beta^+$, *alors* (1) *a au moins une solution.*

c) Si u *et* v *sont deux solutions de* (1), *alors*

(24) $$\exists c \in \mathbb{R}, \quad v(t,x) - u(t,x) = c \quad \text{p.p. } sur\ Q.$$

Le résultat ci-dessous généralise [4] , exemple 7 p. 170-172. Notons que la formule en haut de la page 172 *n'est en fait applicable que lorsque* $g_1 \equiv 0$. En général, il faudra tenir compte de g_1 et utiliser la formule (28) ci-dessous.

THEOREME 9. *Soit* $f \in L^2(Q)$ *tel que l'on ait*

(25)
$$\beta^- < \bar{f} = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(t,x)\,dx\,dt < \beta^+.$$

Alors **une condition nécessaire et suffisante** *pour que (2) ait plusieurs solutions est que*

1) $\beta^{-1}(\bar{f})$ *ne soit pas réduit à un point.*

2) La fonction z *définie par la formule*

(26)
$$z(t,x) = \int_0^t g_1(s)ds + \int_{-\infty}^t S(t-s)g_2(s,x)ds$$

soit dans $L^\infty(Q)$ *et que l'on ait*

(27)
$$\operatorname*{Sup\ ess}_{(t,x)\in Q} z(t,x) - \operatorname*{Inf\ ess}_{(t,x)\in Q} z(t,x) < |\beta^{-1}(\bar{f})|$$

Lorsque ces conditions sont vérifiées soit $J = \beta^{-1}(\bar{f})$. Toutes les solutions de (2) sont alors données par

(28)
$$u(t,x) = \mu + \int_0^t g_1(s)ds + \int_{-\infty}^t S(t-s)g_2(s,x)ds$$

où μ est un réel quelconque tel que

(29)
$$[m+\mu, M+\mu] \subset J$$

avec $m = \operatorname*{Inf\ ess}_{(t,x)\in Q} z(t,x)$, $M = \operatorname*{Sup\ ess}_{(t,x)\in Q} z(t,x)$.

COROLLAIRE 10. *Supposons que* f *vérifie* (25).
Alors si $\beta^{-1}(\bar{f})$ *est réduit à un point ou* $z(t,x) \notin L^\infty(Q)$, (2) *a une solution et une seule.*

Démonstration du Théorème 9. Soit $\mathscr{A}$ le prolongement de $A = L + B$ à $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \approx L^2(Q)$. D'autre part définissons un opérateur linéaire non borné Λ sur $L^2(Q)$ par

$$D(\Lambda) = \{u \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)),\ u(0) = u(t)\}$$

et $\Lambda u = \dfrac{du}{dt}$, $\forall\, u \in D(\Lambda)$.

Il est connu (cf. par exemple [4], Theorem 18, p. 56) que Λ, $\mathscr{A}$ et $\Lambda + \mathscr{A}$ sont des opérateurs maximaux monotones. Une fonction $u \in L^2(Q)$ est solution de (2) si et seulement si $u \in D(\Lambda) \cap D(\mathscr{A})$ et

(30)
$$f \in \Lambda u + \mathscr{A}u.$$

L'ensemble des solutions de (3) étant *convexe et fermé* dans $L^2(Q)$ pour f fixé, si $u(t,x)$ et $v(t,x) = u(t,x) + c$ sont deux solutions de (2) avec $c > 0$, alors

$$w(t,x) = \frac{1}{2}(u(t,x) + v(t,x)) = u(t,x) + \frac{c}{2}$$

est aussi solution de (2).

D'autre part on a

$$D(\Lambda) \cap D(A) \subset H^1(Q) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$$

et presque partout sur Q on a

$$(31) \qquad f(t,x) + \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \in \beta(u(t,x)) \cap \beta(u(t,x) + c)$$

D'après le Théorème 1, il existe donc $\lambda \in \mathrm{IR}$ tel que

$$\begin{cases} \lambda \in \beta(u(t,x) + c) \cap \beta(u(t,x) & \text{p.p. sur } Q \\ \beta(u(t,x) + \frac{c}{2}) = \lambda & \text{p.p. sur } Q. \end{cases}$$

En particulier :

$$(32) \qquad f(t,x) + \Delta w - \frac{\partial w}{\partial t} = \lambda \quad \text{p.p. sur } Q$$

En intégrant sur Q les 2 membres de (32) il vient $\bar{f} = \lambda$, et il résulte alors de (32) que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = f(t,x) - \bar{f} = g(t,x)$$

Soit alors $u_2(t,x) = P_{N^\perp} u(t,x)$, $\forall\, t \in [0,T]$. Alors u_2 peut être prolongé sur IR par T-périodicité en une solution (forte) T-périodique de

$$(33) \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 = P_{N^\perp} g(t,x) = g_2(t,x)$$

D'après (33) et les remarques préliminaires, on déduit de [4], Théorème 7, p. 155 que

$$(34) \qquad u_2(t,x) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s) g_2(s,x)\,ds$$

D'autre part il est clair que $u_1 = P_N u$ vérifie

$$\frac{du_1}{dt} = g_1(t),$$

d'où l'on déduit

(35) $$u_1(t,x) = u_1(t) = u_1(0) + \int_0^t g_1(s)ds$$

Les formules (34) et (35) impliquent (28) avec $\mu = u_1(0)$. Comme de plus $u(t,x) \in \beta^{-1}(\overline{f})$ p.p. sur Q, il est clair que si (2) a deux solutions u et u + c avec c > 0, on a nécessairement les conditions 1) et 2) de l'énoncé du Théorème 9.

Les deux dernières assertions de cet énoncé sont également des conséquences immédiates des raisonnements ci-dessus.

Ceci achève la démonstration du Théorème 9.

Remarques 11. a) Dans cette application aux problèmes périodiques de type parabolique le Théorème 1 devient vraiment utile car $H^1(Q)$ n'est pas contenu dans $C(\overline{Q})$ même lorsque n = 1. Même en tenant compte du fait que $D(L) \subset H^2(\Omega)$, lorsque $n \geqslant 2$ on ne peut travailler dans $C([0,T] \times \overline{\Omega})$ sans faire des hypothèses de régularité supplémentaires (cf. [4], p. 171) que le Théorème 1 nous permet ici d'éviter.

b) Dans la pratique, pour calculer z(t,x), on peut introduire une base orthonormée de fonctions propres $\{\varphi_j\}_{j \geqslant 2}$ de L sur $N^\perp$ et écrire

$$g_2(s,x) = \sum_{j \geqslant 2} g_{2,j}(s)\varphi_j(x) \quad \text{avec} \quad g_{2,j}(s) = \int_\Omega g_2(s,x)\varphi_j(x)dx.$$

On calcule ensuite

$$\int_{-\infty}^t S(t-s)g_2(s,x)ds = \sum_{j=2}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^t e^{-\lambda_j(t-s)} g_{2,j}(s)ds \right\} \varphi_j(x)$$

c) Nous omettons volontairement l'analogue parabolique de la Proposition 5 dont l'énoncé et la démonstration se devinent.

Nous remercions H. BREZIS et Ph. BENILAN dont les critiques constructives sur une version préliminaire de ce papier nous ont amenés à simplifier les démonstrations du Théorème 1 et du Théorème 2 respectivement.

REFERENCES

[1] R.A. ADAMS. *«Sobolev spaces»*. Academic Press (1975).

[2] Ph. BENILAN, H. BREZIS, M.G. CRANDALL. *«A semilinear elliptic equation in $L^1(IR^N)$»*. Ann. scuola normala sup. Pisa Cl Sci. IV, Ser. 2 (1975) 523-555.

[3] H. BREZIS. *«Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert»*. North-Holland, Amsterdam (1973).

[4] A. HARAUX. *«Nonlinear evolution equations : global behavior of solutions»*. Lectures notes in math. n^o 841, Springer, Berlin (1981).

[5] E.M. LANDESMAN, A.C. LAZER. *«Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance»*. J. Appl. Math. Mech. 19 (1970), 609-623.

[6] M. SCHATZMAN. *«Problèmes aux limites non linéaires, non coercifs»*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 27 (1973), 641-686.

(Manuscrit reçu le 10 février 1985)