ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PIERRE BONNEAU

L'équation $\overline{\partial}$ dans certains domaines faiblement convexes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 7, nº 3-4 (1985), p. 185-203
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1985_5_7_3-4_185_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol VII, 1985, P 185 à 203

L'EQUATION $\bar{\partial}$ DANS CERTAINS DOMAINES FAIBLEMENT CONVEXES

Pierre Bonneau (1)

(1) 15, rue Homère 31500 Toulouse.

Résumé : Dans certains domaines faiblement convexes, on construit une fonction support holomorphe que l'on contrôle bien, et on estime la solution de Henkin associée pour l'équation $\bar{\partial}$.

Summary : In some weakly convex domains, an holomorphic support function with good control is built, and the associated Henkin solution for $\bar{\partial}$ equation is estimated.

INTRODUCTION

Grâce aux travaux de Leray [L] , on sait obtenir, dans un domaine D de $\mathbb{C}^n$, une solution, sous forme intégrale, de l'équation $\bar{\partial}$, à condition de disposer d'une fonction support holomorphe que l'on contrôle bien.

Dans les domaines strictement pseudoconvexes, Henkin et Ramirez ([H] et [RA]) ont réussi à construire une telle fonction support holomorphe. Depuis, de nombreux travaux ont été consacrés à l'estimation des solutions ainsi obtenues. Dans le cas de certains domaines faiblement convexes, Range [R] , Verdera [V] , Bruna et Del Castillo [BC] ont réussi à construire une fonction support holomorphe convenable, et à estimer les solutions du $\bar{\partial}$ qui s'en déduisent.

Dans ce papier, on va aussi considérer certains domaines faiblement convexes et, après avoir construit une fonction support holomorphe adéquate, on va estimer les solutions de l'équation $\bar\partial$ que l'on obtient.

De façon précise, soit D un domaine convexe borné de $\mathbb{C}^n$, à frontière ∂D de classe $C^\ell (\ell \geqslant 4)$ tel que pour tout ζ de ∂D et tout w du plan tangent réel en ζ à ∂D, on ait

$$d(w,\partial D) \geqslant c\,|\zeta - w|^4$$

où $d(w,\partial D)$ désigne la distance euclidienne de w à ∂D. On supposera, bien sûr, que ∂D admet des points de faible convexité, afin de n'être pas dans le cas de la stricte pseudoconvexité déjà bien connu. Mais les points de faible convexité sont, d'après la condition ci-dessus imposée, isolés. On peut donc, sans restreindre la généralité, supposer qu'il n'existe qu'un seul point de faible convexité : on le notera 0. On notera p−1 $(1 \leqslant p \leqslant n-1)$ le rang de la restriction au plan tangent complexe en 0 à ∂D de la forme de Lévi en 0 d'une fonction définissante ρ associée au domaine $D = \{\rho < 0\}$. On notera aussi $C^\infty_{01}(\bar D)$ l'espace des (0,1) formes de classe C^∞ au voisinage de $\bar D$, $L^q_{01}(D)$ l'espace des (0,1) formes à coefficients dans $L^q(D)$ muni de la norme habituelle. Enfin, $\Lambda^c(D)$ désigne l'espace de Lipschitz d'ordre $c > 0$ tel qu'il est défini par exemple dans [S].

On peut alors énoncer le :

THEOREME 1. *Il existe un opérateur linéaire* $H : C^\infty_{01}(\bar D) \to C^\infty(D)$ *tel que, si* $f \in C^\infty_{01}(\bar D)$ *est* $\bar\partial$*-fermée, alors* $\bar\partial Hf = f$, *et*

a) $$\|Hf\|_{L^{\frac{2n+4+2p}{2n+3+2p}-\epsilon}(D)} \leqslant C_\epsilon \|f\|_{L^1_{01}(D)}, \quad \epsilon > 0$$

b) $$\|Hf\|_{L^r(D)} \leqslant C\,\|f\|_{L^q_{01}(D)} \quad \text{où} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2n+4+2p}, \quad 1 < q < 2n+4+2p$$

c) *il existe des constantes* b, $B > 0$ *telles que*

$$\int_D \exp\left(\frac{b\,|Hf|^{\frac{2n+4+2p}{2n+3+2p}}}{\|f\|_{L_{01}^{2n+4+2p}}}\right) \leqslant B < \infty$$

d) $$\|Hf\|_{\Lambda^c(D)} \leqslant C_1 \|f\|_{L^q_{01}(D)} \quad \text{où} \quad C = \frac{1}{4} - \frac{n+p+2}{2q}, \quad 2n+2p+4 < q \leqslant \infty.$$

Par un argument classique qu'on ne rappellera pas, les hypothèses de régularité faites sur f peuvent être supprimées. D'autre part, pour certaines (0,1)-formes f, Hf est plus régulier que ne l'indique le théorème 1. En d'autres termes, la régularité de Hf dépend du comportement de f dans les directions du plan tangent complexe en 0 à ∂D où la forme de Lévi $\mathcal{L}_\rho(0)$ dégénère. On a le :

THEOREME 2. *Avec les hypothèses et notations du théorème 1, et si, en plus,*

$$f(\zeta)_\wedge(\partial\bar\partial_\rho)(\zeta))^{p-1}\Big/_{T^{\mathbb{C}}_{\partial D}(\zeta)} = 0(|\zeta|)\ ,\ \zeta\in D$$

alors

a') $\|Hf\|_{L^{\frac{2n+2}{2n+1}-\epsilon}} \leqslant C_\epsilon \|f\|_{L^1_{01}(D)}$, $\epsilon>0$

b') $\|Hf\|_{L^r(D)} \leqslant C\|f\|_{L^q_{01}(D)}$ *où* $\frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{2n+2}$, $1<q<2n+2$

c') *il existe des constantes* b, $B>0$ *telles que*

$$\int_D \exp\left(\frac{b\,|Hf|^{\frac{2n+2}{2n+1}}}{\|f\|_{L^{2n+2}_{01}(D)}}\right) \leqslant B<\infty$$

d') $\|Hf\|_{\Lambda^c(D)} \leqslant C_1\|f\|_{L^q_{01}(D)}$ *où* $C=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{q}$, $2n+2<q\leqslant\infty.$

Ainsi si f vérifie les hypothèses du théorème 2, alors Hf a la même régularité que la solution de Henkin de l'équation $\bar\partial$ dans le cas d'un domaine strictement pseudoconvexe. Du théorème 1 se déduit immédiatement le corollaire suivant qui exprime, en particulier, que si $f\in L^\infty(D)$ alors on obtient une solution du $\bar\partial$, $Hf\in\Lambda^{1/4}(D)$: c'est ce qu'on peut attendre de mieux d'après les résultats et exemples fournis par Range [R].

COROLLAIRE 3. *Il existe un opérateur linéaire* $H : C^\infty_{01}(\bar D)\to C^\infty(D)$ *tel que : si* $f\in C^\infty_{01}(\bar D)$ *est $\bar\partial$-fermé, alors* $\bar\partial Hf = f$, *et :*

a") $\|Hf\|_{L^{\frac{4n+2}{4n+1}-\epsilon}(D)} \leqslant C_\epsilon\|f\|_{L^1_{01}(D)}$ $\epsilon>0$

b") $\|Hf\|_{L^r(D)} \leqslant C\|f\|_{L^q_{01}(D)}$ *où* $\frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{4n+2}$, $1<q<4n+2$

c") *il existe des constantes* b, $B>0$ *telles que*

$$\int_D \exp\left(\frac{b\,|Hf|^{\frac{4n+2}{4n+1}}}{\|f\|_{L_{01}^{4n+2}(D)}}\right) \leqslant B < \infty$$

d'') $\|Hf\|_{\Lambda^c(D)} \leqslant C_1 \|f\|_{L_{01}^q(D)}$ *où* $c = \frac{1}{4} - \frac{n+1/2}{q}$, $4n+2 < q \leqslant \infty$.

Dans un premier paragraphe, on construit pour D une fonction support ayant les bonnes estimations. On rappelle la solution de Henkin du $\bar\partial$ qui s'en déduit, dans le paragraphe 2, et on en tire les estimations du théorème 1. Le troisième paragraphe est consacré à la démonstration du théorème 2.

I. - UNE FONCTION SUPPORT HOLOMORPHE POUR CERTAINS DOMAINES CONVEXES

Soit $D = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$ un domaine convexe de $\mathbb{C}^n$ où ρ est une fonction de classe C^ℓ ($\ell \geqslant 4$) définie dans un voisinage de $\bar D$ et telle que :

$$\forall z \in \partial D \qquad \nabla\rho(z) \neq 0$$

Désignons par $T_{\partial D}^{\mathbb{R}}(\zeta)$ (respectivement $T_{\partial D}^{c}(\zeta)$) le plan tangent réel (respectivement complexe) en $\zeta \in \partial D$ à ∂D. On suppose que pour tout $\zeta \in \partial D$ et tout $w \in T_{\partial D}^{\mathbb{R}}(\zeta)$

$$(1) \qquad d(w,\partial D) \geqslant c\,|w-\zeta|^4$$

Ainsi D peut être faiblement convexe en certains points de ∂D. Supposons, par exemple, que $0 \in \partial D$ est un point de faible convexité. En choisissant judicieusement un système $(x_1,\ldots,x_{2n})$ de coordonnées réelles dans $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$, on peut, sans particulariser, supposer que $T_{\partial D}^{\mathbb{R}}(0)$ a pour équation $x_{2n} = 0$. Soit $u = (u_1,\ldots,u_{2n-1},0)$ un vecteur unitaire de $T_{\partial D}^{\mathbb{R}}(0)$ et notons P_u le plan engendré par u et la normale $n = (0,\ldots,0,1)$ à ∂D en 0. Soit (λ,μ) le système de coordonnées réelles dans P_u associé au repère (u,n).
Au voisinage de 0, une fonction définissante de D est de la forme

$$\rho(x_1,\ldots,x_{2n}) = f(x_1,\ldots,x_{2n-1}) - x_{2n} < 0$$

avec $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(0,\ldots,0) = 0$ pour tout $i = 1,\ldots,2n-1$.

Dans le plan P_u, et le système de coordonnées (λ,μ), on a

$$D \cap P_u = \{ (\lambda,\mu) : g_u(\lambda) = f(\lambda u_1,\ldots,\lambda u_{2n-1}) < \mu \}$$

et g_u est une fonction convexe de λ, de classe C^ℓ, positive et qui s'annule en 0 à l'ordre m (pair). La condition (1) exprime que

$$g_u(\lambda) \geqslant c \quad \lambda^4$$

donc m = 2 ou 4. On a donc

$$g_u''(\lambda) \geqslant 2 \; c \; \lambda^2$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i,j=1}^{2n-1} u_i u_j \frac{\partial^2 f(\lambda u_1,\ldots,\lambda u_{2n-1})}{\partial x_i \, \partial x_j} \geqslant 2\, c\, \lambda^2 \, \| u \|^2$$

Notons $H\rho(\zeta)$ la forme hessienne de ρ en ζ. Soit $\zeta \in \partial D$ et soit

$$v = \left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n-1}, \sum_{i=1}^{2n-1} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_1,\ldots,x_{2n-1})\right)$$

un vecteur tangent à ∂D en ζ. On a alors

$$H\rho(\zeta) \,.\, (v,v) = \sum_{i,j=1}^{2n-1} \frac{\partial^2 f(x_1,\ldots,x_{2n-1})}{\partial x_i \partial x_j} \alpha_i \, \alpha_j$$

$$\geqslant 2\, C \, |\zeta|^2 \sum_{i=1}^{2n-1} |\alpha_i|^2$$

Ainsi, en tout point ζ voisin de 0, la forme hessienne $H\rho(\zeta)$ est non dégénérée. Il existe un voisinage V de 0 dans lequel $H\rho$ ne dégénère qu'en 0. Comme 0 était un point de faible convexité arbitraire, on peut donc affirmer que les points de faible convexité de ∂D sont isolés. Mais toutes les estimations qu'on va démontrer sont locales. On peut donc supposer, sans restreindre la généralité des résultats, que 0 est le seul point de faible convexité de ∂D. Pour tout $\zeta \in \partial D$ et tout $w \in T^{\mathbb{R}}_{\partial D}(\zeta)$ on a donc

$$H\rho(\zeta) \,.\, (w-\zeta, w-\zeta) \geqslant c \; |\zeta|^2 \; |w-\zeta|^2 \tag{2}$$

Si l'on note $\mathscr{L}\rho$ la forme de Lévi de ρ, alors pour tout $\zeta \in \partial D$ et tout $w \in T^{\mathbb{C}}_{\partial D}(\zeta)$, on a aussi

$$H\rho(\zeta) . (i(w-\zeta), i(w-\zeta)) = -2\mathrm{Re} \sum_{j,K=1}^{n} \frac{\partial^2\rho(\zeta)}{\partial\zeta_j\partial\zeta_K} (w_j-\zeta_j)(w_K-\zeta_K) + 2\, \mathscr{L}\rho(\zeta) . (w-\zeta)^2 \geqslant 0$$

et donc

$$(3)\qquad \begin{aligned} 4\, \mathscr{L}\rho(\zeta) . (w-\zeta)^2 &\geqslant 2\mathrm{Re} \sum_{j,K} \frac{\partial^2\rho(\zeta)}{\partial\zeta_j\partial\zeta_K} (w_j-\zeta_j)(w_K-\zeta_K) + 2\, \mathscr{L}\rho(\zeta) . (w-\zeta)^2 \\ &= H\rho(\zeta) . (w-\zeta)^2 \geqslant c\, |\zeta|^2\, |w-\zeta|^2 \end{aligned}$$

Pour tous multi-indices α et β appartenant à $\mathbb{N}^n$ notons

$$\rho_{\alpha\beta}(\zeta) = \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}\rho(\zeta)}{\partial z^{\alpha}\partial \bar{z}^{\beta}}$$

Posons

$$-F_2(\zeta,z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_j}(\zeta)(z_j-\zeta_j) + \frac{1}{2}\sum_{j,K=1}^{n} \rho_{jK}(\zeta)(z_j-\zeta_j)(z_K-\zeta_K) + \sum_{|\alpha|=3} \rho_{\alpha}(\zeta)(z-\zeta)^{\alpha}$$

et

$$L_3(\zeta,z) = \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=3 \\ |\alpha|\neq 0 \\ |\beta|\neq 0}} \frac{\rho_{\alpha\bar{\beta}}(\zeta)}{\alpha!\beta!} (z-\zeta)^{\alpha}\, (\overline{z-\zeta})^{\beta}$$

Alors, d'après la formule de Taylor, pour tout z et ζ dans $\bar{D}$,

$$(4)\qquad \rho(z) = \rho(\zeta) - 2\mathrm{Re}\, F_2(\zeta,z) + \mathscr{L}\rho(\zeta) . (z-\zeta)^2 + L_3(\zeta,z) + 0(|\zeta-z|^4)$$

Mais,

$$\rho_{j\bar{K}}(z) = \rho_{j\bar{K}}(\zeta) + \sum_{i=1}^{n} \rho_{ij\bar{K}}(\zeta)(z_i-\zeta_i) + \sum_{i=1}^{n} \rho_{j\bar{i}\bar{K}}(\zeta)(\overline{z_i-\zeta_i}) + 0(|\zeta-z|^2)$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{j,K=1}^{n} \rho_{j\bar{K}}(z)(z_j-\zeta_j)(\overline{z_K-\zeta_K}) = \mathscr{L}\rho(\zeta) . (z-\zeta)^2 &+ \sum_{i,j,K} \rho_{ij\bar{K}}(\zeta)(z_i-\zeta_i)(z_j-\zeta_j)(\overline{z_K-\zeta_K}) \\ &+ \sum_{i,j,K} \rho_{j\bar{i}\bar{K}}(\zeta)(z_j-\zeta_j)(\overline{z_i-\zeta_i})(\overline{z_K-\zeta_K}) + 0(|\zeta-z|^4) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(5) \qquad \mathscr{L}\rho(z)\,.\,(z-\zeta)^2 = \mathscr{L}\rho(\zeta)\,.\,(z-\zeta)^2 + 2L_3(\zeta,z) + 0(|\zeta-z|^4)$$

D'après (4) et (5), on a donc

$$\rho(z)-\rho(\zeta)+2\mathrm{Re}\,F_2(\zeta,z) = \frac{1}{2}\,\mathscr{L}\rho(\zeta)\,.\,(z-\zeta)^2 + \frac{1}{2}\,\mathscr{L}\rho(z)\,.\,(z-\zeta)^2 + 0(|\zeta-z|^4)$$

$$(6) \qquad \geqslant \frac{1}{2}\,\mathscr{L}\rho(\zeta)\,.\,(z-\zeta)^2 + \frac{1}{2}\,\mathscr{L}\rho(z)\,.\,(z-\zeta)^2 - A\,|\zeta-z|^4 \quad A>0$$

Posons maintenant

$$(7) \qquad -F_1(\zeta,z) = \sum_{j=1}^{n} \rho_j(\zeta)\,(z_j-\zeta_j)$$

D'après (1), on a :

$$\mathrm{Re}\,F_1(\zeta,z) \geqslant -\rho(z) + c\,|\zeta-z|^4 + \rho(\zeta)$$

Choisissons $B \geqslant \dfrac{A+1}{c}$ et posons

$$F(\zeta,z) = BF_1(\zeta,z) + F_2(\zeta,z)$$

de sorte que

$$\mathrm{Re}\,F(\zeta,z) \underset{\sim}{>} \rho(\zeta)-\rho(z) + \frac{1}{2}\,\mathscr{L}\rho(\zeta)\,.\,(z-\zeta)^2 + \frac{1}{2}\,\mathscr{L}\rho(z)\,.\,(z-\zeta)^2 + |\zeta-z|^4$$

Si l'on pose

$$\tilde{F}(\zeta,z) = -2\rho(\zeta) + F(\zeta,z)$$

on a donc

$$(8) \quad |\tilde{F}(\zeta,z)| \underset{\sim}{>} -\rho(\zeta)-\rho(z) + \frac{1}{2}\,\mathscr{L}\rho(\zeta)\,.\,(z-\zeta)^2 + \frac{1}{2}\,\mathscr{L}\rho(z)\,.\,(z-\zeta)^2 + |\zeta-z|^4 + |\mathrm{Im}F(\zeta,z)|$$

Soient $\mu_2(\zeta),\dots,\mu_n(\zeta)$ les valeurs propres de $\mathscr{L}\rho(\zeta)$ restreinte à $T^c_{\partial D}(\zeta)$. Puisque $\mathscr{L}\rho$ est positive, de classe C^2 et de rang p−1 en 0, n−p de ces valeurs propres sont, au voisinage de 0, majorées par $C\,|\zeta|^2$. Donc, d'après (3), si $\mu_i(0) = 0$, alors il existe des constantes c_1 et $c_2 > 0$ telles que :

$$(8') \qquad c_1\,|\zeta|^2 \leqslant \mu_i(\zeta) \leqslant c_2\,|\zeta|^2$$

donc, d'après (8),

$$\mu_i(\zeta)\,|\zeta-z|^2 \leqslant c_2\,|\zeta|^2\,|\zeta-z|^2$$

$$\leqslant c_3\,\mathscr{L}\rho(\zeta)\,.\,(z-\zeta)^2$$

$$\leqslant c_4\,[\,|\tilde{F}(\zeta,z)| + \rho(\zeta) + \rho(z) - |\operatorname{Im} F(\zeta,z)|]$$

et par conséquent,

$$(9) \qquad \frac{\mu_i(\zeta)}{|\tilde{F}(\zeta,z)|} \leqslant \frac{C}{-\rho(\zeta)-\rho(z) + |\operatorname{Im} F(\zeta,z)| + |\zeta-z|^2}$$

Par ailleurs, d'après (8),

$$(10) \qquad \frac{1}{|\tilde{F}(\zeta,z)|} \leqslant \frac{C}{-\rho(\zeta)-\rho(z) + |\operatorname{Im} F(\zeta,z)| + \mathscr{L}\rho(z)\,.\,(z-\zeta)^2 + |\zeta-z|^4}$$

II. - SOLUTION DU $\bar{\partial}$ DANS D ET ESTIMATIONS

A partir de la fonction support $F(\zeta,z)$ que l'on contrôle bien, on peut construire, à l'aide de la formule de Leray, une solution intégrale de l'équation $\bar{\partial}$ dans D. On peut alors utiliser les majorations (9) et (10) pour, comme dans [R] ou [BC], estimer cette solution. Afin de préciser les notations, rappelons rapidement la construction de Henkin [H] d'une solution du $\bar{\partial}$. Notons

$$w'(\zeta) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\zeta_i \bigwedge_{j\neq i} d\zeta_j$$

$$w(\zeta) = d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n$$

$$F_i(\zeta,z) = -(B+1)\rho_i(\zeta) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}(\zeta)(z_j-\zeta_j) - \sum_{j,K} c_{ijk}\,\rho_{ijk}(\zeta)(z_j-\zeta_j)(z_K-\zeta_K)$$

de sorte que :

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(\zeta,z)(z_i-\zeta_i) = F(\zeta,z),$$

On note aussi :

$$\eta_j = \lambda\,\frac{\overline{\zeta_j-z_j}}{|\zeta-z|^2} + (1-\lambda)\,\frac{F_j}{\tilde{F}(\zeta,z)} \qquad 0\leqslant\lambda\leqslant 1$$

Si $f \in C^1_{01}(\bar D)$ est une (0,1)-forme de classe C^1 sur $\bar D$ et $\bar\partial$-fermée, alors on obtient une solution u de $\bar\partial u = f$ de la forme :

$$u(z) = C_n \left[\int_{\partial D x[0,1]} f(\zeta)_\wedge W'(\eta_1,\dots,\eta_n)_\wedge W(\zeta) - \int_D f(\zeta)_\wedge W'\left(\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}\right)_\wedge W(\zeta)\right]$$

$$= C_n \; [H_1 f(z) + H_2 f(z)]$$

Il est immédiat que le noyau de H_2 est de type faible $\frac{2n}{2n-1}$ et la régularité de $H_2 f$ ne pose pas de problème. Il reste donc à étudier la régularité de $H_1 f$

$$(11)\quad H_1 f(z) = 0(1) \int_{\partial D} f(\zeta)_\wedge \sum_{K=0}^{n-2} C_K \frac{\partial_\zeta |\zeta-z|^2_\wedge . \partial\rho(\zeta)_\wedge (\partial\bar\partial\rho(\zeta))^K_\wedge (\partial\bar\partial|\zeta-z|^2)^{n-K-2}}{\tilde F(\zeta,z)^{K+1} |\zeta-z|^{2n-2K-2}}$$

et d'après la formule de Stokes

$$H_1 f(z) = 0(1) \int_D f(\zeta) \sum_{K=0}^{n-2} -C_K \frac{\partial\rho(\zeta)_\wedge (\partial\bar\partial\rho(\zeta))^K_\wedge (\partial\bar\partial|\zeta-z|^2)^{N-K-1}}{\tilde F(\zeta,z)^{K+1} |\zeta-z|^{2n-2K-2}}$$

$$+ \int_D f(\zeta)_\wedge \sum_{K=0}^{n-2} -C_K \frac{\partial_\zeta |\zeta-z|^2_\wedge (\partial\bar\partial\rho(\zeta))^{K+1}_\wedge (\partial\bar\partial|\zeta-z|^2)^{n-K-2}}{\tilde F(\zeta,z)^{K+1} |\zeta-z|^{2n-2K-2}}$$

$$+ \int_D f(\zeta)_\wedge \sum_{K=0}^{n-2} C'_K \frac{\partial_\zeta |\zeta-z|^2_\wedge \partial\rho(\zeta)_\wedge (\partial\bar\partial\rho(\zeta))^K_\wedge (\partial\bar\partial|\zeta-z|^2)^{n-K-2}_\wedge \bar\partial_\zeta |\zeta-z|^2}{\tilde F(\zeta,z)^{K+1} |\zeta-z|^{2n-2K}}$$

$$+ \int_D f(\zeta) \sum_{K=0}^{n-2} C''_K \frac{\partial_\zeta |\zeta-z|^2_\wedge \partial\rho(\zeta)_\wedge (\partial\bar\partial\rho(\zeta))^K_\wedge (\partial\bar\partial|\zeta-z|^2)^{n-K-2} (\bar\partial\rho(\zeta) + 0(|\zeta-z|))}{\tilde F(\zeta,z)^{K+2} |\zeta-z|^{2n-2K-2}}$$

Les 4 termes du membre de droite s'estiment de façon analogue. Occupons-nous du dernier, qui est le plus délicat. Soit $T_4(\zeta,z)$ son noyau. Dans un repère dans lequel la forme $\mathscr{L}\rho(\zeta)$ est diagonale, la forme $(\partial\bar\partial\rho(\zeta))^K$ s'écrit comme une somme de termes ayant comme coefficient le produit de K valeurs propres de $\mathscr{L}\rho(\zeta)$. Donc

$$(13)\qquad |\partial\rho(\zeta)_\wedge \bar\partial\rho(\zeta)_\wedge (\partial\bar\partial\rho(\zeta))^K| = 0(1) \sum_{2 \le i_1 < \dots < i_K \le n} \mu_{i_1}(\zeta)\,\mu_{i_2}(\zeta) \dots \mu_{i_K}(\zeta)$$

ce qui, reporté dans l'expression de T_4, donne

$$|T_4| = 0(1)\ \frac{\sum\limits_{i_1<\ldots<i_K} \mu_{i_1}(\zeta)\ldots\mu_{i_K}(\zeta)}{\tilde{F}(\zeta,z)^{K+2}\ |\zeta-z|^{2n-2K-3}}$$

et, d'après (9) et (10), si l'on note p−1 le rang de $\mathscr{L}\rho(0)\Big/_{T^c_{\partial D}(0)}$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$

$$|T_4| \leqslant \sum_K \frac{C\ |\zeta-z|^{2K-2n+3}}{[-\rho(\zeta)-\rho(z) + |\mathrm{Im}F(\zeta,z)| + |\zeta-z|^2]^{\sup(K-p+1,0)}} \tag{14}$$

$$\times \frac{1}{[-\rho(\zeta)-\rho(z) + |\mathrm{Im}F(\zeta,z)| + \mathscr{L}\rho(z)\,.\,(z-\zeta)^2 + |\zeta-z|^4]^{\inf(K+2,p+1)}}$$

$$\leqslant \frac{C\ |\zeta-z|^{-2n+3}}{[-\rho(\zeta)-\rho(z) + |\mathrm{Im}F(\zeta,z)| + \mathscr{L}\rho(z)\,.\,(z-\zeta)^2 + |\zeta-z|^4]^2} +$$

$$\frac{C\ |\zeta-z|^{2p-2n+1}}{[-\rho(\zeta)-\rho(z) + |\mathrm{Im}F(\zeta,z)| + \mathscr{L}\rho(z)\,.\,(z-\zeta)^2 + |\zeta-z|^4]^{p+1}}$$

$$= 0(1)\ [T_{41} + T_{42}]$$

On remarque que

$$d_\zeta F(\zeta,z)\Big/_{z=\zeta} = (B+1)\partial\rho(\zeta)$$

Donc il existe r_o et $\delta_o > 0$ tels que si $|\rho(z)| < r_o$ et, par exemple, $\frac{\partial\rho}{\partial z_1}(z) \neq 0$ on puisse choisir, dans la boule de centre z et de rayon δ_o, comme système de coordonnées :

$$t_1 = \rho(\zeta)-\rho(z),\ \ t_2 = \mathrm{Im}F(\zeta,z),\ \ t_{2j-1} = \mathrm{Re}(\zeta_j - z_j),\ \ t_{2j} = \mathrm{Im}(\zeta_j - z_j),\ \ j = 2,\ldots,n.$$

Dans ce système de coordonnées, si l'on pose $\epsilon = -\rho(z)$, on a :

$$T_{41} \leqslant \frac{C}{[\epsilon + |t_1| + |t_2| + t_3^2 + \ldots + t_{2p}^2 + t_{2p+1}^4 + \ldots + t_{2n}^4]^2\ [\,|t_1| + |t_2| + \ldots + |t_{2n}|\,]^{2n-3}}$$

(15)

$$T_{42} \leqslant \frac{C}{[\epsilon + |t_1| + |t_2| + t_3^2 + \ldots + t_{2p}^2 + t_{2p+1}^4 + \ldots + t_{2n}^4]^{p+1}\ [\,|t_1| + |t_2| + \ldots + |t_{2n}|\,]^{2n-2p-1}}$$

Pour T_{41} et T_{42}, calculons le type faible en ζ uniformément en z, et en z uniformément en ζ. Désignons par λ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^{2n}$, et notons $t'^2 = t_3^2 + \ldots + t_{2p}^2$, $t''^2 = t_{2p+1}^2 + \ldots + t_{2n}^2$:

$$\lambda\{t \in B(0,R) : T_{41} \geq \alpha \leq C\lambda\{t : [\,|t_1| + |t_2| + t'^2 + t''^4]^2\,[\,|t_1| + |t_2| + t' + t'']^{2n-3} \leq \frac{1}{\alpha}\}$$

(15')
$$\leq C\lambda\{t : [\,|t_1| + |t_2| + t'^4 + t''^4]^2\,[\,|t_1| + |t_2| + t' + t'']^{2n-3} \leq \frac{1}{\alpha}\}$$

$$\leq C\lambda\{t : (t''+t')^{2n+5} \leq \frac{1}{\alpha} \text{ et } (t_1^2 + t_2^2)\,(t'+t'')^{2n-3} \leq \frac{1}{\alpha}\}$$

$$\leq C\int_0^{(\frac{1}{\alpha})^{(2n+5)^{-1}}} r^{2n-3}\,(\frac{1}{\alpha r^{2n-3}})dr = C\,(\frac{1}{\alpha})^{\frac{2n+6}{2n+5}}$$

De même

$$\lambda\{t \in B(o,R) : T_{42} \geq \alpha\} \leq C\lambda\{t : [\,|t_1| + |t_2| + t'^2 + t''^4]^{p+1}\,[\,|t_1| + |t_2| + t' + t'']^{2n-2p-1} \leq \frac{1}{\alpha}\}$$

$$\leq C\{t : t''^{2n+2p+3} \leq \frac{1}{\alpha} \text{ et } t''^{2n-2p-1}\,t'^{2p+2} \leq \frac{1}{\alpha} \text{ et } (t_1^2+t_2^2)^{\frac{p+1}{2}}\,t''^{2n-2p-1} \leq \frac{1}{\alpha}\}$$

$$\leq C\int_0^{(\frac{1}{\alpha})^{(2n+2p+3)^{-1}}} r^{2n-2p-1}\left(\frac{1}{\alpha r^{2n-2p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}\left(\frac{1}{\alpha r^{2n-2p-1}}\right)^{\frac{2}{p+1}} dr$$

$$\leq C\,(\frac{1}{\alpha})^{\frac{2n+4+2p}{2n+3+2p}}$$

Donc T_4 est de type faible $\frac{2n+4+2p}{2n+3+2p}$ en ζ uniformément en z, et en z uniformément en ζ. D'après [FS] lemme 15-3, et [K], lemme 4-4, on en déduit les estimations a, b, c du théorème 1. Il reste donc à démontrer la partie d du théorème 1.

Soit ν_z un champ de vecteurs unitaires. D'après (12) et (13) :

$$\nu_z H_1 f(z) = 0(1)\sum_K \int_D |f(\zeta)| \left[\frac{\sum_{i_1<\ldots<i_K} \mu_{i_1}(\zeta)\ldots\mu_{i_K}(\zeta)}{|\tilde{F}(\zeta,z)|^{K+3}\,|\zeta-z|^{2n-2K-3}} + \frac{\sum_{i_1<\ldots<i_K} \mu_{i_1}(\zeta)\ldots\mu_{i_K}(\zeta)}{|\tilde{F}(\zeta,z)|^{K+1}\,|\zeta-z|^{2n-2K-1}}\right] d\lambda(\zeta)$$

(16)
$$= 0(1)\sum_K \int_D |f(\zeta)| \Big[|\zeta-z|^{2K-2n+3}\Big\{[-\rho(\zeta)-\rho(z) + |\operatorname{Im} F(\zeta,z)| + |\zeta-z|^2]^{\sup(K-p+1,0)}$$
$$[-\rho(\zeta)-\rho(z) + |\operatorname{Im} F| + \mathscr{L}\rho(z).(z-\zeta)^2 + |\zeta-z|^4]^{\inf(K+3,p+2)}\Big\}^{-1}$$

$$+ |\zeta - z|^{2K-2n+1} \left\{ [-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\mathrm{Im} F|+|\zeta-z|^2]^{\sup(K-p+1,0)} \right.$$

$$\left. [-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\mathrm{Im} F|+\mathscr{L}\rho(z).(z-\zeta)^2+|\zeta-z|^4]^{\inf(p,K+1)} \right\}^{-1} \Bigg] d\lambda(\zeta)$$

$$= 0(1)\sum_K \int_D |f(\zeta)| \, [k_1(\zeta,z) + k_2(\zeta,z)] \, d\lambda(\zeta)$$

Estimons, par exemple, le terme avec $k_1(\zeta,z)$ l'autre se traitant de façon identique. Si $f \in L^q_{01}(D)$, posons $q' = \frac{q}{q-1}$. Alors

$$\int_D |f(\zeta)| k_1(\zeta,z) d\lambda(\zeta) \leqslant \|f\|_{L^q(D)} \left[\int_D k_1(\zeta,z)^{q'} d\lambda(\zeta) \right]^{1/q'}$$

Dans le système de coordonnées $t_1,\dots,t_{2n}$ déjà utilisé

$$\int_D k_1(\zeta,z)^{q'} d\lambda(\zeta) = \sum_{k=0}^{p-1} 0(1)$$

$$\int_{|t|<R,\, t_1+\epsilon>0} \frac{dt_1 \dots dt_{2n}}{[\epsilon + |t_1| + |t_2| + t_3^2 + \dots + t_{2p}^2 + t_{2p+1}^4 + \dots + t_{2n}^4]^{q'(K+3)} [\,|t_1| + \dots + |t_{2n}|\,]^{(2n-2K-3)q'}}$$

On intègre en polaire par rapport aux variables $t_{2p+1},\dots,t_{2n}$, puis par rapport aux variables $t_3,\dots,t_{2p}$, enfin on intègre par rapport à t_2 et t_1 :

$$\int_D k_1(\zeta,z)^{q'} d\lambda(\zeta) \leqslant \left[\frac{C}{-\rho(z)} \right]^{(\frac{n}{2}+\frac{p}{2}+\frac{7}{4})q' - \frac{n}{2} - \frac{p}{2} - 1}$$

donc

$$\int_D |f(\zeta)| k_1(\zeta,z) d\lambda(\zeta) \leqslant \frac{C \|f\|_{L^q(D)}}{[-\rho(z)]^{(\frac{3q}{4}+\frac{n}{2}+\frac{p}{2}+1)q^{-1}}} \leqslant \frac{C \|f\|_{L^q(D)}}{-\rho(z)^{\frac{3}{4}+\frac{n+1/2}{q}}}$$

Ainsi $|\nu_z H_1 f(z)| \leqslant \dfrac{C \|f\|_{L^q(D)}}{-\rho(z)^{\frac{3}{4}+\frac{n+1/2}{q}}}$

donc $H_1 f(f) \in \Lambda_\alpha(D)$ avec $\alpha = \dfrac{1}{4} - \dfrac{n+1/2}{q}$.

Le théorème 1 est ainsi entièrement démontré. On va maintenant s'occuper de la démonstration du théorème 2.

III. - ESTIMATIONS LORSQUE $f(\zeta)\ (\partial\bar\partial\rho(\zeta))^{p-1} \Big/ T^{\mathbb{C}}_{\partial D}(D) = 0(|\zeta|)$

Soit $f \in C^1_{01}(\bar D)$ une (0,1)-forme de classe C^1 sur $\bar D$ telle que

$$f(0)_\wedge(\partial\bar\partial\rho(0))^{p-1} \Big/ T^{\mathbb{C}}_{\partial D}(0) = 0 \tag{17}$$

où p−1 est toujours le rang de $\mathscr{L}\rho(0) \Big/ T^{\mathbb{C}}_{\partial D}(0)$.

Pour tout $\zeta \in \bar D$, soient $e_1(\zeta)$ un vecteur unitaire normal à la surface $\partial D_\zeta = \{z : \rho(z) = \rho(\zeta)\}$ et $(e_2(\zeta),\ldots,e_n(\zeta))$ un système de vecteurs propres de $\mathscr{L}\rho(\zeta) \Big/ T^{\mathbb{C}}_{\partial D_\zeta}(\zeta)$ qui forment une base de $T^{\mathbb{C}}_{\partial D_\zeta}(\zeta)$. Soit$(e_1^*(\zeta),\ldots,e_n^*(\zeta))$ la base duale de $(e_1(\zeta),\ldots,e_n(\zeta))$.

On a

$$\partial\bar\partial\rho(\zeta) = \sum_{i=2}^{n} \mu_i(\zeta)e_i^*(\zeta)_\wedge\overline{e_i^*(\zeta)} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i'(\zeta)e_1^*(\zeta)_\wedge\overline{e_i^*(\zeta)} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i''(\zeta)e_i^*(\zeta)_\wedge\overline{e_1^*(\zeta)}$$

Quitte à renuméroter les indices, on peut supposer que $\mu_{p+1}(0) = \ldots = \mu_n(0) = 0$ et par conséquent, d'après (8') :

$$(18)\ \partial\bar\partial\rho(\zeta) = \sum_{i=2}^{p} \mu_i(\zeta)e_i^*(\zeta)_\wedge\overline{e_i^*(\zeta)} + 0(|\zeta|^2) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i'(\zeta)e_1^*(\zeta)_\wedge\overline{e_i^*(\zeta)} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i''(\zeta)e_i^*(\zeta)_\wedge\overline{e_1^*(\zeta)}$$

D'après l'hypothèse (17) sur

$$f(\zeta) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\zeta)\overline{e_i^*(\zeta)}$$

on a : $f_{p+1}(0) = \ldots = f_n(0) = 0$ donc

$$f(\zeta) = \sum_{i=1}^{p} f_i(0)\overline{e_i^*(\zeta)} + 0(|\zeta|)$$

et parce que $\partial\rho(\zeta)$ et $\bar\partial\rho(\zeta)$ sont proportionnels à $e_1^*(\zeta)$ et $\overline{e_1^*(\zeta)}$ respectivement, si l'on note $\omega_i(\zeta) = \mu_i(\zeta)e_i^*(\zeta)_\wedge\overline{e_i^*(\zeta)}$, on a :

$$\begin{aligned}f(\zeta)_\wedge\partial\rho(\zeta)_\wedge\bar\partial\rho(\zeta)_\wedge(\partial\bar\partial\rho(\zeta))^k &= \sum_{i=2}^{p} f_i(0)\overline{e_i^*(\zeta)}_\wedge e_1^*(\zeta)_\wedge\overline{e_1^*(\zeta)}_\wedge \sum_{e=0}^{K}\ \sum_{\substack{2\leqslant i_1<\ldots<i_e\leqslant n}}\ \bigwedge_{\substack{j=1\\ i_j\neq i}}^{e} \omega_{i_j}\ 0(|\zeta|^{2(K-e)}) \\ &+ 0(|\zeta|)_\wedge e_1^*(\zeta)_\wedge\overline{e_1^*(\zeta)}_\wedge \sum_{e=0}^{K}\ \sum_{2\leqslant i_1<\ldots<i_e\leqslant n}\ \bigwedge_{j=1}^{e} \omega_{i_j}\ 0(|\zeta|^{2(K-e)})\end{aligned} \tag{19}$$

Reprenons l'expression (12) et estimons, par exemple, encore le dernier terme dont le noyau est $T_4(\zeta,z)$. D'après (9), (10), (19) et (8'), si $p \geqslant 2$

$$|T_4| = 0(1)\left[\frac{\sum\limits_{i=2}^{p}\ \sum\limits_{\substack{2\leqslant i_1<\ldots<i_K\leqslant n\\ i_j\neq i}} \mu_{i_1}(\zeta)\ldots\mu_{i_K}(\zeta)}{\tilde{F}(\zeta,z)^{K+2}\ |\zeta-z|^{2n-2K-3}} + \frac{|\zeta|\ \sum\limits_{2\leqslant i_1<\ldots<i_K\leqslant n} \mu_{i_1}(\zeta)\ldots\mu_{i_K}(\zeta)}{\tilde{F}(\zeta,z)^{K+2}\ |\zeta-z|^{2n-2K-3}}\right]$$

$$= 0(1)\left[\frac{|\zeta-z|^{2K-2n+3}}{[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\mathrm{Im}F|+|\zeta-z|^2]^{\sup(K-p+2,0)}[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\mathrm{Im}F|+\mathscr{L}\rho(z).(z-\zeta)^2+|\zeta-z|^4]^{\inf(K+2,p)}}\right.$$

$$\left. + \frac{|\zeta-z|^{2K-2n+3}}{[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\mathrm{Im}F|+|\zeta-z|^2]^{\sup(K-p+\frac{3}{2},\frac{1}{2})}[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\mathrm{Im}F|+\mathscr{L}\rho(z).(z-\zeta)^2+|\zeta-z|^4]^{\inf(K+\frac{3}{2},p+\frac{1}{2})}}\right]$$

$$= 0(1)\left[\frac{|\zeta-z|^{-2n+3}}{[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\mathrm{Im}F|+|\zeta-z|^4+\mathscr{L}\rho(z)(z-\zeta)^2]^2} + \frac{|\zeta-z|^{2p-2n-1}}{[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\mathrm{Im}F|+\mathscr{L}\rho(z).(z-\zeta)^2+|\zeta-z|^4]^p}\right.$$

(20)

$$+ \frac{|\zeta-z|^{-2n+3}}{[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\mathrm{Im}F|+|\zeta-z|^2]^{\frac{1}{2}}\,[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\mathrm{Im}F|+\mathscr{L}\rho(z)(z-\zeta)^2+|\zeta-z|^4]^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{|\zeta-z|^{2p-2n+1}}{[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\mathrm{Im}F|+|\zeta-z|^2]^{\frac{1}{2}}\,[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\mathrm{Im}F|+\mathscr{L}\rho(z)(z-\zeta)^2+|\zeta-z|^4]^{p+\frac{1}{2}}}$$

Lorsque $p = 1$, seuls les 2 premiers termes subsistent et ils sont égaux. Comme précédemment, on exprime chaque terme dans le système de coordonnées $t_1,\ldots,t_{2n}$. Cherchons le type faible du premier terme T_{41} et du dernier terme T_{44} de (20) : ce sont les plus délicats.

$$\lambda\{t\in B(0,R) : T_{41} \geqslant \alpha\} \leqslant C\lambda\left\{t : [\,|t_1|+|t_2|+t'^2+t''^4]^2\,[\,|t_1|+|t_2|+t'+t'']^{2n-3} \leqslant \frac{1}{\alpha}\right\}$$

Choisissons $\nu > 0$

$$\lambda\{t : T_{41} \leqslant \alpha\} \leqslant C\lambda\left\{t : t''^{2n+5} \leqslant \frac{1}{\alpha} \text{ et } (t_1^2+t_2^2)t''^{2n-3} \leqslant \frac{1}{\alpha} \text{ et } t'^4 t''^{2n-3} \leqslant \frac{1}{\alpha} \text{ et } t'' \geqslant \nu\right\}$$

(21)

$$+ C\lambda\left\{t : t'' < \nu \text{ et } (\,|t_1|+|t_2|+t'^2)^2(\,|t_1|+|t_2|+t')^{2n-3} \leqslant \frac{1}{\alpha}\right\}$$

Calculons le premier terme de droite : A_1 :

$$A_1 \leqslant \int_{\nu}^{(\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{2n+5}}} r^{2n-2p-1} \left(\frac{1}{\alpha r^{2n-3}}\right) \left(\frac{1}{\alpha r^{2n-3}}\right)^{\frac{p-1}{2}} dr$$

$$= 0(1) \left[(\frac{1}{\alpha})^{\frac{p+1}{2}} \nu^{2n-2p-(2n-3)\frac{p+1}{2}} - (\frac{1}{\alpha})^{\frac{2n+3p+4}{2n+5}} \right]$$

D'autre part, le deuxième terme A_2 du 2ème membre de (21) vérifie :

$$A_2 \leqslant C\lambda \left\{ t : t'' < \nu \text{ et } t'^{2n+1} \leqslant \frac{1}{\alpha} \text{ et } (t_1^2+t_2^2)t'^{2n-3} \leqslant \frac{1}{\alpha} \text{ et } t' > \mu \right\}$$

$$+ C\lambda \left\{ t : t'' < \nu \text{ et } t' < \mu \text{ et } (|t_1| + |t_2|)^{2n-1} \leqslant \frac{1}{\alpha} \right\}$$

$$= C(B_1 + B_2)$$

où $\mu > 0$ est à choisir. On a alors

$$B_1 \leqslant \nu^{2n-2p} \int_{\mu}^{(\frac{1}{\alpha})^{(2n+1)^{-1}}} r^{2p-3} \frac{1}{\alpha r^{2n-3}} dr$$

$$= 0(1) \left[\frac{1}{\alpha} \mu^{2p-2n+1} - (\frac{1}{\alpha})^{\frac{2n+2}{2n+1}} \right] \nu^{2n-2p}$$

$$B_2 \leqslant \nu^{2n-2p} \mu^{2p-2} (\frac{1}{\alpha})^{\frac{2}{2n-1}}$$

Si l'on choisit :

$$\nu = (\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{(2n+1)(2n-1)(n-p)}} \quad \text{et } \mu = (\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{2n-1}}$$

alors A_1, B_1 et B_2 sont majorés par $C\,(\frac{1}{\alpha})^{\frac{2n+2}{2n+1}}$. Donc T_{41} est de type faible $\frac{2n+2}{2n+1}$. De même :

$$\lambda\{t \in B(0,R) : T_{44} \geqslant \alpha\} \leqslant C\lambda\{t : [\,|t_1| + |t_2| + t'^2 + t''^4]^{p+\frac{1}{2}} [\,|t_1| + |t_2| + t'^2 + t''^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$[\,|t_1| + |t_2| + t' + t'']^{2n-2p-1} \leqslant \frac{1}{\alpha}\}$$

$$\leqslant C\lambda\left\{ t : t''^{2n+2p+2} \leqslant \frac{1}{\alpha} \text{ et } t'^{2p+1} t''^{2n-2p} \leqslant \frac{1}{\alpha} \text{ et } (|t_1| + |t_2|)^{p+\frac{1}{2}} t''^{2n-2p} \leqslant \frac{1}{\alpha} \text{ et } t'' \geqslant \nu \right\}$$

$$+ C\lambda\left\{ t : t'' < \nu \text{ et } [\,|t_1| + |t_2| + t'^2]^{p+1} [\,|t_1| + |t_2| + t']^{2n-2p-1} \leqslant \frac{1}{\alpha} \right\}$$

$$\leqslant C\lambda\left\{t : t''^{2n+2p+2} \leqslant \frac{1}{\alpha} \text{ et } t'^{2p+1} t''^{2n-2p} \leqslant \frac{1}{\alpha} \text{ et } (|t_1|+|t_2|)^{p+\frac{1}{2}} t''^{2n-2p} \leqslant \frac{1}{\alpha} \text{ et } t'' \geqslant \nu\right\}$$

$$+ C\lambda\left\{t : t'' < \nu \text{ et } t'^{2n+1} \leqslant \frac{1}{\alpha} \text{ et } (|t_1|+|t_2|)^{p+1} t'^{2n-2p-1} \leqslant \frac{1}{\alpha} \text{ et } t' \geqslant \mu\right\}$$

$$+ C\lambda\left\{t : t'' < \nu \text{ et } t' < \mu \text{ et } (|t_1|+|t_2|)^{2n-p} \leqslant \frac{1}{\alpha}\right\}$$

$$= C\,(A'_1 + A'_2 + A'_3)$$

où ν et μ positifs sont à choisir. Comme précédemment, on calcule séparément A'_1, A'_2, A'_3, puis on choisit par exemple

$$\nu = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2n+1}} \quad \text{et} \quad \mu = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{p+1}{(2n+1)(p-1)} - \frac{1}{(2n-p)(p-1)}}$$

Avec ce choix, chaque terme A'_1, A'_2, A'_3 est majoré par $C\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2n+2}{2n+1}}$. Finalement T_4 est de type faible $\frac{2n+2}{2n+1}$ en ζ uniformément en z et en z uniformément en ζ. A nouveau du lemme 15-3 de [FS] et du lemme 4.4. de [K], on déduit les estimations a', b' et c' du théorème 2.

Soit à nouveau ν_z un champ de vecteurs unitaires dans D. D'après (12) et (19) :

$$\nu_z H_1 f(z) = 0(1) \sum_{K=0}^{n-2} \left[\int_D \frac{|f(\zeta)| \sum_{2\leqslant i_1<\ldots<i_{K-1}\leqslant n} \mu_{i_1}(\zeta)\ldots\mu_{i_{K-1}}(\zeta)}{|\tilde{F}(\zeta,z)|^{K+2}\, |\zeta-z|^{2n-2K-2}} \right.$$

$$+ \int_D \frac{|f(\zeta)| \sum_{2\leqslant i_1<\ldots<i_{K-1}\leqslant n} \mu_{i_1}(\zeta)\ldots\mu_{i_{K-1}}(\zeta)}{|\tilde{F}(\zeta,z)|^{K+1}\, |\zeta-z|^{2n-2K-1}}$$

$$+ \sum_{i=2}^{p} \int_D \frac{|f(\zeta)| \sum_{\substack{2\leqslant i_1<\ldots<i_K\leqslant n \\ i_j \neq i}} \mu_{i_1}(\zeta)\ldots\mu_{i_K}(\zeta)}{|\tilde{F}(\zeta,z)|^{K+3}\, |\zeta-z|^{2n-2K-3}}$$

$$\left. + \int_D \frac{|f(\zeta)|\,|\zeta| \sum_{2\leqslant i_1<\ldots<i_K\leqslant n} \mu_{i_1}(\zeta)\ldots\mu_{i_K}(\zeta)}{|\tilde{F}(\zeta,z)|^{K+3}\, |\zeta-z|^{2n-2K-3}} \right]$$

$$= 0(1) \sum_{K=0}^{n-2} \int |f(\zeta)| \left[\frac{|\zeta-z|^{2K-2n+2}}{[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\operatorname{Im} F|+|\zeta-z|^2]^{\sup(K-p,0)}[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\operatorname{Im} F|+\mathscr{L}\rho(z).(z-\zeta)^2+|\zeta-z|^4]^{\inf(p+2,K+2)}}\right.$$

$$+\frac{|\zeta-z|^{2K-2n+1}}{[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\operatorname{Im}F|+|\zeta-z|^2]^{\sup(K-p,0)}[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\operatorname{Im}F|+\mathscr{L}\rho(z).(z-\zeta)^2+|\zeta-z|^4]^{\inf(p+1,K+1)}}$$

$$+\frac{|\zeta-z|^{2K-2n+3}}{[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\operatorname{Im}F|+|\zeta-z|^2]^{\sup(K-p+2,0)}[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\operatorname{Im}F|+\mathscr{L}\rho(z).(z-\zeta)^2+|\zeta-z|^4]^{\inf(p+1,K+3)}}$$

$$+\frac{[\zeta-z|^{2K-2n+3}}{[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\operatorname{Im}F|+|\zeta-z|^2]^{\sup(K-p+\frac{3}{2},\frac{1}{2})}[-\rho(z)-\rho(\zeta)+|\operatorname{Im}F|+\mathscr{L}\rho(z).(z-\zeta)^2+|\zeta-z|^4]^{\inf(p+\frac{3}{2},K+\frac{5}{2})}}$$

$$=0(1)\int_D |f(\zeta)|[k'_1(\zeta,z)+k'_2(\zeta,z)+k'_3(\zeta,z)+k'_4(\zeta,z)]$$

Les 4 termes se traitent de façon analogue : estimons le dernier.

Si $f\in L^q_{01}(D)$, posons $q'=\dfrac{q}{q-1}$. On a alors, d'après Hölder,

$$\int_D |f(\zeta)|k'_4(\zeta,z)d\lambda(\zeta)\leqslant \|f\|_{L^q(D)}\left[\int_D k'_4(\zeta,z)^{q'}d\lambda(\zeta)\right]^{\frac{1}{q'}}$$

Dans le système de coordonnées $t_1,\dots,t_{2n}$:

$$\int_D k'_4(\zeta,z)^{q'}d\lambda(\zeta)=\sum_{K=0}^{p-1}0(1)\int_{\substack{|t|<R\\ t_1+\epsilon>0}}\frac{dt_1\dots dt_{2n}}{[\epsilon+|t_1|+|t_2|+t_3^2+\dots+t_{2n}^2]^{\frac{q'}{2}}[\epsilon+|t_1|+|t_2|+t'^2+t''^4]^{(K+\frac{5}{2})q'}}$$

$$\times\frac{1}{[\,|t_1|+|t_2|+t'+t'']^{(2n-2K-3)q'}}$$

On intègre en polaire par rapport à $t_{2p+1},\dots,t_{2n}$, puis par rapport à $t_3,\dots,t_{2p}$, enfin on intègre par rapport à t_2 et t_1 :

$$\int_D k'_4(\zeta,z)^q\,d\lambda(\zeta)\leqslant\left[\frac{C}{-\rho(z)}\right]^{q'(n+\frac{3}{2})-n-1}$$

donc

$$\int_D |f(\zeta)|\, k_4'(\zeta,z)\, d\lambda(\zeta) \leqslant \frac{C\, \|f\|_{L^q(D)}}{[-\rho(z)]^{\frac{1}{2}+\frac{n+1}{q}}}$$

Ainsi

$$|\nu_z H_1 f(z)| \leqslant \frac{C\, \|f\|_{L^q(D)}}{[-\rho(z)]^{\frac{1}{2}+\frac{n+1}{q}}}$$

donc $H_1 f(z) \in \Lambda_\alpha(D)$ avec $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{q}$.

Ceci termine la démonstration du théorème 2.

REFERENCES

[BC] J. BRUNA et J. DEL CASTILLO. *«Hölder and L^p-estimates for the $\bar\partial$-equation in some convex domains with real-analytic boundary».* Math. Ann., 269, n° 4, (1984), p. 527-539.

[FS] G.B. FOLLAND et E.M. STEIN. *«Estimates for the $\bar\partial_b$-complex and analysis on the Heisenberg group».* Comm. Pure applied math., 27, (1974), p. 429-522.

[H] G.M. HENKIN. *«Intégral representations of functions holomorphic in strictly pseudo-convex domains and some applications».* Math. USSR Sb., 11, (1970), p. 273-281.

[K] S.G. KRANTZ. *«Optimal lipschitz and L^p regularity for the equation* $\bar\partial u = f$ *on strongly pseudoconvex domains».* Math. Ann., 219, (1976), p. 233-260.

[L] J. LERAY. *«Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (problème de Cauchy, III)».* Bull. Soc. Math. France, 87, (1959), p. 81-180.

[RA] E. RAMIREZ de ARELLANO. *«Ein divisionsproblem und randintegraldarstellungen in der Komplexen analysis».* Math. Ann., 184, (1970), p. 172-187.

[R] R.M. RANGE. *«On Hölder estimates for* $\bar\partial u = f$ *on weakly pseudoconvex domains».* Proc. Int. Conf. Cortona, Italy, 1976-1977, (1978), p. 247-267.

[S] E.M. STEIN. *«Singular integrals and differentiability of functions».* Princeton Univ. Press, Princeton (1970).

[V] J. VERDERA. «L^∞*-continuity of Henkin operators solving* $\bar\partial$ *in certain weakly pseudoconvex domains of* $\mathbb{C}^2$». Proc. Royal Soc. Edinburg 99A, (1984), p. 25-33.

(Manuscrit reçu le 20 novembre 1985)