ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JACQUES GAPAILLARD
JACQUES MICHAUX

Sur les processus linéaires définis sur un espace nucléaire

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 8, nº 1 (1986-1987), p. 75-92

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1986-1987_5_8_1_75_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol.VIII, n°1, 1986-1987

Sur les processus linéaires définis sur un espace nucléaire

JACQUES GAPAILLARD [1] - JACQUES MICHAUX [1]

RÉSUMÉ. — On établit un théorème de décomposition d'un processus linéaire complexe continu sur un espace nucléaire quelconque. La forme aléatoire qui en résulte est unique à l'indiscernabilité près. Par ailleurs, sous des hypothèses naturelles, on obtient que toute forme aléatoire intégrable est fortement intégrable et uniforme en des sens convenables.

ABSTRACT. — One proves a decomposition theorem for a complex continuous linear process on a general nuclear space. The resulting random form is unique up to indistinguishability. Moreover, under natural assumptions, one obtains that every integrable random form is strongly integrable and uniform in suitable meanings.

§ Introduction

Le rôle de la nucléarité dans certains problèmes de prolongement de mesures ou de décompositions de processus linéaires est bien connu depuis les travaux de R.A. MINLOS ([8]). En ce qui concerne les processus linéaires, nous avons voulu ici reprendre cette question en nous efforçant d'en donner un exposé à la fois simple et général. Il est ainsi mis en évidence que c'est bien la seule nucléarité qui est cruciale tandis que la considération d'espaces dénombrablement hilbertiens dans les exposés classiques ([6],[7]) apparaît comme une commodité technique, l'allègement de certaines démonstrations semblant d'ailleurs tenir davantage à l'existence de normes continues (hypothèse implicite dans [3]) qu'à la compatibilité des normes. A la différence de L. SCHWARTZ ([9],[10]) qui utilise des probabilités de RADON, nous nous sommes placés dans le cadre d'espaces probabilisés abstraits non nécessairement complets.

[1] Institut de Mathématiques et d'Informatique de l'Université de Nantes, 2,rue de la Houssinière, 44072 Nantes Cedex 03

Au moins pour les questions de mesurabilité il est indispensable de disposer de propriétés de séparabilité. On sait que les espaces nucléaires sont séparables par semi-normes ([5]) mais un résultat plus général se révèle essentiel pour obtenir le théorème 3 qui étend un résultat figurant dans [3]. Ce théorème 3 intervient dans la démonstration du théorème 5 qui, sous des hypothèses très générales, exprime l'équivalence entre les intégrabilités faibles et fortes. Par ailleurs, le théorème 5 permet l'obtention naturelle d'un théorème sur les moments qui généralise un résultat de X. FERNIQUE ([3]).

§ I. Définitions et notations

Etant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on désigne par $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires (v.a.) complexes, muni de la topologie de la convergence stochastique. On rappelle que, pour cette topologie, $\mathcal{M}(\Omega)$ est un espace vectoriel topologique (e.v.t.) complet et semi-métrisable mais non localement convexe en général. Le quotient de $\mathcal{M}(\Omega)$ par le sous-espace vectoriel des v.a. presque sûrement nulles sera noté $M(\Omega)$ et h sera la surjection canonique de $\mathcal{M}(\Omega)$ sur $M(\Omega)$.

Soit E un espace localement convexe complexe. Un **processus linéaire** (p.l.) X est une application linéaire (continue ou non) de E dans $M(\Omega)$. Toute application linéaire x de E dans $\mathcal{M}(\Omega)$ telle que $h(x(\varphi)) = X(\varphi)$ pour tout $\varphi \in E$, est une **réalisation de** X. On désigne par $\Phi(E)$ l'ensemble des sous- espaces vectoriels de E de dimension finie et, pour $F \in \Phi(E)$, on note X_F la restriction à F du p.l. X.

On appelle **forme aléatoire** (f.a.) toute application ξ de Ω dans E', dual topologique de E, telle que $< \xi(.), \varphi > \in \mathcal{M}(\Omega)$ pour tout $\varphi \in E$ (où $< .,. >$ est le crochet de dualité entre E' et E), donc telle que l'application $\varphi \to < \xi(.), \varphi >$ soit une réalisation d'un processus linéaire X **associé à** ξ. A l'inverse, on dit que la f.a. ξ est une **décomposition** du p.l. X. Un p.l. admettant une décomposition est dit **décomposable**.

Deux f.a. ξ_1 et ξ_2 de même p.l. associé sont dites **équivalentes**. Plus particulièrement, elles sont dites **indiscernables** si $\xi_1 = \xi_2$ p.s.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des semi-normes continues sur E. A $p \in \mathcal{P}$ on associe l'espace semi-normé (E, p) puis l'espace normé $E_p = {}^{(E,p)} / {}_{\ker p}$ (muni de la norme ${}^{p}/_{\ker p}$) et son complété $\hat{E}_p$. On note $\|.\|_p$ la norme dans le dual topologique E'_p commun aux trois espaces ci-dessus et on écrira $\|x\|_p = +\infty$ pour tout $x \in E' \setminus E'_p$.

Une f.a. ξ est dite **uniforme** s'il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $\|\xi(.)\|_p < +\infty$ p.s.

Une f.a. ξ est dite **admissible** s'il existe une topologie $\mathcal{T}_o$ localement convexe sur E, semi-métrisable, moins fine que la topologie initiale $\mathcal{T}$ de E et telle que $\xi(\omega) \in (E, \mathcal{T}_o)'$ p.s. . On dira qu'une telle topologie $\mathcal{T}_o$ est une **ξ-topologie.**

Les résultats des § 3 et 4 sont obtenus pour un espace E nucléaire, non nécessairement séparé. Classiquement, cette notion n'est envisagée que dans le cas séparé; dans le cas non séparé, on adopte la même définition ou, de façon équivalente, on dit que E est nucléaire si l'espace séparé associé ${}^{E}/_{\overline{\{o\}}}$ est nucléaire au sens habituel.

§ II. Nucléarité et séparabilité

La séparabilité des espaces de Montel métrisables a été prouvée par J. DIEUDONNÉ dans [2] (voir aussi [3]). La démonstration est reprise ici sous une forme générale et le résultat sera appliqué aux espaces nucléaires.

Pour l'instant, E est simplement un e.v.t. réel ou complexe. Si $V \in \mathcal{V}(o)$, ensemble des voisinages de l'origine, disons qu'un ensemble non vide $A \subset E$ est V**-dispersé** si, quel que soit $(x, y) \in A^2$ tel que $x \neq y$, on a $x - y \notin V$, et que A est **dispersé** s'il est V-dispersé pour un $V \in \mathcal{V}(o)$.

LEMME 1.— *(1) Si A est infini précompact, A n'est pas dispersé.*

(2) Si, pour un $V \in \mathcal{V}(o)$ équilibré, A est V-dispersé maximal, alors $A + V = E$.

(3) Si A est dispersé non dénombrable et si E est semi-métrisable, A contient un ensemble borné infini.

Les points (1) et (2) sont immédiats. Pour (3) voir [3].

THÉORÈME 1.— *Tout e.v.t. semi-métrisable où aucun borné infini n'est dispersé est séparable.*

Démonstration.— Une base $(V_n)_{n \geq 1}$ de voisinages équilibrés de l'origine étant choisie, l'axiome de Zorn assure l'existence, pour chaque $n \geq 1$, d'une partie A_n V_n-dispersée maximale, nécessairement dénombrable d'après le lemme 1 (3). Alors, si A_∞ est la réunion des A_n,le point (2) du lemme 1 assure que $A_\infty + V_n = E$ pour tout $n \geq 1$, d'où la densité de A_∞ dans E.

COROLLAIRE (1).1.— *Tout e.v.t. semi-métrisable où tout borné est* *précompact, est séparable. En particulier, tout espace de Montel métrisable est séparable.*

Comme tout borné d'un espace nucléaire est précompact, on a aussi :

COROLLAIRE (1).2.— *Tout espace nucléaire semi-métrisable est séparable. Plus généralement, tout espace nucléaire limite inductive d'une suite d'espaces nucléaires semi-métrisables, est séparable.*

On retrouve ainsi la séparabilité des espaces $\mathcal{D}_K, \mathcal{D}, \mathcal{S}, \mathcal{E}$.

La première partie de ce corollaire se généralise aussi sous la forme suivante :

THÉORÈME 2.— *Soient* E *un espace nucléaire,* F *un e.v.t. semi-métrisable et* $u : E \to F$ *une application linéaire continue. Alors :*

(1) Il existe sur E *une topologie d'espace nucléaire semi-métrisable moins fine que la topologie initiale et telle que* u *soit encore continue pour cette topologie.*

(2) Si u *est surjective,* F *est séparable. En particulier* E *est séparable pour toute topologie d'e.v.t. semi-métrisable moins fine que la topologie initiale.*

Démonstration.— (1) Soit $(V_n)_{n\geq 1}$ une base de voisinages de l'origine dans F. Pour chaque $n \geq 1$ il existe $p_n \in \mathcal{P}$ vérifiant $u(\{x \in E; p_n(x) < 1\}) \subset V_n$, d'où la continuité de u pour la topologie $\mathcal{T}_o$ (moins finie que la topologie initiale $\mathcal{T}$) définie sur E par la suite $(p_n)_{n\geq 1}$. Soit maintenant $\mathcal{T}_1$ la topologie sur E associée à la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{P}$ définie par récurrence par $q_1 \geq p_1$ et, pour $n \geq 2$, $q_n \geq \sup(p_n,\ q_{n-1}) = p'_n$ avec l'application canonique $\widehat{E}_{q_n} \to \widehat{E}_{p'_n}$ nucléaire. Alors il est immédiat que $E, \mathcal{T}_1)$ est nucléaire semi-métrisable, avec $\mathcal{T}_1$ moins fine que $\mathcal{T}$; tandis que $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_o$, ce qui assure la $\mathcal{T}_1$-continuité de u.

(2) Conséquence de (1) et du corollaire (1).2., puisque l'image continue d'un espace séparable est séparable.

COROLLAIRE (2).1.— *Si* E *est un espace nucléaire, pour toute semi-norme* p *continue sur* E*, les espaces semi-normés ou normés* (E,p)*,* E_p *et* $\widehat{E}_p$*, sont séparables.*

On retrouve ici la propriété qu'ont les espaces nucléaires (et plus généralement les espaces de Schwartz) d'être séparables par semi-normes (voir [5]).

COROLLAIRE (2).2.— *(1) Toute f.a. uniforme sur un espace nucléaire est admissible.*

(2) Toute f.a. sur un espace nucléaire séparable est admissible.

La topologie initiale $\mathcal{T}$ des espaces E intervenant dans toute la suite sera toujours supposée nucléaire.

§ III. Processus linéaires et formes aléatoires

LEMME 2.— *(Minlos). Soient k, n, d trois entiers tels que $1 \leq k \leq n \leq k$ et soient $r > 0$ et λ_j $(1 \leq j \leq k)$ des réels.*

On considère l'ensemble $D = \{y = (y_1, ..., y_d) \in \mathbf{R}^d; \sum_{j=1}^k \lambda_j^2 y_j^2 \leq 1\}$ et on pose :

$$S(r) = \begin{cases} \{x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbf{R}^d;\ \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq r^2; x_j = 0,\ n+1 \leq j \leq d\} \\ \quad si\ n < d, \\ \{x\ ;\ \sum_{j=1}^d x_j^2 \leq r^2\}\ si\ n = d. \end{cases}$$

Alors, toute probabilité μ sur $\mathbf{R}^d$ telle que $\widehat{\mu}(y) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{i\sum_{j=1}^d y_j x_j} d\mu(x)$ vérifie $|\widehat{\mu}(y) - 1| \leq \alpha$ sur D, possède la propriété suivante :

$$\mu(S(r)) \geq 1 - (1 - e^{-\frac{1}{2}})^{-1} \left(\alpha + \frac{2}{r^2} \sum_{j=1}^k \lambda_j^2\right).$$

Démonstration.— L'énoncé ci-dessus est donné dans [7] avec $k = n = d$. La généralisation de ce résultat s'appuie sur une démonstration donnée dans [1]. Posons

$$S_l(r) = \{x \in \mathbf{R}^d; \sum_{j=1}^n x_j^2 + l^2 \sum_{j=n+1}^d x_j^2 \leq r^2\},\ l \in \mathbf{N},$$

et

$$I = \int_{\mathbf{R}^d} \left\{1 - \exp\left(-\frac{1}{2r^2}\left(\sum_1^n x_j^2 + l^2 \sum_{n+1}^d x_j^2\right)\right)\right\} d\mu(x).$$

Il est clair que $I \geq (1 - e^{-\frac{1}{2}})\mu((S_l(r))^C)$. Par ailleurs, en procédant comme dans [7], on vérifie que

$$I < \alpha + \frac{2}{r^2} \sum_{j=1}^k \lambda_j^2;$$

par suite, pour tout l :

$$\mu(S_l(r)) > 1 - (1 - e^{-\frac{1}{2}})^{-1} \left(\alpha + \frac{2}{r^2} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^2\right).$$

On conclut en remarquant que la suite $(S_l(r))_{l \geq 0}$ est décroissante et d'intersection $S(r)$.

LEMME 3.— *Soit X un processus linéaire, continu de E dans $M(\Omega)$. Alors, pour tout $\epsilon > O$, il existe $r > O$ et $q \in \mathcal{P}$ tels que, pour tout F de $\Phi(E)$, on ait :*

$$P\left(\{\omega \ ; \sup_{\substack{\varphi \in F \\ q(\varphi) \leq 1}} |x_F(\varphi)(\omega)| \leq r\}\right) \geq 1 - \epsilon,$$

où x_F est une réalisation quelconque de X_F. Si de plus X est continu sur un (E, p), $p \in \mathcal{P}$, q ne dépend pas de ϵ.

Démonstration.— Soit $F \in \Phi(E)$; l'application $\omega \to x_F(.)(\omega)$ est mesurable de Ω dans F^* (muni de sa tribu borélienne); appelons m_F la probabilité image de P par cette application. Il est clair que m_F ne dépend pas du choix de la réalisation x_F. Si l'on considère F comme un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ (que l'on notera $F_{\mathbf{R}}$), on peut définir $Re : F^* \to (F_{\mathbf{R}})^* = F^*_{\mathbf{R}}$ par $< Re\ x, \varphi >= Re\ < x, \varphi >$ pour tout φ de F. L'application Re est mesurable vis-à-vis des tribus boréliennes. Donc si $C_X(\varphi) = \int_\Omega e^{iReX(\varphi)} dP$, pour tout φ de F, on a :

$$C_X(\varphi) = \int_{F^*_{\mathbf{R}}} e^{i<x,\varphi>} d\ Re(m_F)(x) = \widehat{Re(m_F)}(\varphi).$$

La continuité de X entraîne celle de $\varphi \to C_X(\varphi)$ et l'on peut donc écrire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathcal{P}, \left(p(\varphi) \leq 1 \implies |C_X(\varphi) - 1| < \frac{\epsilon}{2\alpha}\right)$$

où $\alpha = (1 - e^{-\frac{1}{2}})^{-1}$, soit encore :

$$\forall \epsilon > O, \exists p \in \mathcal{P}, \forall F \in \Phi(E), \left(p(\varphi) \leq 1 \implies |\widehat{Re(m_F)}(\varphi) - 1| < \frac{\epsilon}{2\alpha}\right).$$

Pour ϵ donné, choisissons p dans $\mathcal{P}$ et préhilbertienne; choisissons également dans $\mathcal{P}$ une semi-norme préhilbertienne $q \geq p$ telle que l'application canonique $T_p^q : \widehat{E_q} \to \widehat{E_p}$ soit de Hilbert-Schmidt. Soit maintenant un élément quelconque F de $\Phi(E)$. En considérant une base $e_1, ..., e_k, ..., e_n, ..., e_d)$ de F telle que $(e_1, ..., e_n)$ soit orthonormale dans (F, q) et orthogonale dans (F, p), avec $p(e_j) = 0$ pour $k+1 \leq j \leq n$ et $q(e_j) = 0$ pour $n+1 \leq j \leq d$, la condition $p(\varphi) \leq 1$ pour

$$\varphi = \sum_{j=1}^{d} z_j e_j + \sum_{j=1}^{d} z_{j+1}(ie_j)$$

s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{k} z_j^2 \; p^2(e_j) + \sum_{j=1}^{k} z_{j+d}^2 \; p^2(e_j) \leq 1.$$

Comme

$$\widehat{Re(m_F)}(\varphi) = \int_{F_{\mathbf{R}}^*} e^{i<y,\varphi>} \, d \, Re(m_F)(y)$$

$$= \int_{F_{\mathbf{R}}^*} e^{i\left(\sum_{j=1}^{d} z_j <y,e_j> + \sum_{j=1}^{d} z_{j+d} <y,ie_j>\right)} d \, Re(m_F)(y)$$

vérifie $|\widehat{Re(m_F)}(\varphi) - 1| \leq \frac{\epsilon}{2\alpha}$ pour tout φ de F tel que $p(\varphi) \leq 1$, le lemme 2 donne :

$$Re(m_F)(S_F(r)) \geq 1 - \alpha \left(\frac{\epsilon}{2\alpha} + \frac{4}{r^2} \sum_{j=1}^{k} p^2(e_j) \right) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{4\alpha}{r^2} \, \|T_p^q\|_2^2,$$

où $\|.\|_2$ est la norme Hilbert-Schmidt et

$$S_F(r) = \left\{ y \in F_{\mathbf{R}}^*; \sum_{j=1}^{n} \left[(< y, e_j >)^2 + (< y, ie_j >)^2 \right] \leq r^2, \; < y, e_j > \right.$$

$$\left. =< y, ie_j >= 0, n+1 \leq j \leq d \right\}.$$

En choisissant $r \geq \frac{2\sqrt{2\alpha}\|T_p^q\|_2}{\sqrt{\epsilon}}$, on obtient alors et pour tout F de $\Phi(E)$: $Re(m_F)(S_F(r)) \geq 1 - \epsilon$. Comme $< x, \varphi >=< y, \varphi > -i < y, i\varphi >$ où $y = Re \, x$,

$$Re^{-1}(S_F(r)) = \left\{ x \in F^*; \sum_{j=1}^{n} | < x, e_j > |^2 \leq r^2, < x, e_j > \right.$$

$$\left. = 0, n+1 \leq j \leq d \right\}$$

$$= \left\{ x \in F^*;\ \sup_{\substack{\varphi \in F \\ q(\varphi) \leq 1}} | < x, y > | \leq r \right\},$$

d'où

$$P\left[\{\omega \in \Omega;\ \sup_{\substack{\varphi \in F \\ q(\varphi) \leq 1}} |x_F(\varphi)(\omega)| \leq r\}\right]$$

$$= m_F\left[\{x \in F^*;\ \sup_{\substack{\varphi \in F \\ q(\varphi) \leq 1}} | < x, \varphi > | \leq r\}\right]$$

$$= Re(m_F)\ (S_F(r)) \geq 1 - \epsilon.$$

Dans le cas où X est continu sur (E, p), q ne dépend plus de ϵ puisqu'il est choisi de telle sorte que $\|T_p^q\|_2 < +\infty$.

LEMME 4.— *Deux f.a. admissibles équivalentes sont indiscernables.*

Démonstration.— Si ξ_1 et ξ_2 sont deux f.a. admissibles on trouve facilement une topologie $\mathcal{T}_o$ sur E qui soit à la fois une ξ_1 - et une ξ_2 - topologie. Par le théorème 2, $\mathcal{T}_o$ est séparable et on considère une suite $(e_j)_{j \geq 1}$ dense dans $(E, \mathcal{T}_o)$. Il existe un $N \in \mathcal{A}$ tel que $P(N) = 0$ et vérifiant

$$\forall \omega \in \Omega \backslash N,\ \forall \varphi \in G,\ < (\xi_1 - \xi_2)(\omega), \varphi >= 0,$$

où G est le sous-espace engendré par les e_j, $j \geq 1$. Par continuité et densité relativement à $\mathcal{T}_o$ la propriété ci-dessus s'étend à tous les φ de E, d'où le résultat.

THÉORÈME 3.— *Soit X un p.l. continu de E dans $M(\Omega)$.*

(1) Le p.l.X est décomposable. Plus précisément, il possède une décomposition admissible, unique à l'indiscernabilité près.

(2) Si de plus X est continu sur (E, p) pour une semi-norme $p \in \mathcal{P}$, la décomposition admissible ci-dessus est uniforme.

Démonstration.— D'après le théorème 2(1), X est continu sur E muni d'une topologie $\mathcal{T}_o$, moins fine que la topologie initiale de E et pour laquelle $(E, \mathcal{T}_o)$ est semi-métrisable et nucléaire; elle est donc séparable d'après le théorème 2(2). Soit $(e_j)_{j \geq 1}$ une suite dense de $(E, \mathcal{T}_o)$ que l'on supposera linéairement indépendante. Pour tout $j \geq 1$, appelons F_j le sous-espace de E engendré par $(e_1, e_2, ..., e_j)$ et posons $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$.

Pour chaque j, choisissons une v.a. dans la classe $X(e_j)$. On peut ainsi construire par linéarité une réalisation x de la restriction de X à G. Soit $\epsilon > 0$; d'après le lemme 3, on peut choisir p, semi-norme continue sur $(E, \mathcal{T}_o)$, et $r > 0$ de telle sorte que pour tout $j \geq 1$, on ait :

$$P\left(\{\omega; \sup_{\substack{\varphi \in F_j \\ p(\varphi) \leq 1}} |x(\varphi)(\omega)| \leq r\}\right) \geq 1 - \epsilon.$$

Il est donc clair que :

$$\begin{aligned} & P\left(\{\omega; \sup_{\substack{\varphi \in G \\ p(\varphi) \leq 1}} |x(\varphi)(\omega)| \leq r\}\right) \\ &= P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \{\omega; \sup_{\substack{\varphi \in F_j \\ p(\varphi) \leq 1}} |x(\varphi)(\omega)| \leq r\}\right) \\ &= \lim_{j \to \infty} P\left(\{\omega; \sup_{\substack{\varphi \in F_j \\ p(\varphi) \leq 1}} |x(\varphi)(\omega)| \leq r\}\right) \geq 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

Maintenant, pour chaque k de $\mathbf{N}^*$, choisissons une semi-norme p_k continue sur $(E, \mathcal{T}_o)$ et un réel $r_k > 0$ tels que si $A_k = \{\omega; \sup_{\substack{\varphi \in G \\ p_k(\varphi) \leq 1}} |x(\varphi)(\omega)| \leq r_k\}$, on ait : $P(A_k) \geq 1 - \frac{1}{k}$. On peut alors écrire $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 1$.

Soit ξ l'application de Ω dans G^* définie par

$$< \xi(\omega), \varphi >= \begin{cases} x(\varphi)(\omega) \text{ pour tout } \varphi \text{ de } G \text{ si } \omega \in \bigcup_k A_k \\ 0 \text{ pour tout } \varphi \text{ de } G \text{ si } \omega \notin \bigcup_k A_k. \end{cases}$$

Chaque $\xi(\omega)$ (continu sur G pour la topologie induite par $\mathcal{T}_o$) se prolonge en un élément unique de $(E, \mathcal{T}_o)' \subset E'$ que l'on notera également $\xi(\omega)$. Il reste à vérifier que pour tout φ de E,

$$< \xi(.), \varphi > \in \mathcal{M}(\Omega) \text{ et que } h(< \xi(.), \varphi >) = X(\varphi).$$

Si $\varphi \in G$, on a clairement $< \xi(.), \varphi >= x(\varphi)(.)$ p.s. et $h(< \xi(.), \varphi >) = X(\varphi)$.

Si $\varphi \notin G$, on approche alors φ au sens de $\mathcal{T}_o$ par une suite (φ_j) d'éléments de G et, par continuité de X sur $(E, \mathcal{T}_o)$, $h(< \xi(.), \varphi_j > \xrightarrow[j \to \infty]{} X(\varphi)$ dans

$M(\Omega)$. Si V est un représentant de $X(\varphi)$, en considérant au besoin une sous-suite, on a

$$<\xi(.),\varphi_j>\to V \quad P-p.s.$$

Mais $<\xi(\omega),\varphi_j>\to<\xi(\omega),\varphi>$ pour tout ω de Ω; d'où $<\xi(.),\varphi>=V \quad P-p.s$, soit encore $h(<\xi(.),\varphi>)=X(\varphi)$. Le p.l. X est donc bien décomposable.

La décomposition ξ ci-dessus est évidemment admissible, et unique à l'indiscernabilité près d'après le lemme 4.

Pour établir (2), il suffit de remarquer que si X est continu sur un (E,p), on peut choisir tous les p_k égaux à un même p' de $\mathcal{P}$ (lemme 3) et on obtient clairement $\|\xi(.)\|_{p'}<+\infty$ p.s.

Remarque.— La condition de (2) est satisfaite si X est continu de E dans $L^1(\Omega)$; plus généralement, les f.a. usuelles sont uniformes. Cependant on peut donner des contre-exemples.

(1) $E=\mathcal{E}(\mathbf{R})$, $\Omega=\mathbf{N}$, $\mathcal{A}=P(\mathbf{N})$, P une probabilité non portée par un ensemble fini. La f.a. ξ définie par $\xi(\omega)=\delta^{(\omega)}$ (δ distribution de Dirac en zéro) n'est pas uniforme.

(2) $E=\{\varphi\in\mathbf{R}^{[0,1]};\varphi^{-1}(\mathbf{R}\setminus\{0\})$ dénombrable$\}$ est nucléaire pour la topologie de la convergence simple. Si $\Omega=[0,1]$ est muni de la mesure de Borel, la f.a. ξ définie par $<\xi(\omega),\varphi>=\varphi(\omega)$ pour tout φ de E et tout ω de Ω est équivalente à la f.a. nulle mais n'en est pas indiscernable. Elle n'est donc pas admissible (d'après le lemme 4) et a fortiori n'est pas uniforme (d'après le corollaire (2).2). Et ces propriétés négatives sont obtenues bien que le p.l. associé à ξ soit continu (nul).

LEMME 5.— *Pour toute f.a. admissible ξ et toute semi-norme $p\in\mathcal{P}$, il existe une f.a. ξ' indiscernable de ξ et telle que $\|\xi'(.)\|_p$ soit mesurable.*

Démonstration.— Soit $\mathcal{T}_o$ une ξ-topologie sur E. On définit une f.a. ξ' par $\xi'(\omega)=\xi(\omega)$ si $\xi(\omega)\in(E,\mathcal{T}_o)'$, et par $\xi'(\omega)=0$ dans le cas contraire. Soit $p\in\mathcal{P}$ et soit $\mathcal{T}_1$ la topologie sur E engendrée par $\mathcal{T}_o$ et p. Cette topologie est séparable et on désigne par Δ une partie dénombrable et dense pour $\mathcal{T}_1$ dans la p-boule unité fermée. Pour $\varphi_o\in E$ tel que $p(\varphi_o)\leq 1$, si $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ est une suite de Δ convergeant vers φ_o on a

$$|<\xi'(\omega),\varphi_o>| = \lim_{j\to+\infty} |<\xi'(\omega),\varphi_j>| \leq \sup_{\varphi\in\Delta} |<\xi'(\omega),\varphi>| \quad p.s.$$

d'où

$$\|\xi'(\omega)\|_p = \sup_{\substack{\varphi\in E\\ p(\varphi)\leq 1}} |<\xi'(\omega),\varphi>| = \sup_{\varphi\in\Delta} |<\xi'(\omega),\varphi>|,$$

ce qui permet de conclure.

Remarque.— Dans les conditions de ce lemme 5, $\|\xi(.)\|_p$ coïncide presque sûrement avec une fonction mesurable. Cette propriété sera utilisée dans l'énoncé du théorème 5.

THÉORÈME 4.— *Un p.l. est continu si et seulement si il possède une décomposition admissible.*

Démonstration.— La nécessité résulte du théorème 3. Pour la réciproque et compte tenu du lemme 5, on peut toujours considérer une décomposition admissible ξ du p.l.X telle que $\|\xi(.)\|_p$ soit mesurable pour tout $p\in\mathcal{P}$. Soit $(p_j)_{j\geq 1}$ une suite croissante de $\mathcal{P}$ définissant une ξ-topologie $\mathcal{T}_o$. Les boules $B_j=\{x\in E'_{p_j};\|x\|_{p_j}\leq j\}$ sont telles que $\xi^{-1}(B_j)\in\mathcal{A}$ d'après le lemme 5. De plus, la suite $(B_j)_{j\geq 1}$ est croissante et $(E,\mathcal{T}_o)'=\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Donc pour $\epsilon>0$, il existe un $j\geq 1$ tel que $P(\xi^{-1}(B_j))\geq 1-\epsilon$ et si φ est dans le voisinage de l'origine $V=\{\varphi\in E;p_j(\varphi)\leq\frac{\epsilon}{j}\}$ on a

$$\begin{aligned}P(\{|X(\varphi)|\leq\epsilon\}) &\geq P(\{\omega;\sup_{\varphi\in V}|<\xi(\omega),\varphi>|\leq\epsilon\})\\ &= P(\xi^{-1}(B_j))\geq 1-\epsilon\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque.— (1) En l'absence de l'hypothèse de nucléarité, on peut montrer que si E est tonnelé et E' standard pour la topologie faible, tout p.l. décomposable $E\to M(\Omega)$ est continu ([3]).

En revanche, la seule nucléarité ne suffit pas pour assurer la continuité comme le montre l'exemple suivant.

Soit $\Omega=[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue et considérons l'espace nucléaire $E=\mathcal{M}(\Omega)$ muni de la topologie de la convergence simple. L'application canonique $\mathcal{M}(\Omega)\to M(\Omega)$ est un p.l. non continu.

(2) L'intégrale stochastique permet de donner des exemples de processus linéaires. On choisit alors E parmi les espaces liés à la théorie des

distributions. Par exemple si $x \in L^2_W(\alpha,\beta)$ (au sens indiqué dans [4]), $E = \mathcal{E}'(\mathbf{R})$, $\Theta \in \mathcal{E}(\mathbf{R})$, $(\tau_t(\Theta))(x) = \Theta(t+x)$, on pourra poser

$$X(T) = \int_\alpha^\beta < T, \tau_t(\Theta) > \ x(t)dw(t) \text{ pour tout } T \text{ de } E.$$

La formule de Itô permet d'écrire la décomposition ξ (unique à l'indiscernabilité près car E est séparable) de X :

$$\xi(\omega) = -\int_\alpha^\beta \tau_t(\Theta')y(t,\omega)dt + \tau_\beta(\Theta')y(\beta,\omega) - \tau_\alpha(\Theta')y(\alpha,\omega)$$

$$(\xi(\omega) \in E' = \mathcal{E}(\mathbf{R}))$$

où $y(t)$ est une version continue de $\int_\alpha^t x(s)dw(s)$, $t \in [\alpha,\beta]$.

§ IV. Intégration et moments

LEMME 6.— *Soient p et q dans $\mathcal{P}$ et préhilbertiennes telles que l'application canonique $T_p^q : \widehat{E}_q \to \widehat{E}_p$ soit nucléaire. Si $x \in E'_p$, alors $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^\infty \lambda_j| < \widehat{x}, \psi_j > |^2\right)^{\frac{1}{2}}$ où $\widehat{x}$ est le prolongement par continuité de x à $\widehat{E}'_p$, (λ_j) une suite sommable de nombres positifs et (ψ_j) une suite orthonormale dans $\widehat{E}_p$.*

Démonstration.— Tout x de E'_p induit sur E_q une forme linéaire continue dont le prolongement à $\widehat{E}_q$ n'est autre que $\widehat{x}\circ T_p^q$ (par continuité de T_p^q). On a donc $\|x\|_q = \sup_{\substack{\varphi\in\widehat{E}_q \\ \widehat{q}(\varphi)\leq 1}} | < \widehat{x}\circ T_p^q, \varphi > |$ où $\widehat{q}$ est le prolongement à $\widehat{E}_q$ de $q/\ker q$. Par nucléarité de T_p^q, on a $T_p^q\ \varphi = \sum_j \lambda_j(\varphi,\varphi_j)_q\ \psi_j$ où (λ_j), (ψ_j) possèdent les propriétés indiquées ci-dessus, (φ_j) est une base hilbertienne de $(\ker T_p^q)^\perp$ et $(.,.)_q$ représente le produit scalaire de $\widehat{E}_q$. Comme $\widehat{x}\circ T_p^q$ s'annule sur le noyau de T_p^q, il vient

$$\sup_{\substack{\varphi\in\widehat{E}_q \\ \widehat{q}(\varphi)\leq 1}} | < \widehat{x}\circ T_p^q, \varphi > | = \left(\sum_{j=1}^\infty | < \widehat{x}\circ T_p^q, \varphi_j > |^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^\infty | < \widehat{x}, T_p^q\varphi_j > |^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^\infty \lambda_j^2| < x, \Psi_j > |^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

THÉORÈME 5.— *Soit $\xi : \Omega \to E'$ une forme aléatoire admissible. Pour que $\varphi \to < \xi(.), \varphi >$ soit continu de E dans $\mathcal{L}^r(\Omega)$ $(r \geq 1)$, il faut et il suffit qu'il existe q dans $\mathcal{P}$ telle que $\|\xi(.)\|_q \in L^r(\Omega)$.*

Démonstration.— Seule la nécessité mérite une démonstration. Soit $p \in \mathcal{P}$ et préhilbertienne vérifiant

$$\sup_{\substack{\varphi \in E \\ p(\varphi) \leq 1}} \left(\int_\Omega | < \xi, \varphi > |^r dP \right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

D'après le théorème 3 (2) on peut supposer que $\xi(\omega) \in E'_p$ p.s. Soit maintenant une autre semi-norme continue et préhilbertienne $q \geq p$ telle que T_p^q soit nucléaire. D'après le lemme 6 et avec les mêmes conditions sur (λ_j), (ψ_j), on a : $\|\xi(\omega)\|_q^2 = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^2 | < \widehat{\xi(\omega)}, \psi_j > |^2$ qui d'ailleurs est fini presque sûrement (puisque c'était déjà le cas de $\|\xi(\omega)\|_p$). On a donc $\|\xi(\omega)\|_q \leq \sum_{j=1}^\infty \lambda_j | < \widehat{\xi(\omega)}, \psi_j > |$, soit encore en appliquant l'inégalité de Hölder si $r > 1$:

$$\|\xi(\omega)\|_q^r \leq \left(\sum_{j=1}^\infty \lambda_j \right)^{r-1} \left(\sum_{j=1}^\infty \lambda_j | < \widehat{\xi(\omega)}, \psi_j > |^r \right).$$

On conclut par convergence monotone puisque :

$$\int_\Omega^* \|\xi(.)\|_q^r \, dP \leq \left(\sum_{j=1}^\infty \lambda_j \right)^{r-1} \sum_{j=1}^\infty \lambda_j \int_\Omega | < \xi(.), \psi_j > |^r \, dP$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^\infty \lambda_j \right)^r \sup_{\substack{\psi \in E \\ p(\psi) \leq 1}} \int_\Omega | < \xi(.), \psi > |^r \, dP < +\infty$$

Remarques et exemples. — (1) Ce théorème est à rapprocher d'un énoncé de [9] et peut s'en déduire moyennant des hypothèses convenables sur E.

(2) Si l'estimation des normes $\|.\|_p$ est naturelle dans le cas où p est préhilbertienne, elle est en général beaucoup plus délicate dans les autres cas et des majorations ne suffisent évidemment pas à obtenir des résultats du type $\|\xi(\cdot)\|_p \notin L^1(\Omega)$. Cependant, si $E = \mathcal{D}_{[a,b]}(\mathbf{R})$, $\Omega =]0,1[$ muni de la mesure de Lebesgue,

$$< \xi(\omega), \varphi > = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{it}{\omega}} \varphi(t) dt$$

et si p est la norme continue $p(\varphi) = \sup_{a \le t \le b} |\varphi(t)|$, on montre que $\|\xi(\omega)\|_p = \frac{b-a}{\omega}$. Ici, $\|\xi(\omega)\|_p < +\infty$ mais $\|\xi(.)\|_p \notin L^1(\Omega)$ alors qu'il existe $q > p$ telle que $\|\xi(.)\|_q \in L^1(\Omega)$. En effet, l'hypothèse du théorème 6 est vérifiée car $< \xi(\omega), \varphi >= \frac{1}{\omega}\ \widehat{\varphi}\ (\frac{1}{\omega})$ est continue et bornée, donc intégrable, et par suite, $\varphi \to < \xi, \varphi >$ est bien continue de E dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$ en vertu du théorème du graphe fermé.

(3) Considérons le cas $\Omega = \mathbf{N}$ et $P = (p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une probabilité sur Ω non portée par un ensemble fini. Soit $E = \mathcal{E}(\mathbf{R})$; si $\xi(\omega) = \delta_\omega$, on vérifie que pour tout φ de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, $< \xi(.), \varphi > \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ donc $\varphi \to < \xi(.), \varphi >$ est continu de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$ (graphe fermé). Pourtant, $\varphi \to < \xi, \varphi >$ n'est pas continu de E dans $L^1(\Omega)$, sinon ξ serait uniforme, donc presque tous les $\xi(\omega)$ auraient leur support dans un compact fixe de $\mathbf{R}$, ce qui n'est pas le cas. On en déduit que pour toute semi-norme p, continue sur E :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{\substack{\varphi \in E \\ p(\varphi) \le 1}} |\varphi(k)|.p_k = +\infty.$$

Dans le cas où le processus linéaire est continu à valeurs dans $L^2(\Omega)$ on obtient les conclusions des théorèmes 3 et 5 au terme d'une même démonstration ne faisant pas appel au lemme de Minlos, ce que montre le résultat suivant.

THÉORÈME 6.— *Soit X un processus linéaire continu de E dans $L^2(\Omega)$. On note p la semi-norme continue $\varphi \to \left(\int_\Omega |X(\varphi)|^2 dP\right)^{\frac{1}{2}}$ et q une semi-norme telle que l'application canonique $T_p^q : \widehat{E}_q \to \widehat{E}_p$ soit de Hilbert-Schmidt. Alors X se décompose en une f.a. ξ telle que $\|\xi(.)\|_q \in L^2(\Omega)$.*

Démonstration.— Comme (E, q) est séparable (Th.2(2)), on peut trouver une suite (φ_j) q-orthonormale et totale dans (E, q). Pour chaque j, choisissons un élément de la classe $X(\varphi_j)$. On peut ainsi construire par linéarité une réalisation x de la restriction de X au sous-espace G de E engendré par $(\varphi_1, \varphi_2, ...)$. Posons

$$M(\omega) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x(\varphi_j)(\omega)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le +\infty.$$

Pour tout $d \ge 1$,

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{d} |x(\varphi_j)|^2 dP = \sum_{j=1}^{d} p^2(\varphi_j) \int_\Omega |x(\psi_j)|^2 dP$$

avec

$$\psi_j = \frac{\varphi_j}{p(\varphi_j)} \text{ si } p(\varphi_j) \neq 0, \; \psi_j = 0 \text{ si } p(\varphi_j) = 0.$$

On a donc

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{d} |x(\varphi_j)|^2 dP \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} p^2(\varphi_j) \right) \sup_{\substack{\varphi \in E \\ p(\varphi) \leq 1}} \int_\Omega |x(\varphi)|^2 dP < \infty,$$

puisque

$$\sum_{j=1}^{\infty} p^2(\varphi_j) = \|T_p^q\|_2^2 < +\infty.$$

Par convergence monotone, $\int_\Omega M^2 dP < +\infty$, en particulier, $M < +\infty$ p.s. Par Cauchy-Schwarz, on obtient $|x(\varphi)(\omega)| \leq M(\omega) q(\varphi)$ pour tout φ de G et tout ω de Ω. Posons

$$< \xi(\omega), \varphi >= 0 \text{ pour tout } \varphi \text{ de } G \text{ si } M(\omega) = +\infty,$$

$$< \xi(\omega), \varphi >= x(\varphi)(\omega) \text{ pour tout } \varphi \text{ de } G \text{ si } M(\omega) < +\infty.$$

On voit que chaque $\xi(\omega)$ est linéaire et continu de (G, q) dans $\mathbf{C}$, donc se prolonge en un élément de E'_q noté également $\xi(\omega)$. Comme dans la démonstration du théorème 3, on vérifie que $h(< \xi, \varphi >) = X(\varphi)$ pour tout φ de E. Pour finir,

$$\|\xi(.)\|_q = \sup_{\substack{\varphi \in E \\ q(\varphi) \leq 1}} | < \xi(.), \varphi > | = \sup_{\substack{\varphi \in G \\ q(\varphi) \leq 1}} | < \xi(.), \varphi > | \in L^2(\Omega),$$

puisque $M \in L^2(\Omega)$.

Remarque.— Si $q \geq p$ est telle que T_p^q ne soit pas de Hilbert-Schmidt, il se peut que $P(\{\omega; \|\xi(\omega)\|_q < +\infty\}) < 1$. En appliquant des techniques analogues à celle de [6] pour la réciproque du théorème de Minlos, on peut montrer que c'est le cas d'une f.a. telle que

$$\int_\Omega e^{i \; Re < \xi(.), \varphi >} dP = e^{-\frac{1}{4} p^2(\varphi)}.$$

Ce résultat montre que l'hypothèse de nucléarité faite ici sur E est non seulement suffisante mais également nécessaire.

Soient E_1 et E_2 deux espaces nucléaires; le produit tensoriel projectif $E_1 \otimes E_2$ est également nucléaire. De plus, si p_1 (resp. p_2) est une semi-norme continue sur E_1 (resp. E_2), $p = p_1 \otimes p_2$ est une semi-norme continue sur $E_1 \otimes E_2$ et si x_1 (resp. x_2) est dans E_1' (resp. E_2'), on a $\|x_1 \otimes x_2\|_{p_1 \otimes p_2} = \|x_1\|_{p_1} . \|x_2\|_{p_2}$.

THÉORÈME 7.— *Soient E_1 et E_2 deux espaces nucléaires, $r, r_1, r_2 \geq 1$ trois réels tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$. Si ξ_i est une f.a. telle que $\varphi \to < \xi_i(.), \varphi >$ soit continue de E_i dans $\mathcal{L}^{r_i}(\Omega)$ $(i = 1, 2)$, alors $\varphi \to < \xi_1(.) \otimes \xi_2(.), \varphi >$ est continue de $E_1 \otimes E_2$ dans $\mathcal{L}^r(\Omega)$.*

Démonstration.— Remarquons d'abord que $\omega \to \xi_1(\omega) \otimes \xi_2(\omega)$ est bien une f.a. $\Omega \to (E_1 \otimes E_2)'$ que l'on notera $\xi_1 \otimes \xi_2$. D'après les théorèmes 3 et 5, il existe p_i semi-norme continue sur E_i, et une f.a. uniforme ξ_i' équivalente à ξ_i telles que $\|\xi_i'(.)\|_{p_i} \in L^{r_i}(\Omega)$ $(i = 1, 2)$. Par l'inégalité de Hölder (exposants conjugués $(r_1 + r_2)/r_2, (r_1 + r_2)/r_1)$), on obtient

$$\int_\Omega^* \|\xi_1' \otimes \xi_2'\|_{p_1 \otimes p_2}^r \, dP = \int_\Omega^* \|\xi_1'\|_{p_1}^r . \|\xi_2'\|_{p_2}^r \, dP$$

$$\leq \left(\int_\Omega \|\xi_1'\|_{p_1}^{r_1} \, dP \right)^{\frac{r}{r_1}} . \left(\int_\Omega \|\xi_2'\|_{p_2}^{r_2} \, dP \right)^{\frac{r}{r_2}} < +\infty;$$

et de

$$| < \xi_1' \otimes \xi_2', \varphi > | \leq \|\xi_1' \otimes \xi_2'\|_{p_1 \otimes p_2} . (p_1 \otimes p_2)(\varphi)$$

on déduit

$$\left(\int_\Omega | < \xi_1 \otimes \xi_2, \varphi > |^r \, dP \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_\Omega | < \xi_1' \otimes \xi_2', \varphi > |^r \, dP \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq \left(\int_\Omega \|\xi_1' \otimes \xi_2'\|_{p_1 \otimes p_2}^r \, dP \right)^{\frac{1}{r}} . (p_1 \otimes p_2)(\varphi),$$

d'où le résultat.

COROLLAIRE (7).— *Si ξ est une f.a. $\Omega \to E'$ telle que $\varphi \to < \xi, \varphi >$ soit continu de E dans $\mathcal{L}^r(\Omega)$ $(r \in \mathbf{N}^*)$, le moment d'ordre r de ξ (qui est la forme multilinéaire sur E^r : $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_r) \to \int_\Omega < \xi, \varphi_i > ... < \xi, \varphi_r > dP$) est représenté par l'élément noté $E(\xi^{\otimes r})$ de $(E^{\otimes r})'$ défini par $< E(\xi^{\otimes r}), \varphi > = \int_\Omega < \xi^{\otimes r}, \varphi > dP$.*

THÉORÈME 8.— *Soit* ξ_1 *(resp.* ξ_2*) une f.a.* $\Omega \to E'_1$ *resp.* $(\Omega \to E'_2)$. *Si* ξ_1 *et* ξ_2 *sont indépendantes (i.e. : pour tout* φ_1 *de* E_1 *et tout* φ_2 *de* E_2, $<\xi_1, \varphi_1>$ *et* $<\xi_2, \varphi_2>$ *sont indépendantes), et si de plus* $\varphi \to <\xi_i, \varphi>$ *est continu de* E_i *dans* $\mathcal{L}^1(\Omega)(i = 1,2)$, *alors* $\varphi \to <\xi_1 \otimes \xi_2, \varphi>$ *est continu de* $E_1 \otimes E_2$ *dans* $\mathcal{L}^1(\Omega)$ *et* $E(\xi_1 \otimes \xi_2) = E(\xi_1) \otimes E(\xi_2)$.

Démonstration. — Il est tout à fait élémentaire d'établir que si deux suites $(X_{1,j})$ et $(X_{2,j})$ de v.a. à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ vérifient

(i) $X_{i,j} \xrightarrow[j\to\infty]{} X_i$ p.s. $(i = 1,2)$,

(ii) Pour tout $j \geq 1$, les v.a. $X_{1,j}$ et $X_{2,j}$ sont indépendantes,

alors X_1 et X_2 sont indépendantes.

Ce résultat vaut évidemment pour des v.a. à valeurs dans C (identifié à $\mathbf{R}^2$). Dans ces conditions, si p_i est une semi-norme continue sur E_i et si ξ'_i est une f.a. uniforme équivalente à ξ_i et telle que $\xi'_i(\omega) \in (E_i)'_{p_i}$ p.s. (théorème 3) $(i = 1,2)$, alors, pour tout φ_1 de $\widehat{(E_1)}_{p_1}$ et tout φ_2 de $\widehat{(E_2)}_{p_2}$, $<\xi'_1, \varphi_1>$ et $<\xi'_2, \varphi_2>$ sont indépendantes. En choisissant des notations cohérentes avec celles du lemme 6 et du théorème 5, et compte-tenu du résultat ci-dessus, on peut écrire pour tout d de $\mathbf{N}^*$:

$$\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{d} \lambda_{1,j}^2 \mid <\xi'_1, \psi_{1,j}> |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{d} \lambda_{2,k}^2 \mid <\xi'_2, \psi_{2,k}> |^2 \right)^{\frac{1}{2}} dP$$

$$\leq \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{d} \lambda_{1,j}\lambda_{2,k} \mid <\xi'_1, \psi_{1,j}> |.| <\xi'_2, \psi_{2,k}> |dP$$

$$= \sum_{j,k=1}^{d} \lambda_{1,j}\lambda_{2,k} \int_\Omega \mid <\xi'_1, \psi_{1,j}> \mid dP. \int_\Omega \mid <\xi'_2, \psi_{2,j}> |dP$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{1,j}. \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{2,k} \left(\sup_{\substack{\psi \in E_1 \\ p_1(\psi) \leq 1}} \int_\Omega \mid <\xi'_1, \psi> |dP \right)$$

$$\left(\sup_{\substack{\psi \in E_2 \\ p_2(\psi) \leq 1}} \int_\Omega \mid <\xi'_2, \psi> |dP \right) < +\infty.$$

Par convergence monotone, on obtient

$$\|\xi'_1(.)\|_{q_1} . \|\xi'_2(.)\|_{q_2} \in L^1(\Omega),$$

d'où la première conclusion puisque

$$\|\xi'_1(\omega) \otimes \xi'_2(\omega)\|_{q_1 \otimes q_2} = \|\xi'_1(\omega)\|_{q_1} . \|\xi'_2(\omega)\|_{q_2}.$$

L'autre conclusion provient de la coïncidence évidente de $E(\xi_1 \otimes \xi_2)$ et de $E(\xi_1) \otimes E(\xi_2)$ sur $E_1 \otimes E_2$.

Références

[1] BOURBAKI (N.).— *Eléments de Mathématique - Intégration Chap. IX.*— Hermann Paris 1969.

[2] DIEUDONNÉ (J.).— Sur les espaces de Montel métrisables, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. **238**, 1954, p. 194-195.

[3] FERNIQUE (X.).— Processus linéaires, processus généralisés, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, t. **17**, 1967, p. 1-92.

[4] FRIEDMANN (A.).— *Stochastic differential equations and applications.*—Academic Press New-York 1975.

[5] GARNIR (H.G.) - DE WILDE (M.) - SCHMETS (J.).—*Analyse fonctionnelle.*— Tome 1 Birkhäuser Verlag Bâle - Stuttgart 1968.

[6] GUELFAND (I.M.) - VILENKIN (N.Y.).— *Les Distributions.*—Tome 4, Dunod Paris 1967.

[7] HIDA (T.).— *Brownian motion.*—Springer Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin 1980.

[8] MINLOS (R.A.).— Generalized stochastic processes and the extension of measures, *Trudy Moscov. Math.*, t. **8**, 1959, p. 497-518.

[9] SCHWARTZ (L.).— *Applications radonifiantes.*— Séminaire Laurent Schwartz, Ecole Polytechnique 1969'1970.

[10] SCHWARTZ (L.).— *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures.*—Oxford University Press 1973.