

EUGÈNE OKASSA

Prolongement des champs de vecteurs à des variétés de points proches

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 8, n° 3 (1986-1987), p. 349-366

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1986-1987_5_8_3_349_0

© Université Paul Sabatier, 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Prolongement des champs de vecteurs a des variétés de points proches

EUGÈNE OKASSA^{(1) (2)}

RÉSUMÉ. — Etant donné une variété différentielle paracompacte M de classe C^∞ et une algèbre locale A de dimension finie sur \mathbf{R} ayant un idéal maximal de codimension 1, on note M^A la variété des points proches de M d'espèce A . On utilise la structure de A -module sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M^A pour donner une caractérisation des prolongements à M^A des champs de vecteurs sur M .

ABSTRACT. — Given a differentiable paracompact manifold M of class C^∞ and a local algebra A of finite dimension 1 over \mathbf{R} such that the maximal ideal is of codimension 1 over \mathbf{R} , we denote by M^A the bundle of near points of A -kind on M . Using the A -module structure on the Lie algebra of vector fields on M^A , we give a characterization of the prolongations to M^A of the vector fields on M .

0. Introduction

Dans tout ce qui suit, on entend par "*variété différentielle*" ou tout simplement "*variété*" une variété différentielle, paracompacte de classe C^∞ et par "*algèbre locale*" une algèbre commutative, unitaire de dimension finie sur \mathbf{R} ayant un idéal maximal unique de codimension 1. Si \mathfrak{m} désigne l'idéal maximal, le plus petit entier k tel que $\mathfrak{m}^{k+1} = (0)$ est la hauteur de l'algèbre locale.

Etant donné une variété différentielle M et une algèbre locale A , d'idéal maximal \mathfrak{m} , un point proche de $x \in M$ d'espèce A est un homomorphisme

⁽¹⁾ Université de Grenoble I Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques B.P. 74, 38402 St Martin d'Hères - France

⁽²⁾ Université Marien NGouabi Faculté des Sciences Département de Mathématiques B.P. 69, Brazzaville - Congo

d'algèbres ξ de $C^\infty(M)$ [algèbre des fonctions numériques de classe C^∞ sur M] dans A tel que $\xi(f) \equiv f(x) \pmod{\mathfrak{m}}$ pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ ([5]). Si M_x^A désigne l'ensemble des points proches de x d'espèce A , $M^A = \cup_{x \in M} M_x^A$ est une variété différentielle de dimension $n \cdot \dim A$ où $n = \dim M$: c'est la variété des points proches de M d'espèce A . On a une fibration canonique $\pi : M^A \rightarrow M$: c'est le fibré des points proches. Si (x_1, \dots, x_n) est un système de coordonnées locales sur un ouvert U de M , si $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ est une base de A et si $(a_\alpha^*)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ est la base duale, les applications $\xi \mapsto a_\alpha^*[\xi(x_i)]$ pour $\alpha \in \mathcal{J}$ et $i = 1, \dots, n$ sont un système de coordonnées locales sur $\pi^{-1}(U)$.

Lorsque $A = \mathbf{D} = \mathbf{R}[T]/(T^2)$ est l'algèbre des nombres duaux, $M^{\mathbf{D}}$ s'identifie à l'espace tangent TM . Plus généralement lorsque $A = \mathbf{R}[T_1, \dots, T_s]/(T_1, \dots, T_s)^{k+1}$, M^A est l'espace $J_0^k(\mathbf{R}^s, M)$ des jets d'ordre k des applications de classe C^∞ de \mathbf{R}^s dans M ayant pour source $0 \in \mathbf{R}^s$. Plus particulièrement lorsque $A = \mathbf{R}[T_1, \dots, T_n]/(T_1, \dots, T_n)^{k+1}$ où $n = \dim M$, l'ouvert de M^A constitué des points proches de rang maximum est l'espace $P^k(M)$ des repères d'ordre k sur M .

Lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbf{R} , E^A s'identifie à $A \otimes E$. En particulier \mathbf{R}^A s'identifie à A .

Si $f \in C^\infty(M)$, l'application $f^A : \xi \mapsto \xi(f)$ de M^A dans A est une application différentiable de classe C^∞ : c'est le prolongement de f sur M^A à valeurs dans A . L'application $\gamma : C^\infty(M) \rightarrow A \otimes C^\infty(M^A)$ qui à toute fonction numérique f de classe C^∞ sur M associe son prolongement f^A sur M^A à valeurs dans A est un homomorphisme d'algèbres. Si $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ est une base de A et si $(a_\alpha^*)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ est la base duale, pour tout $f \in C^\infty(M)$, on a : $\gamma(f) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \otimes (a_\alpha^* \circ f^A)$.

THÉORÈME 0 (Weil [5]). — *Etant donné une variété différentielle M et deux algèbres locales A et B , l'application $\eta \mapsto (\text{id}_A \otimes \eta) \circ \gamma$ de $(M^A)^B$ dans $M^{A \otimes B}$ est un isomorphisme de variétés différentielles.*

Si $\varphi : F_1 \rightarrow F_2$ est un homomorphisme d'algèbres, une application $\partial : F_1 \rightarrow F_2$ est une φ -dérivation si ∂ est linéaire et si $\partial(xy) = \varphi(x)\partial(y) + \partial(x)\varphi(y)$ pour tous x, y dans F_1 . Lorsque $F_1 = F_2$, une dérivation de F_1 est

une id_{F_1} -dérivation.⁽³⁾

1. Conséquences du Théorème de Weil

Si ξ est un point proche de M d'espèce A , on note $\text{Der}_\xi(C^\infty(M), A)$ l'espace des ξ -dérivations de $C^\infty(M)$ dans A .

PROPOSITION 1. — *Pour tout $\xi \in M^A$, l'application $W \mapsto (\text{id}_A \otimes W) \circ \gamma$ de $T_\xi M^A$ dans $\text{Der}_\xi(C^\infty(M), A)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Démonstration. — Soit $x_0 \in M$ et ξ un point proche de x_0 d'espèce A . L'application $W \mapsto (\text{id}_A \otimes W) \circ \gamma$ de $T_\xi M^A$ dans $\text{Der}_\xi(C^\infty(M), A)$ est \mathbf{R} -linéaire.

Surjection. Si \mathbf{D} est l'algèbre des nombres duaux sur \mathbf{R} , on désigne $(1, \varepsilon)$ une base de \mathbf{D} où 1 est l'élément unité de \mathbf{D} , ε un élément tel que $\varepsilon^2 = 0$ et $(1^*, \varepsilon^*)$ la base duale. Soit $\varphi : C^\infty(M) \rightarrow A$ une ξ -dérivation. L'application $\tilde{\varphi} : f \mapsto \xi(f) \otimes 1 + \varphi(f) \otimes \varepsilon$ de $C^\infty(M)$ dans $A \otimes \mathbf{D}$ est point proche de x_0 d'espèce $A \otimes \mathbf{D}$. Il existe, d'après le théorème de Weil, un point proche $\psi : C^\infty(M^A) \rightarrow \mathbf{D}$ de M^A d'espèce \mathbf{D} tel que : $(\text{id}_A \otimes \psi) \circ \gamma = \tilde{\varphi}$. On vérifie que ψ est un point proche de ξ d'espèce \mathbf{D} . L'application $\varepsilon^* \circ \psi : C^\infty(M^A) \rightarrow \mathbf{R}$ est un vecteur tangent en ξ tel que : $[\text{id}_A \otimes (\varepsilon^* \circ \psi)] \circ \gamma = \varphi$.

Injection. Si $(\text{id}_A \otimes W) \circ \gamma = 0$, on a : $W(a_\alpha^* \circ f^A) = 0$ pour tous $\alpha \in J$ et $f \in C^\infty(M)$. Il s'ensuit que $W = 0$.

Un champ de vecteurs de classe C^∞ sur M (resp. sur M^A) sera identifié à une dérivation de $C^\infty(M)$ [resp. de $C^\infty(M^A)$]. On note $\mathcal{X}(M)$ [resp. $\mathcal{X}(M^A)$] le $C^\infty(M)$ -module des champs de vecteurs sur M [resp. le $C^\infty(M^A)$ -module des champs de vecteurs sur M^A].

PROPOSITION 2. — *L'application $X \mapsto (\text{id}_A \otimes X) \circ \gamma$ est un isomorphisme du $C^\infty(M^A)$ -module $\mathcal{X}(M^A)$ sur le module $\text{Der}_\gamma[C^\infty(M), A \otimes C^\infty(M^A)]$.*

Démonstration. — *Injection.* Evident. *Surjection.* Pour tout $\xi \in M^A$, on note $\tilde{\xi} : F \mapsto F(\xi)$ de $C^\infty(M^A)$ dans \mathbf{R} : c'est un point proche de ξ d'espèce \mathbf{R} . On a : $(\text{id}_A \otimes \tilde{\xi}) \circ \gamma = \xi$. Soit $\varphi : C^\infty(M) \rightarrow A \otimes C^\infty(M^A)$ une γ -dérivation. L'application $(\text{id}_A \otimes \tilde{\xi}) \circ \varphi : C^\infty(M) \rightarrow A$ est une ξ -dérivation. Il existe, d'après la proposition 1, un vecteur tangent à M^A en ξ et un seul

⁽³⁾ Je remercie Monsieur le Professeur Jean-Louis Koszul dont les remarques et les suggestions ont permis l'élaboration de cet article.

W_ξ tel que $(\text{id}_A \otimes W_\xi) \circ \gamma = (\text{id}_A \otimes \tilde{\xi}) \circ \varphi$. L'application $W : M^A \rightarrow TM^A$ qui à ξ associe W_ξ est un champ de vecteurs de classe C^∞ sur M^A . Le champ de vecteurs W considéré comme dérivation de $C^\infty(M^A)$ vérifie : $(\text{id}_A \otimes W) \circ \gamma = \varphi$.

2. Structure de A -module dans $T_\xi M^A$ et $\mathcal{X}(M^A)$

1. — Etant donné $a \in A$, on note $\mu_a : A \rightarrow A$ la multiplication par a dans A . Soit $\xi \in M^A$ et $W \in T_\xi M^A$. Pour tout $a \in A$, $(\mu_a \otimes W) \circ \gamma : C^\infty(M) \rightarrow A$ est une ξ -dérivation. D'après la proposition 1, il existe un vecteur aW dans $T_\xi M^A$ et un seul tel que $(\text{id}_A \otimes aW) \circ \gamma = (\mu_a \otimes W) \circ \gamma$. L'application $(a, W) \mapsto aW$ est une structure de A -module dans $T_\xi M^A$. Pour tout $\xi \in M^A$, $T_\xi M^A$ est un A -module libre de rang $\dim M$.

PROPOSITION 3. — Si I est un idéal de A , pour tout $\xi \in M^A$, $I \cdot T_\xi M^A$ est un espace vectoriel de dimension $n \cdot \dim I$ où $n = \dim M$. En particulier pour tout $a \in A$, $\dim(a \cdot T_\xi M^A) = n \cdot \text{rang}(\mu_a)$.

Démonstration. — Soit $x_0 \in M$ et ξ un point proche de x_0 . Soit (x_1, \dots, x_n) un système de coordonnées locales dans un voisinage de x_0 . On note encore $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ les coordonnées sur M^A définies au voisinage de $\pi^{-1}(x_0)$ par : $x_i \circ \pi$ où $\pi : M^A \rightarrow M$ est la projection canonique. Pour toute base $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{H}}$ de I , les vecteurs $(a_\alpha \frac{\partial}{\partial x_i})(\xi)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{H}$ et pour tout $i = 1, \dots, n$ forment une base de $I \cdot T_\xi M^A$.

Soit X un champ de vecteurs sur M^A . Pour tout $a \in A$, on note aX le champ de vecteurs sur M^A défini par : $(aX)(\xi) = a \cdot X(\xi)$ pour tout $\xi \in M^A$. Si X est de classe C^∞ , alors aX est de classe C^∞ .

Puisque pour tout $\xi \in M^A$, $(aX)(\xi) = a \cdot X(\xi)$, alors

$$[\text{id}_A \otimes (aX)(\xi)] \circ \gamma = [\text{id}_A \otimes a \cdot X(\xi)] \circ \gamma = [\mu_a \otimes X(\xi)] \circ \gamma.$$

Il en résulte que $(\text{id}_A \otimes aX) \circ \gamma = (\mu_a \otimes X) \circ \gamma$. Comme $(\mu_a \otimes X) \circ \gamma : C^\infty(M) \rightarrow A \otimes C^\infty(M^A)$ est une γ -dérivation, on déduit, d'après la proposition 2 que aX est l'unique champ de vecteurs sur M^A caractérisé par $(\text{id}_A \otimes aX) \circ \gamma = (\mu_a \otimes X) \circ \gamma$. L'application $(a, X) \mapsto aX$ de $A \times \mathcal{X}(M^A)$ dans $\mathcal{X}(M^A)$ est une structure de A -module dans $\mathcal{X}(M^A)$.

Exemple. — Lorsque $A = \mathbf{R}[T]/(T^3)$, M^A est le fibré tangent d'ordre 2. Soit $(1, e, e^2)$ avec $e^3 = 0$ une base de A et $(1^*, e^*, (e^2)^*)$ la base duale. Soit

Prolongement des champs de vecteurs

(x_1, \dots, x_n) un système de coordonnées locales dans un ouvert U de M . Les applications $(x_i = 1^* \circ x_i^A; y_i = e^* \circ x_i^A; z_i = (e^2)^* \circ x_i^A)$ pour $i = 1, \dots, n$ sont un système de coordonnées sur $\pi^{-1}(U)$. On a : $\gamma(x_i) = 1 \otimes x_i + e \otimes y_i + e^2 \otimes z_i$. Si X est un champ de vecteurs sur M^A dont l'expression sur $\pi^{-1}(U)$ est

$$X = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

(où p_i, q_i, r_i pour $i = 1, 2, \dots, n$ sont des fonctions C^∞ sur $\pi^{-1}(U)$), en écrivant $(\text{id}_A \otimes aX) \circ \gamma(x_i) = (\mu_a \otimes X) \circ \gamma(x_i)$ avec $a \in A$ et pour tout $i = 1, \dots, n$ on obtient :

$$\begin{aligned} eX &= \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial}{\partial z_i} \\ e^2 X &= \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial}{\partial z_i} \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉS .— i) $a(\psi \cdot X) = \psi \cdot aX$ pour tous $a \in A$, $\psi \in C^\infty(M^A)$, $X \in \mathcal{X}(M^A)$

ii) $[aX, aY] = a[aX, Y] + a[X, aY] - a^2[X, Y]$ pour tous $a \in A$, X et Y dans $\mathcal{X}(M^A)$.

Démonstration. — ii) Calculons :

$$\begin{aligned} & [\text{id}_A \otimes ([aX, aY] - a[aX, Y] - a[X, aY] + a^2[X, Y])] \circ \gamma \\ &= (\text{id}_A \otimes [aX, aY]) \circ \gamma - (\mu_a \otimes [aX, Y]) \circ \gamma - (\mu_a \otimes [X, aY]) \circ \gamma \\ &\quad + (\mu_{a^2} \otimes [X, Y]) \circ \gamma \\ &= (\text{id}_A \otimes aX) \circ (\text{id}_A \otimes aY) \circ \gamma - (\text{id}_A \otimes aY) \circ (\text{id}_A \otimes aX) \circ \gamma \\ &\quad - (\mu_a \otimes aX) \circ (\text{id}_A \otimes Y) \circ \gamma + (\mu_a \otimes Y) \circ (\text{id}_A \otimes aX) \circ \gamma \\ &\quad - (\mu_a \otimes X) \circ (\text{id}_A \otimes aY) \circ \gamma + (\mu_a \otimes aY) \circ (\text{id}_A \otimes X) \circ \gamma \\ &\quad + (\mu_a \otimes X) \circ (\mu_a \otimes Y) \circ \gamma - (\mu_a \otimes Y) \circ (\mu_a \otimes X) \circ \gamma \\ &= (\text{id}_A \otimes aX) \circ (\text{id}_A \otimes aY) \circ \gamma - (\text{id}_A \otimes aY) \circ (\text{id}_A \otimes aX) \circ \gamma \\ &\quad - (\text{id}_A \otimes aX) \circ (\text{id}_A \otimes aY) \circ \gamma + (\mu_a \otimes Y) \circ (\text{id}_A \otimes aX) \circ \gamma \\ &\quad - (\mu_a \otimes X) \circ (\text{id}_A \otimes aY) \circ \gamma + (\text{id}_A \otimes aY) \circ (\text{id}_A \otimes aX) \circ \gamma \\ &\quad + (\mu_a \otimes X) \circ (\text{id}_A \otimes aY) \circ \gamma - (\mu_a \otimes Y) \circ (\text{id}_A \otimes aX) \circ \gamma = 0 \end{aligned}$$

D'où l'assertion.

2. — Soit $I \neq A$ un idéal de A et $q : A \rightarrow A/I$ la surjection canonique. On note $\tilde{q} : M^A \rightarrow M^{A/I}$ l'application de classe C^∞ qui à $\xi \in M^A$ associe $q \circ \xi$ et $\tilde{q}^T : TM^A \rightarrow TM^{A/I}$ l'application linéaire tangente. Un vecteur $W \in T_\xi M^A$ est vertical pour $\tilde{q} : M^A \rightarrow M^{A/I}$ si $\tilde{q}^T(W) = 0$.

Soit $\gamma_{A/I} : C^\infty(M) \rightarrow A/I \otimes C^\infty(M^{A/I})$ l'homomorphisme d'algèbres qui à toute fonction numérique de classe C^∞ sur M associe son prolongement sur $M^{A/I}$ à valeurs dans A/I . Etant donné $W \in T_\xi M^A$, on vérifie que $[\text{id}_{A/I} \otimes \tilde{q}^T(W)] \circ \gamma_{A/I} = (q \otimes W) \circ \gamma$. Comme $(q \otimes W) \circ \gamma : C^\infty(M) \rightarrow A/I$ est une q -dérivation, on conclut, d'après la proposition 1, que $\tilde{q}^T(W)$ est l'unique vecteur de $T_{q \circ \xi} M^{A/I}$ tel que $[\text{id}_{A/I} \otimes \tilde{q}^T(W)] \circ \gamma_{A/I} = (q \otimes W) \circ \gamma$. Il en résulte immédiatement :

PROPRIÉTÉS .— *i) Un vecteur $W \in T_\xi M^A$ est vertical pour $\tilde{q} : M^A \rightarrow M^{A/I}$ si et seulement si $(q \otimes W) \circ \gamma = 0$. En conséquence un champ de vecteurs X sur M^A est vertical pour $M^A \rightarrow M^{A/I}$ si et seulement si $(q \otimes X) \circ \gamma = 0$.*

ii) $\tilde{q}^T(aW) = q(a)\tilde{q}^T(W)$ pour tout $a \in A$ et pour tout $W \in T_\xi M^A$.

Conséquence. — équence Il résulte de la propriété ii) ci-dessus et de la proposition 3 que pour tout $\xi \in M^A$, $\tilde{q}^T : T_\xi M^A \rightarrow T_{q \circ \xi} M^{A/I}$ admet pour noyau l'espace $I \cdot T_\xi M^A$. Ainsi l'application $\tilde{q} : M^A \rightarrow M^{A/I}$ est une submersion.

3. Champs de vecteurs sur M^A associés aux dérivations de A

Etant donné une dérivation d de A , pour tout $\xi \in M^A$, $d \circ \xi : C^\infty(M) \rightarrow A$ est une ξ -dérivation. Il existe, d'après la proposition 1, un vecteur $d_M(\xi)$ de $T_\xi M^A$ et un seul tel que : $[\text{id}_A \otimes d_M(\xi)] \circ \gamma = -d \circ \xi$. Le champ de vecteurs $d_M : \xi \mapsto d_M(\xi)$ sur M^A ainsi défini est de classe C^∞ . Comme $[\text{id}_A \otimes d_M(\xi)] \circ \gamma = -d \circ \xi$ pour tout $\xi \in M^A$, il s'ensuit que : $(\text{id}_A \otimes d_M) \circ \gamma = (-d \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}) \circ \gamma$. Puisque $(-d \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}) \circ \gamma : C^\infty(M) \rightarrow A \otimes C^\infty(M^A)$ est une γ -dérivation, le champ de vecteurs d_M est caractérisé, d'après la proposition 2, par : $(\text{id}_A \otimes d_M) \circ \gamma = (-d \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}) \circ \gamma$.

Exemples. — 1) Si $A = \mathbf{D} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}\varepsilon$, où $\varepsilon^2 = 0$, est l'algèbre des nombres duaux sur \mathbf{R} , alors $M^{\mathbf{D}}$ est la variété TM des vecteurs tangents à M et si d est la dérivation de \mathbf{D} telle que $d(\varepsilon) = -\varepsilon$, d_M est le champ de vecteurs sur TM qui engendre le flot des homothéties dans les fibres.

2) Si $A = \mathbf{R}[T]/(T^3) = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}e \oplus \mathbf{R}e^2$, où $e^3 = 0$, M^A est le fibré tangent d'ordre 2. En reprenant les notations de l'exemple du paragraphe 2, on a :

Prolongement des champs de vecteurs

- Si d est la dérivation de A telle que $d(e) = -e$, alors

$$d_M = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^n 2z_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

- Si d est la dérivation de A telle que $d(e) = -e^2$, alors

$$d_M = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Lorsque d est une dérivation de A , pour tout $t \in \mathbf{R}$, les applications $\Phi_t : \xi \mapsto \exp(-td) \circ \xi$ de M^A dans M^A sont un groupe à un paramètre des difféomorphismes de M^A . Géométriquement, le champ de vecteurs d_M est la transformation infinitésimale de $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbf{R}}$.

PROPRIÉTÉS. — *i)* Pour toute dérivation d de A , le champ de vecteurs d_M est vertical pour la fibration $\pi : M^A \rightarrow M$.

ii) Quels que soient $a \in A$ et $d \in \text{Der}(A)$, $(ad)_M = ad_M$.

iii) Quels que soient d et d' dans $\text{Der}(A)$, $[d, d']_M = [d_M, d'_M]$.

iv) Quels que soient $d \in \text{Der}(A)$, $X \in \mathcal{X}(M^A)$, on a :

$$[d_M, aX] = d(a)X + a[d_M, X].$$

Démonstration. — *i)* Soit $\text{aug} : A \rightarrow \mathbf{R}$ l'augmentation. Si $d \in \text{Der}(A)$, on a :

$$(\text{aug} \otimes d_M) \circ \gamma = [\text{aug} \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ (\text{id}_A \otimes d_M) \circ \gamma.$$

Puisque $(\text{aug}) \circ d = 0$ alors $(\text{aug} \otimes d_M) \circ \gamma = 0$. Compte tenu de la propriété *ii)* du paragraphe 2, on conclut que d_M est vertical pour $\pi : M^A \rightarrow M$.

Les autres assertions se vérifient facilement.

Remarque. — Soit A une algèbre locale différente de \mathbf{R} , d'idéal maximal \mathfrak{m} et de hauteur k . Soit δ une dérivation non nulle de A dans \mathbf{R} par rapport à l'augmentation. Si a est un élément non nul de \mathfrak{m}^k , l'application $x \mapsto a \cdot \delta(x)$ est une dérivation de A qui n'est pas nulle. Ainsi l'espace, $\text{Der}(A)$, des dérivations de A est nul si et seulement si $A = \mathbf{R}$.

4. Familles de champs de vecteurs sur M^A associées aux dérivations de A dans son quotient

Soit $I \neq A$ un idéal de A et $q : A \rightarrow A/I$ la surjection canonique.

PROPOSITION 4. — Soit $\delta : A \rightarrow A/I$ une q -dérivation. Il existe des champs de vecteurs Z sur M^A tel que : $[q \otimes Z(\xi)] \circ \gamma = -\delta \circ \xi$ pour tout $\xi \in M^A$. De plus $[(q \otimes Z)] \circ \gamma = [-\delta \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma$.

Démonstration. — Soit $\xi \in M^A$. Puisque $\delta : A \rightarrow A/I$ est une q -dérivation, $\delta \circ \xi$ est une $q \circ \xi$ -dérivation. Il existe, d'après la proposition 1, un vecteur W dans $T_{q \circ \xi} M^{A/I}$ et un seul tel que : $(\text{id}_{A/I} \otimes W) \circ \gamma_{A/I} = -\delta \circ \xi$. L'application $\tilde{q} : M^A \rightarrow M^{A/I}$ étant une submersion, il existe un vecteur V_ξ dans $T_\xi M^A$ tel que $\tilde{q}^T(V_\xi) = W$: ce qui donne $(q \otimes V_\xi) \circ \gamma = -\delta \circ \xi$. En chaque point $\xi \in M^A$, on se fixe un supplémentaire \mathcal{V}_ξ de $I \cdot T_\xi M^A$ et on note \bar{V}_ξ la composante de V_ξ suivant \mathcal{V}_ξ . L'application $Z : \xi \mapsto \bar{V}_\xi$ de M^A dans TM^A est un champ de vecteurs tel que $[q \otimes Z(\xi)] \circ \gamma = -\delta \circ \xi$ pour tout $\xi \in M^A$. Ce champ de vecteurs ainsi défini est de classe C^∞ . On vérifie que : $(q \otimes Z) \circ \gamma = [-\delta \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma$.

Pour une q -dérivation δ de A dans A/I , les champs de vecteurs Z sur M^A tels que $(q \otimes Z) \circ \gamma = [-\delta \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma$ ne sont parfaitement déterminés par δ que modulo les champs verticaux pour $\tilde{q} : M^A \rightarrow M^{A/I}$.

Exemple. — Soit $A = \mathbf{R}[T]/(T^3) = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}e \oplus \mathbf{R}e^2$ où $e^3 = 0$. En reprenant les notations de l'exemple du paragraphe 2, on a :

* $I = (e)$ l'idéal de A engendré par e . Si δ est la dérivation de A dans $A/(e) = \mathbf{R}$ telle que $\delta(e) = -1$, alors les champs de vecteurs Z sur $\pi^{-1}(U)$ tels que $(q \otimes Z) \circ \gamma = [-\delta \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma$ sont de la forme :

$$Z = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

où les f_i et g_i sont dans $C^\infty[\pi^{-1}(U)]$.

* $I = (e^2)$ est l'idéal de A engendré par e^2 .

α) Si δ est la dérivation de A dans $A/(e^2)$ telle que $\delta(e) = -1$, alors

$$Z = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n 2z_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

où les $f_i \in C^\infty[\pi^{-1}(U)]$.

Prolongement des champs de vecteurs

β) Si δ est la dérivation de A dans $A/(e^2)$ telle que $\delta(e) = -\bar{e}$, alors

$$Z = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

où les $f_i \in C^\infty[\pi^{-1}(U)]$.

Soit a un élément de l'annulateur de I c'est-à-dire $ax = 0$ pour tout $x \in I$. On note τ_a l'unique application linéaire de A/I dans A telle que $\tau_a \circ q = \mu_a$. Pour toute q -dérivation δ de A dans A/I , l'application $\tau_a \circ \delta$ est une dérivation de A .

PROPOSITION 5. — *Si δ est une q -dérivation de A dans A/I et si a est un élément de l'annulateur de I , alors pour tout champ de vecteurs Z sur M^A tel que $(q \otimes Z) \circ \gamma = [-\delta \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma$ le champ de vecteurs aZ est le champ de vecteurs sur M^A associé à la dérivation $\tau_a \circ \delta$ c'est-à-dire $aZ = (\tau_a \circ \delta)_M$.*

Démonstration. — Si Z est un champ de vecteurs sur M^A tel que $(q \otimes Z) \circ \gamma = [-\delta \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma$ on a :

$$\begin{aligned} (\text{id}_A \otimes aZ) \circ \gamma &= (\mu_a \otimes Z) \circ \gamma \\ &= [(\tau_a \circ q) \otimes Z] \circ \gamma \\ &= [\tau_a \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ (q \otimes Z) \circ \gamma \\ &= [\tau_a \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ [-\delta \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma \\ &= ([\tau_a \circ (-\delta)] \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}) \circ \gamma \\ &= [\text{id}_A \otimes (\tau_a \circ \delta)] \circ \gamma. \end{aligned}$$

On conclut, d'après la proposition 2, que $aZ = (\tau_a \circ \delta)_M$.

5. Le prolongement à M^A des champs de vecteurs sur M

Soit V un champ de vecteurs sur M considéré comme dérivation de l'algèbre $C^\infty(M)$. Pour tout $\xi \in M^A$, $\xi \circ V : C^\infty(M) \rightarrow A$ est une ξ -dérivation. Il existe, d'après la proposition 1, un vecteur $V^A(\xi)$ dans $T_\xi M^A$ et un seul tel que : $[\text{id}_A \otimes V^A(\xi)] \circ \gamma = \xi \circ V$. Le champ de vecteurs $V^A : \xi \mapsto V^A(\xi)$ ainsi défini est de classe C^∞ . Puisque $\gamma \circ V : C^\infty(M) \rightarrow A \otimes C^\infty(M^A)$ est une γ -dérivation, le champ de vecteurs V^A est caractérisé, d'après la proposition 2, par : $(\text{id}_A \otimes V^A) \circ \gamma = \gamma \circ V : V^A$

est le prolongement de V à M^A . Si $\{\varphi_t\}_t$ est le groupe à un paramètre sur M engendré par V , le champ de vecteurs V^A est la transformation infinitésimale du groupe à un paramètre $\{\varphi_t^A\}_t$ sur M^A où $\varphi_t^A : M^A \rightarrow M^A$ est tel que $\varphi_t^A(\xi)(f) = \xi(f \circ \varphi_t)$ pour tous $\xi \in M^A$ et $f \in C^\infty(M)$.

De la définition du prolongement, il résulte immédiatement :

PROPRIÉTÉS .— Si V est un champ de vecteurs sur M , on a :

- i) V^A est projetable sur M et a pour projection V .
- ii) L'application $V \mapsto V^A$ de $\mathcal{X}(M)$ dans $\mathcal{X}(M^A)$ est un homomorphisme injectif d'algèbres de Lie.
- iii) Pour tout $d \in \text{Der}(A)$, $[V^A, d_M] = 0$.
- iv) Pour tout $a \in A$ et pour tout champ de vecteurs X sur M^A , $[V^A, aX] = a[V^A, X]$.
- v) Pour tout $f \in C^\infty(M)$, $(fV)^A = f^A \cdot V^A$ c'est-à-dire $(fV)^A(\xi) = \xi(f) \cdot V^A(\xi)$ pour tout $\xi \in M^A$.
- vi) Si $\delta : A \rightarrow A/I$ est une q -dérivation, pour tout champ de vecteurs Z sur M^A tel que $(q \otimes Z) \circ \gamma = [-\delta \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma$, alors le champ de vecteurs $[V^A, Z]$ sur M^A est vertical pour la submersion $\tilde{q} : M^A \rightarrow M^A/I$.

Soit $P^k(M)$ le fibré des repères d'ordre k sur M et $J_x^k(\underline{TM})$ l'espace des jets d'ordre k en $x \in M$ des champs de vecteurs sur M . Si V est un champ de vecteurs sur M , on note $P^k(V)$ le prolongement de V à $P^k(M)$. Il est bien connu que lorsque u est un repère d'ordre k en $x \in M$, l'application $J_x^k(V) \mapsto P^k(V)(u)$ de $J_x^k(\underline{TM})$ dans $T_u P^k(M)$ est un isomorphisme. On va donner dans ce qui suit, la version pour les points proches.

PROPOSITION 6.— Soit $\xi \in M^A$. Le sous-espace vectoriel de $T_\xi M^A$ engendré par les $V^A(\xi)$ où V est un champ de vecteurs sur M est de dimension $\dim M \cdot r_\xi$ où r_ξ est le rang de l'application linéaire $\xi : C^\infty(M) \rightarrow A$.

Démonstration.— Soit $P_\xi = \{V^A(\xi) \in T_\xi M^A / V \text{ champ de vecteurs sur } M\}$. Soit $x_0 \in M$ et ξ un point proche de x_0 d'espèce A . Soit (x_1, \dots, x_n) un système de coordonnées locales au voisinage de x_0 et $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{H}}$ une famille de fonctions C^∞ sur M telles que $\{\xi(f_\alpha)\}_\alpha \in \mathcal{H}$ est une base de $\xi[C^\infty(M)]$. On vérifie que les vecteurs $(f_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x_i})^A(\xi)$ forment une base de P_ξ .

De la proposition 6, il résulte qu'étant donné $\xi \in M^A$, point proche de $x \in M$, l'application $J_x^k(V) \mapsto V^A(\xi)$ de $J_x^k(\underline{TM})$ dans $T_\xi M^A$, où k est la hauteur de A , est de rang $\dim M \cdot r_\xi$. Lorsque $A = \mathbf{R}[T_1, \dots, T_n] / (T_1, \dots, T_n)^{k+1}$

Prolongement des champs de vecteurs

avec $n = \dim M$, si $\xi \in M^A$ est un repère en $x \in M$, l'application $J_x^k(V) \mapsto V^A(\xi)$ de $J_x^k(\underline{TM})$ dans $T_\xi M^A$ est un isomorphisme.

6. Le A -module engendré par les prolongements

Notons $\mathcal{X}_A(M^A)$ le sous-espace de $\mathcal{X}(M^A)$ formé par les champs de vecteurs X tels que $[X, aY] = a[X, Y]$ pour tout $a \in A$ et pour tout $Y \in \mathcal{X}(M^A)$. Un champ de vecteurs X sur M^A appartient à $\mathcal{X}_A(M^A)$ si et seulement si

$$(\text{id}_A \otimes aY) \circ (\text{id}_A \otimes X) \circ \gamma = (\text{id}_A \otimes Y) \circ (\text{id}_A \otimes aX) \circ \gamma$$

pour tout $a \in A$ et pour tout $Y \in \mathcal{X}(M^A)$. On vérifie que si $a \in A$ et $X \in \mathcal{X}_A(M^A)$ alors aX appartient à $\mathcal{X}_A(M^A)$. L'application $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ de $\mathcal{X}_A(M^A) \times \mathcal{X}_A(M^A)$ dans $\mathcal{X}_A(M^A)$ est bilinéaire sur A : l'espace $\mathcal{X}_A(M^A)$ est une algèbre de Lie sur A .

PROPOSITION 7. — *Pour toute dérivation d de A , on a $[d_M, \mathcal{X}_A(M^A)] \subset \mathcal{X}_A(M^A)$ et l'application $X \mapsto [d_M, X]$ de $\mathcal{X}_A(M^A)$ dans $\mathcal{X}_A(M^A)$ est une dérivation de \mathbf{R} -algèbres de Lie qui n'est pas intérieure pour $d \neq 0$.*

Démonstration. — i) Soit $X \in \mathcal{X}_A(M^A)$ et $d \in \text{Der}(A)$. Pour tout $a \in A$ et pour tout $Y \in \mathcal{X}(M^A)$, on a :

$$\begin{aligned} [[d_M, X], aY] &= [d_M, [X, aY]] - [X, [d_M, aY]] \\ &= [d_M, a[X, Y]] - [X, [d(a)Y + a[d_M, Y]]] \\ &= d(a)[X, Y] + a[d_M, [X, Y]] - d(a)[X, Y] - a[X, [d_M, Y]] \\ &= a([d_M, [X, Y]] - [X, [d_M, Y]]) \\ &= a[[d_M, X], Y] \end{aligned}$$

Ainsi $[d_M, \mathcal{X}_A(M^A)] \subset \mathcal{X}_A(M^A)$.

ii) Soit $d \neq 0$ une dérivation de A . Supposons que $X \mapsto [d_M, X]$ est une dérivation de $\mathcal{X}_A(M^A)$ qui est intérieure. Il existe donc $Y \in \mathcal{X}_A(M^A)$ tel que : $[d_M, X] = [Y, X]$ pour tout $X \in \mathcal{X}_A(M^A)$. En particulier $[d_M, aX] = [Y, aX]$ pour tout $X \in \mathcal{X}_A(M^A)$ et pour tout $a \in A$. On a donc : $d(a)X + a[d_M, X] = a[Y, X] = a[d_M, X]$. Ce qui implique que $d(a)X = 0$ pour tout $X \in \mathcal{X}_A(M^A)$ et pour tout $a \in A$. Il s'ensuit que $d = 0$: ce qui contredit l'hypothèse $d \neq 0$. La dérivation $X \mapsto [d_M, X]$ de $\mathcal{X}_A(M^A)$ n'est donc pas intérieure pour $d \neq 0$.

D'après la propriété iv) §5, le prolongement à M^A d'un champ de vecteurs sur M appartient à $\mathcal{X}_A(M^A)$. En réalité l'espace $\mathcal{X}_A(M^A)$ est parfaitement déterminé par les prolongements à M^A des champs de vecteurs sur M .

THÉORÈME 1. — *L'application bilinéaire $(a, V) \mapsto aV^A$ de $A \times \mathcal{X}(M)$ dans $\mathcal{X}_A(M^A)$ induit un isomorphisme de $A \otimes \mathcal{X}(M)$ sur $\mathcal{X}_A(M^A)$ compatible avec la structure d'algèbres de Lie sur A .*

La démonstration utilise les deux lemmes suivants :

LEMME 1. — *Si $\sigma : M \rightarrow M^A$ est l'injection canonique et si σ^* est l'homomorphisme de $C^\infty(M^A)$ dans $C^\infty(M)$ qui à $F \in C^\infty(M^A)$ associe $F \circ \sigma$, alors :*

$$\left[\bigcap_{\substack{a \in A \\ Y \in \mathcal{X}(M^A)}} (\text{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0) \right] \cap [(\text{id}_A \otimes \sigma^*)^{-1}(0)] = (0).$$

Démonstration. — Soit \mathfrak{m} l'idéal maximal de A et k la hauteur de A . Pour tout $r \in \mathbf{N}$, $r \geq 1$, les idéaux \mathfrak{m}^r sont des sous-espaces vectoriels de \mathfrak{m} . Pour $i = 2, 3, \dots, k$, on note S_i le supplémentaire de \mathfrak{m}^i dans \mathfrak{m}^{i-1} . En posant $S_1 = \mathbf{R}$ et $S_{k+1} = \mathfrak{m}^k$, on a : $A = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_{k+1}$. Pour $i = 1, 2, \dots, k+1$, soit (a_{α_i}) une base de S_i et $(a_{\alpha_i}^*)$ la base duale. Ainsi $(a_{\alpha_i})_{i=1,2,\dots,k+1}$ est une base de A et $(a_{\alpha_i}^*)_{i=1,2,\dots,k+1}$ la base duale. Soit $\sum_{(\alpha_i)_{i=1,2,\dots,k+1}} a_{\alpha_i} \otimes \varphi_{\alpha_i}$ un élément de $A \otimes C^\infty(M^A)$ qui appartient à

$$\left[\bigcap_{\substack{a \in A \\ Y \in \mathcal{X}(M^A)}} (\text{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0) \right] \cap [(\text{id}_A \otimes \sigma^*)^{-1}(0)] = (0).$$

On a :

$$\begin{cases} (aY)(\varphi_{\alpha_i}) = \sum_{\substack{\alpha_j \\ j=1,2,\dots,k+1}} a_{\alpha_i}^*(aa_{\alpha_j})Y(\varphi_{\alpha_j}) & \begin{array}{l} \text{pour tout } a \in A, \\ \text{pour tout } Y \in \mathcal{X}(M^A), \\ \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, k+1, \end{array} \\ \varphi_{\alpha_i} \circ \sigma = 0 & \text{pour } i = 1, 2, \dots, k+1 \end{cases}$$

En particulier :

Prolongement des champs de vecteurs

$$(aV^A)(\varphi_{\alpha_i}) = \sum_{\substack{\alpha_j \\ j=1,2,\dots,k+1}} a_{\alpha_i}^*(aa_{\alpha_j})V^A(\varphi_{\alpha_j}) \quad \text{pour tous } a \in \mathfrak{m}, V \in \mathcal{X}(M), \quad (1)$$

et $i = 1, 2, \dots, k+1$,

$$\varphi_{\alpha_i} \circ \sigma = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, k+1 \quad (2)$$

1er cas : $i = 1$

$$(aV^A)(\varphi_{\alpha_1}) = \sum_{\substack{\alpha_j \\ j=1,2,\dots,k+1}} a_{\alpha_1}^*(aa_{\alpha_j})V^A(\varphi_{\alpha_j}) \quad \text{pour tous } a \in \mathfrak{m} \text{ et } V \in \mathcal{X}(M).$$

Pour tout $j = 1, 2, \dots, k+1$ et pour tout $a \in \mathfrak{m}$, $aa_{\alpha_j} \in \mathfrak{m}$. Comme a_{α_1} est une base de S_1 . Ainsi $(aV^A)(\varphi_{\alpha_1}) = 0$ pour tout $a \in \mathfrak{m}$ et pour tout $V \in \mathcal{X}(M)$. D'où : $\varphi_{\alpha_1} = f_{\alpha_1} \circ \pi$ où $f_{\alpha_1} \in C^\infty(M)$ et $\pi : M^A \rightarrow M$ la projection canonique. Compte tenu de (2), on déduit que $\varphi_{\alpha_1} = 0$.

2ème cas : $i = 2$

$$(aV^A)(\varphi_{\alpha_2}) = \sum_{\substack{\alpha_j \\ j=2,3,\dots,k+1}} a_{\alpha_2}^*(aa_{\alpha_j})V^A(\varphi_{\alpha_j}) \quad \text{pour tous } a \in \mathfrak{m} \text{ et } V \in \mathcal{X}(M).$$

Pour tout $j = 2, 3, \dots, k+1$ et pour tout $a \in \mathfrak{m}$, $aa_{\alpha_j} \in \mathfrak{m}^2$. Comme a_{α_2} est une base de S_2 , supplémentaire de \mathfrak{m}^2 dans \mathfrak{m} , alors $(aV^A)(\varphi_{\alpha_2}) = 0$ pour tout $a \in \mathfrak{m}$ et pour tout $V \in \mathcal{X}(M)$. Ainsi $\varphi_{\alpha_2} = f_{\alpha_2} \circ \pi$ où $f_{\alpha_2} \in C^\infty(M)$ et $\pi : M^A \rightarrow M$. Puisque $\varphi_{\alpha_2} \circ \sigma = 0$, alors $\varphi_{\alpha_2} = 0$.

La suite de la démonstration se fait par récurrence.

LEMME 2. —

$$\bigcap_{\substack{a \in A \\ Y \in \mathcal{X}(M^A)}} (\text{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0) = A \cdot \gamma[C^\infty(M)].$$

Démonstration.

1ère inclusion. — Puisque pour tout $a \in A$ et pour tout $Y \in \mathcal{X}(M^A)$, $(\text{id}_A \otimes aY) \circ \gamma = (\mu_a \otimes Y) \circ \gamma$ alors

$$\gamma[C^\infty(M)] \subset \bigcap_{\substack{a \in A \\ Y \in \mathcal{X}(M^A)}} (\text{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0).$$

Il s'ensuit que $A \cdot \gamma[C^\infty(M)] \subset \bigcap_{\substack{a \in A \\ Y \in \mathcal{X}(M)}} (\text{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0)$.

2ème inclusion.— Soit $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ une base de A . Si $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \otimes \varphi_\alpha$ est un élément de $A \otimes C^\infty(M^A)$ qui appartient à

$$\bigcap_{\substack{a \in A \\ Y \in \mathcal{X}(M^A)}} (\text{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0).$$

On vérifie que : $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \otimes \varphi_\alpha - \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \gamma(\varphi_\alpha \circ \sigma)$ est un élément de

$$\left[\bigcap_{\substack{a \in A \\ Y \in \mathcal{X}(M^A)}} (\text{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0) \right] \cap [(\text{id}_A \otimes \sigma^*)^{-1}(0)].$$

Compte tenu du lemme 1, on conclut que : $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \otimes \varphi_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \gamma(\varphi_\alpha \circ \sigma)$. Ainsi

$$\bigcap_{\substack{a \in A \\ Y \in \mathcal{X}(M^A)}} (\text{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0) \subset A \cdot \gamma[C^\infty(M)].$$

Remarque.— Démonstration du théorème 1— On vérifie que l'application bilinéaire $(a, V) \mapsto aV^A$ de $A \times \mathcal{X}(M)$ dans $\mathcal{X}_A(M^A)$ induit un homomorphisme d'algèbres de Lie sur A de $A \otimes \mathcal{X}(M)$ dans $\mathcal{X}_A(M^A)$.

Injection. Soit $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ une base de A et $(V_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ une famille de champs de vecteurs sur M tels que : $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha V_\alpha^A = 0$. Pour tout $\xi \in M^A$, $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha V_\alpha^A(\xi) = 0$. D'où $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \mu_{a_\alpha} \circ \xi \circ V_\alpha = 0$. Pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on a : $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \cdot \xi(V_\alpha \cdot f) = 0$ pour tout $\xi \in M^A$. En particulier pour tout point proche $f \mapsto f(x)$ de $C^\infty(M)$ dans A , on a : $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} (V_\alpha f)(x) a_\alpha = 0$ pour tous $x \in M$ et $f \in C^\infty(M)$. Ainsi $(V_\alpha f)(x) = 0$ pour tous $\alpha \in \mathcal{J}$, $x \in M$ et $f \in C^\infty(M)$. On déduit que $V_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{J}$. Ainsi $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \otimes V_\alpha = 0$.

Surjection. Soit $X \in \mathcal{X}_A(M^A)$. Puisque $(\text{id}_A \otimes aY) \circ (\text{id}_A \otimes X) \circ \gamma = (\text{id}_A \otimes Y) \circ (\text{id}_A \otimes aX) \circ \gamma$ pour tout $a \in A$ et pour tout $Y \in \mathcal{X}(M^A)$, alors $(\text{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y) \circ (\text{id}_A \otimes X) \circ \gamma = 0$. Compte tenu du lemme 2, on a :

$$\text{Im}[(\text{id}_A \otimes X) \circ \gamma] \subset \bigcap_{\substack{a \in A \\ Y \in \mathcal{X}(M^A)}} (\text{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0) = A \cdot \gamma[C^\infty(M)].$$

Etant donné une fonction $g \in C^\infty(M)$, il existe une famille unique $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ de fonctions de classe C^∞ sur M telle que : $(\text{id}_A \otimes X) \circ \gamma(g) =$

Prolongement des champs de vecteurs

$\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \gamma(f_\alpha)$. On définit les applications : $V_\alpha : g \mapsto f_\alpha$ de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{J}$. En écrivant $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \gamma(V_\alpha g) = (\text{id}_A \otimes X) \circ \gamma(g)$, on vérifie que $V_\alpha : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ est une dérivation. D'où :

$$\begin{aligned} (\text{id}_A \otimes X) \circ \gamma(g) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \gamma(V_\alpha g) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} [\mu_{a_\alpha} \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma(V_\alpha g) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} [\mu_{a_\alpha} \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma \circ V_\alpha(g). \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} (\text{id}_A \otimes X) \circ \gamma &= \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} (\mu_{a_\alpha} \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}) \circ \gamma \circ V_\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} (\mu_{a_\alpha} \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}) \circ (\text{id}_A \otimes V_\alpha^A) \circ \gamma \\ &= [\text{id}_A \otimes \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha V_\alpha^A] \circ \gamma. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$X = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha V_\alpha^A.$$

7. Caractérisation du prolongement des champs de vecteurs

On a vu que le prolongement à M^A de tout champ de vecteurs sur M appartient à $\mathcal{X}_A(M^A)$ et qu'il commute avec tout champ de vecteurs sur M^A associé à une dérivation de A . Ces deux conditions ne donnent pas toujours une caractérisation du prolongement à M^A des champs de vecteurs sur M . On va dans ce qui suit construire une suite décroissante de sous-algèbres locales de A qui permettra de donner une caractérisation du prolongement.

Soit $A = A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_r \supset \dots$ la suite des sous-algèbres locales de A définie par la condition : pour $r > 0$, A_r est l'intersection des noyaux des dérivations de A_{r-1} . On a $A_r = \mathbf{R}$ à partir d'un certain rang.

Exemple. — Soit \mathfrak{a} un idéal de $\mathbf{R}[T_1, \dots, T_s]$. Si on note \bar{P} l'image de $P \in \mathbf{R}[T_1, \dots, T_s]$ dans $\mathbf{R}[T_1, \dots, T_s]/\mathfrak{a}$ par la surjection canonique, pour toute dérivation d de $\mathbf{R}[T_1, \dots, T_s]/\mathfrak{a}$, on a : $d(\bar{P}) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \bar{P}}{\partial T_i} d(\bar{T}_i)$. Par conséquent si $\mathfrak{a} = (\frac{\partial P}{\partial T_1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial T_s})$, \bar{P} appartient à l'intersection des noyaux des dérivations de $\mathbf{R}[T_1, \dots, T_s]/\mathfrak{a}$. Dans $\mathbf{R}[T_1, T_2]$, en prenant $P = T_1^3 - T_1 T_2^5 + T_2^7$, alors \bar{P} est dans l'intersection des noyaux des

dérivations de $A = \mathbf{R}[T_1, T_2]/(3T_1^2 - T_2^5, 7T_2^6 - 5T_1T_2^4, T_2^8)$. On vérifie que $\overline{P} \neq 0$. Donc $A_1 \neq \mathbf{R}$.

La suite décroissante des sous-algèbres locales $(A_r)_{r \in \mathbf{N}}$ détermine une suite décroissante $(M^{A_r})_{r \in \mathbf{N}}$ de sous-variétés fermées de M^A .

PROPOSITION 8. — Pour $r > 0$, M^{A_r} est l'ensemble des points $\xi \in M^{A_{r-1}}$ tels que $d_M(\xi) = 0$ pour tout $d \in \text{Der}(A_{r-1})$.

Démonstration. — 1) Soit $\xi \in M^{A_r}$ et $j_r : A_r \rightarrow A_{r-1}$ l'injection canonique. Puisque $j_r \circ \xi \in M^{A_{r-1}}$, alors pour tout $d \in \text{Der}(A_{r-1})$, on a : $[id_{A_{r-1}} \otimes d_M(j_r \circ \xi)] \circ \gamma_{A_{r-1}} = -d \circ j_r \circ \xi = 0$. D'où $d_M(j_r \circ \xi) = 0$.

2) Soit $\xi \in M^{A_{r-1}}$ tel que $d_M(\xi) = 0$ pour tout $d \in \text{Der}(A_{r-1})$. On a donc $d \circ \xi = 0$ pour tout $d \in \text{Der}(A_{r-1})$. Par conséquent $\xi[C^\infty(M)]$ est contenu dans l'intersection des noyaux des dérivations de A_{r-1} c'est-à-dire $\xi[C^\infty(M)] \subset A_r$. D'où $\xi \in M^{A_r}$.

THÉORÈME 2. — Soit $[\mathcal{X}(M)]^A$ l'espace des prolongements à M^A des champs de vecteurs sur M . Si $X \in A_r[\mathcal{X}(M)]^A$, alors :

1) X est tangent à M^{A_r}

2) Pour que $X \in A_{r+1} \cdot [\mathcal{X}(M)]^A$ il faut et il suffit que :

$$(C_r) \quad [d_M, X/M^{A_r}] = 0 \text{ pour tout } d \in \text{Der}(A_r).$$

Démonstration. — 1) Soit V un champ de vecteurs sur M et soit V^A le prolongement de V à M^A . Si $j_r : A_r \rightarrow A$ est l'injection canonique, alors pour tout $\xi \in M^{A_r}$ et pour tout $a \in A_r$, on a : $(aV^A)(j_r \circ \xi) = a \cdot V^{A_r}(\xi)$. Ainsi tout champ de vecteurs X sur M^A qui appartient à $A_r \cdot [\mathcal{X}(M)]^A$ est tangent à M^{A_r} .

2) On va démontrer pour $r = 0$ c'est-à-dire que si $X \in A \cdot [\mathcal{X}(M)]^A$, pour qu'il appartienne à $A_1 \cdot [\mathcal{X}(M)]^A$ il faut et il suffit que $[d_M, X] = 0$ pour tout $d \in \text{Der}(A)$.

Condition nécessaire. Soit $X \in A_1 \cdot [\mathcal{X}(M)]^A$. Soit $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}_1}$ une base de A_1 et $(V_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}_1}$ une famille de champs de vecteurs sur M telles que $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_1} a_\alpha V_\alpha^A$. Pour tout $d \in \text{Der}(A)$, $[d_M, X] = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_1} d(a_\alpha) V_\alpha^A = 0$.

Condition suffisante. Soit $X \in A \cdot [\mathcal{X}(M)]^A$. Soit $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ une base de A et $(V_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ une famille de champs de vecteurs sur M telles que $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha V_\alpha^A$. Supposons $[d_M, X] = 0$ pour tout $d \in \text{Der}(A)$:

Prolongement des champs de vecteurs

ce qui donne $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} d(a_\alpha) V_\alpha^A = 0$. Ainsi $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} d(a_\alpha) \xi [V_\alpha f] = 0$ pour tous $d \in \text{Der}(A)$, $\xi \in M^A$ et $f \in C^\infty(M)$. En particulier pour tout $x \in M$, $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} (V_\alpha f)(x) d(a_\alpha) = 0$ pour tout $f \in C^\infty(M)$ et pour tout $d \in \text{Der}(A)$. On déduit que pour tout $x \in M$ et pour $f \in C^\infty(M)$, $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} (V_\alpha f)(x) a_\alpha$ appartient à A_1 . Pour tout $f \in C^\infty(M)$, la fonction $x \mapsto \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} (V_\alpha f)(x) a_\alpha$ est une fonction sur M à valeurs dans A_1 . D'où pour tout $f \in C^\infty(M)$, $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \otimes V_\alpha(f)$ appartient à $A_1 \otimes C^\infty(M)$. Alors $X = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha V_\alpha^A$ appartient à $A_1 \cdot [\mathcal{X}(M)]^A$.

COROLLAIRE .— *Pour qu'un champ de vecteurs X sur M^A soit le prolongement à M^A d'un champ de vecteurs sur M il faut et il suffit que :*

- 1) $[X, aY] = a[X, Y]$ pour tout $a \in A$ et pour tout $Y \in \mathcal{X}(M^A)$
- 2) X vérifie la condition (C_r) pour $r = 0, 1, 2, \dots$

Dans tous les cas usuels en géométrie, A est une algèbre graduée par des éléments de degrés strictement positifs. Dans ce cas, il existe une dérivation d° de A telle que $(d^\circ)^{-1}(0) = \mathbf{R}$. On a alors $A_1 = A_2 = \dots = \mathbf{R}$ et la condition 2) se réduit à

$$(2') \quad [(d^\circ)_M, X] = 0 .$$

8. Autres caractérisations du prolongement lorsque A est une algèbre de polynômes tronquée

Soit $A = \mathbf{R}[T_1, \dots, T_s]/(T_1, \dots, T_s)^{k+1}$, \mathfrak{m} l'idéal maximal de A et $q : A \rightarrow A/\mathfrak{m}^k$ la surjection canonique. Etant donné une q -dérivation δ de A dans A/\mathfrak{m}^k , on note $\mathcal{M}(\delta)$ l'espace des champs de vecteurs Z sur M^A tels que $(q \otimes Z) \circ \gamma = [-\delta \otimes \text{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma$ et \mathcal{M} le $C^\infty(M^A)$ -sous-module de $\mathcal{X}(M^A)$ engendré par les $\mathcal{M}(\delta)$ où δ décrit l'espace $\text{Der}(A, A/\mathfrak{m}^k)$ des q -dérivations de A dans A/\mathfrak{m}^k .

PROPOSITION 10 [3]. — *On suppose $\dim M \geq s$. Il existe une application $C^\infty(M^A)$ -linéaire et une seule $\omega : \mathcal{M} \rightarrow C^\infty(M^A) \otimes \text{Der}(A, A/\mathfrak{m}^k)$ telle que $\omega[\mathcal{M}(\delta)] = 1_{C^\infty(M^A)} \otimes \delta$ pour toute q -dérivation δ de A dans A/\mathfrak{m}^k et dont le noyau est le $C^\infty(M^A)$ -module des champs verticaux pour la fibration $M^A \rightarrow M^A/\mathfrak{m}^k$.*

On a la caractérisation suivante :

THÉORÈME 3. — *Si X est un champ de vecteurs sur M^A , les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) X est le prolongement à M^A d'un champ de vecteurs sur M .
- 2) i) $[X, aY] = a[X, Y]$ pour tout $a \in A$ et pour tout $Y \in \mathcal{X}(M^A)$
 ii) $[X, d_M] = 0$ où d est une dérivation de A telle que $d(A) = \mathfrak{m}$.
- 3) Pour toute q -dérivation δ de A dans A/\mathfrak{m}^k et pour tout $Z \in \mathcal{M}(\delta)$, le champ de vecteurs $[X, Z]$ est vertical pour la fibration $M^A \rightarrow M^A/\mathfrak{m}^k$.
- 4) i) $[X, \mathcal{M}] \subset \mathcal{M}$
 ii) $\theta_X \omega = 0$ c'est-à-dire $X \cdot \omega(Y) - \omega[X, Y] = 0$ pour tout $Y \in \mathcal{M}$.

En effet, d'après le théorème 1, 1) est équivalent à 2). La propriété vi) §5 donne : 1) implique 3). Dans [3], se trouve une démonstration de l'équivalence entre 3) et 4).

Remarque.— Lorsque $\dim M = s$ et lorsqu'on se restreint à l'ouvert $P^k(M)$ de M^A constitué des repères d'ordre k sur M , le module \mathcal{M} décrit le $C^\infty[P^k(M)]$ -module $\mathcal{X}[P^k(M)]$ et l'application ω est la forme canonique de Kobayashi sur le fibré des repères d'ordre k . Dans ce cas, l'assertion 4) se réduit à $\theta_X \omega = 0$ et ceci n'est autre que la caractérisation classique du prolongement à $P^k(M)$ des champs de vecteurs sur M ([1]).

REFERENCES

- [1] S. Kobayashi. — Canonical forms on frame bundles of higher order contact, *Proc. Sym. Diff. Geom. Tucson*, t. , 1960, p. 186-193.
- [2] A. Morimoto. — Prolongation of connections to bundles of infinitely near points, *J. Diff. Geom.*, t. **11**, 1976, p. 479-498.
- [3] E. Okassa. — Prolongement par une algèbre locale, *Congrès National des Sociétés Savantes, Grenoble*, t. **III**, 1983, p. 47-59.
- [4] E. Okassa. — Prolongements des champs de vecteurs à des variétés de points proches, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* t.300, t. **6**, 1985, p. 173-176.
- [5] A. Weil. — Théorie des points proches sur les variétés différentiables, *Colloque Géom. Diff. Strasbourg*, t. , 1953, p. 111-117.

(Manuscrit reçu le 12 mai 1987)