

MONIQUE DAUGE

MARC POGU

**Existence et régularité de la fonction potentiel pour des écoulements subcritiques s'établissant autour d'un corps à singularité conique**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 9, n° 2 (1988), p. 213-242

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1988\\_5\\_9\\_2\\_213\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1988_5_9_2_213_0)

© Université Paul Sabatier, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Existence et régularité de la fonction potentiel pour des écoulements subcritiques s'établissant autour d'un corps à singularité conique

MONIQUE DAUGE <sup>(1)</sup> et MARC POGU <sup>(2)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — La linéarisation des équations auxquelles satisfait la fonction potentiel aboutit au problème de Neumann pour le laplacien. Nous précisons les fonctions singulières à gradient non borné de ce problème. Nous en déduisons une méthode itérative d'ajustement des données au bord pour construire des solutions dont le gradient s'annule au coin (condition de Kutta-Joukowski).

**ABSTRACT.** — The linearization of the equations governing the potential function yields the Neumann problem for the Laplace operator. We give precisely the singular functions with unbounded gradient of that problem. We deduce from that an iterative method for correcting boundary values in order to build solutions the gradient of which is null at the corner point (Kutta-Joukowski condition).

---

### Introduction

Nous considérons l'écoulement 3D stationnaire, irrotationnel et subcritique d'un fluide parfait qui s'établit autour d'un corps convexe  $\mathcal{B}$  (voir par ex.: [10], [20], [21]). On suppose que  $\mathcal{B}$  présente une singularité conique de révolution en un point  $T$  de sa surface. Le domaine occupé par le fluide est le complémentaire de  $\mathcal{B}$ , borné par la sphère  $\Gamma'$  de rayon  $R$  fixé.

L'étude proposée est de donner une méthode qui permet l'ajustement de la condition de Kutta-Joukowski en  $T$ . Passant en fonction potentiel  $\phi$ , nous sommes amenés à montrer l'existence et l'unicité de la solution d'un

---

<sup>(1)</sup> Département de Mathématiques et Informatique, 2, rue de la Houssinières, 44072 Nantes Cedex 03, France

<sup>(2)</sup> E.N.S.M., 1 rue de la Noë, 44072 Nantes, France

problème aux limites non-linéaire de type Neumann, le gradient  $\nabla\phi$  devant être continu jusqu'en  $T$ . Cet article complète et développe les résultats annoncés dans la note [9].

Donnons une description du contenu. Le paragraphe 1. est destiné à la présentation du problème et des principaux résultats établis. Ensuite dans les paragraphes 2., 3., 4., nous étudions la régularité dans les espaces de Sobolev usuels  $W_p^s$ , de la solution du problème linéaire associé (correspondant à la formulation en fonction potentiel dans le cas des écoulements incompressibles) en nous basant sur les résultats de [17]. Pour la définition des espaces  $W_p^s$  et  $H^s$  on pourra se reporter à [18], chapitre 2. Enfin, au paragraphe 5., nous établissons l'existence et l'unicité de  $\phi$  dans un convexe convenable; nous utilisons une méthode de point fixe à rapprocher de celle établie en [3], [4] dans le cas  $2D$ .

## 1. Présentation du problème et des résultats

### 1.1. — Données géométriques

Dans  $\mathbf{R}^3$ , nous considérons un corps  $\mathcal{B}$  de surface  $\Gamma$  régulière sauf en  $T$  où elle présente une singularité conique de révolution. Nous désignons par  $\Omega$  l'ouvert borné, complémentaire de  $\mathcal{B}$  dans la boule centrée en  $0$  de rayon  $R$  fixé.

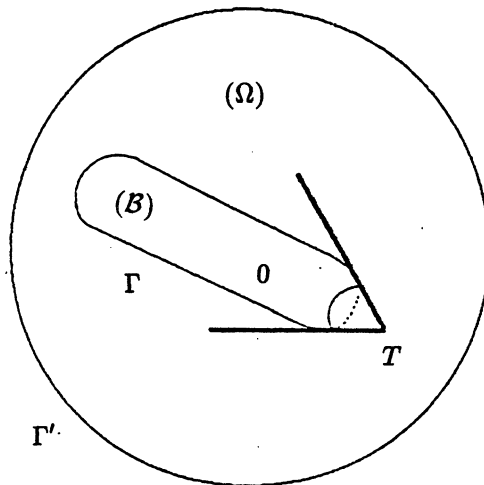


Figure 1

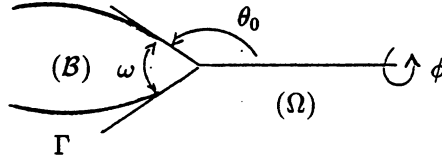


Figure 2

### 1.2. — Les équations

Le fluide étant irrotationnel et compressible le champ des vitesses  $q$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } q = 0 \\ \text{div } (\rho q) = 0 \end{array} \right\} \text{ dans } \Omega, \quad (1)$$

où  $\rho$  est la masse volumique; elle dépend du champ  $q$  via la relation :

$$\rho(q) = \rho_0 (1 - |q|^2)^{1/\gamma-1}$$

avec  $(\rho_0 > 0)(\gamma > 1)$  constantes désignant respectivement la masse du fluide au repos et l'indice adiabatique du gaz [11].

Les conditions aux limites sur  $\partial\Omega$  sont :

$$q \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (2)$$

$$\rho \cdot q \cdot n = h \quad \text{sur } \Gamma'. \quad (3)$$

où  $n$  désigne la normale unitaire extérieure à  $\Omega$ .

Le raccord des vitesses en  $T$  [6] est traduit par la condition ponctuelle (de Kutta-Joukowski) :

$$q = 0 \text{ en } T. \quad (4)$$

Introduisons la fonction potentiel  $\phi$  de l'écoulement donnée par :

$$q = \nabla\phi.$$

Dans ces conditions, les relations (1), (4) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div } (\rho \nabla\phi) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n \phi = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \rho \partial_n \phi = h & \text{sur } \Gamma', \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\nabla\phi = 0 \text{ en } T. \tag{6}$$

où  $\partial_n$  désigne la dérivée normale extérieure à  $\Omega$ .

Le problème est de déterminer quelles corrections apporter à la fonction  $h$ , de sorte que la solution  $\phi$  de (5) satisfasse la condition (6).

Lorsque l'on cherche  $\phi$  dans  $H^1(\Omega)$  (voir [19] par exemple), une difficulté se présente : nous verrons que si  $h$  est prise régulière quelconque, alors  $\nabla\phi$  devient, en général, infini en  $T$ , c'est-à-dire que la condition (6) n'est pas satisfaite. La méthode présentée ici permet de pallier cette difficulté.

### 1.3. — Description des principaux résultats

On observe que si  $h$  est choisie de sorte que  $\nabla\phi$  soit continue jusqu'en  $T$ , alors tenant compte de la condition aux limites sur  $\Gamma$  et de la géométrie au voisinage de  $T$ , on en déduit que la condition (6) est satisfaite.

Nous commençons par étudier le problème linéaire associé à (5), obtenu en remplaçant  $\rho$  par  $\rho_0$ , (ce qui correspond en quelque sorte au problème (5), (6) gelé en  $T$ ); on est conduit au problème aux limites linéaires de Neumann :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u = g & \text{sur } \Gamma'. \end{cases} \tag{7}$$

( $f$  est choisie non nulle a priori pour des raisons qui vont apparaître ensuite). La théorie générale des problèmes aux limites sur des domaines à singularités coniques [13], [12], [17], [7], laisse prévoir l'existence de singularités. Nous pouvons décrire avec précision le comportement de  $u$  au voisinage de  $T$ ; pour cela, introduisons les coordonnées sphériques de centre  $T$  :  $(r, \theta, \phi)$  avec  $r > 0$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ , de façon que  $\theta = 0$  traverse  $\Omega$  (voir figure 2).

Le cône  $C$  de sommet  $T$  qui coïncide avec  $\Omega$  au voisinage de  $T$  est paramétré par :

$$C = \{(r, \theta, \phi); \quad r > 0, \theta \in [0, \theta_0], \phi \in [0, 2\pi]\}$$

où  $\theta_0 = \pi - \left(\frac{\omega}{2}\right)$ .

Pour  $m$  entier et  $\nu$  réel, on introduit  $P_\nu^m$ , la  $m^e$  fonction de Legendre associée de première espèce (voir par exemple [14], [15]); la dérivée de  $P_\nu^m$  est notée  $(P_\nu^m)'$ .

Existence et régularité de la fonction potentiel

Pour  $p \geq 2$ , on note  $p'$  son conjugué :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Rappelons d'abord le résultat d'existence et d'unicité pour le problème de NEUMANN

THÉORÈME 1. — *Etant donné  $(f, g)$  dans  $L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\Gamma')$  satisfaisant la condition :*

$$\int_{\Omega} f + \int_{\Gamma'} g = 0, \quad (8)$$

le problème aux limites (7) admet une solution unique  $u$  dans  $H^1(\Omega)$  telle que :

$$\int_{\Omega} u = 0. \quad (9)$$

La démonstration de ce résultat peut être trouvée par exemple en [16], [2], [18]. Les hypothèses faites sur les données seront conservées dans toute la suite.

THÉORÈME 2. — *Sous les hypothèses du Théorème 1, et pour  $p > 3$ , suffisamment proche de 3, la solution  $u$  de (7), (9) admet au voisinage de  $T$  la décomposition :*

$$u = r^{\nu}(a_1 V_1 + a_2 V_2) + u_0, \quad (10)$$

où :

- $u_0 \in W_p^2(\Omega)$ ,
- $V_1 = P_{\nu}^1(\cos \theta) \sin \phi$ ,  $V_2 = P_{\nu}^1(\cos \theta) \cos \phi$ ,
- $\nu$  racine unique dans  $[0, 1]$  de l'équation :  $(P_{\nu}^1)'(\cos \theta_0) = 0$ .

On a l'estimation :

$$\|u_0\|_{W_p^2(\Omega)} \leq C \left[ \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma')} \right]. \quad (11)$$

De plus il existe deux fonctions  $K_m$  dans  $L^{p'}(\Omega)$ , de classe  $C^{\infty}$  en dehors de  $T$ , telles que les coefficients intervenant en (10) sont donnés par :

$$a_m = \int_{\Omega} f K_m + \int_{\Gamma'} g K_m, \quad m = 1, 2. \quad (12)$$

Pour établir ce théorème, on se base sur les résultats et méthodes de [17], [8], et on fait en plus une étude particulière du problème (la démonstration fait l'objet des paragraphes 2,3,4).

On déduit du théorème 2 :

COROLLAIRE 3. — *Sous les hypothèses du théorème 2, il existe des fonctions  $g_1, g_2$  de classe  $C^\infty$  sur  $\Gamma'$  telles que :*

$$\int_{\Gamma'} g_k = 0, \quad \int_{\Gamma'} g_k K_m = \delta_{k,m}, \quad k, m = 1, 2.$$

Dans ces conditions, la solution  $u$  de (7) avec pour donnée corrigée sur  $\Gamma'$  :

$$h = g - a_1 g_1 - a_2 g_2, \quad \text{avec } a_1, a_2 \text{ donnés par (12)}$$

est dans  $W_p^2(\Omega)$  et on a l'estimation :

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leq C \left[ \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma')} \right].$$

Le principal résultat de ce travail est le :

THÉORÈME 4. — *Avec  $p$  comme dans le Théorème 2, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour  $g \in W_p^{1-1/p}(\Gamma')$  vérifiant :*

$$\|g\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma')} \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma'} g = 0,$$

il existe des coefficients  $a_m$  uniques et une solution unique  $\phi \in W_p^2(\Omega)/\mathbb{C}$  au problème (5) (6) avec :

$$h = g - (a_1 g_1 + a_2 g_2).$$

De plus  $a_m$  et  $\phi$  peuvent être déterminés par une méthode d'approximation successive :

$$\phi^n = \mathcal{G}(\phi^{n-1}).$$

La démonstration de ce théorème est faite au paragraphe 5.

Indiquons dès à présent la construction de  $\mathcal{G}$  qui dépend d'un paramètre réel  $\mu > 0$  proche de  $1/\rho_0$  et de la fonction  $g$  :

$$\mathcal{G}: W_p^2(\Omega) \rightarrow W_p^2(\Omega);$$

pour  $v \in W_p^2(\Omega)$ , on pose :

$$\begin{aligned} f(v) &= \operatorname{div} [(1 - \mu\rho(\nabla v)\nabla v)] \text{ dans } \Omega, \\ g(v) &= [1 - \mu\rho(\nabla v)] \partial_n v + \mu g \text{ sur } \Gamma', \\ a_m(v) &= \int_{\Omega} f(v) K_m + \int_{\Gamma'} g(v) K_m, \quad m = 1, 2. \end{aligned}$$

Il résulte de la formule de Green que  $f(v)$ ,  $g(v)$  satisfont à la condition (8); ainsi le problème (7) avec pour donnée corrigée :

$$h(v) = g(v) - a_1(v) \cdot g_1 - a_2(v) \cdot g_2$$

admet une solution unique  $u(v) \in W_p^2(\Omega)$ .

L'application  $\mathcal{G}$  associée à  $v$  la fonction  $u(v)$ ; il est immédiat qu'un point fixe  $u = \phi$  de  $\mathcal{G}$  est solution de (5), (6), (9).

Le théorème 4 proviendra de la

**PROPOSITION 5.** — *Sous les hypothèses du Théorème 4, il existe  $\alpha > 0$ ,  $\eta > 0$ , tels que pour tout  $\mu$  satisfaisant à*

$$|1 - \mu\rho_0| < \alpha,$$

*l'application  $\mathcal{G}$  est contractante de  $E_\eta$  dans lui-même où*

$$E_\eta = \left\{ v \in W_p^2(\Omega); \|v\|_{W_p^2(\Omega)} \leq \eta \right\}.$$

Pour la démonstration, on se reportera au paragraphe 5.

*Remarque 6.* — Si l'angle  $\omega$  était supérieur à  $\pi$  ( $\mathcal{B}$  non convexe en  $T$ ) il n'y aurait pas de singularité : la condition (6) serait satisfaite d'office. D'autre part au voisinage des points  $P$  de  $\partial\Omega$  différents de  $T$ , la fonction  $\phi$  a la régularité  $W_p^2$ , en effet on choisit  $\eta$  de sorte que l'opérateur non-linéaire intervenant en (5) soit suffisamment proche d'un problème aux limites elliptique [1].

## 2. Etude générale du comportement de la solution du problème linéaire au voisinage de la singularité

On note :

$C$  : le cône infini de sommet  $T$ , coïncidant avec  $\Omega$  pour  $r \in [0, r_1]$



$G$  : le bord de  $C$

$S$  : l'intersection de la sphère unité et de  $C$ .

Ce paragraphe est destiné à la démonstration du résultat de régularité suivant :

THÉORÈME 7. — *Etant donné  $(f, g) \in L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\Gamma')$  satisfaisant à la condition (8), alors pour  $p > 3$ , suffisamment proche de 3, la solution  $u$  du problème (7) se décompose au voisinage de  $T$  sous la forme :*

$$u = u_0 + u_1 \tag{13}$$

où :

- $u_0 \in W_p^2(\Omega)$
- $u_1$  est combinaison linéaire finie de solutions du problème :

$$\begin{cases} u = r^\nu v \left( \frac{x}{r} \right), & v \in C^\infty(\bar{S}), \\ \Delta u = 0 & \text{dans } C, \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } G; \end{cases} \tag{14}$$

avec  $\nu \in [0, 1]$ .

La démonstration est essentiellement basée sur les théorèmes 4.1 et 4.2 de [17]. Sans revenir sur la preuve de l'isomorphisme  $L^p$  de [17], nous allons, pour la commodité du lecteur, exposer certaines étapes de démonstration (celles qui sont du type de [13]) et, surtout, dégager la spécificité du laplacien.

### Etape 1 .— Localisation

On introduit une fonction de troncature  $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$  ne dépendant que de  $r$ , nulle pour  $r \geq r_1$  et identiquement égale à 1 pour  $r \leq r_0 < r_1$ . En posant :

$$\tilde{u} = \chi u \quad \text{et} \quad \tilde{f} = \Delta \tilde{u}$$

on est ramené à la situation suivante :

- a)  $\tilde{u}$  et  $\tilde{f}$  sont à support dans  $B(T, r_1)$  (boule de centre  $T$ , de rayon  $r_1$ )
- b)  $\tilde{f} \in L^p(C)$ ,  $\tilde{u} \in H^1(C)$
- c)  $\Delta \tilde{u} = \tilde{f}$  dans  $C$  et  $\partial_n \tilde{u} = 0$  sur  $G$ .

### Etape 2 .— Mise en évidence de la variable radiale.

Existence et régularité de la fonction potentiel

Renotant  $(\tilde{u}, \tilde{f})$  par  $(u, f)$ , introduisons :

$$\tilde{u}(r, \tilde{x}) = u(x), \quad \tilde{f}(r, \tilde{x}) = r^2 f(x), \quad \text{où } \tilde{x} = \frac{x}{r}.$$

Le laplacien  $\Delta$  en les variables  $x$  se transforme en :

$$\frac{1}{r^2} [(r\partial_r)^2 + (r\partial_r) + L]$$

où  $L$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère  $S^2$ . En coordonnées sphériques,  $L$  s'écrit :

$$L = \frac{1}{\sin \theta} \left( \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi^2 \right).$$

Il résulte immédiatement du passage en coordonnées sphériques que :

$$r\partial_r \tilde{u}, \quad r\tilde{u} \in L^2(\mathbf{R}_+ \times S).$$

L'inégalité de Hardy implique alors que  $\tilde{u} \in L^2(\mathbf{R}_+ \times S)$  (cf. [13]). Ainsi on est ramené à la situation suivante :

- a)  $\tilde{u}$  et  $\tilde{f}$  sont à support dans  $[0, r_1[ \times S$
- b)  $r^{-2+2/p} \tilde{f} \in L^p(\mathbf{R}_+ \times S)$ ;  $(r\partial_r)\tilde{u}, \nabla_s \tilde{u}, \tilde{u} \in L^2(\mathbf{R}_+ \times S)$
- c)  $\begin{cases} -[(r\partial_r)^2 + (r\partial_r) + L]\tilde{u} = \tilde{f} & \text{dans } \mathbf{R}_+ \times S, \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \mathbf{R}_+ \times \partial S. \end{cases}$

**Etape 3** . — *Transformation de Mellin*

Soit  $Mu(\nu) = U(\nu) = \int_0^{+\infty} r^{-(1+\nu)} \tilde{u}(r) dr$ .

Grâce à l'égalité de Cauchy-Schwarz en la variable  $r$ , on obtient :

$$\|U(\nu)\|_{L^2(S)}^2 \leq \|\tilde{u}\|_{L^2(\mathbf{R}_+ \times S)}^2 \times \|r^{-(1+\nu)}\|_{L^2(]0, r_1])}^2.$$

Ainsi,  $U(\nu)$  est défini dans  $L^2(S)$  pour tout  $\nu \in \mathbf{C}$ ,  $\text{Re } \nu < -1/2$ .  $U(\nu)$  est encore bien définie pour  $\text{Re } \nu = -1/2$  ( en posant  $t = \log r$ , on est ramené à la transformée de Fourier d'une fonction  $L^2$ ).

Soit  $F(\nu) = \int_0^{+\infty} r^{-(1+\nu)} \tilde{f}(r) dr$ .

L'inégalité de Hölder en la variable  $r$  donne:

$$\|F(\nu)\|_{L^p(S)}^p \leq \|r^{-2+2/p} \tilde{f}\|_{L^p(\mathbf{R}_+ \times S)}^p \times \|r^{1-\nu-2/p}\|_{L^{p'}(]0, r_1])}^{p/p'}.$$

Ainsi  $F(\nu)$  est défini à valeurs dans  $L^p(S)$ , pour  $\Re \nu < 2 - 3/p$ .

Il est par ailleurs classique que  $U(\nu)$  et  $F(\nu)$  sont analytiques en  $\nu$ .

Comme, d'autre part,  $M(r\partial_r u) = \nu M u$ , les conclusions de l'étape 2 impliquent :

a)  $U$  est analytique sur  $\Re \nu < -1/2$  à valeurs dans  $H^1(S)$ , et est bien définie pour  $\Re \nu = -1/2$ .

$F$  est analytique sur  $\Re \nu < 2 - 3/p$  à valeurs dans  $L^p(S)$ .

b) Pour  $\Re \nu < -1/2$ , on a :

$$\begin{cases} -(\nu(\nu + 1) + L)U(\nu) = F(\nu) & \text{sur } S \\ \partial_n U(\nu) = 0 & \text{sur } \partial S. \end{cases} \quad (15)$$

**Etape 4** .— *Résolution de l'équation à paramètre  $\nu$*

Schématiquement, la décomposition (13) provient d'un prolongement méromorphe de  $U(\nu)$  dans la zone  $-1/2 < \Re \nu < 2 - 3/p$ , à l'aide de l'équation (15).

On doit donc étudier les propriétés de l'inverse du problème de Neumann associé à  $L + \lambda$ , avec  $\lambda = \nu(\nu + 1)$ . Autrement dit, on doit étudier la résolvante du problème de Neumann  $\mathcal{N}$  associé à l'opérateur de Laplace-Beltrami sur  $S$ .

$-L + I$  est associé à la forme intégrodifférentielle sur  $H^1(S)$  :

$$a(v, w) = \int_S \nabla_s v \nabla_s \bar{w} ds. + \int_S v \bar{w} ds$$

Comme  $a$  est fortement coercive :

$$\exists C, \quad \forall v \in H^1(S) \quad \|v\|_{H^1(S)}^2 \leq C \Re a(v, v)$$

on en déduit que  $-L + I$  induit un isomorphisme de  $V = H^1(S)$  sur  $V'$ , isomorphisme qui se restreint à un isomorphisme de  $D(\mathcal{N}) = \{u \in H^2(S), \partial_n u = 0 \text{ sur } \partial S\}$  sur  $L^2(S)$  [1] et que nous notons  $\mathcal{N} + I$ .

Soit  $\mathcal{I}$  l'injection de  $D(\mathcal{N})$  dans  $L^2$ .  $\mathcal{I}$  étant compacte, on obtient que

$$\mathcal{G} \equiv \mathcal{I} \circ (\mathcal{N} + I)^{-1}$$

est un opérateur auto-adjoint compact de  $L^2(S)$ . Par conséquent, son spectre est formé d'une suite infinie de valeurs propres  $(\mu_j)$  de multiplicité

finie, s'accumulant en 0. Ainsi, le spectre  $\mathbf{S}$  de  $\mathcal{N}$  est discret, et comme  $\mathcal{N}$  est positif, ses valeurs propres  $\lambda_j = \frac{1}{\mu_j} - 1$  sont  $\geq 0$  et tendent vers l'infini. Enfin, le noyau de  $\mathcal{N}$  est réduit aux fonctions constantes sur la sphère, car  $\mathcal{N}v = 0$  implique que

$$\|\nabla_s v\|_{L^2}^2 = 0.$$

Soit  $(v_j)$  une base orthonormale dans  $L^2(S)$  de fonctions propres de  $\mathcal{N}$ , associée aux valeurs propres  $\lambda_j$ . Nous avons, si  $\lambda \notin \mathbf{S}$

$$(\mathcal{N} - \lambda)^{-1}v = \sum_j \frac{\langle v, v_j \rangle}{\lambda_j - \lambda} v_j.$$

Ainsi, les pôles de  $(\mathcal{N} - \lambda)^{-1}$  sont d'ordre 1.

$$\text{Soit } \mathcal{Z} = \{\nu \in \mathbf{C} / \nu(\nu + 1) \in \mathbf{S}\}$$

**Etape 5 . — Transformation de Mellin inverse.**

Nous pouvons choisir  $p$  à présent. Nous prenons  $p > 3$  pour avoir l'injection de  $W_p^2(\Omega)$  dans  $C^1(\bar{\Omega})$ . D'autre part, nous choisissons  $p$  suffisamment proche de 3 pour qu'il n'y ait aucun élément de  $\mathcal{Z}$  dans l'intervalle  $]1, 2 - 3/p[$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $1 + \varepsilon < 2 - 3/p$ .

Un raisonnement standard [13] basé sur la formule de Cauchy dans la bande  $\Re \nu \in [-1/2, 1 + \varepsilon]$  pour la fonction  $\nu \rightarrow (2i\pi)^{-1} r^\nu U(\nu)$ , et sur des estimations a priori convenables, permet d'obtenir que :

$$u = u_0 + \sum_{\Re \nu \in [-1/2, 1 + \varepsilon]} \text{Rés } r^\nu U(\nu)$$

où

$$u_0 \in W_{2,\beta}^2(C) \quad \text{avec } \beta = -1 - \varepsilon$$

l'espace de SOBOLEV à poids  $W_{p,\beta}^m(C)$  étant, comme dans [17], défini par :

$$W_{p,\beta}^m(C) = \left\{ v \in L_{\text{loc}}^p(C) / \exp(\beta t) \partial_t^\alpha \nabla_s^\gamma v \in L^p(\mathbf{R} \times S), \alpha + \gamma \leq m \right\}$$

où  $t = \log r$  et  $v(t, \tilde{x}) = v(x)$ .

A l'aide d'une partition en couronnes dyadiques de  $C$  [7], [17], et d'estimations a priori locales [1] sur des couronnes, on obtient que, comme en particulier,  $r^2 f \in W_{p,\beta}^0(C)$ , on a :

$$u_0 \in W_{p,\beta}^2(C).$$

Enfin, à l'aide du théorème 4.2 de [17], (qui est basé sur le théorème 4.1 d'isomorphisme dans des espaces  $W_{p,\beta}^m$ ) et vu le choix de  $\varepsilon$ , nous déduisons que :

$$u_0 \in W_{(p,3/p)-2}^2(C)$$

qui s'injecte dans  $W_p^2(C)$ .

Comme les pôles de  $\nu \rightarrow -(\nu(\nu + 1) + L)^{-1}$  sont simples, on déduit que les

$$\text{Rés } r^\nu U(\nu)$$

sont de la forme indiquée en (14) : pour  $\nu(\nu + 1) = \lambda_j$ ,  $v$  est un vecteur propre associé à  $\lambda_j$ . Vu que  $\mathcal{N} \geq 0$ , les éléments de  $\mathcal{Z}$  qui sont  $> -1/2$  sont nécessairement positifs.

Nous avons ainsi obtenu la précision supplémentaire au sujet du problème (14) :

LEMME 8. — *Si  $u = r^\nu v$  est solution de (14), alors  $\nu(\nu + 1)$  est valeur propre du problème de NEUMANN :*

$$\mathcal{N}: \{w \in H^2(S)/\partial_n w|_{\partial S} = 0\} \rightarrow L^2(S)$$

et  $v$  est vecteur propre associé à cette valeur propre.

### 3. Structure des Singularités

On note  $I$  tout sous-ensemble fini de  $\mathbf{Z}$ ; on rappelle que  $P_\nu^m$  désigne la  $m^e$  fonction de LEGENDRE associée de première espèce.

THÉORÈME 9. — *Soit  $\nu \geq 0$ . Toute solution  $u = r^\nu v$  du problème (14) représente en coordonnées sphériques par*

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \sum_{m \in I} a_m P_\nu^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (1) \\ \text{avec la condition} \\ (P_\nu^m)'(\cos \theta_0) = 0 \quad \forall m \in I \quad (2) \end{array} \right. \quad (16)$$

et inversement, pour tout  $v$  vérifiant (16),  $u = r^\nu v$  est solution de (14).

*Démonstration.* —

**Etape 1.** — Soit  $v \in C^\infty(\bar{S})$  tel que  $r^\nu v$  soit solution de (14). Comme  $S$  est invariant par rotation en  $\phi$ , on peut, pour tout  $\theta \in ]0, \theta_0]$ , déterminer

la décomposition de FOURIER de  $\tilde{v}(\theta, \cdot)$  où  $\tilde{v}$  est l'écriture de  $v$  dans les coordonnées  $(\theta, \phi)$ . Pour  $m \in \mathbf{Z}$ , soit donc :

$$w_m(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\psi} \tilde{v}(\theta, \psi) d\psi. \quad (17)$$

Posons :

$$\tilde{v}_m(\theta, \phi) = e^{im\phi} w_m(\theta). \quad (18)$$

Nous avons, dans  $C^\infty(]0, \theta_0] \times \mathbf{T})$ , la convergence :

$$\tilde{v} = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \tilde{v}_m. \quad (19)$$

Nous allons montrer successivement :

$$(L + \nu(\nu + 1)) \tilde{v}_m = 0 \text{ sur } ]0, \theta_0] \times \mathbf{T} \quad (20)$$

$$w_m(\theta) = CP_\nu^m(\cos \theta) \quad \text{et} \quad (P_\nu^m)'(\cos \theta_0) = 0 \quad (21)$$

$$\tilde{v}_m \in C^\infty(\overline{S}) \quad (22)$$

Il résulte de (20) et (22) que  $\tilde{v}_m$  est vecteur propre de  $\mathcal{N}$  pour la valeur propre  $\lambda = \nu(\nu + 1)$ . Grâce à (21), les  $\tilde{v}_m$  non nuls sont linéairement indépendants, et l'espace propre  $E$  de  $\mathcal{N}$  associé à  $\lambda$  étant de dimension finie, la somme (19) est finie. (21) donne alors (16).

*Preuve de (20).* — En coordonnées  $(\theta, \phi)$ ,  $L + \lambda$  est un opérateur différentiel  $A(\theta; \partial_\theta, \partial_\phi)$  à coefficients indépendants de  $\phi$ . Il résulte du Lemme 8 que :

$$A\tilde{v} = 0.$$

Soit  $e_m(\phi) = \frac{1}{2\pi} e^{im\phi}$ . (17), (18) peut s'écrire :

$$\tilde{v}_m = e_m *_{\phi} \tilde{v}.$$

Comme  $A$  est à coefficients indépendants de  $\phi$ , on a :

$$A\tilde{v}_m = e_m *_{\phi} A\tilde{v}.$$

Comme  $A\tilde{v} = 0$ , on obtient :  $A\tilde{v}_m = 0$ .  $\square$

*Preuve de (21).* —

(a) On a :

$$(L + \lambda)\tilde{v}_m = \lambda e^{im\phi} w_m + \frac{1}{\sin \theta} \left[ (\partial_\theta \sin \theta \partial_\theta w_m) e^{im\phi} - \frac{m^2}{\sin \theta} w_m e^{im\phi} \right],$$

et d'après (20) :

$$(L + \lambda)\tilde{v}_m = e^{im\phi} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \right] w_m = 0.$$

La fonction  $w_m$  est bornée en  $\theta = 0$  et puisque  $\lambda = \nu(\nu + 1)$  on en déduit ([15], [14]) que :

$$w_m(\theta) = CP_\nu^m(\cos \theta).$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} \partial_\theta \tilde{v}_m(\theta_0, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{im(\phi-\psi)} \partial_\theta \tilde{v}(\theta_0, \psi) d\psi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Avec (a), cela donne  $(P_\nu^m)'(\cos \theta_0) = 0$ .  $\square$

Preuve de (22). —  $P_\nu$  est  $C^\infty(]-1, 3[)$  et par ailleurs [14], [15] :

$$P_\nu^m(z) = (1 - z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_\nu(z). \quad (23)$$

Ainsi donc, en coordonnées  $(x, y, z)$ ,  $\tilde{v}_m$  devient  $v_m$  :

$$v_m(x, y, z) = ce^{im\phi} (x^2 + y^2)^{m/2} (\partial^m P_\nu)(z)$$

car, sur la sphère unité,  $1 - z^2 = x^2 + y^2$ . Comme, d'autre part,

$$\begin{aligned} e^{i\phi} (x^2 + y^2)^{1/2} &= x + iy, \\ v_m(x, y, z) &= C(x + iy)^m (\partial^m P_\nu)(z) \in C^\infty(\bar{S}). \end{aligned}$$

**Etape 2.** — Si  $v$  vérifie (16), on obtient facilement que  $r^\nu v$  est solution de (14), grâce à l'équation que vérifient les  $P_\nu^m$ . Ce qui termine la démonstration du théorème 9.

PROPOSITION 10. — Soit  $\theta_0 \in [\pi/2, \pi[$ . Alors l'équation

$$(P_\mu^1)'(\cos \theta_0) = 0, \quad \mu \in ]0, 1] \quad (24)$$

admet une seule racine  $\nu$ , qui est dans  $]0.8, 1]$ . De plus, une base des solutions du problème (14) avec la condition  $\nu \in [0, 1]$  est constituée par :

$$1, r^\nu P_\nu^1(\cos \theta) \sin \phi, \quad r^\nu P_\nu^1(\cos \theta) \cos \phi.$$

*Démonstration.* — Pour  $\theta_0 \in [\pi/2, \pi[$ , soit :

$$\lambda_0(\theta_0), \dots, \lambda_n(\theta_0), \dots$$

la suite croissante des valeurs propres de  $\mathcal{N}$  sur la calotte sphérique d'ouverture  $\theta_0$  (répétées selon leur multiplicité). Comme  $\mathcal{N}$  dépend d'une manière  $C^\infty$  de  $\theta_0$ , les  $\lambda_j(\theta_0)$  sont continues en  $\theta_0$ . Soit  $\nu_j(\theta_0)$  l'unique solution de

$$\nu \geq 0, \quad \nu(\nu + 1) = \lambda_j(\theta_0).$$

Les  $\nu_j(\theta_0)$  sont continus en  $\theta_0$  et forment une suite croissante pour chaque  $\theta_0$ .

**Etape 1 .** — Etude pour  $\theta_0 = \pi/2$ .

La calotte  $S$  est une demi-sphère et le cône  $C$  est un demi-espace, donc n'admet pas de point singulier en 0. Par conséquent, pour  $\nu \geq 0$ , les solutions de (14) sont des polynômes homogènes de degré  $\nu$ .

Pour  $\nu = 0$ , on obtient les constantes.

Pour  $\nu = 1$ , la condition de NEUMANN restreint le nombre de solutions indépendantes à 2.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \nu_0(\pi/2) &= 0, \\ \nu_1(\pi/2) &= \nu_2(\pi/2) = 1, \\ \nu_j(\pi/2) &\geq 2 \quad \text{pour } j \geq 3. \end{aligned}$$

**Etape 2 .** — Etude de  $\nu_0$ .

Nous avons vu dans l'étape 4 de la preuve du théorème 7, que 0 est valeur propre simple de  $\mathcal{N}$ . Donc,  $\nu_0 \equiv 0$  et le vecteur propre correspondant est 1.

**Etape 3 .** — Détermination de

$$J = \{j \geq 1 / \exists \theta_0 \in [\pi/2, \pi[, \nu_j(\theta_0) \in ]0, 1].$$

D'après l'étape 1, nous obtenons que  $\{1, 2\} \subset J$ . nous allons montrer l'égalité. Supposons qu'il existe  $j \geq 3$  tel que  $j \in J$ . Alors  $\nu_j(\pi/2) > 1$  et



d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $\theta_* > \pi/2$  tel que  $\nu_j(\theta_*) = 1$ . Admettant :

LEMME 11. — Si  $\nu_j(\theta_*) = 1$ , alors  $\theta_* = \pi/2$ ,

nous obtenons une contradiction. Ainsi :

$$J = \{1, 2\}.$$

**Etape 4** .—  $\forall j \in J, \exists \theta_0 > \pi/2 \quad \nu_j(\theta_0) \in ]0, 1[$ .

En effet, selon [22], pour  $\nu = 0,9$  et  $\theta_0 \simeq 105^\circ$  :

$$(P_\nu^1)'(\cos \theta_0) = 0.$$

Pour cette valeur de  $\theta_0$ ,  $\nu = 0.9$  correspond à une valeur propre double : une base de vecteurs propres étant  $P_\nu^1(\cos \theta) \sin \phi$ ,  $P_\nu^1(\cos \theta) \cos \phi$ .

**Etape 5** .—  $\forall j \in J, \forall \theta_0 \in [\pi/2, \pi[, \nu_j(\theta_0) \in ]0, 1[$ .

Si tel n'était pas le cas, il existerait  $\theta_0 > \pi/2$  tel que  $\nu_j(\theta_0) > 1$ . Avec l'étape 4, cela impliquerait qu'il existerait  $\theta_* > \pi/2$  tel que  $\nu_j(\theta_*) = 1$ . Le lemme 11 ferait aboutir à une contradiction.

**Etape 6** .— Il résulte des étapes 2, 3 et 5 que (14) avec  $\nu \in [0, 1]$  a 3 solutions indépendantes :

$$1, \quad u_1 \quad \text{et} \quad u_2$$

avec pour  $j = 1, 2$ ,  $u_j = r^{\nu_j(\theta_0)} v_j$ , ceci pour tout  $\theta_0 \in [\pi/2, \pi[$ .

**Etape 7** .— Pour achever la preuve de la proposition 10, il suffit maintenant de voir que pour tout  $\theta_0 \in [\pi/2, \pi[$ , l'équation (24) a une racine. Le théorème 9 et l'étape 6 permettent alors de conclure.

L'étape 7 s'obtient par des arguments de perturbation en remarquant que :

- pour  $\nu = 0,8$   $(P_\nu^1)'(\cos \theta)$  ne s'annule pas [22];
- pour  $\nu = 0,9$   $(P_\nu^1)'(\cos \theta)$  s'annule pour  $\theta \simeq 105^\circ$  et  $\theta \simeq 150^\circ$  [22];
- pour  $\nu = 1$   $(P_\nu^1)'(\cos \theta)$  s'annule pour  $\theta = \pi/2$ .

Voir en figure 3 en annexe l'allure générale des courbes solutions de (24).

Il rest à établir le lemme 11. Comme  $P_1^0(z) = z$ , d'après la formule (23) il est immédiat que :

$$\begin{aligned} P_1^m &\equiv 0 \quad \text{pour } m \geq 2; \\ (P_1^1)'(z) &= -z(1 - z^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Ainsi  $(P_1^0)'$  ne s'annule pas et  $(P_1^1)'(\cos \theta)$  s'annule uniquement pour  $\theta = \pi/2$ , lorsqu'on cherche  $\theta$  dans  $[\pi/2, \pi[$ . Le théorème 9 permet d'en déduire que  $\theta_* = \pi/2$ .

#### 4. Expression des coefficients des singularités

Dans ce sous-paragraphe nous utilisons une technique qui est à rapprocher de celles utilisées par [5] et [8] dans le cas 2D.

Revenons au théorème 7, il résulte de la proposition 10, qu'au voisinage de  $T$ , on a :

$$u_1 = r^\nu (a_1 V_1 + a_2 V_2)$$

avec  $V_1 = P_\nu^1(\cos \theta) \sin \phi$  et  $V_2 = P_\nu^1(\cos \theta) \cos \phi$ .

##### 4.1. — Expression des coefficients $a_m$ , $m = 1, 2$

Introduisons les fonctions :

$$\begin{aligned} S_m &= r^\nu V_m, \\ T_m &= r^{-(\nu+1)} V_m. \end{aligned}$$

LEMME 12. — *On a l'identité :*

$$\int_{\Omega} \Delta(\chi T_m) = 0$$

où  $\chi$  est la fonction de troncature introduite dans la première étape de la preuve du théorème 7 (§2).

*Démonstration.* — On a :

$$\Delta(\chi T_m) = (\Delta\chi)T_m + 2\nabla\chi \cdot \nabla T_m + \chi\Delta T_m;$$

or :

$$\begin{aligned} \Delta T_m &= [(r\partial_r)^2 + r\partial_r + L](T_m) \\ &= r^{-(\nu+1)} [\nu(\nu+1) + L](V_m) = 0. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$E \equiv \int_{\Omega} \Delta(\chi T_m) = \int_{\mathcal{C}} \Delta(\chi T_m)$$

où  $\mathcal{C}$  est la couronne :

$$\mathcal{C} = \{(r, \theta, \phi); r_0 < r < r_1, \theta \in ]0, \theta_0[, \phi \in ]0, 2\pi[ \}.$$

Appliquons la formule de GREEN sur  $\mathcal{C}$ , il vient :

$$\begin{aligned} E &= \int_{\mathcal{C}} \Delta(\chi T_m) - (\chi T_m) \Delta 1 = - \int_{\partial \mathcal{C}} \partial_n(\chi T_m) = \\ &= \int_{r=r_0} \partial_r T_m = (\nu + 1) r_0^{-\nu} \int_S V_m. \end{aligned}$$

Comme  $E$  est indépendant du choix de  $r_0$ ,  $\int_S V_m$  est nécessairement nul; donc  $E = 0$ .  $\square$

Grâce au Lemme 12, la condition (8) est satisfaite pour le second membre  $(f, g) = (-\Delta T_m, 0)$ ; donc il existe  $U_m \in H^1(\Omega)$  tel que :

$$\begin{cases} -\Delta U_m = -\Delta(\chi T_m) & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n U_m = 0 & \text{sur } \partial \Omega. \end{cases} \quad (25)$$

Comme  $-(\nu + 1) < -1$ , on a :

$$\chi T_m \notin H^1(\Omega). \quad (26)$$

Il résulte de (25), (26) que la fonction  $K_m$  :

$$K_m = \chi T_m - U_m$$

est non-nulle et vérifie :

$$\begin{cases} \Delta K_m = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n K_m = 0 & \text{sur } \partial \Omega. \end{cases} \quad (27)$$

LEMME 13. — Soit  $p > 3$  et  $v \in W_p^2(\Omega)$  telle que  $\partial_n v = 0$  sur  $\Gamma$ .

Alors on a :

$$\int_{\Omega} -(\Delta v) K_m + \int_{\Gamma} (\partial_n v) K_m = 0 \quad m = 1, 2.$$

*Démonstration.* — Pour  $\varepsilon \in ]0, r_1[$ , notons  $\Omega_\varepsilon$  le complémentaire dans  $\Omega$  de la boule de centre  $T$  et de rayon  $\varepsilon$ . La formule de GREEN sur  $\Omega_\varepsilon$  donne, grâce à (27) :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} -(\Delta v)K_m + \int_{\Gamma'} (\partial_n v)K_m = E_\varepsilon$$

où

$$E_\varepsilon = \int_{r=\varepsilon} (v - v(T))(\partial_n K_m) - (\partial_n v)K_m.$$

Il nous suffit de montrer que  $E_\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Comme  $W_p^2(\Omega) \subset C^{2-3/p}(\bar{\Omega})$  (cf [18]), on a :

$$|v - v(T)| \leq Cr^{2-3/p} \quad \text{et} \quad |\nabla v| \leq Cr^{1-3/p}.$$

D'où :  $|E_\varepsilon| \leq C\varepsilon^{2-3/p-\nu}$ .

Comme  $\nu \leq 1 < 2 - 3/p$ ,  $E_\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

LEMME 14. — Pour  $k, m \in \{1, 2\}$  :

$$\int_{\Omega} -\Delta(\chi S_k)K_m = \alpha\delta_{k,m}$$

où  $\alpha = -(2\nu + 1)\pi \int_0^{\theta_0} |P_\nu^1(\cos \theta)|^2 \sin \theta d\theta$ .

*Démonstration.* — La formule de GREEN sur la couronne  $\mathcal{C}$  donne :

$$E \equiv \int_{\Omega} -\Delta(\chi S_k)K_m = \int_{\mathcal{C}} -\Delta(\chi S_k)K_m = \int_{r=r_0} S_k(\partial_r K_m) - (\partial_r S_k)K_m.$$

Comme en  $r = r_0$ ,  $K = T - U$ ,  $E$  peut se scinder en :

$$E = F + G$$

avec :

$$F = \int_{r=r_0} S_k(\partial_r T_m) - (\partial_r S_k)T_m$$

$$G = \int_{r=r_0} S_k(\partial_n U_m) - (\partial_n S_k)U_m.$$

Il nous suffit de montrer que  $G$  est nul et de calculer  $F$ .

La formule de GREEN sur  $\mathcal{C}$ , puis le fait que  $T_m$  et  $S_k$  sont harmoniques sur  $\Omega$ , permet avec (25) d'obtenir :

$$G = - \int_{\Omega} \chi S_k \Delta U_m - \Delta(\chi S_k)U_m.$$

Or, comme  $\chi S_k$  et  $U_m$  sont dans  $H^1(\Omega)$  et comme leurs dérivées normales sur  $\partial\Omega$  sont nulles, la formule de GREEN sur  $\Omega$  donne que  $G = 0$ .

Il est d'autre part immédiat que :

$$F = -(2\nu + 1)r_0^{-2} \int_{r=r_0} V_k V_m.$$

On conclut en remarquant que :

$$\int_{r=r_0} V_k V_m = r_0^2 \delta_{k,m} \alpha.$$

Normalisons les  $K_m$  de façon que, dans le Lemme 14,  $\alpha$  soit remplacé par 1.

COROLLAIRE 15. — *Si  $u$  est solution du problème (7) et se décompose en :*

$$u = v + a_1 r^\nu V_1 + a_2 r^\nu V_2$$

avec  $v \in W_p^2(\Omega)$  pour  $p > 3$  et  $\partial_n v = 0$  sur  $\Gamma$ , alors :

$$a_m = \int_{\Omega} f K_m + \int_{\Gamma'} g K_m \quad m = 1, 2.$$

*Preuve.* — immédiate en calculant grâce aux lemmes 13 et 14 et à la décomposition de  $u$  :

$$\int_{\Omega} -\Delta u K_m + \int_{\Gamma'} (\partial_n u) K_m \cdot \square$$

Le théorème 2 découle des théorèmes 7, 9, proposition 10 et corollaire 15.  $\square$

#### 4.2. — Correction de la donnée aux limites sur $\Gamma'$

Notons  $K_0 = 1$

LEMME 16. — *Les fonctions  $K_0$ ,  $K_1$  et  $K_2$  sont linéairement indépendantes dans  $L^2(\Gamma')$  (ou  $C^\infty(\Gamma')$ ).*

*Démonstration.* — Supposons les scalaires  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  tels que :

$$K \equiv \lambda_0 K_0 + \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$$

soit nul sur  $\Gamma'$ .

Nous allons montrer que  $K$  est nul sur tout  $\Omega$ . Comme les  $K_j$  sont indépendants sur  $\Omega$ , nous en déduisons que les  $\lambda_j$  sont nuls.

Soit  $A_0$  un point de  $\Gamma'$ .  $K$  est  $C^\infty$  en  $A_0$  et par hypothèse, pour  $A$  dans un voisinage de  $A_0$  dans  $\Gamma'$  :

$$K(A) = 0, \quad \partial_n K(A) = 0.$$

Donc :

(i)  $\forall \alpha \in \mathbf{N}^3, |\alpha| \leq 1, D^\alpha K(A) = 0.$

Or  $\Delta K = 0$ . Nous allons montrer que (i) implique alors que :

(ii)  $\forall \alpha \in \mathbf{N}^3, D^\alpha K(A_0) = 0.$

Comme  $K$  est analytique dans  $\Omega$ , et jusqu'au bord au voisinage de  $A_0$ , et comme  $\Omega$  est connexe, nous en déduisons que  $K = 0$ .

Nous montrons (ii) à l'aide d'un changement de variables analytique qui envoie un voisinage de  $A$  dans  $\bar{\Omega}$  sur un voisinage de  $0$  dans le demi-espace :

$$\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / x_3 \geq 0\}.$$

$\Delta$  est transformé en un opérateur du type :

$$\sum_{|\beta| \leq 2} C_\beta(x) \partial^\beta \quad \text{avec } C_{(0,0,2)}(0) \neq 0.$$

En divisant par  $C_{(0,0,2)}$ , la relation  $\Delta K = 0$  devient :

(iii)  $[\partial_3^2 + B_1(x; \partial_1, \partial_2) \partial_3 + B_0(x; \partial_1, \partial_2)] \tilde{K} = 0.$

Par hypothèse, dans un voisinage  $W$  de  $0$  dans  $\partial\Pi$ , on a :

$$\tilde{K} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_3 \tilde{K} = 0.$$

Donc :

$$\forall x \in W, \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}^3 \quad \text{avec} \quad \alpha_3 \leq 1, \quad D^\alpha \tilde{K}(x) = 0.$$

La relation (iii) implique alors que  $\partial_3^2 \tilde{K} \equiv 0$  sur  $W$ . En appliquant  $\partial_3^k$  pour  $k = 1, 2, \dots$  à l'égalité (iii), on obtient de proche en proche (ii).  $\square$

### Fonctions de correction $g_k$

Soit  $E$  l'espace vectoriel de base  $K_0, K_1, K_2$  dans  $C^\infty(\Gamma')$ . Comme la matrice  $(\langle K_k, K_m \rangle)_{0 \leq k, m \leq 2}$  est inversible, il existe  $g_k \in E$  uniques pour  $k = 1, 2$  tels que :

$$\int_{\Gamma'} g_k K_m = \delta_{k,m} \quad m = 0, 1, 2.$$

Pour  $u, f, g, v$  et  $a_m$  comme dans le corollaire 15, il résulte de la définition des  $g_k$  que toute solution de :

$$\begin{cases} -\Delta w = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_n w = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \partial_n w = g - a_1 g_1 - a_2 g_2 & \text{sur } \Gamma' \end{cases}$$

est dans  $W_p^2(\Omega)$ . A l'addition près d'une constante, elle coïncide avec  $v$ .

Le corollaire 3 est établi.

### 5. Méthode de point fixe pour résoudre le problème non linéaire

Nous devons établir la Proposition 5 dont découle le Théorème 4.

Pour alléger l'écriture, la norme de  $W_p^m(\Omega)$  (resp.  $W_p^{1-1/p}(\Gamma')$ ) sera notée  $|\cdot|_m$  (resp.  $|\cdot|'$ ).

Soit  $v, v' \in W_p^2(\Omega)$ ; il nous faut évaluer :  $|\mathcal{G}(v)|_2$  et  $|\mathcal{G}(v) - \mathcal{G}(v')|_2$ .

Posons :

- $\sigma(X) = 1 - \mu\rho_0(1 - |X|^2)^\beta$  avec  $\beta = (\gamma - 1)^{-1}$

ce qui est bien défini pour  $X \in \mathbf{R}^3$  tel que  $|X| < 1$ ).

- $Q(X) = \sigma(X)X$ .

Avec les notations introduites pour la construction de  $\mathcal{G}$ , on a :

$$f(v) = \operatorname{div} [Q(\nabla v)], \quad (28)$$

$$g(v) = Q(\nabla v) \cdot n + \mu g, \quad (29)$$

$$a_m(v) = \int_{\Omega} f(v)K_m + \int_{\Gamma'} g(v)K_m. \quad (30)$$

La fonction  $u(v)$  est la solution du problème (7) avec pour donnée corrigée sur  $\Gamma'$  :

$$h = g(v) - a_1(v)g_1 - a_2(v)g_2.$$

D'après le corollaire 3, on a :

$$|u|_2 \leq C [ |f(v)|_0 + |g(v) - a_1(v) \cdot g_1 - a_2(v) \cdot g_2|' ].$$

Or  $g_1$  et  $g_2$  sont fixés. Supposons  $\mu$ , borné, par exemple :

$$|\mu| \leq 2\rho_0^{-1}.$$

D'où grâce à (30) :

$$|a_m(v)| \leq C [|f(v)|_0 + |g(v)'|].$$

Finalement :

$$|u|_2 \leq C [|f(v)|_0 + |g(v)'|]. \quad (31)$$

Grâce à (28), (29), on a :

$$\begin{aligned} |f(v)|_0 &\leq C |Q(\nabla v)|_1, \\ |g(v)'| &\leq C [|g'| + |Q(\nabla v)|_1]. \end{aligned}$$

Avec (31), ces deux inégalités donnent :

$$|u|_2 \leq c [|Q(\nabla v)|_1 + |g'|]. \quad (32)$$

De même on obtient :

$$|u - u'|_2 \leq C |Q(\nabla v) - Q(\nabla v')|_1 \quad (33)$$

où  $u' = u(v')$ .

Il nous faut maintenant majorer directement :

$$|Q(\nabla v)|_1 \quad \text{et} \quad |Q(\nabla v) - Q(\nabla v')|_1$$

en fonction de  $|v|_2$  et  $|v - v'|_2$ .

Notons  $\nabla^j L$  pour  $j = 0, 1, 2$ , le vecteur formé par toutes les dérivées d'ordre  $j$  de chaque composante de  $L$  dans la base canonique. On commence par des évaluations ponctuelles. On suppose que  $v$  et  $v'$  sont de classe  $C^2$ . Soit  $x^0 \in \Omega$ , on note  $|L|$  le module du vecteur  $L(x^0)$ .

On a :

$$|\nabla[Q(\nabla v)]| \leq C |(\nabla Q)(\nabla v)| |\nabla^2 v| \quad (34)$$

car

$$\partial_i Q_j(\nabla v) = \sum_k (\partial_k Q_j)(\nabla v) \partial_i \partial_k v$$

où  $Q_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  sont les composantes de  $Q$ .

Soit  $X(v) = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid \exists x \in \bar{\Omega}; \nabla v(x) = X\}$ .

Grâce à (34) on obtient :

$$|Q(\nabla v)|_1 \leq C [|Q|_{\infty, X(v)} + |\nabla Q|_{\infty, X(v)} |v|_2] \quad (35)$$



où  $|\cdot|_{\infty, E}$  désigne la norme de  $L^\infty(E)$ .

Pour évaluer les différences  $Q(\nabla v) - Q(\nabla v')$ , on pose :

$$v_t = v' + t\tilde{v} \quad \text{avec} \quad \tilde{v} = v - v'.$$

On a :  $Q(\nabla v) - Q(\nabla v') = \int_0^1 \frac{d}{dt} Q(\nabla v_t) dt$ .

D'où

$$|Q(\nabla v) - Q(\nabla v')| \leq C |\nabla \tilde{v}| \int_0^1 |(\nabla Q)(\nabla v_t)| dt, \quad (36)$$

car

$$\partial_t Q_j(\nabla v_t) = \sum_k (\partial_k Q_j)(\nabla v_t) \partial_k \tilde{v}.$$

Soit :

$$X(v, v') = \{X \in \mathbf{R}^3; \exists x \in \bar{\Omega}, \exists t \in [0, 1]: v_t(x) = X\}.$$

On déduit de (36) que :

$$|Q(\nabla v) - Q(\nabla v')|_0 \leq C |\tilde{v}|_2 |\nabla Q|_{\infty, X(v, v')}. \quad (37)$$

Enfin comme :

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_i Q_j(\nabla v_t) &= \sum_k \partial_i [\partial_k Q_j(\nabla v_t) \times \partial_k \tilde{v}] \\ &= \sum_{k, l} \partial_l \partial_k Q_j(\nabla v_t) \times (\partial_i \partial_l v_t) \times \partial_k \tilde{v} + \sum_k \partial_k Q_j(\nabla v_t) \times \partial_i \partial_k \tilde{v} \end{aligned}$$

on obtient:

$$\begin{aligned} |\nabla Q(\nabla v) - \nabla Q(\nabla v')| &\leq \\ &C \left[ \int_0^1 |\nabla^2 Q(\nabla v_t)| |\nabla^2 v_t| |\nabla \tilde{v}| dt + \int_0^1 |\nabla Q(\nabla v_t)| |\nabla^2 \tilde{v}| dt \right]. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} |Q(\nabla v) - Q(\nabla v')|_1 &\leq C [|\nabla^2 Q|_{\infty, X(v, v')} \cdot |\nabla \tilde{v}|_{\infty, \Omega} \cdot \sup(|v|_2, |v'|_2) \\ &\quad + |\nabla Q|_{\infty, X(v, v')} |\tilde{v}|_2]. \end{aligned} \quad (38)$$

Soit  $\eta > 0$ , on suppose que :

$$v, v' \in E_\eta = \{w \in W_p^2(\Omega); |w|_2 < \eta\}.$$

Existence et régularité de la fonction potentiel

Grâce à l'injection de  $W_p^2(\Omega)$  dans  $C^1(\bar{\Omega})$ , on a :

$$\exists \gamma > 0, |\nabla u|_{\infty, \Omega} \leq \gamma |u|_2.$$

Notons  $B_\delta$  la boule de  $\mathbf{R}^3$ , de centre 0 et de rayon  $\delta = \gamma\eta$ . On déduit de (35), (37), (38) le

LEMME 17. — Soit  $\eta > 0$ , tel que  $\delta < 1$ ; alors pour  $v, v' \in E_\eta$ , on a les estimations :

$$\begin{aligned} |Q(\nabla v)|_1 &\leq C (|Q|_{\infty, B_\delta} + \eta |\nabla Q|_{\infty, B_\delta}) \\ |Q(\nabla v) - Q(\nabla v')|_1 &\leq C |\tilde{v}|_2 (|\nabla Q|_{\infty, B_\delta} + \eta |\nabla^2 Q|_{\infty, B_\delta}) \end{aligned}$$

Soit  $\delta > 0$ , avec  $\delta < 1$ , il nous faut évaluer  $|\nabla^k Q|_{\infty, B_\delta}$  pour  $k = 0, 1, 2$ .

On a :

$$\begin{aligned} Q_j(x) &= \sigma(X)X_j, \\ \partial_i Q_j(X) &= \partial_i \sigma(X)X_j + \delta_{ij} \sigma(X), \\ \partial_i \partial_k Q_j(X) &= \partial_i \partial_k \sigma(X)X_j + \delta_{kj} \partial_i \sigma(X) + \delta_{ij} \partial_k \sigma(X). \end{aligned}$$

D'où le

LEMME 18. — On a les majorations :

$$\begin{aligned} |Q|_{\infty, B_\delta} &\leq \delta |\sigma|_{\infty, B_\delta}, \\ |\nabla^1 Q|_{\infty, B_\delta} &\leq \delta |\nabla \sigma|_{\infty, B_\delta} + |\sigma|_{\infty, B_\delta}, \\ |\nabla^2 Q|_{\infty, B_\delta} &\leq \delta |\nabla^2 \sigma|_{\infty, B_\delta} + 2 |\nabla \sigma|_{\infty, B_\delta}. \end{aligned}$$

Etudions maintenant  $\sigma$ , on a :

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= 1 - \mu\rho_0(1 - |X|^2)^\beta, \\ \partial_i \sigma(X) &= 2\mu\rho_0\beta X_i(1 - |X|^2)^{\beta-1}, \\ \partial_i \partial_k \sigma(X) &= -4\mu\rho_0\beta(\beta - 1)X_k X_i(1 - |X|^2)^{\beta-2} + 2\mu\rho_0\beta\delta_{ik}(1 - |X|^2)^{\beta-1}. \end{aligned}$$

Si par exemple  $|X|^2 \leq \frac{1}{2}$ ,  $\sigma$  et ses dérivées sont bornées par  $M > 0$ ; il résulte de la définition de  $\sigma$  que :

$$\begin{cases} \forall m > 0, \exists \alpha > 0, \forall \mu \in [0, 2\rho_0^{-1}] : |1 - \mu\rho_0| < \alpha, \\ \exists \delta_0 > 0, |\sigma|_{\infty, B_{\delta_0}} \leq m. \end{cases} \quad (39)$$

Dans ces conditions, il résulte des lemmes 17 et 18 que :

$$|Q(\nabla v)|_1 \leq C [(\eta + \delta)m + (\eta\delta)M], \quad (40)$$

$$|Q(\nabla v) - Q(\nabla v')|_1 \leq C [m + (3\eta + \delta)M] |\tilde{v}|_2. \quad (41)$$

Si  $|g'| \leq \varepsilon$ , (32) et (40) impliquent :

$$|u|_2 \leq C [\varepsilon + (\eta + \delta)m + (\eta\delta)M].$$

Pour que l'application  $\mathcal{G}$  envoie  $E_\eta$  dans lui-même, il suffit que :

$$C [\varepsilon + (\eta + \delta)m + (\eta\delta)M] < \eta. \quad (42)$$

De plus (33) et (41) impliquent :

$$|\tilde{u}|_2 \leq C [m + (3\eta + \delta)M] |\tilde{v}|_2.$$

Pour que  $\mathcal{G}$  soit contractante, il suffit que :

$$C [m + (3\eta + \delta)M] < 1. \quad (43)$$

Il résulte de (39) que  $m$  peut être choisi tel que :

$$0 < C(\gamma + 1)m < \frac{1}{4}; \quad (44)$$

ce qui détermine  $\alpha$  et  $\delta_0$ .

Avec (44) la condition (43) sera remplie si :

$$C(3\eta + \delta)M \leq 1/2 \quad \text{et} \quad \delta \leq \delta_0. \quad (45)$$

Comme  $\delta = \gamma\eta$ , il suffit que :

$$\eta \leq (2CM(3 + \gamma))^{-1} \quad \text{et} \quad \eta \leq \delta_0/\gamma$$

pour avoir (45).

Avec (44), la condition (42) sera remplie si :

$$C(\varepsilon + \eta^2\gamma M) < 3\eta/4. \quad (46)$$

Choisissons  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$C\varepsilon < \eta/4. \quad (47)$$

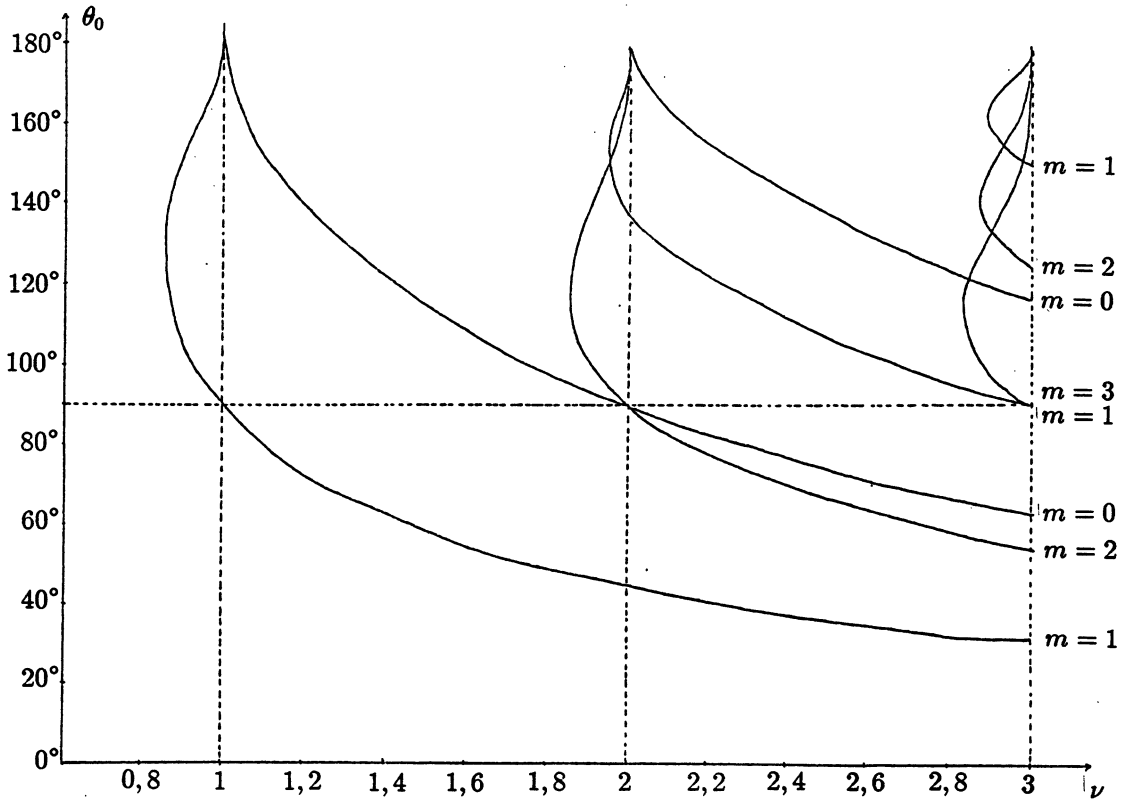


Figure 3a

Comme  $\eta$  vérifie (45), on a aussi :

$$C\eta^2\gamma M < \eta/2.$$

D'où l'on déduit (46), avec le choix (47) de  $\varepsilon$ . La proposition 5 est établie.

#### ANNEXE : Courbes solutions de l'équation (24)

Sur la figure 3a on a indiqué les courbes  $\nu \rightarrow \theta_0$  où  $\theta_0$  est solution de  $(P_\nu^m)'(\cos \theta_0) = 0$  pour  $0 \leq m \leq 3$  et  $0 \leq \nu < 3$ , d'après les valeurs numériques [22].

Pour  $\nu$  compris entre 0.8 et 1 nous avons précisé, par calcul numérique, la correspondance entre  $\theta$  et  $\nu$ . Nous avons utilisé la méthode de RUNGE-KUTTA à un pas pour résoudre l'équation :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \nu(\nu + 1)y = 0$$

en partant de  $x_0 = 1 - 10^{-3}$  avec un nombre de subdivisions variant de 500 à 1000 selon les cas.

Nous avons consigné sur le graphe Figure 3b nos résultats. Les valeurs calculées sont indiquées par :

- + si  $\nu$  a été déterminé en fonction de  $\theta$ .
- × si  $\theta$  a été déterminé en fonction de  $\nu$ .

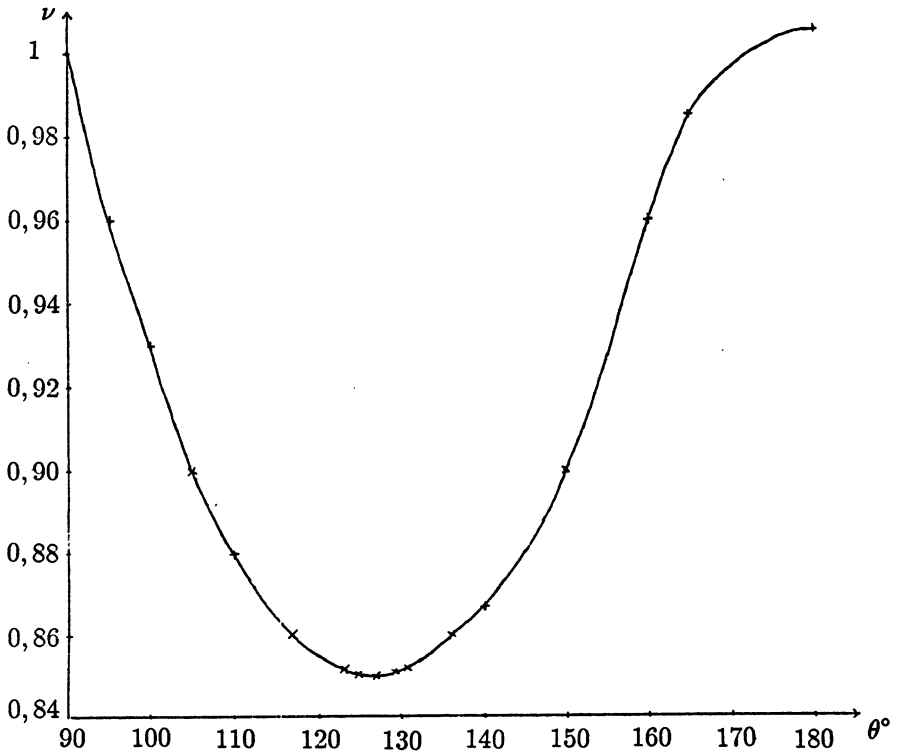


Figure 3b

### Références

- [1] AGMON (S.), DOUGLIS (A.) & NIRENBERG (L.).— Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, *C.P.A.M.*, t. 12, 1959.
- [2] BREZIS (H.).— *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*.— Masson, 1983.
- [3] CIAVALDINI (J.F.), POGU (M.) et TOURNEMINE (G.).— Existence and Regularity of Stream Functions for Subsonic Flows Past Profiles with a Sharp Trailing Edge, *Arch. for Rational Mech. & Anal.*, t. 93, n°1, 1986.
- [4] CIAVALDINI (J.F.), POGU (M.) et TOURNEMINE (G.).— Un théorème d'existence et d'unicité concernant les écoulements compressibles autour d'un profil à pointe, *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, t. 27, n°3, 1981.
- [5] CIAVALDINI (J.F.), POGU (M.) et TOURNEMINE (G.) .— Sur la régularité d'écoulements plans, stationnaires et subcritiques autour d'un profil à pointe :ajustement de la circulation pour satisfaire la condition de Kutta-Joukowski, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 285 A, 1977.
- [6] COOK (L.P.) & COLE (J.D.).— Lifting line Theory for Transonic Flows, *S.I.A.M. J. Appl. Math.*, t. 35, n°2, 1978.
- [7] DAUGE (M.).— *Régularités et singularités des solutions de problèmes aux limites elliptiques sur des domaines singuliers de type à coins*.— Doctorat d'Etat, Nantes, 1986.
- [8] DAUGE (M.).— *Coefficients des singularités pour le Laplacien sur un domaine avec points anguleux*.— Séminaire d'Analyse, n°3, 1980.
- [9] DAUGE (M.) et POGU (M) .— Existence et régularité de la fonction potentiel pour des écoulements de fluides parfaits s'établissant autour de corps à singularité conique, *Note C. R. Acad. Sc Paris I*, t. 303 n°17, 1986, p. 865- 868.
- [10] GERMAIN (P.) .— *Mécanique des milieux continus*.— Masson, Paris, 1962.
- [11] GOLDSTEIN (S.) .— *Lecture on Fluid Mechanics, Lectures in Applied Mathematics (2A)*.— A.M.S., 1957.
- [12] GRISVARD (P.) .— *Elliptic Problems in non-smooth Domains*.— Pitman, London, 1985.
- [13] KONDRAT'EV (V.A.) .— Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points, *Trans. Moscow Math. Soc.*, t. 16, 1967.
- [14] KUNTZMANN (J.) .— *Mathématiques de la Physique et de la Technique*.— Hermann, Paris, 1961.
- [15] LEBEDEV (N.N.) .— *Special functions and their applications*.— Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1965.
- [16] LIONS (J.L.) .— *Equations différentielles opérationnelles*.— Springer-Verlag, Berlin, 1961.
- [17] MAZ'YA (V.G.) & PLAMENEVSKII (B.A.) .— Estimates in  $L_p$  and Hölder classes and the Miranda-Agmon maximum principle for solutions of elliptic boundary value problems in domains with singular points on the boundary, *A.M.S. Transl. (2)*, t. 123, 1984.
- [18] NECAS (J.).— *Les Méthodes directes en Théorie des Equations Elliptiques*.— Paris, 1967.

- [19] PERRIAUX (J.) .— Three dimensional Analysis of Compressible Potential Flows with the F.E.M., *Method. Int. Jour. for Num. Math. in Engrg*, t. 9, 1975.
- [20] SCHIFFER (M.M.) .— Analytical Theory of Subsonic and Supersonic Flows, *Encyclopedia of Physics*, Springer- Verlag, t. 9, III, 1960.
- [21] SERRIN (J.) .— Mathematical Principles of Classical Fluid Dynamics, *Encyclopedia of Physics*, Springer- Verlag, t. 13, I, 1959.
- [22] TABLES numériques des fonctions associées de Legendre. — 2<sup>e</sup> fasc. *Editions de la revue d'optique*. — Paris, 1959.

(Manuscrit reçu le 20 mars 1987)