ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ABDELILAH GMIRA

Existence de la trace initiale pour des solutions d'une équation parabolique dégénérée

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 9, nº 2 (1988), p. 257-264
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1988_5_9_2_257_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol. IX, n°2, 1988

Existence de la trace initiale pour des solutions d'une équation parabolique dégénérée

Addendum
à l'article paru dans les Annales Tome VIII, Fasc.3, par

ABDELILAH GMIRA

La Proposition 2.1 de l'article en question n'est pas une conséquence immédiate de E.DIBENEDETTO [2]. Pour en donner une preuve on va montrer l'inégalité faible d'Harnack qu'on a utilisée. Pour cela on a besoin du résultat suivant :

LEMME A. — *Soit u une solution faible non négative de l'équation (1.1) qui est continue dans* $\mathbf{R}^N \times [0,T]$. *Si supp* $u(.,0) \subset B_1(0)$, *alors*

$$\inf_{x\in B_r(0)} u(x,t) \geq \max_{x\in\partial B_{r+2}(0)} u(x,t) \text{ pour tout } r>0 \text{ et } t\in[0,T]. \tag{1}$$

Preuve. — Soient $x_o \in B_r(0)$ et $x_1 \in \partial B_{r+2}(0)$. Considérons l'hyperplan $\prod$ qui est équidistant de x_o et x_1, i.e. :

$$\prod = \left\{ x \in \mathbf{R}^N ; < x, x_o - x_1 >= \frac{1}{2} < x_o + x, x_o - x_1 > \right\}. \tag{2}$$

Alors la distance de $\prod$ à l'origine est donnée par

$$\begin{cases} d(\prod, \{0\}) = \min \|x\|, \text{sous la contrainte,} \\ g(x) =< x, x_o - x_1 >= \dfrac{1}{2} < x_o + x_1, x_o - x_1 > . \end{cases} \tag{3}$$

En posant $f(x) = \|x\|^2$, le minimum est atteint au point où $Df(x)$ est parallèle à $Dg(x)$, i.e. il faut que $x = \lambda(x_1 - x_o)$. D'où en remplaçant x dans la relation (3), on obtient

$$\lambda = \frac{\|x_1\|^2 - \|x_o\|^2}{2\|x_o - x_1\|^2}. \tag{4}$$

Par conséquent

$$d^2\left(\prod, \{0\}\right) = \frac{\|x_1\|^2 - \|x_o\|^2}{2\|x_1 - x_o\|}. \tag{5}$$

Mais, comme $\|x_1\| = r + 2$ et $\|x_o\| < r$, alors

$$d\left(\prod, \{0\}\right) \geq 1. \tag{6}$$

Ce qui implique que x_o et supp $u(.,0)$ sont situés dans le même demi-hyperplan. D'autre part, x_1 et x_o sont symétriques par rapport à $\prod$; d'où, grâce au lemme 2.4. on a

$$u(x_o, t) \geq u(x_1, t), \tag{7}$$

ceci pour tout $x_o \in B_r$ et $x_1 \in \partial B_{r+2}$, ce qui prouve le lemme.

Maintenant, on est en mesure de donner la preuve de la proposition 2.1.

Preuve. — D'après la transformation (2.2), il suffit de prouver la relation (2.1) pour $R = T = 1$. Sans perdre en généralité on peut supposer que $x_o = 0$. Posons

$$G = \int_{\mathbf{R}^N} B(x,t)dx \text{ qui est indépendant de } t, \tag{8}$$

où B est la fonction donnée par (1.23). Alors, d'après l'expression (1.25),

$$\int_{\mathbf{R}^N} u_\lambda(x,t)dx = \lambda^{-N-\frac{p}{p-2}} G = \lambda^{-\frac{k}{p-2}} G, \tag{9}$$

où $k = p + N(p-2)$.

On choisit λ tel que pour tout $t > 0$

$$\int_{\mathbf{R}^N} u_\lambda(x,t)dx = \frac{1}{2} \int_{B_1(0)} u(x,0)dx = \frac{1}{2}\, M; \tag{10}$$

i.e.

$$\lambda = \lambda_o = (2G)^{\frac{p-2}{k}} M^{-\frac{p-2}{k}}. \tag{11}$$

De plus, en prenant

$$t_o = \left(\frac{4\lambda_o}{\alpha}\right)^k \tag{12}$$

où $\alpha = \alpha(N,p)$ est une constante dépendant de N et p, intervenant dans la relation (1.24); on obtient

$$\text{supp } u_{\lambda_o}(.,t_o) = B_4(0). \tag{13}$$

Si $t_o \geq 1$, alors, d'après (12) et (11), on déduit que

$$M = \int_{B_1(0)} u(x,0)dx \leq \left(\frac{4}{\alpha}\right)^{\frac{k}{p-2}} 2G = C_1 = C_1(N,p) \tag{14}$$

En particulier

$$\int_{B_1(0)} u(x,0)dx \leq C_1 \left\{1 + u^{\frac{k}{p}}(0,1)\right\}; \tag{15}$$

ce qui est exactement la relation (2.1). De même, si $M \leq 1$, la relation (2.1) est évidente.

Pour la suite, on suppose que $t_o < 1$ et $M > 1$.

1ère étape : Supposons que supp $u(.,0) \subset B_1(0)$.

Soit β appartenant à $]0,1[$, la solution de l'équation

$$\left(1 - \beta^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} = \frac{7}{8} \tag{16}$$

et soit la fonction

$$r(t) = \frac{7\alpha(t+t_o)^{\frac{1}{k}}}{8\ \lambda_o}. \tag{17}$$

Alors, pour tout $t > 0$ et pour tout $x \in \partial B_{r(t)}(0)$,

$$u_{\lambda_o}(x, t+t_o) = \beta\ u_{\lambda_o}(0, t+t_o). \tag{18}$$

On va distinguer deux cas.

1er cas : Supposons qu'il existe $t_1 \in [0,1]$ et $x_1 \in \partial B_{r(t_1)}(0)$ pour lesquels

$$u(x_1,t_1) = u_{\lambda_o}(x_1, t_1+t_o) = \beta\ u_{\lambda_o}(0, t_1+t_o). \tag{19}$$

D'après l'expression (17), on aura

$$r(0) = \frac{7}{2} > 3$$

et comme la fonction $t \to r(t)$ est croissante, alors

$$r(t_1) - 2 > 0. \tag{20}$$

Ainsi, d'après le lemme A,

$$\inf_{|x|<r(t_1)-2} u(x,t_1) \geq \max_{|x|=r(t_1)} u(x,t_1) \geq u(x_1,t_1) = \beta\, u_{\lambda_o}(0,t_1+t_o). \tag{21}$$

On se donne maintenant un nombre $L = L(N,p)$ assez grand tel que

$$L \geq \beta^{-\frac{p-2}{p}}, \tag{22}$$

et

$$\text{supp } u_{\lambda_o L}(.,t_1+t_o) \subset B_{r(t_1)-2}(0) \tag{23}$$

(ce qui est possible car $t_1 \in [0,1]$ et $M > 1$).

Comme le maximum de $B(.,t)$ est atteint en $x = 0$, alors

$$\max_{|x|<r(t_1)-2} u_{\lambda_o L}(x,t_1+t_o) = L^{-\frac{p}{p-2}} u_{\lambda_o}(0,t_1+t_o). \tag{24}$$

Et en utilisant les relations (21) et (22), on déduit que

$$\max_{|x|<r(t_1)-2} u_{\lambda_o L}(x,t_1+t_o) \leq \beta\, u_{\lambda_o}(0,t_1+t_o) \leq \inf_{|x|<r(t_1)-2} u(x,t_1). \tag{25}$$

En particulier,

$$u_{\lambda_o L}(x,t_1+t_o) \leq u(x,t_1) \text{ pour tout } |x| < r(t_1) - 2. \tag{26}$$

Mais d'après la relation (23),

$$u_{\lambda_o L}(.,t_1+t_o) = 0 \leq u(.,t_1) \text{ pour tout } |x| \geq r(t_1) - 2. \tag{27}$$

Ainsi, on déduit que

$$u_{\lambda_o L}(.,t_1+t_o) \leq u(.,t_1) \text{ dans } \mathbf{R}^N. \tag{28}$$

Donc d'après le principe de comparaison, on obtient

$$u_{\lambda_o L}(x,t+t_o) \leq u(x,t) \text{ dans } \mathbf{R}^N \times [t_1,1]. \tag{29}$$

En particulier,

$$u(0,1) \geq u_{\lambda_o L}(0,1+t_o) = (\lambda_o L)^{-\frac{p}{p-2}} a\; \alpha^{-N}(1+t_o)^{-N/k}. \tag{30}$$

En utilisant le fait que $t_o < 1$ et la relation (11), on déduit que

$$u(0,1) > C\ M^{p/k}, \qquad C = C(N,p) \tag{31}$$

Ce qui prouve la relation (2.1).

2ème cas : Supposons que pour tout $t \in [0,1]$,

$$u(x,t) \neq u_{\lambda_o}(x, t + t_o) \qquad \text{pour tout } x \in \partial B_{r(t)}(0). \tag{32}$$

i) s'il existe $t_1 \in [0,1]$ et $x_1 \in \partial B_{r(t_1)}(0)$ tels que

$$u(x_1, t_1) > u_{\lambda_o}(x_1, t_o + t_1) = \beta\ u_{\lambda_o}(0, t_1 + t_o). \tag{33}$$

En utilisant la méthode du 1er cas, on obtient la relation (2.1)

ii) Pour tout $t \in [0,1]$,

$$u(x,t) < u_{\lambda_o}(x, t + t_o) \text{ pour tout } x \in \partial B_{r(t)}(0). \tag{34}$$

Comme $r(0) > 3$ et supp $u(.,0) \subset B_1(0)$, alors

$$u(x,0) = 0 \leq u_{\lambda_o}(x, t_o) \text{ pour tout } |x| \geq r(0) > 3. \tag{35}$$

De ce fait, en utilisant le principe de comparaison on obtient

$$u_{\lambda_o}(x, t + t_o) \geq u(x,t) \text{ dans } \big\{(x,t); |x| > r(t),\ 0 \leq t \leq 1\big\}. \tag{36}$$

On pose

$$\mathbf{K} = \frac{|B_1|}{4} \left\{ \frac{7}{8}\ \alpha \left(\frac{3}{2}\right)^{1/k} (2G)^{-\frac{p-2}{k}} \right\}^N \quad (= C(N,p)); \tag{37}$$

et distinguons deux sous cas

a) Il existe $x \in \mathbf{R}^N | B_3(0)$ tel que

$$u\left(x, \frac{1}{2}\right) \geq \mathbf{K} M^{p/k}, \tag{38}$$

alors d'après le lemme A,

$$u\,(0, 1/2) \geq \mathbf{K} M^{p/k}. \tag{39}$$

Mais d'après †, u vérifie

$$-u_t \leq \frac{\widetilde{C}}{t}\, u \qquad \text{où } \widetilde{C} = C(N,p) \tag{40}$$

Ainsi en intégrant (40) par rapport à t entre $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, et en utilisant (39), nous obtenons

$$u(0,1) \geq \mathbf{K} e^{-\widetilde{C} ln 2} \qquad M^{p/k}. \tag{41}$$

i.e.

$$\int_{B_1(0)} u(x,0)dx \leq \left(e^{\frac{\widetilde{C} ln 2}{K}}\right)^{\frac{k}{p}} u^{\frac{k}{p}}(0,1). \tag{42}$$

qui permet d'aboutir à la relation (2.1).

b) Pour tout $x \in \mathbf{R}^N \backslash B_3(0)$,

$$u\left(x, \frac{1}{2}\right) < \mathbf{K}\ M^{p/k}. \tag{43}$$

En particulier, on a

$$\int_{3<|x|<r\left(\frac{1}{2}\right)} u\left(x, \frac{1}{2}\right) dx < \mathbf{K}\ M^{p/k} \left|B_{r(1/2)}(0)\right|, \tag{44}$$

or d'après la relation (17),

$$r\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/k} \alpha(2G)^{-\frac{p-2}{k}} M^{\frac{p-2}{k}}. \tag{45}$$

En tenant compte de la relation (37), on déduit que

$$\int_{3<|x|<r(1/2)} u\left(x, \frac{1}{2}\right) dx \leq \frac{1}{4}\ M. \tag{46}$$

Mais d'après la relation (36),

$$\begin{aligned} \int_{|x|>r\left(\frac{1}{2}\right)} u\left(x, \frac{1}{2}\right) dx &\leq \int_{|x|>r\left(\frac{1}{2}\right)} u_{\lambda_o}\left(x, \frac{1}{2} + t_o\right) dx \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^N} u_{\lambda_o}\left(x, t_o + \frac{1}{2}\right) dx \leq \frac{1}{2}\ M \end{aligned} \tag{47}$$

† Ph.BENILAN and M.G.CRANDALL, Regularizing effects of homogeneous evolution equations. Contribution to Analysis and Geometry, D.N. Clark and al. edit., J. Hopkins Univ. Press, Baltimore, Md. (1981), 23-31.

(où on a utilisé la relation (10)).

Et d'après la conservation de la masse,

$$\int_{B_1(0)} u(x,0)dx = \int_{\mathbf{R}^N} u(x,0)dx = \int_{\mathbf{R}^N} u\left(x,\frac{1}{2}\right)dx =$$
$$\left(\int_{|x|<3} + \int_{3\leq|x|<r(\frac{1}{2})} + \int_{|x|\geq r(\frac{1}{2})}\right) u\left(x,\frac{1}{2}\right)dx. \quad (48)$$

Alors grâce aux relations (46) et (47), on déduit que

$$\frac{1}{4}\,M \leq \int_{B_3(0)} u\left(x,\frac{1}{2}\right)dx. \quad (49)$$

Or d'après E.DIBENEDETTO [2],

$$\int_{B_3(0)} u\left(x,\frac{1}{2}\right)dx \leq C\left\{1 + u^{\frac{k}{p}}(0,1)\right\} \quad (50)$$

où $C = C(N,p)$.

Ainsi (49) implique l'existence d'une constante C dépendant de N et p telle que

$$\int_{B_1(0)} u(x,0)dx \leq C\ \left\{1 + u^{\frac{k}{p}}(0,1)\right\}. \quad (51)$$

Ce qui achève la démonstration quand supp $u(.,0) \subset B_1(0)$.

2ème étape : Supposons que $u(.,0)$ est à support quelconque.

Soit $\epsilon \in]0,1[$ et soit ϕ_ϵ une fonction ϵ $\mathbf{D}(R^+)$ telle que

$$\phi_\epsilon(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r \leq \epsilon, \\ 0 & \text{si } r \geq 1. \end{cases} \quad (52)$$

Soit maintenant u_ϵ la solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial t} = \Delta_p u_\epsilon & \text{dans } \mathbf{R}^N \times [0,1], \\ u_\epsilon(x,0) = \phi_\epsilon(|x|)\ u(x,0) & \text{dans } \mathbf{R}^N. \end{cases} \quad (53)$$

Alors d'après la 1ère étape, u_ϵ vérifie

$$\int_{B_1(0)} u_\epsilon(x,0)dx \leq C\left\{1 + u_\epsilon^{k/p}(0,1)\right\}, \quad (54)$$

où C est une constante indépendante de ϵ. Ceci pour tout $\epsilon \in]0, 1[$, ainsi en faisant tendre ϵ vers 1, on obtient la relation (2.1); ce qui achève la preuve de la proposition 2.1.

Références

[1] ARONSON (D.G.). — Widder's inversion theorem and the initial distribution problem, *S.I.A.M. J. Math. Anal.*, t. **12**, 1981, p. 639-651.

[2] DIBENEDETTO (E.). — *Intrinsic Harnack type inequalities for solutions of certain degenerate parabolic equations.* — to appear.

[3] DIBENEDETTO (E.) and FRIEDMAN (A.). — Regularity of solutions of nonlinear degenerate parabolic systems, *J. Reine Angew. Math.*, t. **349**, 1984, p. 83-128.

[4] LEE (S.V.) and AMES (W.F.). — Similarity solutions for non-Newtonian fluids, *A.T. Ch. E. Journal*, t. **12, 4**, 1966, p. 700-708.