

MICHEL MISITI

**Étude du nombre de solutions pour une classe
d'équations elliptiques non-linéaires qui se
prolongent en problèmes à frontière libre**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 9, n° 3
(1988), p. 295-340

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1988_5_9_3_295_0

© Université Paul Sabatier, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annaes/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Etude du nombre de solutions pour une classe d'équations elliptiques non-linéaires qui se prolongent en problèmes à frontière libre

MICHEL MISITI⁽¹⁾

RÉSUMÉ.— Soit B la boule unité de \mathbb{R}^n , dans une partie on s'intéresse à l'existence et, en cas d'existence, au nombre de solutions classiques du problème aux valeurs propres non-linéaire suivant :

$$(P_o) \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \frac{\lambda}{u^k} \text{ dans } B \\ u/\partial B = 1 \\ u > 0 \text{ dans } B \end{array} \right\}$$

où : $\lambda \geq 0$ et $k \in]0, +\infty[$

On associe à (P_o) un problème à frontière libre $(P_{F.L.})$ et la seconde partie est consacrée à la recherche du nombre de solutions radiales de ce problème.

$$(P_{F.L.}) \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \frac{\lambda}{u^k} \text{ dans } B - B_o \\ u/\partial B = 1 \\ u/\partial B_o = \frac{\partial u}{\partial R}/\partial B_o \\ u = 0 \text{ dans } B_o \end{array} \right\}$$

où $\lambda \geq 0$ et $k \in]0, 1[$

B_o est une boule de centre 0 et de rayon R_o inconnu.

ABSTRACT.— The B the unit ball of \mathbb{R}^n ; in the part of this paper, we consider the nonlinear eigenvalue problem (P_o) , and especially, we are concerned with the number of solutions of (P_o) .

In the second part, we associate with (P_o) a free boundary problem $(P_{F.L.})$ and we deal with the number of radial solutions of $(P_{F.L.})$.

⁽¹⁾ Ecole Centrale de Lyon, Département Mathématiques-Informatique -Systèmes, B.P. 163, 69131 Ecully Cédex

I - Introduction

1.— L'étude de réactions isothermes en catalyse chimique conduit au modèle de LANGMUIR-HINSBHERWOOD ([1-2])

$$\Delta u = \lambda u^m \left(\frac{\epsilon + 1}{\epsilon + u} \right)^{m+k} \quad \text{dans } \Omega; u/\partial\Omega = 1. \quad (I.1)$$

D'autre part, en cinétique enzymatique, on est conduit à considérer le problème ([3-4]) :

$$\Delta u = \lambda \frac{u^m}{\epsilon + u^{m+k}} \quad \text{dans } \Omega; u/\partial\Omega = 1. \quad (I.2)$$

Dans (I.1), le domaine Ω est une pastille catalytique et dans (I.2) une membrane enzymatique; la fonction u représente la concentration d'un réactif ou d'un substrat diffusant à travers la frontière $\partial\Omega$. Dans les deux problèmes, les paramètres sont tels que : $\lambda > 0$, $m \geq 1$, $k \geq 0$ et $\epsilon > 0$ assez petit. Pour $m = 1$, $k = 0$, (I.2) redonne la loi de MICHAELIS et MENTEN ([13]); pour $m = 1$, $k = 1$, (I.2) est une version simplifiée d'un modèle d'inhibition par excès de substrat.

Dans le cas d'un ouvert de \mathbf{R}^n , $n \geq 1$, de frontière régulière, des résultats généraux d'existence et de convergence lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ pour (I.1) et (I.2) ont été établis par BRAUNER et NICOLAENKO (voir par exemple [3-6]). En particulier, ces problèmes admettent une solution positive régulière pour tout $\lambda > 0$.

Formellement, le problème limite associé à (I.1) (I.2) lorsque ϵ est pris égal à zéro est :

$$\Delta u = \frac{\lambda}{u^k} \quad \text{dans } \Omega; u/\partial\Omega = 1. \quad (I.3)$$

Ce problème appartient à la classe des équations de EMDEN-FOWLER généralisées. Il est étudié par BRAUNER et NICOLAENKO ([3-4]) qui montrent l'existence d'une valeur critique λ_* du paramètre telle que (I.3) n'admet pas de solution régulière pour $\lambda > \lambda_*$.

Puisqu'au contraire (I.1) et (I.2) possèdent des solutions pour tout $\lambda > 0$, l'étude de la convergence des solutions maximales et minimales de ces

problèmes conduit à "prolonger" le problème (I.3) par un problème à frontière libre.

$$\Delta u = \frac{\lambda}{u^k} \chi_{\{u>0\}} \text{ dans } \Omega; u/\partial\Omega = 1 \quad (I.4)$$

Pour λ suffisamment grand, la mesure de l'ensemble $\Omega_o = \{u = 0\}$ est strictement positive. L'ensemble Ω_o correspond à un domaine intérieur à la membrane où la réaction enzymatique est "gelée". Par analogie avec les problèmes de population on l'appelle aussi le "dead core".

Dans ([7]), D. PHILIPPS établit la régularité "optimale" pour les solutions "variationnelles" de (I.3) (I.4) obtenues en minimisant la fonctionnelle

$$j(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{\lambda}{1-k} u^{1-k} \right\} dx$$

sur le convexe $K = \{v \in H^1(\Omega)/v/\partial\Omega = 1 \text{ et } v \geq 0 \text{ p.p.}\}$.

Un problème analogue à (I.4) apparaît aussi dans l'étude de la distribution de potentiel dans une diode cf CIMATTI ([8]).

Le cas $k = 1$ intervient dans les phénomènes de polarisation dans les conducteurs ioniques (cf. H. KAWARADA [9]).

Un problème similaire à (I.4) intervient lors de la modélisation du comportement critique dans un matériau subissant une réaction exothermique (cf. A.A. LACEY and G.C. WAKE [10]).

Dans le cas particulier où Ω est une boule de \mathbf{R}^n , $n \geq 2$, les solutions de (I.1) et (I.2) sont à symétrie radiale d'après un résultat de GIDAS-NIRENBERG ([11]). Par conséquent les solutions de (I.3) et (I.4) obtenues par passage à la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ sont également à symétrie radiale. En fait, d'après ([11]) toute solution régulière de (I.3) est à symétrie radiale; mais, un problème ouvert est de savoir si (I.3) et (I.4) admettent des solutions non-radiales.

J.M. DE LA PRADA ([12]) étudie les solutions radiales de (I.3) et (I.4) pour $n = 1, 2, 3$ et $k \in]-1, +1[$.

Dans un ouvrage récent ([13]) DIAZ fait, en particulier, la synthèse sur les divers résultats concernant les problèmes (I.1) - (I.4).

2 - Dans ce travail, on prend $\Omega = B$ boule unité de \mathbf{R}^n .

Au paragraphe II, on s'intéresse aux solutions classiques c'est-à-dire dans $C^0(\bar{B}) \cap C^2(B)$ de :

$$(P_o) \begin{cases} \Delta u = \frac{\lambda}{u^k} \text{ dans } B; u/\partial B = 1 \\ u > 0 \text{ dans } B \end{cases}$$

où $k \in]0, +\infty[$.

On montre tout d'abord que toute solution de (P_o) est à symétrie radiale. Ensuite, on note que pour tout a dans $]0, 1]$, il existe un unique couple (u, λ) solution de (P_o) tel que $u(0) = \min_B u = a$ et on montre que l'arc de solutions $(u(0), \lambda)$ est paramétré de la manière suivante :

$$[u(0)](\rho) = \frac{1}{Z(\rho)} \text{ et } \lambda(\rho) = \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)} \quad \rho \in [0, +\infty[\quad (I.5)$$

où Z est l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} Z''(\rho) + \frac{n-1}{\rho} Z'(\rho) &= \frac{1}{Z^k(\rho)} \quad \rho \in]0, +\infty[\\ Z(0) &= 1 \text{ et } Z'(0) = 0 \end{aligned} \quad (I.6)$$

En étudiant les valeurs -avec leur multiplicité- de la fonction $\rho \rightarrow \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)}$ on peut déterminer alors le nombre de solutions de (P_o) pour $\lambda > 0$ fixé.

Au paragraphe III, on s'intéresse aux solutions classiques à symétrie radiale du problème à frontière libre :

$$(P_{F.L}) \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \frac{\lambda}{u^k} \text{ dans } B \setminus \overline{B}_o; u /_{\partial B} = 1 \\ u /_{\partial B_o} = \frac{\partial u}{\partial R} /_{\partial B_o} \\ u \equiv 0 \text{ dans } B_o \end{array} \right.$$

où :

$$k \in]0, 1[, \lambda \in [0, +\infty[$$

B_o = boule ouverte de centre 0 et de rayon R_o si $0 < R_o < 1$ ou le point $\{0\}$.

On montre que pour tout $R_o \in [0, 1[$, il existe un unique couple (u, λ) solution de $(P_{F.L})$. On prouve ensuite que l'arc de solutions (R_o, λ) est paramétré de la manière suivante :

$$R_o(\rho) = \frac{1}{\rho} \text{ et } \lambda(\rho) = \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)} \quad \rho \in]1, +\infty[\quad (I.7)$$

où : Z est l'unique solution de :

$$\begin{aligned} Z''(\rho) + \frac{n-1}{\rho} Z'(\rho) &= \frac{1}{Z^k(\rho)} \text{ dans }]1, +\infty[\\ Z(1) &= Z'(1) = 0 \end{aligned} \quad (I.8)$$

Etude du nombre de solutions pour une classe d'équations elliptiques non-linéaires

En étudiant les valeurs -avec leur multiplicité- de la fonction $\rho \rightarrow \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)}$, on peut alors déterminer le nombre de solutions du problème à frontière libre pour $\lambda \geq 0$ fixé.

Notons que par un changement de variable et de fonction convenable dans (I.6) et (I.8), on ramène l'étude des variations de $\frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)}$ -ou ce qui revient au même de $\frac{Z(\rho)}{\rho^{2/1+k}}$ - à l'étude d'une équation différentielle autonome. Seules les conditions initiales changent. On utilise alors des résultats du type théorèmes de STURM.

II - Etude du problème (P_o)

Dans cette partie, B désigne la boule unité de R^n .

On s'intéresse aux solutions classiques -c'est-à-dire dans $C^o(\overline{B}) \cap C^2(B)$ - du problème suivant :

$$(P_o) \begin{cases} u \geq 0 \text{ dans } \overline{B} \\ -\Delta u + \frac{\lambda}{u^k} = 0 \text{ dans } B \\ u/\partial B = 1 \end{cases}$$

où : $k \in]0, +\infty[$ et $\lambda \in [0, +\infty[$.

Plus précisément, pour λ fixé, on cherche le nombre de solutions du problème (P_o) .

Notons que si u est solution de (P_o) , on a nécessairement $0 < u(x) \leq 1$ dans \overline{B} et $u \in C^\infty(\overline{B})$. En effet :

. $\Delta u \in C^o(B) \Rightarrow u(x) > 0$ dans B , donc dans \overline{B} puisque $u/\partial B = 1$ et $u \in C^o(\overline{B})$.

Par conséquent, $\lambda/u^k \in C^o(\overline{B})$ et avec le principe du maximum on a $u(x) \leq 1$ dans \overline{B} . Si $\lambda > 0$, on a en fait $u(x) < 1$ dans B .

. D'autre part, en utilisant les estimations d'AGMON-DOUGLIS NIRENBERG et de SCHAUDER on obtient $u \in C^\infty(\overline{B})$.

Enfin, en utilisant un résultat de GIDAS-NI-NIRENBERG [11], on peut affirmer que u est à symétrie radiale. En effet :

- . Si $\lambda = 0$, $u \equiv 1$ est l'unique solution de (P_o)
- . Si $\lambda > 0$, posons $v = 1 - u$. On a $v \in C^2(\overline{B})$, avec :

$$\begin{cases} v > 0 \text{ dans } B \\ \Delta v + f(v) = 0 \text{ dans } B \\ v/\partial B = 0 \end{cases}$$

$$\text{où } f(v) = \frac{\lambda}{(1-v)} \quad k \in C^1([0, 1[)$$

Et le résultat de [11] permet de conclure que v est à symétrie radiale et $\frac{dv}{dR} < 0$ pour $0 < R < 1$. Donc u est à symétrie radiale et $\frac{du}{dR} > 0$ pour $0 < R < 1$. Ce qui implique en particulier $\min_{\bar{B}} u = u(0)$.

Si on pose $w(R) = u(x)$ avec $R = \|x\|$, on a $w \in C^\infty([0, 1])$ et est solution de :

$$(Q_o) \begin{cases} w(R) > 0 \text{ dans } [0, 1] \\ w''(R) + \frac{n-1}{R} w'(R) = \frac{\lambda}{w^k(R)} \text{ dans }]0, 1[\\ w'(0) = 0 \text{ et } w(1) = 1 \end{cases}$$

Réciproquement, si w est solution classique de (Q_o) , on a $w \in C^\infty([0, 1])$ et $u(x) = w(R)$ est solution de (P_o) .

Remarques .— 1°) Pour $k = 0$, on a la solution explicite du problème $\Delta u = \lambda$ dans B avec $u/\partial B = 1$: $u(x) = 1 - \frac{\lambda}{2n} (1 - \|x\|^2)$.

Par conséquent, si $\lambda > \lambda_c = 2n$, (P_o) n'a pas de solution et si $\lambda \leq \lambda_c$, (P_o) admet une solution unique.

2°) Si $\lambda = 0$, le problème (P_o) admet une solution unique $u(x) \equiv 1$.

II.1 - Existence et caractérisation des solutions de (P_o)

THÉORÈME II.1.— $\forall a \in]0, 1]$, $\exists!(u, \lambda)$ solution classique de (P_o) avec $u(0) = a$. D'autre part, la courbe (a, λ_a) est paramétrée de la manière suivante :

$$a = a(\rho) = \frac{1}{Z(\rho)}; \lambda_a = \lambda_a(\rho) = \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)} \quad \rho \in [0, +\infty[$$

où Z est l'unique solution du problème suivant :

$$(P_I) \begin{cases} Z''(\rho) + \frac{n-1}{\rho} Z'(\rho) = \frac{1}{Z^k(\rho)} \text{ dans }]0, +\infty[\\ Z(0) = 1 \text{ et } Z'(0) = 0 \end{cases}$$

De plus, Z étant strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ on a :

$$\lambda(a) = a^{1+k} [Z^{-1}(1/a)]^2 \quad a \in]0, 1]$$

Démonstration. — On sait que (u, λ) solution de $(P_o) \Leftrightarrow (w, \lambda)$ solution de (Q_o) c'est-à-dire :

$$(Q_o) \begin{cases} w(R) > 0 \text{ dans } [0, 1] \\ w''(R) + \frac{n-1}{R} w'(R) = \frac{\lambda}{w^{1+k}(R)} \text{ dans }]0, 1[\\ w'(0) = 0 \\ w(1) = 1 \end{cases}$$

avec $w(R) = u(x)$ si $\|x\| = R$, donc $w(0) = u(0) = \min_{\bar{B}} u(x) > 0$.

Supposons démontrées l'existence et l'unicité de Z solution de (P_I) , avec Z strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

Alors :

. $\forall a \in]0, 1]$, $\exists! \rho_o \in [0, +\infty[$ tel que : $a = \frac{1}{Z(\rho_o)}$. Et, (w, λ) défini par $w(\rho) = \frac{Z(\rho\rho_o)}{Z(\rho_o)} = a Z(\rho\rho_o)$ et $\lambda = \frac{\rho_o^2}{Z^{1+k}(\rho_o)} = a^{1+k} \rho_o^2$ est solution de (Q_o) avec $w(0) = a$.

. Réciproquement, si (w, λ) est solution de (Q_o) avec $w(0) = a$.

- Si $a = 1$, $(w, \lambda) = (1, 0)$ est l'unique solution de (Q_o)

- Si $a \in]0, 1[$, nécessairement $\lambda > 0$, et la fonction $\rho \rightarrow \frac{1}{a} w \left(\sqrt{\frac{a^{1+k}}{\lambda}} \rho \right)$ est solution de (P_I) . Par conséquent : $\frac{1}{a} w \left(\sqrt{\frac{a^{1+k}}{\lambda}} \rho \right) = Z(\rho)$.

Or :

$$\begin{aligned} w(1) = 1 &\Rightarrow \lambda = a^{1+k} \left\{ Z^{-1} \left(\frac{1}{a} \right) \right\}^2 \\ &\Rightarrow w(R) = aZ \left(Z^{-1} \left(\frac{1}{a} \right) R \right) \end{aligned}$$

Ceci prouve donc l'unicité.

LEMME II.1. — $\exists!$ $Z \in C^\infty([0, 1])$ solution de (P_I) . Z est strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

De plus, on a :

$$\frac{z(\rho)}{\rho^{2/1+k}} \geq \frac{1+k}{2n} \forall \rho.$$

Démonstration. — Notons que si Z est solution de (P_I) , on a nécessairement Z strictement croissante sur $[0, +\infty[$, $Z \in C^\infty([0, 1])$ et $1 \leq Z(\rho) \leq 1 + \frac{\rho^2}{2n} \forall \rho \in [0, +\infty[$. En effet :

Si Z est solution de (P_I) on a :

$$Z'(\rho) = \frac{1}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \frac{s^{n-1}}{Z^k(s)} ds \quad \forall \rho \in [0, +\infty[$$

et

$$Z(\rho) = 1 + \int_0^\rho \frac{1}{t^{n-1}} \left(\int_0^t \frac{s^{n-1}}{Z^k(s)} ds \right) dt \quad \forall \rho \in [0, +\infty[\quad (*)$$

Et, puisque $Z(0) = 1$, on en déduit que $Z'(\rho) > 0$ sur $]0, +\infty[$ d'où : $Z(\rho) \geq 1$ sur $[0, +\infty[$ et avec $(*)$ $Z(\rho) < 1 + \frac{\rho^2}{2n}$ sur $]0, +\infty[$. De plus, par récurrence on obtient $Z \in C^\infty([0, 1])$.

. Posons :

$$E = \{v \in C^0([0, +\infty[) / 1 \leq v(\rho) \leq 1 + \frac{\rho^2}{2n} \quad \forall \rho \in [0, +\infty[\}$$

$$d(u, v) = \sup_{[0, +\infty[} \{|u(\rho) - v(\rho)|e^{-L\rho}\} \text{ avec } L^2 > k$$

$$(Tv)(\rho) = 1 + \int_0^\rho \frac{1}{t^{n-1}} \left(\int_0^t \frac{s^{n-1}}{v^k(s)} ds \right) dt$$

(E, d) est un espace métrique complet et T est une contraction stricte de (E, d) dans (E, d) -on a $d(Tv_1, Tv_2) \leq \frac{k}{L^2} d(v_1, v_2)$.

Par conséquent, T admet un point fixe unique $Z \in E$.

Il est immédiat de vérifier que $Z \in C^\infty([0, 1])$ et est solution de (P_I) .

. D'autre part, on a $\{\rho^{n-1} Z'(\rho)\}' = \frac{\rho^{n-1}}{Z^k(\rho)} \quad \forall \rho \in]0, +\infty[$. On multiplie cette égalité par Z^k et on intègre sur $[0, \rho]$. Il vient

$$\frac{dZ^{1+k}}{d\rho}(\rho) = \frac{1+k}{n} \rho + \frac{1+k}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho t^{n-1} Z'(t) \{Z^k(t)\}' dt, \quad \forall \rho \geq 0$$

Z et Z' sont positifs, par conséquent le 2ème terme du second membre est positif.

En intégrant à nouveau on obtient :

$$Z^{1+k}(\rho) \geq 1 + \frac{1+k}{2n} \rho^2, \quad \forall \rho \in [0, +\infty[.$$

On en déduit en particulier $Z(\rho) \rightarrow +\infty$ quand $\rho \rightarrow +\infty$ et donc Z est strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

II.2. — Principal résultat pour le problème (P_o)

Pour $\lambda \in [0, +\infty[$ donné, on va maintenant déterminer le nombre de solutions du problème (P_o).

D'après le théorème II.1, il suffit de "compter" les valeurs de $\rho \in [0, +\infty[$ telles que : $\lambda = \rho^2 / Z^{1+k}(\rho)$.

Autrement dit, on étudie les valeurs de la fonction $\rho \rightarrow \rho^2 / Z^{1+k}(\rho)$ -ou ce qui revient au même de la fonction $\rho \rightarrow \frac{Z(\rho)}{\rho^{2/1+k}}$ - avec leur multiplicité.

II.2.1. — Notations

On pose :

$$\lambda_c = \frac{2}{1+k} \left(n - \frac{2k}{1+k} \right); \rho = \frac{2}{1+k}$$

si

$$\lambda_c > 0 \begin{cases} A(k, n) = \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} + \frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} = \sqrt{\frac{\beta}{n-2+\beta}} + \sqrt{\frac{n-2+\beta}{\beta}} \\ B(k, n) = A^2(k, n) - 4 \left(\frac{1}{1+k} \right) \end{cases}$$

Pour (k, n) tels que $k > 0$ et $n \geq 1$, on définit les 4 régions suivantes :

$$\begin{aligned} \cdot R_1 &= \{(k, n) / B(k, n) < 0\} \\ &= \{(k, n) / N^-(k) < n < N^+(k)\} \\ \cdot R_2 &= \{(k, n) / B(k, n) \geq 0 \text{ et } n \geq 2\} \\ &= \{(k, n) / N^+(k) \leq n\} \\ \cdot R_3 &= \{(k, n) / B(k, n) \geq 0 \text{ et } n \leq 2\} \\ &= \{(k, n) / \frac{2k}{1+k} < n \leq N^-(k)\} \end{aligned}$$

où :

$$N^\pm(k) = \frac{6k+2}{k+1} \pm 4\sqrt{\frac{k}{1+k}}$$

Notons que $R_1 \cup R_2 \cup R_3 = \{(k, n) / \lambda_c > 0\}$.

$$\cdot R_4 = \left\{ (k, n) / n \leq \frac{2k}{1+k} \right\} = \{(k, n) / \lambda_c \leq 0\}$$

Pour le problème (P_o), on a $n \in \mathbb{N}^*$.

On peut alors noter que :

$$\begin{aligned}
 n = 1 & : k \in]0, 1[, (k, n) \in R_3 \\
 & \quad k \in [1, +\infty[, (k, n) \in R_4 \\
 n = 2 & : (k, n) \in R_1 \\
 3 \leq n < 10 & : k \in]0, k_n], (k, n) \in R_2 \\
 & \quad k \in]k_n, +\infty[, (k, n) \in R_1 \\
 n \geq 10 & : (k, n) \in R_2
 \end{aligned}$$

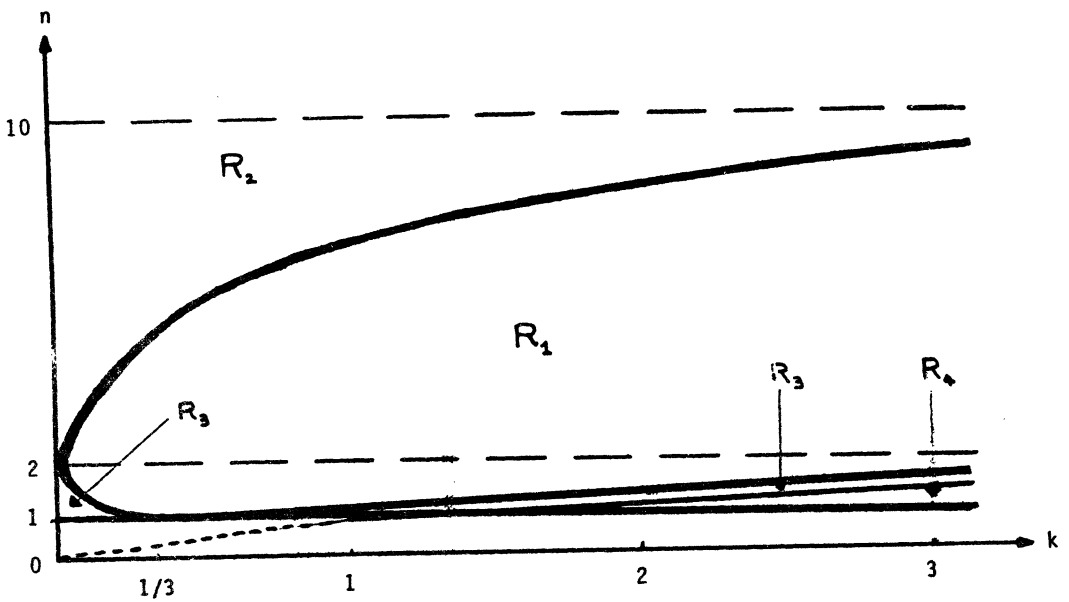


Figure 1

II.2.2. — Théorème

THÉORÈME II.2. — 1) $(k, n) \in R_1$

$\exists \lambda_*, \lambda_{**}$ avec $0 < \lambda_{**} < \lambda_c < \lambda_*$ tels que :

- Pour $\lambda \in [0, \lambda_{**}[$, (P_0) admet une solution unique.

Etude du nombre de solutions pour une classe d'équations elliptiques non-linéaires

- Pour $\lambda \in [\lambda_{**}, \lambda_*]$, $\lambda \neq \lambda_c$, (P_0) admet un nombre fini de solutions.
(Ce nombre augmente lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_c$).
- Pour $\lambda = \lambda_c$, (P_0) admet une infinité dénombrable de solutions.
- Pour $\lambda > \lambda_*$, (P_0) n'a pas de solution.

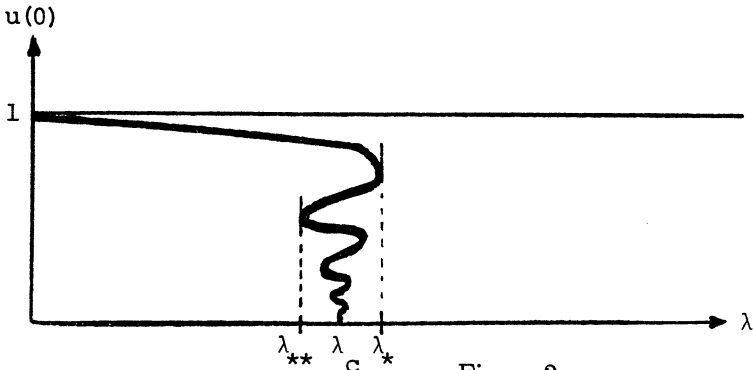


Figure 2

2) $(k, n) \in R_2$

- $\lambda \geq \lambda_c$, (P_0) n'a pas de solution
- $\lambda < \lambda_c$, (P_0) admet une solution unique

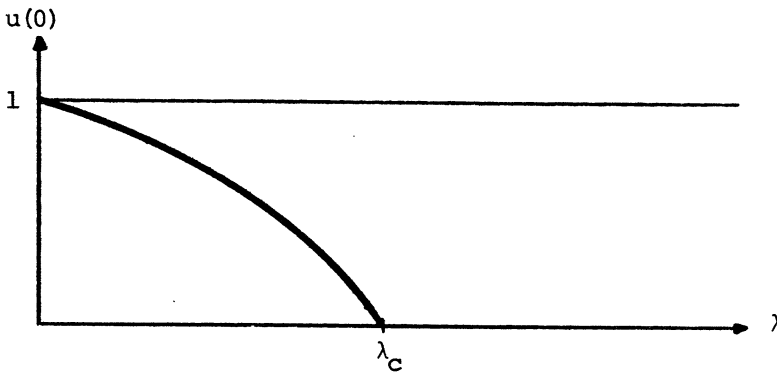


Figure 3

3) $(k, n) \in R_3$

$\exists \lambda_* > \lambda_c$ tel que :

- Pour $\lambda \in [0, \lambda_c]$, (P_0) admet une solution unique.
- Pour $\lambda \in]\lambda_c, \lambda_*[$, (P_0) admet deux solution.
- Pour $\lambda = \lambda_*$, (P_0) admet une solution unique.

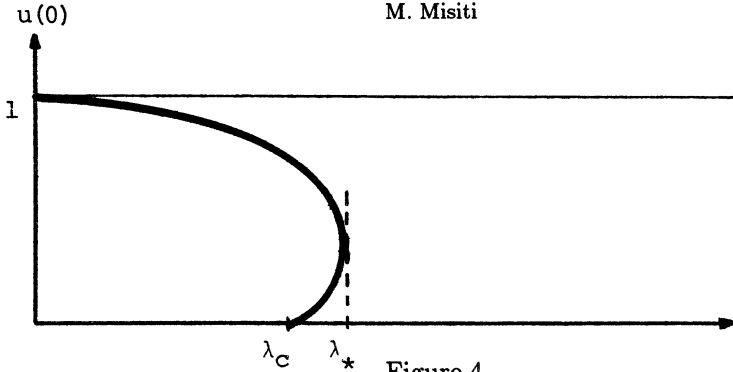


Figure 4

- Pour $\lambda > \lambda_*$, (P_o) n'a pas de solution.

4) $(k, n) \in R_4$

$\exists \lambda_* > 0$ tel que :

- Pour $\lambda = 0$, (P_o) admet une solution unique.
- Pour $\lambda \in]0, \lambda_*[$, (P_o) a deux solutions.
- Pour $\lambda = \lambda_*$, (P_o) admet une solution unique.
- Pour $\lambda > \lambda_*$, (P_o) n'a pas de solution.

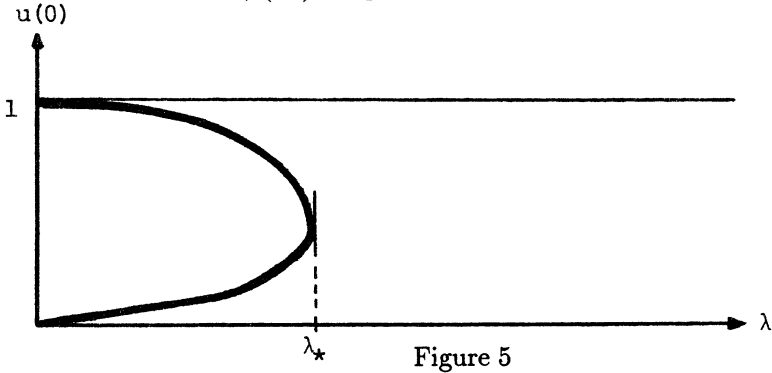


Figure 5

II.3. — Démonstration du Théorème II.2

II.3.1. — Cas où $\lambda_c = \frac{2}{1+k} \left(n - \frac{2k}{1+k} \right) > 0$

Cette partie concerne donc les régions R_1 , R_2 et R_3 . On pose

$$\rho = e^{s/\sqrt{\lambda_c}} \text{ et } \frac{Z(\rho)}{\rho^2/1+k} = \lambda_c^{-\frac{1}{1+k}} F(s)$$

$$\rho \in [0, +\infty[, \quad s \in]-\infty, +\infty[$$

Notons que :

$$\lambda(\rho) = \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)} = \frac{\lambda_c}{F^{1+k}(s)}$$

On étudie les valeurs de F avec leur multiplicité. F est l'unique solution positive du problème suivant :

$$F''(s) + A(k, n)F'(s) + F(s) - \frac{1}{F^k(s)} = 0 \text{ sur }]-\infty, +\infty[\quad (II.1)$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} e^{\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} s} F(s) = \lambda_c^{1/1+k} \quad (II.2)$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} e^{\frac{\beta-1}{\sqrt{\lambda_c}} s} \left\{ F'(s) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} F(s) \right\} = 0 \quad (II.3)$$

Par ailleurs, avec l'équation vérifiée par $Z(\rho)$ on a $Z''(\rho) \rightarrow \frac{1}{n}$ qd $\rho \rightarrow 0$ et donc $\frac{Z'(\rho)}{\rho} \rightarrow \frac{1}{n}$ quand $\rho \rightarrow 0^+$. On en déduit que :

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} e^{\frac{\beta-2}{\sqrt{\lambda_c} s} \left\{ F'(s) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} F(s) \right\}} = \frac{1}{n\sqrt{\lambda_c}} \quad (II.4)$$

Puisque $\beta = \frac{2}{1+k}$, $\beta - 2 < 0$ pour $k \in]0, +\infty[$, la relation (II.4) implique en particulier :

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \left\{ F'(s) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} F(s) \right\} = 0. \quad (II.5)$$

D'autre part, avec le lemme II.1, on a aussi : $\frac{Z(\rho)}{\rho^{2/1+k}} \geq \frac{1+k}{2n}$ d'où :

$$F(s) \geq \lambda_c^{1/1+k} \cdot \frac{1+k}{2n} \quad (II.6)$$

On considère l'équation :

$$(E) \quad F''(s) + A(k, n)F'(s) + F(s) - \frac{1}{F^k(s)} = 0 \text{ dans }]s_0, +\infty[\in F$$

Nous allons démontrer deux lemmes qui permettent d'étudier le comportement d'une solution de (E). Ces deux lemmes seront aussi utilisés au paragraphe III pour le problème à frontière libre.

LEMME II.3.1a. — Soit F une solution de (E). On suppose $\exists \eta \in]0, 1[$ / $F(s) \geq \eta \forall s \in [s_0, +\infty[$. Alors :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} F'(s) = 0 \text{ et } \lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) = 1$$

Démonstration. — On multiplie l'équation (E) par F' et on intègre sur $[s_0, s]$. Il vient :

$$(\star) \quad \frac{1}{2} [F'(s)]^2 + \int_{s_0}^s [F'(t)]^2 dt + (\Delta F)(s) = \frac{1}{2} [F'(s_0)]^2 + (\Delta F)(s_0) \quad \forall s \in [s_0, +\infty[$$

où :

$$\begin{aligned} \Delta F &= \frac{F^2}{2} - \frac{F^{1-k}}{1-k} && \text{si } k \in]0, 1[\\ \Delta F &= \frac{F^2}{2} - \log F && \text{si } k = 1 \\ \Delta F &= \frac{F^2}{2} + \frac{1}{(k-1)F^{k-1}} && \text{si } k \in]1, +\infty[\end{aligned}$$

. Avec (\star) , on obtient :

- $\eta \leq F(s) \leq M \quad \forall s \in [s_0, +\infty[$
- $F'(s)$ bornée sur $[s_0, +\infty[$
- $F' \in L^2(s_0, +\infty)$

En effet, les deux premiers termes du premier membre de (\star) sont positifs; si on suppose $\exists (s_n) \rightarrow +\infty / F(s_n) \rightarrow +\infty$, on en déduit que $(\Delta F)(s_n) \rightarrow +\infty$ ce qui est impossible.

Donc $\exists M/\eta \leq F(s) \leq M \quad \forall s \in [s_0, +\infty[$ ce qui implique $(\Delta F)(s)$ borné et les deux autres résultats.

Par ailleurs, puisque $F(s) \geq \eta > 0 \quad \forall s \in [s_0, +\infty[$, on a $0 < \frac{1}{F^k(s)} \leq \frac{1}{\eta^k} \quad \forall s \in [s_0, +\infty[$, avec l'équation (E) on en déduit que : $F''(s)$ est bornée sur $[s_0, +\infty[$.

Par conséquent, F' est lipschitzienne sur $[s_0, +\infty[$

. Or :

$$\left. \begin{array}{l} F' \in L^2(s_0, +\infty) \\ F' \text{ lipschitzienne} \end{array} \right\} \implies \lim_{s \rightarrow +\infty} F'(s) = 0.$$

En effet, par l'absurde, si $F'(s) \not\rightarrow 0$ quand $s \rightarrow +\infty$, il existe $a > 0$ pour lequel on peut choisir une suite croissante $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i \rightarrow +\infty \text{ qd } i \rightarrow \infty \\ |F'(x_i)| > a, \quad \forall i \\ x_{i+1} - x_i > \frac{a}{2c} \text{ où } c \text{ est la constante de Lipschitz associée à } F' \end{array} \right.$$

Alors, $\forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in [x_i - \frac{a}{2c}, x_i + \frac{a}{2c}]$ on a $|F'(x)| > \frac{a}{2}$. D'où :

$$\text{mes} \left\{ x \in [s_0, +\infty[/ |F'(x)| > \frac{a}{2} \right\} = +\infty$$

Etude du nombre de solutions pour une classe d'équations elliptiques non-linéaires

Or ceci est impossible car $F' \in L^2(s_0, +\infty)$ implique :

$$\text{mes} \left\{ x \in [s_0, +\infty[\mid |F'(x)| > \frac{a}{2} \right\} \leq \frac{4}{a^2} \int_{s_0}^{+\infty} |F'(x)|^2 dx < +\infty$$

. Avec (*), on peut en déduire que $(\Delta F)(s) \rightarrow L \in \mathbb{R}$ quand $s \rightarrow +\infty$.
Or : $s \rightarrow F(s)$ est continue sur $[s_0, +\infty[$ et $G \rightarrow \Delta G$ est continue sur $[\eta, \max F]$ par conséquent, il existe $\ell > 0$ tel que $\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) = \ell$.

Enfin, avec l'équation différentielle on a :

$$[e^{As} F'(s)]' = e^{As} \left(\frac{1}{F^k(s)} - F(s) \right)$$

On intègre sur $[s_0, n]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq s_0$. Il vient :

$$F'(n) - e^{A(s_0-n)} F'(s_0) = \int_{s_0}^{n-s_0} e^{-Au} \left\{ \frac{1}{F^k(n-u)} - F(n-u) \right\} du$$

Avec le théorème de Lebesgue on obtient alors :

$$0 = \frac{1}{\ell k} - \ell \quad \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 1.$$

LEMME II.3.1b. — Soit F une solution de l'équation (E).

On suppose :

$$\begin{aligned} \exists \eta \in]0, 1[\mid F(s) \geq \eta \quad \forall s \in [s_0, +\infty[\\ F(s) \neq 1 \end{aligned}$$

Alors :

- (1) Les zéros de $F'(s)$ et de $\{F(s) - 1\}$ sont alternés.
- (2) Si $B(k, n) = A^2(k, n) - 4(1+k) < 0$, alors :
($F(s) - 1$) - et donc $F'(s)$ - admet une infinité dénombrable de zéros $\{t_n\}$, avec $t_n \rightarrow +\infty$ et $t_{n+1} - t_n \geq C_* > 0$, $\forall n$.
- (3) Si $B(k, n) = A^2(k, n) - 4(1+k) \geq 0$, alors :
(i) $(F(s) - 1)$ s'annule au plus 1 fois si $F(s_0) < 1$
(ii) $(F(s) - 1)$ s'annule au plus 2 fois si $F(s_0) > 1$

$$(iii) \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{F'(s)}{F(s) - 1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{dF}{dF'} = \frac{-A \pm \sqrt{B}}{2}$$

Démonstration. — (1) - Posons $G(s) = F(s) - 1$. On a :

$$G''(s) + A(k, n)G'(s) + R(F(s))G(s) = 0 \text{ dans }]s_o, +\infty[$$

où :

$$R(F(s)) = \begin{cases} \frac{F^{1+k}(s) - 1}{F^{1+k}(s) - F^k(s)} & \text{si } F(s) \neq 1 \\ 1 + k & \text{si } F(s) = 1 \end{cases}$$

Puisque $F(s) \geq \eta > 0 \forall s$, $R(F(s))$ est continue sur $[s_o, +\infty[$. D'autre part, $F(s) \neq 1 \Rightarrow G(s) \neq 0$.

D'après les résultats classiques sur l'équation du second ordre les zéros de G et G' -c'est-à-dire de $(F(s) - 1)$ et $F'(s)$ - sont alternés.

De plus, si $a, b, b > a$ sont 2 zéros successifs de $G(s)$ on a :

$$\begin{aligned} \max \{R(F(s))\} (b - a)^2 + 2A(b - a) &\geq \Pi^2 \\ \Rightarrow (b - a) &\geq C_* > 0 \text{ car } R(F(s)) \leq \frac{1 - \eta^{1+k}}{\eta^k - \eta^{1+k}} \end{aligned}$$

- Ce résultat est dû à OPIAL -voir REID [14]- si u est une solution non identiquement nulle de : $u''(t) + p_1(t)u'(t) + p_0(t)u(t) = 0$ avec p_0, p_1 continues sur I et $|p_0(t)| \leq L_0$ et $|p_1(t)| \leq L_1$, alors si a et b sont 2 zéros successifs de u , on a : $L_0(b - a)^2 + 2 L_1(b - a) \geq \Pi^2$.

· (2) et (3)_{i,ii}

· On peut démontrer (2) par plusieurs méthodes.

D'après le lemme II.3.1a, le point $(F' = 0, F = 1)$ est un point d'équilibre stable et asymptotiquement stable pour l'équation (E). (2) est alors une conséquence des résultats classiques sur la stabilité -voir par exemple PONTRIAGUINE [15].

On peut encore obtenir ce résultat de la manière suivante : Posons :

$$G(s) = H(s) e^{-\frac{As}{2}}$$

On a :

$$H''(s) + \left(R(F(s)) - \frac{A^2}{4} \right) H(s) = 0 \text{ dans }]s_o, +\infty[$$

Or, d'après un résultat de KNEISSER -voir REID [14]-, pour l'équation $H''(s) + q(s)H(s) = 0$, on a :

Si $s^2 q(s) \rightarrow L$ quand $s \rightarrow +\infty$, alors $L \leq 1/4 \Rightarrow H$ s'annule un nombre fini de fois et $1/4 > L \Rightarrow H$ s'annule une infinité de fois.

Ici, $F(s) \rightarrow 1$ quand $s \rightarrow +\infty \Rightarrow R(F(s)) - \frac{A^2}{4} \rightarrow (1+k) - \frac{A^2}{4}$ quand $s \rightarrow +\infty$.

Par conséquent, si $A^2 - 4(1+k) < 0$, $H(s)$ -c'est-à-dire $(F(s) - 1)$ - s'annule une infinité de fois.

[On donnera une autre démonstration du point (2) plus loin].

· Dans le cas où $B(k, n) = A^2(k, n) - 4(1+k) \geq 0$, considérons l'équation :

$$H''(s) + \left\{ R(F(s)) - \frac{A^2}{4} \right\} H(s) = 0.$$

On ne peut pas avoir $H(s_1) = H(s_2) = 0$ et $H(s) > 0$ sur $]s_1, s_2[$ -c'est-à-dire $F(s_1) = F(s_2) = 1$ et $F(s) > 1$ sur $]s_1, s_2[$.

En effet, en multipliant par H et en intégrant sur $[s_1, s_2]$ on trouverait alors $H(s) \equiv 0$ sur $[s_1, s_2]$ -c'est-à-dire $F(s) \equiv 1$ sur $[s_1, s_2]$ - ce qui est impossible car $H(s) \not\equiv 0$ sur $[s_0, +\infty[\Rightarrow$ les zéros de H sont isolés.

On peut alors en déduire que :

- Si $F(s_0) < 1$, seuls les 2 cas suivants sont possibles

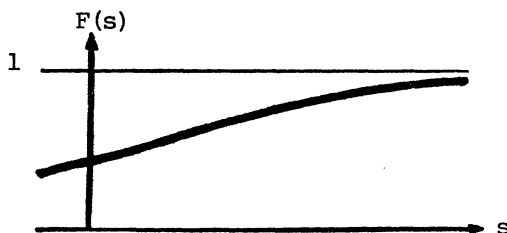


Figure 6

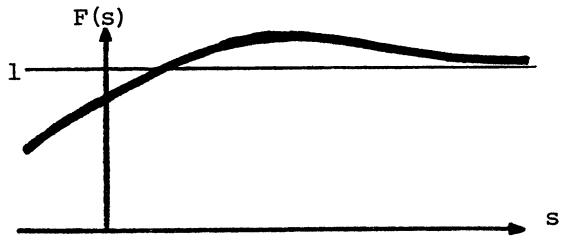


Figure 7

- Si $F(s_0) > 1$, seuls les 3 cas suivants sont possibles

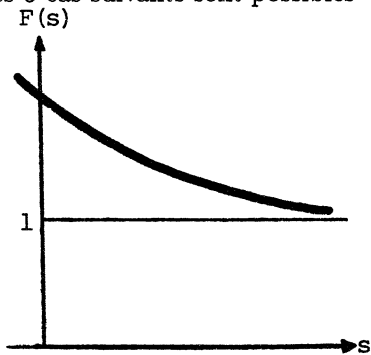


Figure 8

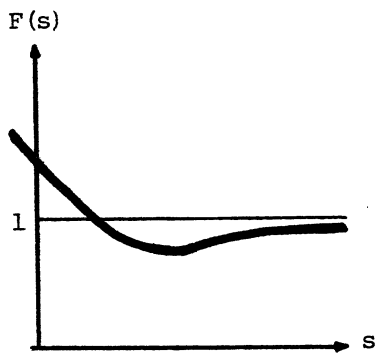


Figure 9

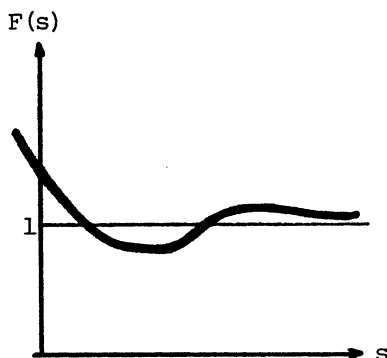


Figure 10

Remarque. — Dans les représentations ci-dessus, on a pris $F'(s_0) \geq 0$ si $F(s_0) < 1$, on peut évidemment avoir $F'(s_0) < 0$. -même chose pour l'autre cas-

· (3) iii

Mais allons maintenant démontrer le dernier point du lemme et par la même occasion obtenir une autre démonstration du point (2).

L'équation $F''(s) + A F'(s) + F(s) - \frac{1}{F^k(s)} = 0$ on peut s'écrire sous la forme d'un système :

$$\begin{cases} X = F(s), Y = F'(s) \\ \frac{dX}{ds} = Y \\ \frac{dY}{ds} = -AY + X^{-k} - X \end{cases}$$

Supposons que $(F(s) - 1)$ s'annule un nombre fini de fois sur $]s_0, +\infty[$. D'après le lemme II.3.1a, on a $F(s) \rightarrow 1$ et $F'(s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow +\infty$, par conséquent pour $s > s_1$ assez grand, seuls les 2 cas suivants sont possibles :

$$F(s) > 1 \text{ et } F'(s) < 0 \quad \forall s \geq s_1$$

ou

$$F(s) < 1 \text{ et } F'(s) > 0 \quad \forall s \geq s_1$$

On a donc :

$$\begin{cases} y(x)y'(x) + Ay(x) = x^{-k} - x \text{ sur }]1, x_*[\\ y(x) < 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} y(x)y'(x) + Ay(x) = x^{-k} - x \text{ sur }]x_*, 1[\\ y(x) > 0 \end{cases}$$

avec dans les 2 cas :

$$\lim_{x \rightarrow 1} y(x) = 0.$$

En dérivant l'équation on obtient :

$$y(x)y''(x) = - \left\{ [y'(x)]^2 + A[y'(x)] + \frac{k}{x^{1+k}} + 1 \right\}$$

En étudiant le signe de y'' , on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} y'(x) = L \in \mathbf{R} \text{ ou } \lim_{x \rightarrow 1} y'(x) = -\infty$$

On revient à l'équation vérifiée par y . On a :

$$y'(x) + A = \frac{x^{-k} - x}{y(x)} = -\frac{1 + k/c^{1+k}}{y'(c)} \text{ avec } c \in]1, x[\text{ ou }]x, 1[$$

On fait $x \rightarrow 1$, on note alors que le cas $y'(x) \rightarrow -\infty$ est impossible donc $\lim_{x \rightarrow 1} y'(x) = L \in \mathbf{R}$ avec :

$$L^2 + A L + (1 + k) = 0$$

Or, si $A^2 - 4(1 + k) < 0$, l'équation précédente n'a pas de solutions, dans ce cas, on peut affirmer que $(F(s) - 1)$ s'annule une infinité de fois ce qui prouve à nouveau le point (2).

Si $A^2 - 4(1 + k) \geq 0$ -on sait avec 3(i)(ii) que $(F(s) - 1)$ s'annule un nombre fini de fois- on a :

$$y'(x) = \frac{dF'}{dF} \rightarrow \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4(1 + k)}}{2}$$

ou encore :

$$\frac{F'(s)}{F(s) - 1} \rightarrow \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4(1 + k)}}{2} \text{ quand } s \rightarrow +\infty.$$

On peut maintenant achever la démonstration du théorème dans le cas où $\lambda_c > 0$.

On sait que F vérifie (II.1) - (II.6); on a donc en particulier $F(s) \rightarrow +\infty$, $F'(s) \rightarrow -\infty$, quand $s \rightarrow -\infty$ et $F(s) \geq \eta > 0 \forall s \in]-\infty, +\infty[$.

Par conséquent, $F(s) > 1$ et strictement décroissante sur $] - \infty, s_0]$, et sur $[s_0, +\infty[$, on peut utiliser les 2 lemmes précédents.

1er cas : $A^2(k, n) - 4(1 + k) < 0 \iff (k, n) \in R_1$

$\exists \{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

- $F(\tau_n) =$ et $F'(\sigma_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\tau_n, \sigma_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$
- $\tau_0 < \sigma_0 < \tau_1 < \dots$
- $\tau_{n+1} - \tau_n \geq C_* > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'autre part, $\{F(\sigma_{2p})\} \nearrow 1$ et $\{F(\sigma_{2p+1})\} \searrow 1$.

On a donc la représentation suivante pour F

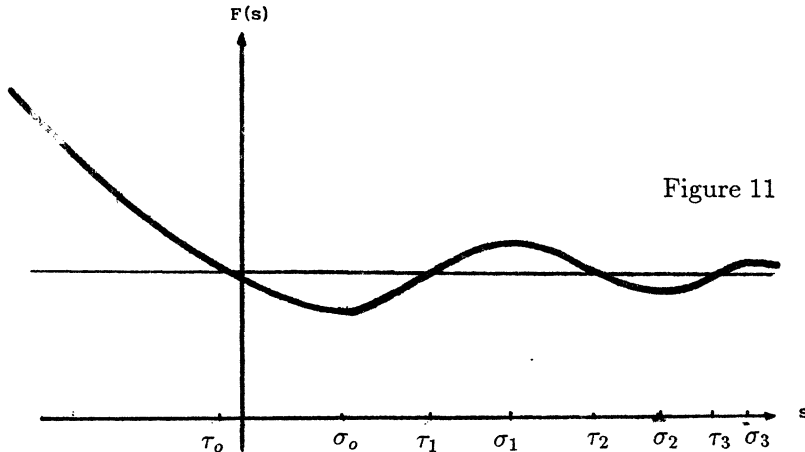


Figure 11

2ème cas : $A^2(k, n) - 4(1 + k) \geq 0$ et $n \geq 2 \iff (k, n) \in R_2$

Dans la région R_2 , on a en fait $n \geq N^+(k) > 2$.

On peut écrire l'équation vérifiée par F sous la forme suivante :

$$F''(s) + A(k, n)F'(s) + (1 + k) \{F(s) - 1\} = k F(s) + \frac{1}{F^k(s)} - (1 + k)$$

dans $] - \infty, +\infty[$.

Notons que le second membre est strictement positif pour $F(s) \neq 1$ -ce qui d'après le lemme II.3.1b est le cas $\forall s \in] - \infty, +\infty[$ sauf peut-être en 2 points-

Rappelons d'autre part que :

$$\begin{aligned} e^{\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} s} F(s) &\rightarrow \lambda_c^{1/1+k} && \text{quand } s \rightarrow -\infty \\ e^{\frac{\beta-2}{\sqrt{\lambda_c}} s} \left\{ F'(s) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} F(s) \right\} &\rightarrow \frac{1}{n\sqrt{\lambda_c}} && \text{quand } s \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Posons :

$$\alpha_1 = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4(1+k)}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4(1+k)}}{2}$$

$$G(s) = F'(s) + \alpha_1 \{F(s) - 1\}$$

On a :

$$\begin{aligned} [e^{\alpha_2 s} G(s)]' &> 0 \quad p.p. \ s \in]-\infty, +\infty[\\ e^{\alpha_2 s} G(s) &\rightarrow 0 \quad \text{quand } s \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} e^{\alpha_2 s} G(s) &= -\alpha_1 e^{\alpha_2 s} + \left(\alpha_1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} \right) e^{\left(\alpha_2 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} \right) s} \left\{ e^{\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} s} F(s) \right\} + \\ &+ e^{\left[\alpha_2 - \frac{\beta-2}{\sqrt{\lambda_c}} \right] s} \left\{ e^{\frac{\beta-2}{\sqrt{\lambda_c}} s} \left(F'(s) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} F(s) \right) \right\} \end{aligned}$$

Or

$$\alpha_2 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} + \left[\left(\frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} \right)^2 - 4(1+k) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} > 0$$

car

$$\frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} = \sqrt{\frac{n-2+\beta}{\beta}} > 1.$$

On en déduit que :

$$G(s) = F'(s) + \alpha_1 (F(s) - 1) > 0 \quad \forall s \in]-\infty, +\infty[$$

Or

$$e^{\alpha_1 s} (F(s) - 1) = -e^{\alpha_1 s} + e^{\left(\alpha_1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} \right) s} \left\{ e^{\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} s} F(s) \right\} \rightarrow 0$$

quand $s \rightarrow -\infty$, car :

$$\alpha_1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} - \left[\left(\frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} \right)^2 - 4(1+k) \right]^{1/2} \right\} > 0.$$

Par conséquent :

$$F(s) - 1 > 0 \quad \forall s \in]-\infty, +\infty[$$

Et, puisque $F''(s) + A F'(s) = \frac{1}{F^k(s)} - F(s)$, on a $F'(s) < 0$ sur $]-\infty, +\infty[$.

On a donc la représentation suivante pour F :

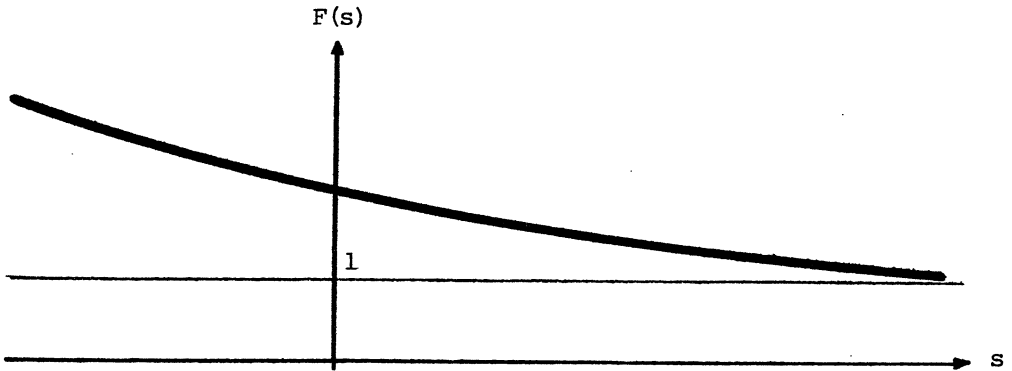


Figure 12

3ème cas : $A^2(k, n) - 4(1+k) \geq 0$ et $n \leq 2 \Leftrightarrow (k, n) \in R_3$

Dans la région R_3 , on a en fait $\frac{2k}{1+k} < n \leq N^-(k) < 2$.

· Supposons que $F(s) > 1$ sur $]-\infty, +\infty[$. Avec l'équation on a :

$$\frac{d}{ds} \left\{ e^{\frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} s} \left(F'(s) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} (F(s) - 1) \right) \right\} = \left(\frac{1}{F^k(s)} - 1 \right) e^{\frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} s} < 0$$

de plus :

$$e^{\frac{\beta-2}{\sqrt{\lambda_c}} s} \left\{ F'(s) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} F(s) \right\} \rightarrow \frac{1}{n\sqrt{\lambda_c}} \text{ quand } s \rightarrow -\infty.$$

En en déduit que :

$$F'(s) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} (F(s) - 1) < 0 \quad \forall s \in]-\infty, +\infty[$$

d'où

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{F'(s)}{F(s)-1} \leq -\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}.$$

Or ceci est impossible car, d'après le lemme II.3.1b on a :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{F'(s)}{F(s)-1} = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4(1+k)}}{2}$$

Et :

$$-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} < -\frac{A + \sqrt{A^2 - 4(1+k)}}{2}.$$

En effet :

$$\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} - \frac{A + \sqrt{A^2 - 4(1+k)}}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} - \frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} \right) - \left[\left(\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} + \frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} \right)^2 - 4(1+k) \right]^{1/2} \right\} > 0$$

car :

$$\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} = \sqrt{\frac{\beta}{\beta + n - 2}} > 1 \text{ puisque } n < 2 \text{ et } k > 0.$$

Par conséquent, $\exists s_0 \in]-\infty, +\infty[/ F(s_0) = 1$ et $F(s) > 1$ sur $] -\infty, s_0[$.

Pour le problème (P_0) , seules les valeurs de $n \in \mathbf{N}^*$ interviennent, donc $(k, n) \in \mathbf{R}_3 \Leftrightarrow n = 1$ et $k \in]0, 1[$.

En utilisant la remarque II.3.3 ou les résultats sur le problème à frontière libre $(P_{F.L.})$ -cf remarque III.3.3- on peut affirmer que $F(s) < 1$ sur $]s_0, +\infty[$.

On a donc la représentation suivante pour F

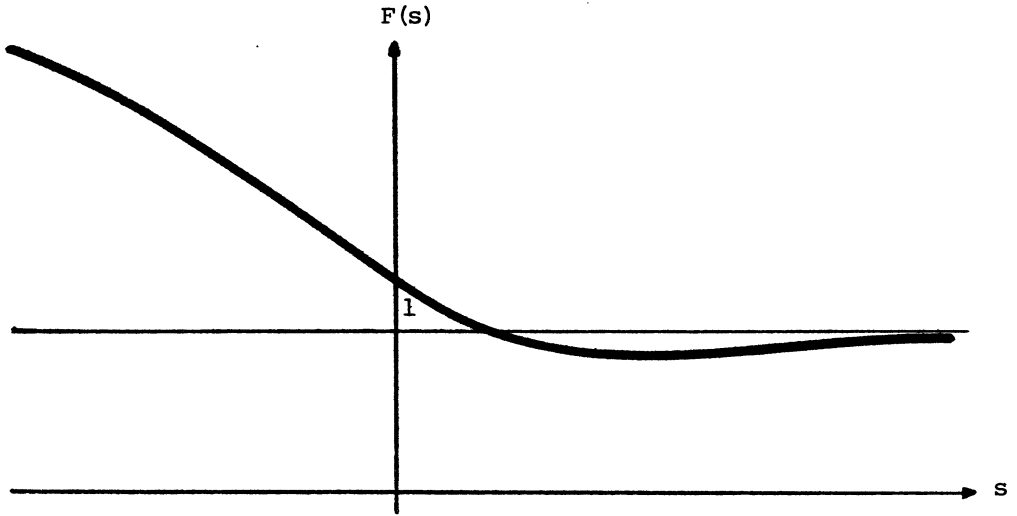


Figure 13

II.3.2. — Cas où $\lambda_c = \frac{2}{1+k} \left(n - \frac{2k}{1+k} \right) \leq 0$

Cette partie concerne la région R_4 , et pour le problème (P_0) , on a $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\lambda_c \leq 0 \Leftrightarrow n = 1$ et $k \geq 1$.

Comme dans les cas précédents, on doit étudier les valeurs de la fonction $\rho \rightarrow \frac{Z(\rho)}{\rho^{2/1+k}}$ avec leur multiplicité.

On pose :

$$\rho = e^s \text{ et } F(s) = \frac{Z(\rho)}{\rho^{2/1+k}}, \rho \in [0, +\infty[$$

F est l'unique solution positive du problème suivant :

$$F''(s) + \left(\beta + \frac{\lambda_c}{\beta} \right) F'(s) + \lambda_c F(s) = \frac{1}{F^k(s)} \text{ dans }] -\infty, +\infty[$$

$$e^{\beta s} F(s) \rightarrow 1 \text{ quand } s \rightarrow -\infty$$

$$e^{(\beta-1)s} \{ F'(s) + \beta F(s) \} \rightarrow 0 \text{ quand } s \rightarrow -\infty$$

En outre, puisque $\frac{Z'(\rho)}{\rho} \rightarrow \frac{1}{n}$ quand $\rho \rightarrow 0^+$ et $\frac{Z(\rho)}{\rho^{2/1+k}} \geq \frac{1+k}{2n} > 0$ on a

aussi :

$$e^{(\beta-2)s} \{ F'(s) + \beta F(s) \} \rightarrow \frac{1}{n} \text{ quand } s \rightarrow -\infty$$

$$F(s) \geq \frac{1+k}{2n} \quad \forall s \in]-\infty, +\infty[$$

· Notons que $F'(s)$ s'annule au plus 1 fois. En effet, supposons que $F'(s_0) = F'(s_1) = 0$, avec l'équation on a :

$$\int_{s_0}^{s_1} \left\{ \frac{1}{F^k(s)} - \lambda_c F(s) \right\} e^{-(\beta + \frac{\lambda_c}{\beta})s} ds = 0$$

Or ceci est impossible car $\lambda_c \leq 0$ et $F(s) > 0$.

· Supposons que $F'(s) \neq 0 \forall s \in \mathbf{R}$, alors puisque $F'(s) \rightarrow -\infty$ quand $s \rightarrow -\infty$, on a $F'(s) < 0 \forall s \in \mathbf{R}$ et donc $F(s) \searrow \ell > 0$ quand $s \rightarrow +\infty$.

Or ceci est impossible car avec l'équation et les conditions initiales, on a :

$$F'(s) = -\beta F(s) + \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda_c}{\beta}u}}{F^k(s-u)} du \rightarrow +\infty \text{ quand } s \rightarrow +\infty \text{ car } \frac{\lambda_c}{\beta} \leq 0$$

· Par conséquent,

$$\exists! s_0 \in \mathbf{R} / F'(s) < 0 \text{ sur }]-\infty, s_0[$$

$$F'(s_0) = 0$$

$$F'(s) > 0 \text{ sur }]s_0, +\infty[$$

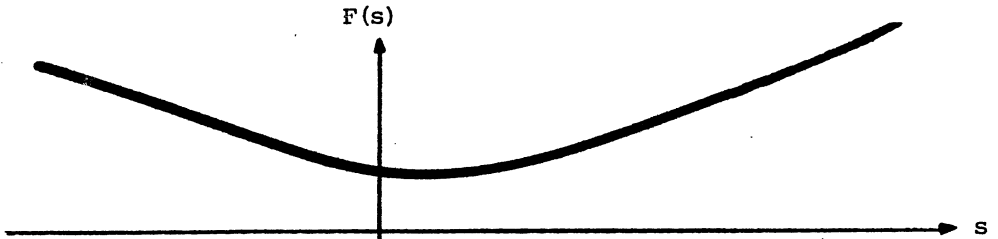


Figure 14

II.3.3. — Remarque

Pour $n = 1$ c'est-à-dire pour les régions R_3 et R_4 on peut démontrer par une autre méthode les résultats obtenus.

D'après le théorème II.1, l'arc de solutions $(\lambda, u(0))$ est paramétré par :

$$u(0) = \frac{1}{\theta}; \lambda = \left\{ \frac{1}{\theta^{\frac{1+k}{2}}} Z^{-1}(\theta) \right\}^2 \quad \theta \in [1, +\infty[$$

où Z est la solution de :

$$(P_I) \begin{cases} Z''(\rho) = \frac{1}{Z^k(\rho)} \text{ dans }]0, +\infty[\\ Z(0) = 1 \text{ et } Z'(0) = 0 \end{cases}$$

On multiplie l'équation par Z' et on intègre sur $[0, \rho]$. Il vient :

$$\cdot \frac{Z'(\rho)}{\sqrt{Z^{1-k}(\rho) - 1}} = \sqrt{\frac{2}{1-k}} \Rightarrow \int_1^{Z(\rho)} \frac{dx}{\sqrt{x^{1-k} - 1}} = \sqrt{\frac{2}{1-k}} \rho \text{ si } k < 1$$

$$\cdot \frac{Z'(\rho)}{\sqrt{\log Z(\rho)}} = \sqrt{2} \Rightarrow \int_1^{Z(\rho)} \frac{dx}{\sqrt{\log x}} = \sqrt{2} \rho \text{ si } k = 1$$

$$\cdot Z'(\rho) \left(\frac{Z^{k-1}(\rho)}{Z^{k-1}(\rho) - 1} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{k-1}} \Rightarrow \int_1^{Z(\rho)} \left(\frac{x^{k-1}}{x^{k-1} - 1} \right)^{1/2} dx =$$

$$\sqrt{\frac{2}{k-1}} \rho \quad \text{si } k > 1$$

On en déduit que :

$$\cdot \lambda(\theta) = \frac{2(1-k)}{(1+k)^2} \left\{ \frac{1}{\theta^{\frac{1+k}{2}}} \int_1^{\theta^{\frac{1+k}{2}}} \left(\frac{x^a}{x^a - 1} \right)^{1/2} dx \right\}^2 \text{ si } k < 1$$

$$\text{où } a = \frac{2(1-k)}{1+k}, \quad a \in]0, 2[$$

$$\cdot \lambda(\theta) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\theta} \int_1^{\theta} \frac{dx}{\sqrt{\log x}} \right\}^2 \text{ si } k = 1$$

$$\cdot \lambda(\theta) = \frac{2(k-1)}{(k+1)^2} \left\{ \frac{1}{\theta^{\frac{1+k}{2}}} \int_1^{\theta^{\frac{1+k}{2}}} \frac{dx}{\sqrt{x^a - 1}} \right\}^2 \text{ si } k > 1$$

$$\text{où } a = \frac{2(k-1)}{(k+1)}, \quad a \in]0, 2[$$

Dans les 3 cas on doit étudier $F(y) = \frac{1}{y} \int_1^y f(x)dx$, avec f décroissante.
On a :

$$F(1) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } k < 1 \\ 0 & \text{si } k \geq 1 \end{cases}.$$

En effet :

$$F(y) = \frac{y-1}{y} \int_0^1 f[1+(y-1)t]dt, \quad y > 1$$

et on utilise la décroissance de f .

D'autre part :

$$\begin{aligned} F'(y) &= -\frac{1}{y^2} \int_1^y f(x)dx + \frac{f(y)}{y} = \frac{1}{y^2} \left\{ f(y) + \int_1^y (x-1)f'(x)dx \right\} \\ &= \frac{1}{y^2} \left\{ f(y) - \int_1^y (x-1)|f'(x)|dx \right\} \quad \text{car } f'(x) < 0 \end{aligned}$$

Or, $y \rightarrow f(y)$ est décroissante et $y \rightarrow \int_1^y (x-1)|f'(x)|dx$ est croissante par conséquent, $F'(y)$ est décroissante.

De plus, quand $y \rightarrow 1^+$, $f(y) \rightarrow +\infty$ et $\int_1^y (x-1)|f'(x)|dx \rightarrow 0$, donc $F'(y) \rightarrow +\infty$.

D'autre part, quand $y \rightarrow +\infty$ on a

$$f(y) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } k < 1 \\ 0 & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

et

$$\int_1^y (x-1)|f'(x)|dx \rightarrow \begin{cases} \ell & \text{si } k < 1/3, \ell > 1 \\ +\infty & \text{si } k \geq 1/3 \end{cases}$$

Remarque. — Pour

$$\begin{aligned} 0 < k < 1/3, \int_1^\infty (x-1)|f'(x)|dx &= \frac{a}{2} \int_1^\infty \frac{(x-1)x^{a/2-1}}{(x^a-1)^{3/2}} dx \\ &= \int_1^\infty \frac{(t^{2/a}-1)}{(t^2-1)^{3/2}} dt \end{aligned}$$

où :

$$a = \frac{2(1-k)}{1+k}, \quad a \in]1, 2[$$

Donc :

$$\int_1^\infty \frac{t^{2/a} - 1}{(t^2 - 1)^{3/2}} dt < \int_1^\infty \frac{t - 1}{(t^2 - 1)^{3/2}} dt = \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + 1)^{3/2}} = 1$$

Par conséquent, $\exists |y_o \in]1, +\infty[$ tel que :

$$\begin{aligned} F'(y) &> 0 \text{ sur }]1, y_o[\\ F'(y_o) &= 0 \\ F'(y) &< 0 \text{ sur }]y_o, +\infty[\end{aligned}$$

D'où : $\exists \theta_o > 1$ tel que $\lambda(\theta)$ est strictement croissante sur $]1, \theta_o[$ et strictement décroissante sur $]\theta_o, +\infty[$. En outre,

$$\lambda(1) = 0 \text{ et } \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \lambda(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq 1 \\ \frac{2(1-k)}{1+k} = \lambda_c & \text{si } k < 1 \end{cases}$$

III. Etude du problème a frontière libre ($P_{F.L}$)

Dans cette partie, on s'intéresse aux solutions du problème à frontière libre suivant :

$$(P_{F.L}) \begin{cases} u \text{ à symétrie radiale, } u \geq 0 \text{ dans } \overline{B} \\ -\Delta u + \frac{\lambda}{u^k} = 0 \text{ dans } B - \overline{B}_o \\ u/\partial B = 1 \\ u/\partial B_o = \frac{\partial u}{\partial \overline{R}} / \partial B_o = 0 \\ u \equiv 0 \text{ dans } \overline{B}_o \end{cases}$$

où :

- B = boule unité de \mathbf{R}^n
- B_o = boule de centre 0 et de rayon R_o si $R_o > 0$ ou le point $\{0\}$.
- $k \in]0, 1[$ et $\lambda \in [0, +\infty[$.

Plus précisément, pour λ fixé, on cherche le nombre de solutions classiques -c.a.d. dans $C^0(\overline{B}) \cap C^1(B) \cap C^2(B - \overline{B}_o)$ - du problème ($P_{F.L}$).

Posons $R = \|X\|$ et $w(R) = u(X)$, on a u solution de ($P_{F.L}$) si et seulement si w est solution du problème suivant :

$$(Q_{F.L}) \begin{cases} w \in C^0([R_o, 1]) \cap C^1([R_o, 1]) \cap C^2(]R_o, 1[) \\ w > 0 \text{ sur }]R_o, 1[\\ w''(R) + \frac{n-1}{R} w'(R) = \frac{\lambda}{w^k(R)} \text{ sur }]R_o, 1[\\ w(R_o) = w'(R_o) = 0 \text{ et } w(1) = 1 \end{cases}$$

Dans un premier temps, on montre que $\forall R_o \in [0, 1[$, $\exists!$ (λ, u) solution de $(P_{F.L})$ et on donne un paramétrage de l'arc de solutions (R_o, λ_{R_o}) .

Ensuite, à l'aide du paramétrage précédent, on peut dénombrer les solutions pour λ fixé.

III.1. — Existence et caractérisation des solutions de $(P_{F.L})$

THÉORÈME III.1. — $\forall R_o \in [0, 1[$, $\exists!$ (λ, u) solution de $(P_{F.L})$ avec $u \in C^{1, \frac{1-k}{1+k}}(\overline{B}) \cap C^\infty(\overline{B} - \overline{B}_o)$. D'autre part, l'arc de solution (R_o, λ_{R_o}) est paramétré par :

$$R_o = \frac{1}{\rho}, \quad \lambda_{R_o} = \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)} \quad \rho \in]1, +\infty[$$

où Z est l'unique solution du problème :

$$(P_I) \begin{cases} Z''(\rho) + \frac{n-1}{\rho} Z'(\rho) = \frac{1}{Z^k(\rho)} \text{ dans }]1, +\infty[\\ Z(1) = Z'(1) = 0 \end{cases}$$

Démonstration. — Notons tout d'abord que si (λ, u) est solution de $(P_{F.L})$ -donc (λ, w) solution de $(Q_{F.L})$ - on a nécessairement $\lambda \neq 0$. En effet, $\lambda = 0$ et $w(R_o) = w'(R_o) = 0 \Rightarrow w \equiv 0$.

1^{er} cas : $R_o = 0$

On peut remarquer que (λ_c, u_c) avec $\lambda_c = \frac{2}{1+k} \left(n - \frac{2k}{1+k} \right)$ et $u_c = \|X\|^{2/1+k}$ est solution de $(P_{F.L})$.

D'autre part, si (λ, u) est solution de $(P_{F.L})$ -donc (λ, w) solution de $(Q_{F.L})$ posons :

$$R = \sqrt{\frac{\lambda_c}{\lambda}} t \text{ et } w(R) = v(t)$$

on a :

$$(R) \begin{cases} v''(t) + \frac{n-1}{t} v'(t) = \frac{\lambda_c}{v^k(t)} \\ v(0) = v'(0) = 0 \end{cases}$$

avec :

$$v \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_c}} \right) = 1$$

Or le problème (R) admet une solution unique sur $]0, +\infty[: v(t) = t^{2/1+k}$.

Etude du nombre de solutions pour une classe d'équations elliptiques non-linéaires

Supposons ceci démontré : on en déduit que $\lambda = \lambda_c$ et $w(R) = R^{2/1+k}$ et donc (λ_c, u_c) est l'unique solution de $(P_{F.L})$ pour $R_o = 0$.

Si v est solution de (R) , on a :

$$\begin{aligned} \cdot v''(t) &\leq \frac{\lambda_c}{v^k(t)} \Rightarrow v(t) \leq a t^{2/1+k}, \quad a = \left\{ \lambda_c \frac{(1+k)^2}{2(1-k)} \right\}^{1/1+k} \geq 1 \\ \cdot v''(t) + \frac{n-1}{t} v'(t) &> \frac{\lambda_c}{a^k t^{\frac{2k}{1+k}}} \Rightarrow v(t) > \frac{1}{a^k} t^{2/1+k} \\ \cdot v(t) &= \lambda_c \int_0^t s^{n-1} \left(\int_0^s \frac{\rho^{n-1}}{v^k(\rho)} d\rho \right) ds \\ &= \lambda_c t^{2/1+k} \int_0^1 \int_0^1 x^{\frac{1-k}{1+k}} y^{n-1-\frac{2k}{1+k}} \left\{ \frac{(xyt)^{2/1+k}}{v(xy t)} \right\} dx dy \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \theta \in C^0(]0, +\infty[) / \frac{1}{a^k} \leq \theta(t) \leq a, \quad \forall t \in [0, +\infty[\right\} \\ (T\theta)(t) &= \lambda_c \int_0^1 \int_0^1 x^{\frac{1-k}{1+k}} y^{n-1-\frac{2k}{1+k}} \frac{1}{\theta^k(xy t)} dx dy \end{aligned}$$

T opère de E dans E .

T admet un unique point fixe dans E : $\theta_o(t) \equiv 1$. En effet :

$$\begin{aligned} T^{(2p)}(E) &\subset \left[\frac{1}{a^{(k^{2p+1})}}, a^{(k^{2p})} \right] = \left\{ \theta \in E / \frac{1}{a^{(k^{2p+1})}} \leq \theta(t) \leq a^{k^{2p}}, \quad \forall t \right\} \\ T^{(2p+1)}(E) &\subset \left[\frac{1}{a^{(k^{2p+1})}}, a^{(k^{2p+2})} \right] \end{aligned}$$

et $k \in]0, 1[\Rightarrow a^{(k^j)}$ et $\frac{1}{a^{(k^j)}} \rightarrow 1$ quand $j \rightarrow \infty$.

De plus, quand $\rho \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{\rho} \rightarrow 0$ et on verra plus loin que :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)} = \lambda_c$$

-Z solution du problème (P_I) -

2^{ème} cas : $R_o \in]0, 1[$

Supposons démontrées l'existence et l'unicité de Z solution du problème (P_I) . Alors :

$$\cdot \forall R_o \in]0, 1[, \exists! \rho_o \in]1, +\infty[/ R_o = \frac{1}{\rho_o}$$

Posons :

$$w(R) = \frac{Z(R\rho_o)}{Z(\rho_o)} \text{ et } \lambda = \frac{\rho_o^2}{Z^{1+k}(\rho_o)}$$

(λ, w) est solution de $(Q_{F.L})$ - ceci prouve l'existence d'une solution-

· Réciproquement, si (λ, w) est solution de $(Q_{F.L})$, la fonction $R \rightarrow \left(\frac{1}{\lambda R_o^2}\right)^{1/1+k} w(R R_o)$ est solution du problème (P_I) .

D'où :

$$\left(\frac{1}{\lambda R_o^2}\right)^{1/1+k} w(R R_o) = Z(R)$$

Or,

$$w(1) = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1/R_o^2}{[Z(1/R_o)]^{1+k}} \Rightarrow w(\rho) = \frac{1}{Z(1/R_o)} Z\left(\frac{\rho}{R_o}\right) \quad \forall \rho \in [0, 1]$$

Ceci prouve l'unicité de (λ, w) .

LEMME III.1. — *Le problème (P_I) admet une solution unique Z .*

$$Z \in C^{1, \frac{1-k}{1+k}}([1, +\infty[) \cap C^\infty(]1, +\infty[)$$

De plus :

$$\exists c_1, c_2 > 0 / c_1(t-1)^{2/1+k} \geq Z(t) \geq c_2(t-1)^{2/1+k}$$

Démonstration. — Pour $n = 1, k \in]0, 1[$, on connaît explicitement la solution du problème (P_I) :

$$Z_{1,k}(\rho) = \left\{ \frac{(1+k)^2}{2(1-k)} \right\}^{1+1+k} (\rho-1)^{2/1+k} = a(\rho-1)^{2/1+k}$$

Si Z est solution de (P_I) , on a $Z(t) > 0$ sur $]1, +\infty[\Rightarrow Z'(t) > 0$ sur $]1, +\infty[$ car $Z'(t) = \frac{1}{t^{n-1}} \int_0^t \frac{s^{k-1}}{Z^k(s)} ds$.

Par conséquent :

$$Z''(t) \leq \frac{1}{Z^k(t)} \Rightarrow Z(t) \leq Z_{1,k}(t)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 Z''(t) + \frac{n-1}{t} Z'(t) &\geq \frac{1}{Z_{1,k}^k(t)} \\
 Z(t) &\geq \int_1^t \frac{1}{s^{n-1}} \int_1^s \frac{\rho^{n-1}}{Z_{1,k}^k(\rho)} d\rho dx = \\
 &= \frac{Z_{1,k}(t)}{a^{1+k}} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{(t-1)xy+1}{(t-1)x+1} \right\}^{n-1} \frac{x^{\frac{1-k}{1+k}}}{y^{\frac{2k}{1+k}}} dx dy = Z_{1,k}(t)L(t)
 \end{aligned}$$

On peut noter que :

$$L(1) = 1, \quad L'(t) \leq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = \frac{1}{a^{1+k}\lambda_c}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
 \cdot E &= \{v \in C^0([1, +\infty[) / L(t)Z_{1,k}(t) \leq v(t) \leq Z_{1,k}(t)\} \\
 \cdot d(v_1, v_2) &= \sup_{[1, +\infty[} \left\{ \left| \frac{v_1(t) - v_2(t)}{Z_{1,k}(t)} \right| e^{-At} \right\}, \quad A \geq 0 \text{ déterminé plus loin} \\
 \cdot (Tv)(t) &= \int_1^t \frac{1}{s^{n-1}} \left(\int_1^s \frac{\rho^{n-1}}{v^k(\rho)} d\rho \right) ds.
 \end{aligned}$$

Alors, (E, d) est un espace métrique complet et $T(E) \subset E$. En effet :

$$\begin{aligned}
 - T &\text{ est décroissant} \\
 - T(Z_{1,k})(t) &= L(t)Z_{1,k}(t) \\
 - T(LZ_{1,k})(t) &= \int_1^t \frac{1}{s^{n-1}} \left(\int_1^s \frac{\rho^{n-1}}{L^k(\rho)Z_{1,k}^k(\rho)} d\rho \right) ds \\
 &\leq \frac{1}{L^k(t)} \int_1^t \frac{1}{s^{n-1}} \left(\int_1^s \frac{\rho^{n-1}}{Z_{1,k}^k(\rho)} d\rho \right) ds
 \end{aligned}$$

car L est décroissante. D'où encore :

$$T(LZ_{1,k})(t) \leq L^{1-k}(t)Z_{1,k}(t) \leq Z_{1,k}(t), \quad \text{car } L(t) \leq 1.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
 |Tv_1(t) - Tv_2(t)| &\leq \int_1^t \frac{1}{s^{n-1}} \left(\int_1^s \rho^{n-1} \frac{k}{L^{1+k}(\rho)Z_{1,k}^{1+k}(\rho)} |v_1(\rho) - v_2(\rho)| d\rho \right) ds \\
 &\leq \frac{k}{L^{1+k}(t)} \left\{ \int_1^t \frac{1}{s^{n-1}} \left(\int_1^s \frac{\rho^{n-1} e^{A\rho}}{Z_{1,k}^k(\rho)} d\rho \right) ds \right\} d(v_1, v_2)
 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
 & \int_1^t \frac{1}{s^{n-1}} \left(\int_1^s \frac{\rho^{n-1} e^{A\rho}}{Z_{1,k}^k(\rho)} d\rho \right) ds = \\
 & = \frac{Z_{1,k}(t)}{a^{1+k}} e^{At} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{(t-1)xy + 1}{(t-1)x + 1} \right\}^{n-1} \frac{x^{\frac{1-k}{1+k}}}{y^{\frac{2k}{1+k}}} e^{-A(t-1)(1-xy)} dx dy \\
 & = Z_{1,k}(t) e^{At} K(t) \\
 & \left| \frac{Tv_1(t) - Tv_2(t)}{Z_{1,k}(t)} \right| e^{-At} \leq k \frac{K(t)}{L^{1+k}(t)} d(v_1, v_2)
 \end{aligned}$$

On peut noter que : $K(1) = 1$, K est décroissante avec $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = 0$ si $A \neq 0$, de plus, $\lim_{A \rightarrow \infty} K(t) = 0, \forall t \neq 1$.

· Si $\frac{k}{L^{1+k}(+\infty)} = \theta < 1$, on prend $A = 0 \Rightarrow K(t) \equiv 1$. On a alors :

$$d(Tv_1, Tv_2) \leq \theta d(v_1, v_2).$$

· Si $\frac{k}{L^{1+k}(+\infty)} \geq 1$, soit $\theta/k < \theta < 1$, il existe $t_* > 1$ tel que $\frac{k}{L^{1+k}(t_*)} = \theta$ (car L décroît sur $[1, +\infty[$ et $L(1) = 1$).

On choisit A tel que : $\frac{k}{L^{1+k}(+\infty)} K(t_*) \leq \theta$. Alors :

$$\begin{aligned}
 - \text{ si } t \leq t_*, \frac{k K(t)}{L^{1+k}(t)} & \leq \frac{k K(1)}{L^{1+k}(t_*)} = \frac{k}{L^{1+k}(t_*)} = \theta [\text{car } K \text{ et } L \searrow] \\
 - \text{ si } t \geq t_*, \frac{k K(t)}{L^{1+k}(t)} & \leq \frac{k K(t_*)}{L^{1+k}(+\infty)} \leq \theta [K \text{ et } L \searrow]
 \end{aligned}$$

On a alors :

$$d(Tv_1, Tv_2) \leq \theta d(v_1, v_2)$$

En définitive, T est une contraction stricte de (E, d) dans (E, d) . Donc il existe un unique Z appartenant à E tel que $T(Z) = Z$.

Il est clair : Z est l'unique solution de (P_I) et $Z \in C^\infty ([1, +\infty[)$. D'autre part, puisque $Z_{1,k}(t) \geq Z(t) \geq L(t) Z_{1,k}(t)$, $1 \geq L(t) \geq C_* > 0$. On en déduit que :

$$\exists C_1, C_2 > 0 / C_1(t-1)^{2/1+k} \geq Z(t) \geq C_2(t-1)^{2/1+k} \forall t \in [1, +\infty[.$$

On montre alors sans difficulté que $Z \in C^1, \frac{1-k}{1+k}([1, +\infty[), \frac{1-k}{1+k}$ étant la meilleure constante possible.

III.2. — Principal résultat pour le problème $(P_{F,L})$

Pour $\lambda \in [0, +\infty[$, on va maintenant déterminer le nombre de solutions de $(P_{F,L})$.

D'après le théorème III.1, il suffit de "compter" les valeurs de $\rho \in]1, +\infty[$ telles que $\lambda = \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)}$.

Autrement dit, on étudie les valeurs de $\rho \rightarrow \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)}$ -ou ce qui revient au même de la fonction $\rho \rightarrow \frac{Z(\rho)}{\rho^{2/1+k}}$ - avec leur multiplicité.

III.2.1. — Notations

On pose :

$$\lambda_c = \frac{2}{1+k} \left(n - \frac{2k}{1+k} \right); \beta = \frac{2}{1+k}$$

$$A(k, \eta) = \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} + \frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} = \sqrt{\frac{\beta}{n-2+\beta}} + \sqrt{\frac{n-2-\beta}{\beta}}$$

$$B(k, n) = A^2(k, n) - 4(1+k)$$

Pour (k, n) tels que $n \geq 1$ et $k \in]0, 1[$, on définit les régions suivantes :

$$\begin{aligned} \cdot R_1 &= \{(k, n) / B(k, n) < 0\} \\ &= \{(k, n) / N^-(k) < n < N^+(k)\} \\ \cdot R_2 &= \left\{ (k, n) / \frac{3k-1}{\sqrt{2(1-k)}} \geq \sqrt{B(k, n)} \right\} \\ &= \left\{ (k, n) / k > 1/3 \text{ et } [1 < n \leq N^-(k)] \text{ ou } \left[N^+(k) \leq n < 2 + \frac{2}{1-k} \right] \right\} \\ \cdot R_3 &= \left\{ (k, n) / \sqrt{B(k, n)} \geq \frac{3k-1}{\sqrt{2(1-k)}} \right\} \\ &= \{(k, n) / k \leq 1/3 \text{ et } n \geq N^+(k) \text{ ou } n \leq N^-(k)\} \cup \\ &\quad \left\{ (k, n) / k > 1/3 \text{ et } n \geq 2 + \frac{2}{1+k} \text{ ou } n \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

où

$$N^\pm(k) = \frac{6k+2}{k+1} \pm 4\sqrt{\frac{k}{1+k}}$$

Remarque III.2. — 1°) Les résultats du théorème III.1 et du lemme III.1 sont encore valables pour $n > \frac{2k}{1+k}$ -c'est-à-dire $\lambda_c = \frac{2}{1+k} \left(n - \frac{2k}{1+k} \right) > 0$. Pour $n < 1$, on modifie la démonstration du lemme III.1.

2°) Pour $(k, n) \in \left[0, 1 \left[\times \left] \frac{2k}{1+k}, +\infty \right[\right]$, on peut remarquer que si n et N sont liés par la relation :

$$(R) \frac{1+k}{2} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{N-2} = 0 \quad n \neq 2$$

Alors :

$$A(k, n) = A(k, N)$$

En particulier :

$$A(k, N^+(k)) = A(k, N^-(k))$$

$$A(k, 1) = A\left(k, 2 + \frac{2}{1-k}\right)$$

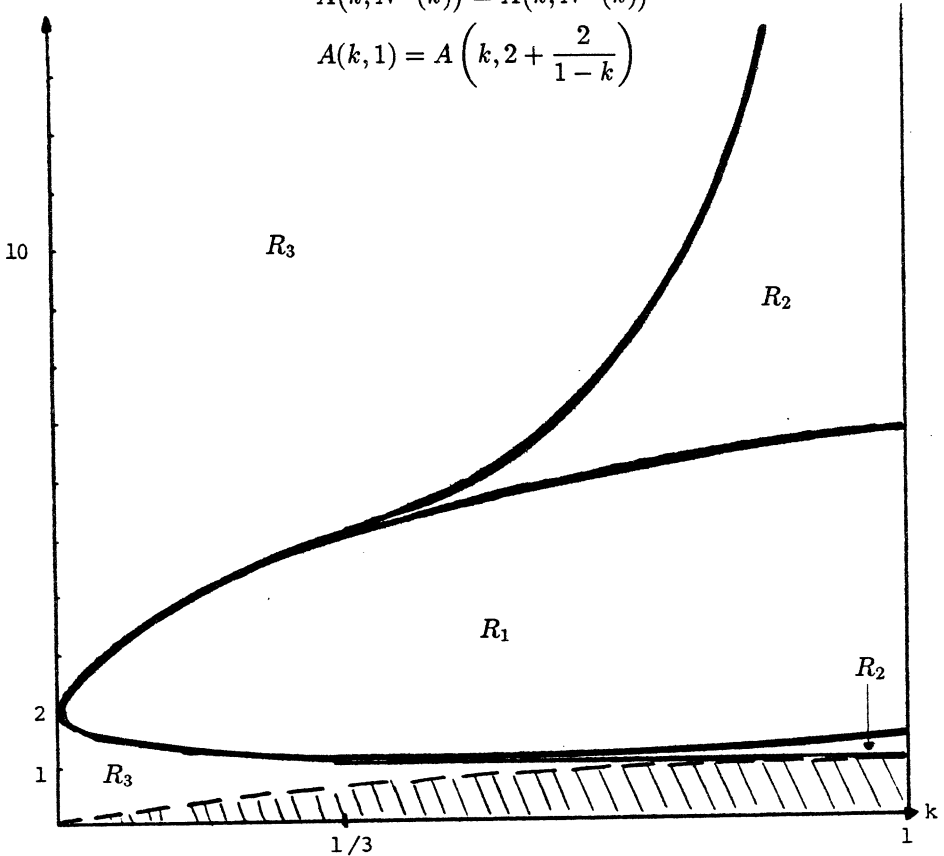


Figure 15

Etude du nombre de solutions pour une classe d'équations elliptiques non-linéaires

Pour le problème $(P_{F.L})$, on a $n \in \mathbf{R}^*$. On peut alors noter que :

$$n = 1 : (k, n) \in R_3, \forall k \in]0, 1[$$

$$n = 2 : (k, n) \in R_1, \forall k \in]0, 1[$$

$$3 \leq n \leq 5 : (k, n) \in R_3, \forall k \in]0, k_n] \text{ et } (k, n) \in R_1, \forall k \in]k_n, 1[$$

$$n = 6 : (k, n) \in R_3, \forall k \in]0, \frac{1}{2}]; (k, n) \in R_2, \forall k \in]\frac{1}{2}, k_o]; (k, n) \in R_1, \forall k \in]k_o, 1[$$

$$n \geq 7 : (k, n) \in R_3, \forall k \in]0, k_n] \text{ et } (k, n) \in R_2, \forall k \in]k_n, 1[$$

III.2.2. — Théorème

1) $(k, n) \in R_1$

$\exists \mu_*, \mu_{**}$ avec $0 < \mu_* < \lambda_c < \mu_{**}$ tels que :

- Pour $\lambda < \mu_*$, le problème $(P_{F.L})$ n'a pas de solution.
- Pour $\lambda \in [\mu_*, \mu_{**}]$, $\lambda \neq \lambda_c$, le problème $(P_{F.L})$ admet un nombre fini de solutions.

Ce nombre augmente lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_c$ [Une solution unique pour μ_* , deux solutions pour μ_{**}]

- Pour $\lambda = \lambda_c$, $(P_{F.L})$ admet une infinité dénombrable de solutions.
- Pour $\lambda \in]\mu_{**}, +\infty[$, $(P_{F.L})$ admet une solution unique.

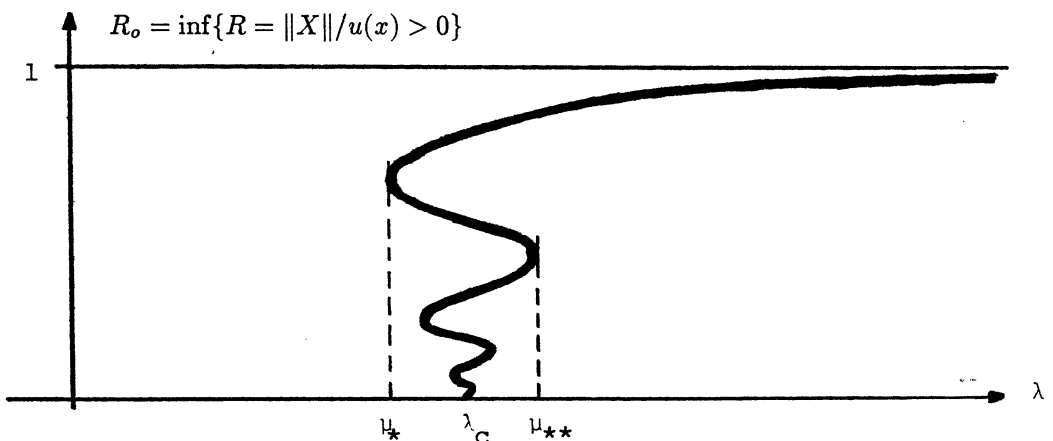


Figure 16

2) $(k, n) \in R_2$

$\exists \mu_*/0 < \mu_* < \lambda_c$ tel que :

- Pour $\lambda < \mu_*$, $(P_{F.L})$ n'a pas de solution.
- Pour $\lambda = \mu_*$, $(P_{F.L})$ admet une solution unique.
- Pour $\lambda \in]\mu_*, \lambda_c]$, $(P_{F.L})$ a deux solutions.
- Pour $\lambda \in]\lambda_c, +\infty[$, $(P_{F.L})$ admet une solution unique.

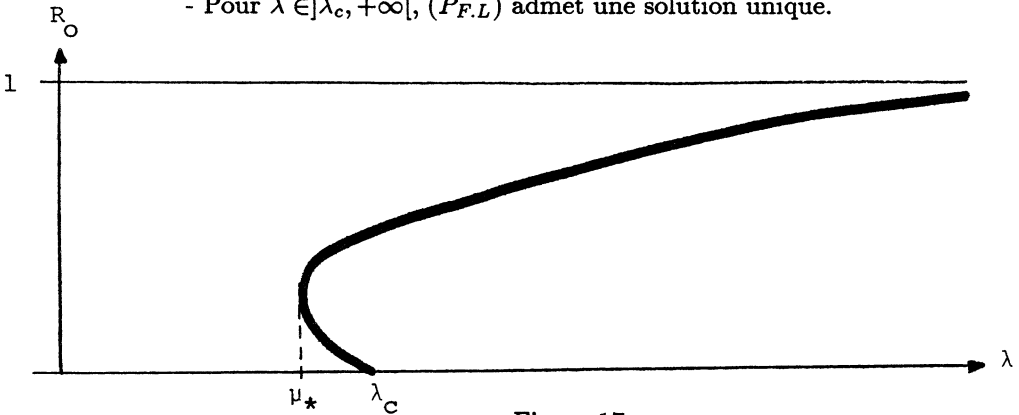


Figure 17

3) $(k, n) \in R_3$

- Pour $\lambda < \lambda_c$, $(P_{F.L})$ n'a pas de solution.
- Pour $\lambda \geq \lambda_c$, $(P_{F.L})$ admet une solution unique.

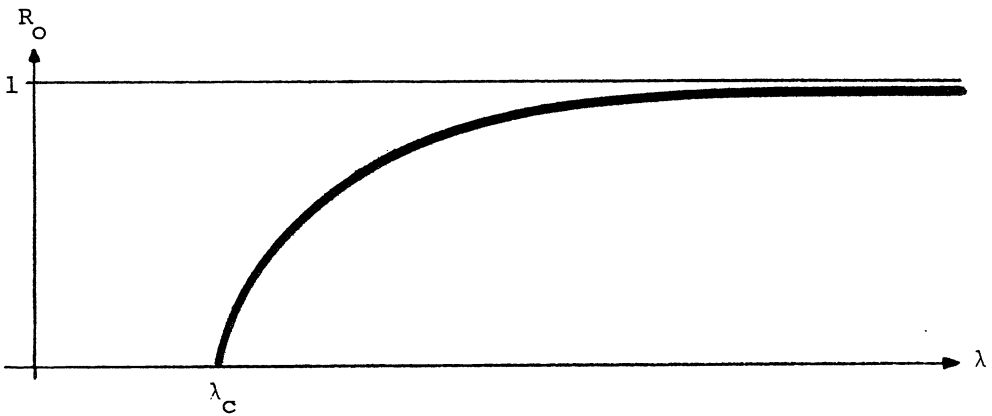


Figure 18

III.3. — Démonstration du Théorème III.2

On pose :

$$\rho = e^{s/\sqrt{\lambda_c}} \text{ et } \frac{Z(\rho)}{\rho^{2/1+k}} = \lambda_c^{-1/1+k} F(s)$$

$$\rho \in [1, +\infty[, s \in [0, +\infty[$$

Notons que :

$$\lambda(\rho) = \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)} = \frac{\lambda_c}{F^{1+k}(s)}$$

On étudie les valeurs de F avec leur multiplicité. F est l'unique solution positive du problème suivant :

$$F''(s) + A(k, n)F'(s) + F(s) - \frac{1}{F^k(s)} = 0 \text{ sur }]0, +\infty[\quad (III.1)$$

$$F'(0) = 0 \quad (III.2)$$

$$F(0) = 0 \quad (III.3)$$

D'autre part, d'après le lemme III.1, on a :

$$\exists c_1, c_2 > 0 / c_1(\rho - 1)^{2/1+k} \geq Z(\rho) \geq c_2(\rho - 1)^{2/1+k}, \forall \rho \in [1, +\infty[$$

D'où :

$$\exists D_1, D_2 > 0 / D_1(1 - e^{-s/\sqrt{\lambda_c}})^{2/1+k} \geq F(s) \geq D_2(1 - e^{-s/\sqrt{\lambda_c}})^{2/1+k}$$

$$\forall s \in [0, +\infty[\quad (III.4)$$

De (III.4), on tire en particulier : $F(s) \geq \eta > 0$ pour $s \geq s_0 > 0$. On peut alors utiliser les lemmes II.3.1a et II.3.1b du paragraphe II. On sait donc que :

$$- \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 1 \text{ et } \lim_{s \rightarrow \infty} F'(s) = 0.$$

- Si $B(k, n) = A^2(k, n) - 4(1 + k) < 0$, c'est-à-dire si $(k, n) \in R_1, \{F(s) - 1\}, F'(s)$ s'annulent une infinité dénombrable de fois : les zéros de $(F - 1)$ et F' alternent.

De plus, si $\{t_n\}/F(t_n) = 1$, on a : $t_n \nearrow +\infty$ et il existe $c > 0$ tel que $t_{n+1} - t_n > c, \forall n$.

- Si $B(k, n) > 0$, $(F - 1)$ s'annule au plus une fois sur $[0, +\infty[$ et $\frac{dF'}{dF} \rightarrow \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4(1+k)}}{2}$ quand $s \rightarrow +\infty$.

On pose :

$$x = F(s) \text{ et } y = F'(s)$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= y \\ \frac{dy}{ds} &= -Ay + (x^{-k} - x) \\ x(0) &= y(0) = 0 \end{aligned}$$

· Si $F(s) \neq 1, \forall s \in]0, +\infty[$ on a $F'(s) > 0$ sur $]0, +\infty[$; on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} y(x)y'(x) + Ay(x) &= x^{-k} - x \text{ sur }]0, 1[\\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 0 \\ y(x) &> 0 \text{ sur }]0, > [\end{aligned}$$

· Si $\exists s_0 \in]0, +\infty[/ F(s_0) = 1$, alors $\exists s_* > s_0$ tel que : $F'(s) > 0$ sur $]0, s_*[$; $F'(s_x) = 0$; $F'(s) < 0$ sur $]s_*, +\infty[$ et $F(s_*) > 1$.

On a alors :

$$\begin{aligned} y(x)y'(x) + Ay(x) &= (x^{-k} - x) \text{ sur }]0, x_*[, \quad x_* = F(s_*) > 1 \\ y(0) &= y(x_*) = 0 \\ y(x) &> 0 \text{ sur }]0, x_*[\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} y(x)y'(x) + Ay(x) &= (x^{-k} - x) \text{ sur }]1, x_*[\\ y(x_*) &= y(1) = 0 \\ y(x) &< 0 \text{ sur }]1, x_*[\end{aligned}$$

On utilise le lemme suivant :

LEMME III.3. — 1) *Le problème*

$$(R_A) \begin{cases} \theta\theta' + A\theta = x^{-k} - x \text{ dans }]0, \ell[\\ \theta(0) = 0 \\ \theta(x) > 0 \text{ dans }]0, \ell[\end{cases}, \quad A > 0$$

admet au plus une solution.

2) *Si*

$$\begin{cases} \theta\theta' + A\theta = f \text{ dans }]0, \ell[\\ \theta(0) = 0 \\ \theta(x) > 0 \text{ sur }]0, \ell[\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \eta\eta' + B\eta = g \\ \eta(0) = 0 \\ \eta(x) > 0 \text{ sur }]0, \ell[\end{cases}$$

Avec

$$\frac{f(x)}{A^2} \geq \frac{g(x)}{B^2} \text{ dans }]0, \ell[,$$

alors :

$$\frac{\theta(x)}{A} \geq \frac{\eta(x)}{B} \text{ dans } [0, \ell]$$

Démonstration. — 1) Supposons que θ_1 et θ_2 soient 2 solutions de (R_A) .
Posons $v = \theta_1^2 - \theta_2^2$. On a :

$$\begin{aligned} v'(x) &= 2A(\theta_1 - \theta_2)(x) = 0 \text{ dans }]0, \ell[\\ v(0) &= 0 \end{aligned}$$

On multiplie l'équation par v . Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{dv^2}{dx}(x) + 4A(\theta_1 + \theta_2)v^2(x) &= 0 \text{ dans }]0, \ell[\\ v^2(0) &= 0 \end{aligned}$$

Or, $\theta_1 \geq 0$ et $\theta_2 \geq 0$, donc :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv^2}{dx} < 0 \\ v^2(0) = 0 \end{aligned} \right\} \implies v^2(x) \equiv 0 \text{ sur } [0, \ell]$$

2) Posons $v = \left(\frac{\theta}{A}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{B}\right)^2$. On a :

$$\begin{aligned} v'(x) + 2\left(\frac{\theta(x)}{A} - \frac{\eta(x)}{B}\right) &= 2\left(\frac{f(x)}{A^2} - \frac{g(x)}{B^2}\right) \text{ sur }]0, \ell[\\ v(0) &= 0 \end{aligned}$$

On multiplie l'équation par $v^-(x)$. On a :

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{\theta(x)}{A} - \frac{\eta(x)}{B}\right)v^-(x) &= -2\left(\frac{\theta(x)}{A} + \frac{\eta(x)}{B}\right)\left\{\left(\frac{\theta(x)}{A} - \frac{\eta(x)}{B}\right)^-\right\}^2 \\ &= -w(x) \\ 2\left(\frac{f(x)}{A^2} - \frac{g(x)}{B^2}\right)v^-(x) &\geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$v'(x)v^-(x) \geq w(x), w(x) \geq 0 \text{ et } w(x) > 0 \text{ si } v^-(x) > 0 \text{ et } v(0) = 0$$

Par conséquent

$$v^- \equiv 0 \text{ et } v(x) \geq 0, \forall x \in [0, \ell] \Rightarrow \frac{\theta(x)}{A} \geq \frac{\eta(x)}{B} \quad \forall x \in [0, \ell]$$

On peut maintenant achever la démonstration du théorème.

On considère le problème :

$$\begin{aligned} y_{n,k}(x)y'_{n,k}(x) + A(k,n)y_{n,k}(x) &= x^{-k} - x \text{ dans }]0, 1[\\ y_{n,k}(0) &= 0 \\ y_{n,k}(x) &> 0 \text{ sur }]0, 1[\end{aligned} \quad (P_{nk})$$

Pour $n = 1, k \in]0, 1[$, on connaît explicitement la solution de (P_{1k}) . On a :

$$y_{1,k}(x) = \sqrt{\frac{2}{1-k}} \left(x^{\frac{1-k}{2}} - k \right)$$

Par suite, $y_{1,k}(1) = 0$.

1^{er} cas : $(k, n) \in R_2$

$$\begin{aligned} R_2 &= \left\{ (k, n)/k > 1/3 \text{ et } [1 < n \leq N^-(k)] \text{ ou } N^+(k) \leq 2 < 2 + \frac{2}{1-k} \right\} \\ &= \left\{ (k, n)/k > 1/3 \text{ et } 4(1+k) \leq A^2(k, n) < \frac{(3-k)^2}{2(1-k)} = A^2(k, 1) \right\} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{x^{-k} - x}{A^2(k, n)} \geq \frac{x^{-k} - x}{A^2(k, 1)} \quad \forall x \in]0, 1[$$

Avec le lemme III.1, on peut donc affirmer que :

$$\frac{y_{n,k}(x)}{A(k, n)} \geq \frac{y_{1,k}(x)}{A(k, 1)} \quad \forall x \in [0, 1] \quad (*)$$

Supposons que $y_{n,k}(1) = 0$. Avec (*) on a :

$$\frac{1}{A(k, n)} \frac{y_{n,k}(x) - y_{n,k}(1)}{x - 1} \leq \frac{1}{A(k, 1)} \frac{y_{1,k}(x) - y_{1,k}(1)}{x - 1} \quad \forall x \in [0, 1[$$

d'où :

$$y'_{n,k}(1) \leq \frac{A(k,n)}{A(k,1)} y'_{1,k}(1) = -A(k,n) \left(\frac{1+k}{3-k} \right)$$

Or ceci est impossible car d'après le lemme II.3.1b, on a :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{dF'}{dF} = y'_{n,k}(1) = \frac{A(k,n) \pm \sqrt{A^2(k,n) - 4(1+k)}}{2}$$

Et :

$$\frac{A(k,n) + \sqrt{A^2(k,n) - 4(1+k)}}{2} < \left(\frac{1+k}{3-k} \right) A(k,n)$$

En effet, cette inégalité est équivalente à :

$$\sqrt{A^2(k,n) - 4(1+k)} < \left(\frac{3k-1}{3-k} \right) A(k,n)$$

Et, puisque dans R_2 , $k > 1/3$ ceci équivaut à :

$$A^2(k,n) < \frac{(3-k)^2}{2(1-k)}$$

Cette dernière égalité est bien vérifiée dans R^2 .

En conclusion, $y_{n,k}(1) > 0$ et en revenant à la fonction $F_{n,k}(s)$, on peut en déduire : $\exists s_0 \in]0, +\infty[/ F_{n,k}(s_0) = 1$.

2^{ème} cas : $(k,n) \in R_3$

$$R_3 = \left\{ (k,n) / k \leq 1/3 \text{ et } ([n \geq N^+(k)] \text{ ou } [n \leq N^-(k)]) \right\} \cup \left\{ (k,n) / k > 1/3 \text{ et } \left(\left[n \geq 2 + \frac{2}{1-k} \right] \text{ ou } [n \leq 1] \right) \right\}$$

On peut encore décrire R_3 de la manière suivante :

$$R_3 = R_3^1 \cup R_3^2$$

$$R_3^1 = \{ (k,n) / A(k,1) \leq A(k,n) \}$$

$$R_3^2 = \{ (k,\tilde{n}) / k \leq 1/3 \text{ et } 4(1+k) \leq A^2(k,n) < A^2(k,1) \}$$

• Dans R_3^1 ,

$$\frac{x^{-k} - x}{A^2(k,1)} \geq \frac{x^{-k} - x}{A^2(k,n)} \quad \forall x \in]0, 1[.$$

Avec le lemme III.1 on a :

$$\frac{y_{1,k}(x)}{A(k,1)} \geq \frac{y_{n,k}(x)}{A(k,n)}$$

D'où :

$$y_{n,k}(1) = 0.$$

· Dans R_3^2 ,

$$\frac{x^{-1/3} - x}{A(1/3,1)} \geq \frac{x^{-k} - x}{A(k,n)} \quad \forall x \in]0, 1[.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \cdot g(x) &= \frac{x^{-1/3} - x}{x^{-k} - x} \geq \frac{4}{3(1+k)} - \text{ car } g \text{ décroît sur }]0, 1[\\ \cdot \frac{A^2(1/3,1)}{A^2(k,n)} &= \frac{16/3}{A^2(k,n)} \leq \frac{4}{3(1+k)} - \text{ car } A^2(k,n) \geq 4(1+k) \end{aligned}$$

Avec le lemme III.1, on a :

$$\frac{y_{1,1/3}(x)}{A(1/3,1)} \geq \frac{y_{n,k}(x)}{A(k,n)}$$

D'où : $y_{n,k}(1) = 0$. En conclusion, en revenant à la fonction $F_{n,k}(s)$, on peut en déduire que : $F_{n,k}(s) < 1 \quad \forall s \in [0, +\infty[$.

Remarque III.3.3. — En modifiant quelque peu la démonstration du lemme III.3, on montre sans difficulté que :

$$\text{si } \begin{cases} \theta\theta' + A\theta = f \text{ dans }]x_o, \ell[\\ \theta(x_o) = \theta_o \\ \theta(x) > 0 \text{ sur }]x_o, \ell[\end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} \eta\eta' + B\eta = g \text{ dans }]x_o, \ell[\\ \eta(x_o) = \eta_o \\ \eta(x) > 0 \text{ sur }]x_o, \ell[\end{cases}$$

Avec :

$$\frac{f(x)}{A^2} \geq \frac{g(x)}{B^2} \text{ dans }]x_o, \ell[\text{ et } \frac{\theta_o}{A} \geq \frac{\eta_o}{B}.$$

Alors :

$$\frac{\theta(x)}{A} \geq \frac{\eta(x)}{B} \text{ sur } [x_o, \ell].$$

· D'autre part, les valeurs propres des problèmes $(P_{F.L})$ et (P_o) sont paramétrées par :

$$\lambda = \frac{\lambda_c}{F^{1+k}(s)} \quad s \in]0, +\infty[\text{ pour } (P_{F.L})$$

$$\lambda = \frac{\lambda_c}{G^{1+k}(s)} \quad s \in]-\infty, +\infty[\text{ pour } (P_o)$$

F et G sont solutions de la même équation différentielle (autonome) :

$$H'' + AH' + H - \frac{1}{H^k} = 0.$$

Seules les conditions initiales changent.

Dans le cas particulier où $n = 1$ et $k \in]0, 1[$, on sait que $\exists s_0/G(s) > 1$ pour $s \in]-\infty, s_0[$ et $G(s_0) = 1$; on en déduit $\exists s_1/G'(s_1) = 0$ et $0 < G(s_1) < 1$. On sait aussi que $F(s) < 1 \forall s \in [0, +\infty[$.

En se plaçant dans le plan de phase et en utilisant le résultat énoncé ci-dessus, on en déduit que : $G(s) < 1, \forall s \in]s_0, +\infty[$.

Références

- [1] ARIS (R.).— *The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts*.— Clarendon Press, Oxford, 1975.
- [2] KERNEVEZ (J.P.), THOMAS (D.).— Numerical analysis and control of some bischemical systems, *Appl. Math. and Opt.*, t. 1, n°3, 1975.
- [3] BRAUNER, NICOLAENKO .— *On nonlinear eigenvalue problem which extend into free boundaries problems*.— Lect. notes in Math 782, Springer Verlag 1981.
- [4] BRAUNER, NICOLAENKO .— Free boundary value problems as singular limits of nonlinear eigenvalue problems.
- [5] BRAUNER, NICOLAENKO .— Sur une classe de problèmes elliptiques non-linéaires, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 286, série A, 1978, p. 1007-1010.
- [6] BRAUNER, NICOLAENKO .— *Sur des problèmes aux valeurs propres non-linéaires qui se prolongent en problèmes à frontière libre*, *C.R. Acad. Sc. Paris, Série A*, 287, p. 1105-1108, 1978, 288, p. 125-127 1979.
- [7] PHILIPPS (D.).— A minimization problem and the regularity of solution in the presence of a free boundary, *Ind. Univ. Math. J.*, t. 32, 1983, p. 1617.
- [8] CIMATTI (G.).— Existence results for a nonlinear elliptic boundary value problem relevant in theory of high vacuum electron tubes, *Ren. di. Mat. Università di Parma*, t. 4, 1982, p. 665-677.
- [9] KAWARADA H..— On solutions of initial-boundary problem for $u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}$, *Publ. Rims, Kyoto Univ.*, t. 10, 1975, p. 729-736.
- [10] LACEY (A.A.), WAKE (G.C.).— Thermal ignition with variable thermal conductivity, *I.M.A. Journal of Applied Mathematics*, t. 28, 1982, p. 23-29.
- [11] GIDAS (B.), NI (W.), NIRENBERG (L.).— Symmetry and related proprieties via the maximum principle, *Com. Math. Phys.*, t. 68, 1979, p. 209-243.
- [12] DE LA PRADA (J.M.).— *Técnicas de perturbations en la teoria de reactores catalíticos*.— Tesis : Escuela tecnica superior de ingenieros aeronauticos. Universidad politecnica de Madrid, 1977.
- [13] DIAZ (J.I.).— Nonlinear partial differential equations and free boundaries. Volume I : Elliptic equations.

M. Misiti

[14] REID (W.T.). — Sturmian theory for ordinary differential equations—Appl. Math., Sc. **31**, Springer Verlag.

[15] PONTRIAGUINE (L.). — Equations différentielles ordinaires—Editions de Moscou.

(Manuscrit reçu le 5 juin 1986)