

PASCAL MARONI

**L'orthogonalité et les récurrences de polynômes
d'ordre supérieur à deux**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 10,
n° 1 (1989), p. 105-139

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1989_5_10_1_105_0

© Université Paul Sabatier, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux

PASCAL MARONI(*)

RÉSUMÉ. — On établit les propriétés d'une suite de polynômes orthogonaux par rapport à d formes linéaires; en particulier une telle suite est caractérisée par le fait qu'elle vérifie une récurrence d'ordre $d + 1$.

Lorsque $d = 1$, on donne plusieurs caractérisations d'une suite strictement quasi-orthogonale d'ordre s .

ABSTRACT. — We give the properties of a set of orthogonal polynomials with respect to d linear functionals; a set of this kind will verify an $d + 1$ order recurrence relation.

If $d = 1$, we give characterizations of set of strictly quasi-orthogonal polynomials.

Introduction

La notion d'orthogonalité de dimension d , introduite dans sa thèse par J. VAN ISEGHEM [5], à propos de la recherche des approximants de Padé (vectoriels) de d séries formelles simultanées, se présente comme la notion adéquate dans l'étude des récurrences de polynômes d'ordre $d + 1$.

On expose ici les premières propriétés d'une suite orthogonale de dimension d , c'est-à-dire vérifiant des propriétés d'orthogonalité par rapport à d formes linéaires. Le résultat fondamental qui justifie une telle étude est qu'une suite orthogonale de dimension d vérifie une récurrence d'ordre $d + 1$ et réciproquement [5]. A partir de là, on pourra envisager ultérieurement le problème de déterminer les suites vérifiant une récurrence d'ordre $d + 1$ et

(*) Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire du Centre National de la Recherche Scientifique associé à l'Université Pierre et Marie Curie, Tour 55-65 - 5^{ème} étage, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, Laboratoire d'Analyse Numérique (U.A. 189)

dont la suite des dérivées vérifie également une récurrence d'ordre $d + 1$: ce sera une généralisation des polynômes orthogonaux classiques obtenus lorsque $d = 1$.

On introduit également la notion de quasi orthogonalité de dimension d . On se borne ici, lorsque $d = 1$, à étudier le cas d'une suite strictement quasi-orthogonale d'ordre s . On donne un théorème de caractérisation d'une telle suite qui généralise le résultat de DICKINSON obtenu dans le cas $s = 1$ [8].

On a utilisé de façon systématique la notion de suite duale d'une suite de polynômes. Soit \mathcal{P} l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur \mathbf{C} . A toute suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ de polynômes normalisés ($B_n(x) = x^n + \dots$), on peut associer sa suite duale $\{\mathcal{L}_n\}_{n \geq 0}$, $\mathcal{L}_n \in \mathcal{P}'$ définie par

$$\mathcal{L}_m(B_n) = \delta_{m,n} \quad , \quad m, n \geq 0.$$

La suite duale permet de mesurer, en quelque sorte, le degré d'organisation de la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$.

Sommaire

- § 1. La suite duale.
- § 2. L'orthogonalité de dimension d .
- § 3. La quasi-orthogonalité de dimension d .
- § 4. La quasi-orthogonalité stricte (de dimension un).

1. La suite duale

Soit $\{B_n\}_{n \geq 0}$ une suite de polynômes normalisés, c'est-à-dire tels que $B_n(x) = x^n + \dots, n \geq 0$.

Il existe toujours une suite unique $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ et un tableau unique $\chi_{n,\nu}, 0 \leq \nu \leq n, n \geq 0$ tels que :

$$(1.1) \quad \begin{aligned} B_0(x) &= 1, \quad B_1(x) = x - \beta_0, \\ B_{n+2}(x) &= (x - \beta_{n+1})B_{n+1}(x) - \sum_{\nu=0}^n \chi_{n,\nu} B_\nu(x), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

DÉFINITION 1.1.— On appelle suite duale de la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ la suite de formes linéaires $\{\mathcal{L}_n\}_{n \geq 0}$ définie par :

$$(1.2) \quad \mathcal{L}_n(B_m) = \langle \mathcal{L}_n, B_m \rangle = \delta_{n,m} \quad , \quad n, m \geq 0$$

L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux

La suite $\{\mathcal{L}_n\}_{n \geq 0}$ est libre et elle est unique [1]. De (1.1) et (1.2), on a :

$$(1.3) \quad \mathcal{L}_m(xB_{n+1}(x)) = \chi_{n,m} \quad 0 \leq m \leq n$$

$$(1.4) \quad \mathcal{L}_m(xB_m(x)) = \beta_m \quad , \quad m \geq 0$$

Le lemme suivant est fondamental dans toute la suite [2].

LEMME 1.1. — Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'$ et soit $p \geq 1$ un entier. Pour que \mathcal{F} vérifie :

$$(1.5) \quad \mathcal{F}(B_{p-1}) \neq 0 \quad , \quad \mathcal{F}(B_n) = 0 \quad , \quad n \geq p$$

il faut et il suffit qu'il existe $\lambda_\nu \in \mathbf{C}, 0 \leq \nu \leq p-1, \lambda_{p-1} \neq 0$, tels que :

$$(1.6) \quad \mathcal{F} = \sum_{\nu=0}^{p-1} \lambda_\nu \mathcal{L}_\nu$$

Il est intéressant de déterminer la suite duale de certaines suites qu'on peut associer à la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$.

On traitera ici le cas de la suite associée relativement à une forme u et le cas de la suite des dérivées.

DÉFINITION 1.2. — [3]. Soit $u \in \mathcal{P}'$ telle que $u_0 = u(1) = \langle u, 1 \rangle \neq 0$. On appelle suite associée de la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ relativement à la forme u , la suite $\{B_n^{(1)}(u)\}_{n \geq 0}$ définie par :

$$(1.7) \quad u_0 B_n^{(1)}(u)(x) = u \left(\frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(\xi)}{x - \xi} \right) \quad , \quad n \geq 0$$

Chaque polynôme $B_n^{(1)}(u)$ est normalisé. Notons $\{\mathcal{L}_n^{(1)}(u)\}_{n \geq 0}$ la suite duale de la suite $\{B_n^{(1)}(u)\}_{n \geq 0}$.

Pour chaque $f(x) = \sum_{\nu=0}^p a_\nu x^\nu$, on définit :

$$uf(x) = \sum_{n=0}^p \left(\sum_{\nu=n}^p a_\nu u_{\nu-n} \right) x^n$$

avec $u_n = \langle u, x^n \rangle, n \geq 0$. La transposée de $f \rightarrow uf$ permet de définir le produit multiplicatif de deux formes linéaires :

$$\langle vu, f \rangle = \langle v, uf \rangle \quad , \quad v, u \in \mathcal{P}' \quad , \quad f \in \mathcal{P}$$

Avec l'opérateur θ_0 défini par

$$\theta_0 f(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

et dont la transposée se définit par $u \rightarrow x^{-1}u$, on peut écrire (1.7) sous la forme : [4]

$$(1.8) \quad u_0 B_n^{(1)}(u)(x) = u \theta_0 B_{n+1}(x), \quad n \geq 0.$$

PROPOSITION 1.1. — On a :

$$(1.9) \quad \mathcal{L}_n^{(1)}(u) = u_0(x \mathcal{L}_{n+1})u^{-1}, \quad n \geq 0.$$

Par définition, on a :

$$\langle \mathcal{L}_n^{(1)}(u), B_m^{(1)}(u) \rangle = \delta_{n,m}, \quad n, m \geq 0$$

c'est-à-dire :

$$\langle \mathcal{L}_n^{(1)}(u), u \theta_0 B_{m+1} \rangle = u_0 \delta_{n,m}$$

soit :

$$\langle \mathcal{L}_n^{(1)}(u)u, \theta_0 B_{m+1} \rangle = u_0 \delta_{n,m}$$

et

$$(1.10) \quad \langle x^{-1}(\mathcal{L}_n^{(1)}(u)u), B_{m+1} \rangle = u_0 \delta_{n,m}$$

En particulier :

$$\langle x^{-1}(\mathcal{L}_n^{(1)}(u)u), B_{n+1} \rangle = u_0; \quad \langle x^{-1}(\mathcal{L}_n^{(1)}(u)u), B_m \rangle = 0, \quad m \geq n+2$$

D'après le lemme 1.1, cela implique :

$$x^{-1}(\mathcal{L}_n^{(1)}(u)u) = \sum_{\nu=0}^{n+1} \lambda_\nu^n \mathcal{L}_\nu$$

D'où

$$x^{-1}(\mathcal{L}_n^{(1)}(u)u), B_m \rangle = \lambda_m^n, \quad 0 \leq m \leq n+1$$

ce qui entraîne, d'après (1.10) et $\langle x^{-1}(\mathcal{L}_n^{(1)}(u)u), 1 \rangle = 0$

$$\lambda_m^n = 0, \quad 0 \leq m \leq n$$

Finalement :

$$x^{-1}(\mathcal{L}'_n(u)u) = u_0 \mathcal{L}_{n+1}$$

d'où (1.9).

Considérons maintenant la suite $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ avec $Q_n(x) = B'_{n+1}(x)/n + 1$. Notons $\{\mathcal{L}'_n\}_{n \geq 0}$ la suite duale de la suite $\{Q_n\}_{n \geq 0}$.

PROPOSITION 1.2. — *On a :*

$$(1.11) \quad D\mathcal{L}'_n = -(n+1)\mathcal{L}_{n+1} \quad , \quad n \geq 0.$$

Par définition, on peut écrire :

$$\langle \mathcal{L}'_n, Q_m \rangle = \delta_{n,m} \quad , \quad n, m \geq 0$$

c'est-à-dire :

$$\langle \mathcal{L}'_n, B'_{m+1} \rangle = (m+1)\delta_{n,m}$$

ou

$$- \langle D\mathcal{L}'_n, B_{m+1} \rangle = (m+1)\delta_{n,m}$$

d'où, d'après le lemme 1.1 :

$$D\mathcal{L}'_n = \sum_{\nu=0}^{n+1} \lambda_\nu^n \mathcal{L}_\nu$$

avec

$$\lambda_\nu^n = 0, \quad 0 \leq \nu \leq n, \quad \lambda_{n+1}^n = -(n+1).$$

2. L'orthogonalité de dimension d

Dans sa thèse [5], J. VAN ISEGHEM a introduit une notion d'orthogonalité vectorielle qu'on peut présenter de la façon suivante : soit d formes linéaires sur $\mathcal{P}, \Gamma^1, \Gamma^2, \dots, \Gamma^d$ ($d \geq 1$) et soit $\{B_n\}_{n \geq 0}$ une suite de polynômes.

DÉFINITION 2.1. — *On dit que la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ est orthogonale de dimension d par rapport à $\Gamma = (\Gamma^1, \dots, \Gamma^d)$ lorsqu'elle vérifie :*

$$(2.1) \quad \Gamma^\alpha(x^m B_n(x)) = 0 \quad , \quad n \geq md + \alpha \quad , \quad m \geq 0$$

$$(2.2) \quad \Gamma^\alpha(x^m B_{md+\alpha-1}(x)) \neq 0 \quad , \quad m \geq 0$$

pour chaque $1 \leq \alpha \leq d$

Remarques.—

1. La suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ est alors nécessairement libre et on peut toujours la normaliser. Elle est alors unique.
2. On dira que la fonctionnelle Γ est de dimension d lorsque $\Gamma \in (\mathcal{P}')^d$.
3. D'après le lemme 1.1, on a :

$$(2.3) \quad \Gamma^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} \lambda_\nu^\alpha \mathcal{L}_\nu, \quad \lambda_{\alpha-1}^\alpha \neq 0, \quad 1 \leq \alpha \leq d,$$

c'est-à-dire, de façon équivalente :

$$(2.4) \quad \mathcal{L}_\nu = \sum_{\alpha=1}^d \zeta_\alpha^\nu \Gamma^\alpha, \quad \zeta_{\nu+1}^\nu \neq 0, \quad 0 \leq \nu \leq d-1$$

4. Lorsque $d = 1$, on retrouve bien la notion habituelle d'orthogonalité régulière.

DÉFINITION 2.2.— *On dit que la fonctionnelle Γ de dimension d est régulière s'il existe une suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ vérifiant (2.1) et (2.2).*

Le critère suivant est donné dans [5] :

LEMME 2.1.— *Pour que la fonctionnelle Γ de dimension d soit régulière, il faut et il suffit que les déterminants suivants soient non nuls :*

$$(2.5) \quad H_{md+\nu} = \begin{vmatrix} \Gamma_0 \Gamma_1 & \dots & \Gamma_{md+\nu-1} \\ \Gamma_1 \Gamma_2 & \dots & \Gamma_{md+\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Gamma_{m-1} \Gamma_m & \dots & \Gamma_{m-1+md+\nu-1} \\ \Gamma_m^1 \Gamma_{m+1}^1 & \dots & \Gamma_{(m+1)d+\nu-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \Gamma_m^\nu \Gamma_{m+1}^\nu & \dots & \Gamma_{(m+1)d+\nu-1}^\nu \end{vmatrix} \neq 0, \quad m \geq 0, 0 \leq \nu \leq d-1$$

On a posé $\Gamma_n = \Gamma(x^n)$, $n \geq 0$. Chaque déterminant $H_{md+\nu}$ est d'ordre $md + \nu$ si $md + \nu \geq 1$. Par convention $H_0 = 1$. Chacune des m premières lignes du déterminant (2.5) représente en fait d lignes. On a :

$$(2.6) \quad H_{md+\nu} = \prod_{\mu=0}^{m-1} \prod_{\alpha=1}^d \Gamma^\alpha(x^\mu B_{\mu d + \alpha - 1}(x)) \prod_{\alpha=1}^\nu \Gamma^\alpha(x^m B_{md + \alpha - 1}(x)),$$

$$m \geq 1, 1 \leq \nu \leq d-1$$

L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux

$$(2.7) \quad H_{md} = \prod_{\mu=0}^{m-1} \prod_{\alpha=1}^d \Gamma^\alpha(x^\mu B_{\mu d + \alpha - 1}(x)), \quad m \geq 1$$

$$(2.8) \quad H_\nu = \prod_{\alpha=1}^d \Gamma^\alpha(B_{\alpha-1}), \quad 1 \leq \nu \leq d$$

$$(2.9) \quad \Gamma^\alpha(x^n B_{nd + \alpha - 1}(x)) = H_{nd + \alpha} / H_{nd + \alpha - 1}, \quad n \geq 0, \quad 1 \leq \alpha \leq d$$

Les déterminants (2.5) généralisent les déterminants de Hankel qu'on retrouve lorsque $d = 1$.

THÉORÈME 2.1. — *Pour chaque suite normalisée $\{B_n\}_{n \geq 0}$ les énoncés suivants sont équivalents :*

a) *La suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ vérifie une récurrence d'ordre $d + 1$ ($d \geq 1$) :*
(2.10)

$$B_{m+d+1}(x) = (x - \beta_{m+d})B_{m+d}(x) - \sum_{\nu=0}^{d-1} \gamma_{m+d-\nu}^{d-1-\nu} B_{m+d-1-\nu}(x), \quad m \geq 0$$

avec les conditions initiales

$$(2.11) \quad B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \beta_0 \quad \text{et si } d \geq 2 :$$

$$(2.12) \quad B_n(x) = (x - \beta_{n-1})B_{n-1}(x) - \sum_{\nu=0}^{n-2} \gamma_{n-1-\nu}^{d-1-\nu} B_{n-2-\nu}(x), \quad 2 \leq n \leq d$$

et les conditions de régularité :

$$(2.13) \quad \gamma_{m+1}^0 \neq 0, \quad m \geq 0$$

b) *La suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ est orthogonale de dimension d par rapport à $\Gamma = (\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{d-1})$.*

c) *Pour chaque $(n, \nu), n \geq 0, 0 \leq \nu \leq d - 1$, il existe d polynômes $\Lambda^\mu(n, \nu), 0 \leq \mu \leq d - 1$ tels que :*

$$(2.14) \quad \mathcal{L}_{nd+\nu} = \sum_{\mu=0}^{d-1} \mathcal{L}_\mu(\Lambda^\mu(n, \nu)), \quad n \geq 0, \quad 0 \leq \nu \leq d - 1$$

et vérifiant

$$\begin{aligned} \deg \Lambda^\nu(n, \nu) &= n & , & \quad 0 \leq \nu \leq d - 1 \\ \deg \Lambda^\mu(n, \nu) &\leq n & , & \quad 0 \leq \mu \leq \nu - 1 \quad \text{si } 1 \leq \nu \leq d - 1 \\ \deg \Lambda^\mu(n, \nu) &\leq n - 1 & , & \quad \nu + 1 \leq \mu \leq d - 1 \quad \text{si } 0 \leq \nu \leq d - 2 \end{aligned}$$

a) \Rightarrow b). Dans (1.1), changeons n en $n + d - 1$ et écrivons

$$(2.15) \quad xB_{n+d}(x) = B_{n+d+1}(x) + \beta_{n+d}B_{n+d}(x) + \sum_{\nu=0}^{n+d-1} \chi_{n+d-1,\nu}B_{\nu}(x), n \geq 0.$$

D'après l'hypothèse, on a

$$\begin{aligned} \chi_{n+d-1,\nu} &= 0, \quad 0 \leq \nu \leq n-1, \quad n \geq 1 \\ \chi_{n+d-1,n+\nu} &= \gamma_{n+1+\nu}^{\nu}, \quad 0 \leq \nu \leq d-1, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire, selon (1.3) :

$$(2.16) \quad \mathcal{L}_{\nu}(xB_{n+d}(x)) = 0, \quad 0 \leq \nu \leq n-1, \quad n \geq 1$$

$$(2.17) \quad \mathcal{L}_{n+\nu}(xB_{n+d}(x)) = \gamma_{n+1+\nu}^{\nu}, \quad 0 \leq \nu \leq d-1, \quad n \geq 0$$

De plus, selon (2.13) et (2.16), on a

$$(2.18) \quad \mathcal{L}_n(xB_{n+d}(x)) \neq 0, \quad n \geq 0$$

Montrons qu'on a :

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{\nu}(x^m B_{md+\nu}(x)) &\neq 0, \quad m \geq 0 \\ \mathcal{L}_{\nu}(x^m B_n(x)) &\neq 0, \quad n \geq md + \nu + 1, \quad m \geq 0 \end{aligned}$$

pour chaque $0 \leq \nu \leq d-1$.

Fixons $0 \leq \nu \leq d-1$. Par définition de la suite duale, les relations (2.19) sont vérifiées pour $m = 0$ et d'après (2.16) et (2.18) pour $m = 1$. Supposons qu'elles soient vérifiées jusqu'à l'indice $m \geq 1$. Alors de (2.15) où on change n en $md + \nu + 1 + n$, on a

$$\mathcal{L}_{\nu}(x^{m+1}B_{(m+1)d+\nu+1+n}(x)) = 0, \quad n \geq 0$$

et de (2.15) où on change n en $md + \nu$, on trouve :

$$\mathcal{L}_{\nu}(x^{m+1}B_{(m+1)d+\nu}(x)) = \chi_{(m+1)d+\nu-1,md+\nu} \mathcal{L}_{\nu}(x^m B_{md+\nu}(x)).$$

Or d'après l'hypothèse de régularité $\chi_{md+\nu+d-1,md+\nu} \neq 0$ d'où le résultat.

L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux

b) \Rightarrow c). Considérons *a priori* les formes suivantes :

$$\mathcal{F}_{n,\nu} = \sum_{\mu=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{d-1} \tau_{\mu,k}^{n,\nu} \mathcal{L}_k(B_{\mu}) + \sum_{k=0}^{\nu} \tau_{n,k}^{n,\nu} \mathcal{L}_k(B_n)$$

pour chaque $n \geq 1, 0 \leq \nu \leq d-1$.

D'après l'hypothèse, on a

$$\mathcal{F}_{n,\nu}(B_m) = 0, \quad m \geq nd + \nu + 1.$$

Ensuite, on peut déterminer de proche en proche de façon unique les coefficients $\tau_{n,k}^{n,\nu}$ de sorte que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n,\nu}(B_m) &= 0, \quad 0 \leq m \leq nd + \nu - 1 \\ \mathcal{F}_{n,\nu}(B_{nd+\nu}) &= 1. \end{aligned}$$

En particulier, on a :

$$(2.20) \quad 1 = \tau_{n,\nu}^{n,\nu} \mathcal{L}_{\nu}(B_n B_{nd+\nu}).$$

Il en résulte que :

$$\mathcal{F}_{n,\nu} = \mathcal{L}_{nd+\nu}.$$

Compte-tenu de (2.20), on a tout de suite le résultat annoncé.

c) \Rightarrow b). Montrons que les relations (2.19) sont vérifiées.

Écrivons (2.14) sous la forme :

$$(2.21) \quad \mathcal{L}^{\nu}(\Lambda^{\nu}(m, \nu)) = \mathcal{L}_{md+\nu} - \sum_{\mu \neq \nu} \mathcal{L}_{\mu}(\Lambda^{\mu}(m, \nu)).$$

Montrons d'abord que $\mathcal{L}_0(xB_{d+n}(x)) = 0, n \geq 1$ et $\mathcal{L}_0(xB_d(x)) \neq 0$. Or de (2.21), on a :

$$\mathcal{L}_0(\Lambda^0(1, 0)B_{d+n}(x)) = \mathcal{L}_d(B_{d+n}) - \sum_{\mu=1}^{d-1} \mathcal{L}_{\mu}(\Lambda^{\mu}(1, 0)B_{d+n}) = 0$$

pour $n \geq 1$, d'où le résultat puisque $\deg \Lambda^0(1, 0) = 1$.

Ensuite, on a :

$$\mathcal{L}_0(\Lambda^0(1, 0)B_d) = \mathcal{L}_d(B_d) = 1, \text{ soit } \mathcal{L}_0(xB_d(x)) \neq 0.$$

Pour $1 \leq \nu \leq d-1$, on a de (2.21) :

$$\mathcal{L}_\nu(\Lambda^\nu(1, \nu)B_{d+\nu+n}) = \mathcal{L}_{d+\nu}(B_{d+\nu+n}) - \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \mathcal{L}_\mu(\Lambda^\mu(1, \nu)B_{d+\nu+n}) = 0$$

pour $n \geq 1$ en procédant par récurrence et pour $n = 0$:

$$\mathcal{L}_\nu(\Lambda^\nu(1, \nu)B_{d+\nu}) = \mathcal{L}_{d+\nu}(B_{d+\nu}) = 1$$

Les relations (2.19) sont vérifiées pour $m = 0, 1$. Supposons qu'elles soient vérifiées jusqu'à l'indice $m \geq 1$. Alors de (2.21), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu(\Lambda^\nu(m+1, \nu)B_{(m+1)d+\nu+n}) &= 0, \quad n \geq 1 \\ \mathcal{L}_\nu(\Lambda^\nu(m+1, \nu)B_{(m+1)d+\nu}) &= 1. \end{aligned}$$

Donc les relations (2.19) sont vérifiées pour l'indice $m+1$. D'où le résultat.

b) \Rightarrow a). La démonstration est faite dans [5].

Remarques. — Ce résultat constitue la généralisation naturelle du théorème de Shohat-Favard. Lorsque l'un quelconque des énoncés a), b), c) est réalisé, la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ est orthogonale de dimension d par rapport à $\Gamma = (\Gamma^1, \dots, \Gamma^d)$ où :

$$\Gamma^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} \lambda_\nu^\alpha \mathcal{L}_\nu, \quad \lambda_{\alpha-1}^\alpha \neq 0, \quad 1 \leq \alpha \leq d.$$

On a les relations :

$$(2.22) \quad \gamma_{nd+\alpha}^0 = \frac{\Gamma^\alpha(x^{n+1}B_{(n+1)d+\alpha-1}(x))}{\Gamma^\alpha(x^n B_{nd+\alpha-1}(x))}, \quad n \geq 0, \quad 1 \leq \alpha \leq d$$

$$(2.23) \quad \frac{\Gamma^\alpha(x^{n+1}B_{(n+1)d+\alpha-1}(x))}{\Gamma^\alpha(B_{\alpha-1})} = \prod_{\nu=0}^n \gamma_{\nu d+\alpha}^0, \quad n \geq 0, \quad 1 \leq \alpha \leq d$$

Lorsque $\alpha = d$ dans (2.23), on a :

$$(2.24) \quad \Gamma^d(x^n B_{(n+1)d-1}(x)) = \prod_{\nu=0}^n \gamma_{\nu d}^0, \quad n \geq 0$$

où, par définition, on a posé :

$$(2.25) \quad \gamma_0^0 = \Gamma^d(B_{d-1}).$$

Les éléments de (2.12) sont donnés par :

(2.26)

$$\beta_\nu = \mathcal{L}_\nu(xB_\nu(x)) \quad , \quad 0 \leq \nu \leq d-1$$

$$\gamma_\alpha^{\alpha+\mu} = \mathcal{L}_{\alpha-1}(xB_{d-1-\mu}(x)) \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq d-1-\mu \quad , \quad 0 \leq \mu \leq d-2$$

DÉFINITION 2.3. — Soit $d, s \geq 1$ entiers et $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'$. On dit que la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ est strictement s/d orthogonale par rapport à \mathcal{L} si elle vérifie :

$$(2.27) \quad \mathcal{L}(B_m B_n) = 0 \quad , \quad n \geq md + s \quad , \quad m \geq 0$$

$$(2.28) \quad \mathcal{L}(B_m B_{md+s-1}) \neq 0 \quad , \quad m \geq 0$$

Une telle suite est nécessairement libre et on peut donc toujours la normaliser. Lorsque $s = 1$, on retrouve la notion de suite strictement $1/d$ orthogonal [6]. Lorsque $d = 1$, cela signifie que la suite est strictement quasi-orthogonale d'ordre $s - 1$ par rapport à \mathcal{L} .

Si la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ est orthogonale de dimension d par rapport à Γ , alors elle est strictement α/d orthogonale par rapport à Γ^α , $1 \leq \alpha \leq d$ et réciproquement.

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 2.2. — Pour chaque suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ orthogonale de dimension d par rapport à Γ , les énoncés suivants sont équivalents :

a) il existe $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'$ et $s \geq 1$ entier tels que :

$$(2.29) \quad \mathcal{L}(B_{s-1}) \neq 0 \quad , \quad \mathcal{L}(B_n) = 0 \quad , \quad n \geq s.$$

b) Il existe $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'$, $s \geq 1$ entier et d polynômes Φ^α , $1 \leq \alpha \leq d$ tels que :

$$(2.30) \quad \mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^d \Gamma^\alpha(\Phi^\alpha .)$$

avec les propriétés suivantes : si $s - 1 = qd + r$, $0 \leq r \leq d - 1$, on a :

$$\deg \Phi^{r+1} = q$$

$$\deg \Phi^\alpha \leq q \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq r \quad \text{si} \quad 1 \leq r \leq d - 1$$

$$\deg \Phi^\alpha \leq q - 1 \quad , \quad r + 2 \leq \alpha \leq d \quad \text{si} \quad 0 \leq r \leq d - 2$$

c) Il existe $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'$ et $s \geq 1$ entier tels que la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ soit strictement s/d orthogonale par rapport à \mathcal{L} .

a) \Rightarrow b). D'après le lemme 1.1, il existe $\lambda_\nu \in \mathcal{C}, 0 \leq \nu \leq s-1$, tels que

$$\mathcal{L} = \sum_{\nu=0}^{s-1} \lambda_\nu \mathcal{L}_\nu \quad , \quad \lambda_{s-1} \neq 0$$

c'est-à-dire, puisque $s-1 = qd+r$:

$$\mathcal{L} = \sum_{\mu=0}^{q-1} \sum_{\varrho=0}^{d-1} \lambda_{\mu d+\varrho} \mathcal{L}_{\mu d+\varrho} + \sum_{\varrho=0}^r \lambda_{qd+\varrho} \mathcal{L}_{qd+\varrho}$$

d'où le résultat, d'après le point c) du théorème 2.1.

b) \Rightarrow c). D'après (2.30), on a, compte-tenu des propriétés des Φ^α :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x^m B_n(x)) &= 0 \quad , \quad n \geq md+s \\ \mathcal{L}(x^m B_{md+s-1}(x)) &= \Gamma^{r+1}(x^m \Phi^{r+1}(x) B_{md+s-1}(x)) \neq 0 \end{aligned}$$

c) \Rightarrow a). C'est évident.

3. La quasi-orthogonalité de dimension d

DÉFINITION 3.1. — *On dit que la suite libre $\{B_n\}_{n \geq 0}$ est quasi-orthogonale d'ordre s et de dimension $d \geq 1$ par rapport à Γ , si pour chaque $1 \leq \alpha \leq d$, il existe des entiers $s_\alpha \geq 0$ et $\sigma_\alpha \geq s_\alpha$ tels que :*

$$(3.1) \quad \Gamma^\alpha(x^m B_n(x)) = 0 \quad , \quad n \geq (m+s_\alpha)d + \alpha \quad , \quad m \geq 0$$

$$(3.2) \quad \Gamma^\alpha(x^{\sigma_\alpha - s_\alpha} B_{\sigma_\alpha d + \alpha - 1}(x)) \neq 0$$

pour chaque $1 \leq \alpha \leq d$. On pose $s = \max_{1 \leq \alpha \leq d} s_\alpha$.

Remarques. —

Lorsque $d = 1$, on retrouve la notion habituelle de quasi-orthogonalité d'ordre s [7] [9].

Lorsque $s = 0$, c'est-à-dire $s_\alpha = 0, 1 \leq \alpha \leq d$, la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ est orthogonale de dimension d par rapport à Γ non nécessairement régulière : c'est une définition plus générale que celle donnée dans le paragraphe 1.

L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux

LEMME 3.1. — Pour Γ et s donnés, le système d'entiers s_α , $1 \leq \alpha \leq d$ est unique.

Supposons qu'il existe un autre système d'entiers s'_α et $\sigma'_\alpha \geq s'_\alpha$ tels que $s = \max_{1 \leq \alpha \leq d} s'_\alpha$ et vérifiant :

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \Gamma^\alpha(x^m B_n(x)) &= 0 \quad , \quad n \geq (m + s'_\alpha)d + \alpha \quad , \quad m \geq 0 \\ \Gamma^\alpha(x^{\sigma'_\alpha - s'_\alpha} B_{\sigma'_\alpha d + \alpha - 1}(x)) &\neq 0 \end{aligned}$$

pour chaque $1 \leq \alpha \leq d$.

Il suffit de montrer que $s'_\alpha \geq s_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq d$, car ensuite par échange du rôle de s'_α et s_α , on a $s_\alpha \geq s'_\alpha$.

Supposons qu'il existe un indice α_0 tel que

$$s'_{\alpha_0} < s_{\alpha_0} \leq s.$$

D'après (3.3) :

$$(3.4) \quad \Gamma^{\alpha_0}(x^m B_{(m+s'_{\alpha_0})d+\alpha_0+\nu}(x)) = 0 \quad , \quad m, \nu \geq 0.$$

D'après (3.2), il existe $m_{\alpha_0} \geq 0$ tel que :

$$\Gamma^{\alpha_0}(x^{m_{\alpha_0}} B_{(m_{\alpha_0}+s'_{\alpha_0})d+\alpha_0+1}(x)) \neq 0.$$

Dans (3.4), prenons $\nu = (s_{\alpha_0} - s'_{\alpha_0})d - 1$ et $m = m_{\alpha_0}$:

$$\Gamma^{\alpha_0}(x^{m_{\alpha_0}} B_{(m_{\alpha_0}+s_{\alpha_0})d+\alpha_0-1}(x)) \neq 0.$$

C'est contradictoire, d'où le résultat.

LEMME 3.2. — Une suite libre $\{B_n\}_{n \geq 0}$ vérifiant (3.1) et (3.2) ne peut par être quasi-orthogonale d'ordre $s - 1$ et de dimension d par rapport à Γ .

Car si c'était le cas, on aurait :

$$(3.5) \quad \Gamma^\alpha(x^m B_{(m+\tilde{s}_\alpha)d+\alpha+\nu}(x)) = 0 \quad , \quad m, \nu \geq 0 \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq d.$$

avec $s - 1 = \max_{1 \leq \alpha \leq d} \tilde{s}_\alpha$.

En particulier, pour $\nu \rightarrow \nu + d$:

$$\Gamma^\alpha(x^m B_{(m+\tilde{s}_\alpha+1)d+\alpha+\nu}(x)) = 0 \quad , \quad m, \nu \geq 0 \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq d.$$

Cela entraîne, d'après le lemme précédent :

$$\tilde{s}_\alpha + 1 = s_\alpha \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq d.$$

Prenons alors $\nu = d - 1$ dans (3.5) :

$$\Gamma^\alpha(x^m B_{(m+s_\alpha)d+\alpha-1}(x)) = 0 \quad , \quad m \geq 0 \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq d$$

contrairement à l'hypothèse (3.2).

DÉFINITION 3.2. — *On dit que la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ est strictement quasi-orthogonale d'ordre s et de dimension d par rapport à Γ si elle vérifie :*

$$(3.6) \quad \Gamma^\alpha(B_m B_n) = 0 \quad , \quad n \geq (m + s_\alpha)d + \alpha \quad , \quad m \geq 0$$

$$(3.7) \quad \Gamma^\alpha(B_m B_{(m+s_\alpha)d+\alpha-1}(x)) \neq 0 \quad , \quad m \geq 0$$

pour chaque $1 \leq \alpha \leq d$, avec $s = \max_{1 \leq \alpha \leq d} s_\alpha$.

Remarques. — Une telle suite est nécessairement libre.

Dans les définitions 3.1 et 3.2, la fonctionnelle Γ n'est pas nécessairement régulière.

Regardons maintenant dans quelle condition une suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ orthogonale de dimension d par rapport à Γ peut être quasi-orthogonale d'ordre s et de dimension \tilde{d} par rapport à une autre fonctionnelle $\tilde{\Gamma}$.

PROPOSITION 3.1. — *Soit $\{B_n\}_{n \geq 0}$ une suite orthogonale de dimension d par rapport à Γ . Supposons qu'il existe $\tilde{\Gamma}$ de dimension \tilde{d} telle que la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ soit quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à $\tilde{\Gamma}$. Alors nécessairement, on a $\tilde{d} \geq d$.*

Par hypothèse, on a :

$$(3.8) \quad \tilde{\Gamma}^\beta(x^m B_n(x)) = 0 \quad , \quad n \geq (m + s_\beta)\tilde{d} + \beta$$

Il existe $\sigma_\beta \geq s_\beta$ tel que :

$$(3.9) \quad \tilde{\Gamma}^\beta(x^{\sigma_\beta - s_\beta} B_{\sigma_\beta \tilde{d} + \beta - 1}(x)) \neq 0$$

pour chaque $1 \leq \beta \leq \tilde{d}$.

L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux

De (3.8), on a en particulier :

$$\tilde{\Gamma}^\beta(B_n) = 0 \quad , \quad n \geq s_\beta \tilde{d} + \beta \quad , \quad 1 \leq \beta \leq \tilde{d}.$$

En vertu de (3.9), il existe $0 \leq \nu_\beta \leq s_\beta \tilde{d} + \beta - 1$ tel que :

$$(3.10) \quad \tilde{\Gamma}^\beta(B_{\nu_\beta}) \neq 0 \quad , \quad \tilde{\Gamma}^\beta(B_n) = 0 \quad , \quad n \geq \nu_\beta + 1.$$

Écrivons

$$\nu_\beta = q_\beta d + r_\beta \quad , \quad 0 \leq r_\beta \leq d - 1$$

D'après le théorème 2.2, b), il existe $d \times \tilde{d}$ polynômes $\Phi^{\alpha,\beta}$, $1 \leq \alpha \leq d$, $1 \leq \beta \leq \tilde{d}$ tels que :

$$(3.11) \quad \tilde{\Gamma}^\beta = \sum_{\alpha=1}^d \Gamma^\alpha(\Phi^{\alpha,\beta} \cdot) \quad , \quad 1 \leq \beta \leq \tilde{d}$$

où

$$\deg \Phi^{r_\beta+1,\beta} = q_\beta$$

$$\deg \Phi^{\alpha,\beta} \leq q_\beta \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq r_\beta \quad \text{si} \quad 1 \leq r_\beta \leq d - 1$$

$$\deg \Phi^{\alpha,\beta} \leq q_\beta - 1 \quad , \quad r_\beta + 2 \leq \alpha \leq d \quad \text{si} \quad 0 \leq r_\beta \leq d - 2$$

Définissons μ_β par :

$$(3.12) \quad s_\beta \tilde{d} + \beta - 1 = q_\beta d + r_\beta + \mu_\beta$$

Supposons maintenant que $1 \leq \tilde{d} < d$.

Par division euclidienne, on a :

$$\mu_\beta = m_\beta(d - \tilde{d}) + n_\beta \quad , \quad 0 \leq n_\beta \leq d - \tilde{d} - 1.$$

D'après (3.12), on a pour chaque $m \geq 0$:

$$(m_\beta + m + s_\beta) \tilde{d} + \beta - 1 + m(d - \tilde{d}) - n_\beta = (m_\beta + m + q_\beta)d + r_\beta = P_m.$$

Pour tous les indices m tels que $m(d - \tilde{d}) - n_\beta \geq 1$, on a

$$\tilde{\Gamma}^\beta(x^{m_\beta+m} B_{P_m}(x)) = 0 \quad 1 \leq \beta \leq \tilde{d}.$$

Mais d'autre part, on a aussi de (3.11) :

$$\Gamma^\beta(x^{m_\beta+m} B_{P_m}(x)) = \Gamma^{r_\beta+1}(x^{m_\beta+m} \Phi^{r_\beta+1,\beta}(x) B_{P_m}(x)) \neq 0$$

c'est contradictoire et donc nécessairement $\tilde{d} \geq d$.

Étudions plus précisément le cas où $\tilde{d} \geq d$. On a toujours (3.11) et (3.12).
On a alors :

$$\mu_\beta = 0 \quad 1 \leq \beta \leq \tilde{d}.$$

Car soit $m\tilde{d} = \tilde{P}_m d + \theta_m, 0 \leq \theta_m \leq d - 1, m \geq 0$.

On peut écrire :

$$(m + s_\beta)\tilde{d} + \beta - 1 = (\tilde{P}_m + q_\beta)d + \theta_m + r_\beta + \mu_\beta.$$

Si $\mu_\beta \geq 1$, on a de (3.11) pour chaque $m \geq 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^\beta(x^m B_{(m+s_\beta)\tilde{d}+\beta-1}(x)) &= \sum_{\alpha=1}^d \Gamma^\alpha(x^m \Phi^{\alpha,\beta}(x) B_{(\tilde{P}_m+q_\beta)d+\theta_m+r_\beta+\mu_\beta}(x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(car $\tilde{P}_m \geq m$) contrairement à l'hypothèse (3.9), d'où la conclusion annoncée.

Distinguons les deux cas :

a) $\tilde{d} > d$. On a :

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \sigma_\beta &= s_\beta \\ \tilde{\Gamma}^\beta(x^{\sigma-s_\beta} B_{\sigma\tilde{d}+\beta-1}(x)) &= 0 \quad , \quad \sigma \geq s_\beta + 1. \end{aligned}$$

Car on a :

$$\Gamma^\alpha(x^m \Phi^{\alpha,\beta}(x) B_{\tilde{P}_m+q_\beta)d+\theta_m+r_\beta}(x)) = 0 \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq d$$

si $m \geq 1$: en effet, si $\tilde{P}_m > m$, c'est évident et si $\tilde{P}_m = m$ alors $m(\tilde{d} - d) = \theta_m \geq 1$.

Mais pour $m = 0$, on a :

$$\tilde{\Gamma}^\beta(B_{s_\beta d+\beta-1}) = \Gamma^{r_\beta+1}(\Phi^{r_\beta+1,\beta}(x) B_{q_\beta d+r_\beta}) \neq 0$$

b) $\tilde{d} = d$. On a de (3.12) :

$$(3.14) \quad \begin{aligned} q_\beta &= s_\beta \\ 1 &\leq \beta \leq d \\ r_\beta &= \beta - 1 \end{aligned}$$

L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux

de sorte que :

$$\tilde{\Gamma}^\beta(x^m B_{(m+s_\beta)d+\beta-1}(x)) = \Gamma^\beta(x^m \Phi^{\beta,\beta}(x) B_{(m+s_\beta)d+\beta-1}(x)) \neq 0$$

pour chaque $m \geq 0$.

Dans ce cas, la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ est nécessairement strictement quasi-orthogonale d'ordre s .

PROPOSITION 3.2. — *Si la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ orthogonale de dimension d par rapport à Γ vérifie de plus : il existe $\tilde{\Gamma}$ de dimension \tilde{d} telle que la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ soit quasi-orthogonale d'ordre $s = \max_\beta s_\beta$ par rapport à $\tilde{\Gamma}$ avec la condition*

$$\exists \sigma_\beta > s_\beta \quad \text{tel que} \quad \tilde{\Gamma}^\beta(x^{\sigma_\beta - s_\beta} B_{\sigma_\beta \tilde{d} + \beta - 1}(x)) \neq 0 \quad , \quad 1 \leq \beta \leq \tilde{d} \quad ,$$

alors nécessairement $\tilde{d} = d$ et la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ est strictement orthogonale d'ordre s par rapport à Γ .

Lorsque $\tilde{d} = d$, on peut préciser à l'aide des énoncés suivants :

THÉORÈME 3.1. — *Pour chaque suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ orthogonale de dimension d par rapport à Γ , les énoncés suivants sont équivalents :*

a) *Il existe $\tilde{\Gamma}$ de dimension d tel que la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ soit quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à $\tilde{\Gamma}$.*

b) *Il existe $\tilde{\Gamma}$ de dimension d et $s_\beta \geq 0, \sigma_\beta \geq s_\beta$ entiers, $1 \leq \beta \leq d$ tels que :*

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^\beta(B_n) &= 0 \quad , \quad n \geq s_\beta d + \beta \\ & , \quad 1 \leq \beta \leq d \\ \tilde{\Gamma}^\beta(x^{\sigma_\beta - s_\beta} B_{\sigma_\beta d + \beta - 1}(x)) &\neq 0 \end{aligned}$$

c) *Il existe $\tilde{\Gamma}$ de dimension d et d^2 polynômes $\Phi^{\alpha,\beta}$, $1 \leq \alpha, \beta \leq d$ tels que :*

$$(3.15) \quad \tilde{\Gamma}^\beta = \sum_{\alpha=1}^d \Gamma^\alpha(\Phi^{\alpha,\beta} \cdot) \quad , \quad 1 \leq \beta \leq d$$

où $\deg \Phi^{\beta,\beta} = s_\beta$

$$\begin{aligned} \deg \Phi^{\alpha,\beta} &\leq s_\beta \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq \beta - 1 \quad \text{si} \quad 2 \leq \beta \leq d \\ \deg \Phi^{\alpha,\beta} &\leq s_\beta - 1 \quad , \quad \beta + 1 \leq \alpha \leq d \quad \text{si} \quad 1 \leq \beta \leq d - 1 \end{aligned}$$

d) Il existe $\tilde{\Gamma}$ de dimension d telle que la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ soit strictement quasi-orthogonale d'ordre s par à $\tilde{\Gamma}$.

e) Il existe $\tilde{\Gamma}$ de dimension d et $s_\beta \geq 0$ entiers, $1 \leq \beta \leq d$ tels que :

$$\tilde{\Gamma}^\beta(B_{s_\beta d + \beta - 1}) \neq 0 \quad , \quad \tilde{\Gamma}^\beta(B_n) = 0 \quad , \quad n \geq s_\beta d + \beta$$

pour chaque $1 \leq \beta \leq d$.

a) \Rightarrow b) D'après la définition 3.1.

b) \Rightarrow c) D'après ce qui suit la proposition 3.1.

c) \Rightarrow d) D'après (3.15) et posant $s = \max_{1 \leq \beta \leq d} s_\beta$

d) \Rightarrow a) C'est évident.

d) \Rightarrow e) D'après la définition 3.2.

e) \Rightarrow c) D'après le théorème 2.2.

Remarque. — Lorsque $d = 1$, on retrouve un résultat donné dans [7]. Lorsque $\tilde{d} > d$, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2. — Pour chaque suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ orthogonale de dimension d par rapport à Γ , les énoncés suivants sont équivalents :

a) Il existe $\tilde{\Gamma}$ de dimension $\tilde{d} > d$ telle que la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ soit quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à $\tilde{\Gamma}$.

b) Il existe $\tilde{\Gamma}$ de dimension $\tilde{d} > d$ et $s_\beta \geq 0$ entiers, $1 \leq \beta \leq \tilde{d}$ tels que :

$$\tilde{\Gamma}^\beta(B_{s_\beta \tilde{d} + \beta - 1}) \neq 0 \quad , \quad \tilde{\Gamma}^\beta(B_n) = 0 \quad , \quad n \geq s_\beta \tilde{d} + \beta \quad , \quad 1 \leq \beta \leq \tilde{d}.$$

c) Il existe $\tilde{\Gamma}$ de dimension $\tilde{d} > d$, des entiers $s_\beta \geq 0$, $1 \leq \beta \leq \tilde{d}$ et $d \times \tilde{d}$ polynômes $\Phi^{\alpha, \beta}$, $1 \leq \alpha \leq d$, $1 \leq \beta \leq \tilde{d}$ tels que :

$$(3.16) \quad \tilde{\Gamma}^\beta = \sum_{\alpha=1}^d \Gamma^\alpha(\Phi^{\alpha, \beta} \cdot) \quad , \quad 1 \leq \beta \leq \tilde{d}$$

où si on pose $s_\beta \tilde{d} + \beta - 1 = q_\beta d + r_\beta$, $0 \leq r_\beta \leq d - 1$, on a :

$$\deg \Phi^{r_\beta + 1, \beta} = q_\beta \quad , \quad 1 \leq \beta \leq \tilde{d}$$

$$\begin{aligned} \deg \Phi^{\alpha, \beta} &\leq q_\beta \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq r_\beta \quad \text{si} \quad 1 \leq r_\beta \leq d - 1 \\ \deg \Phi^{\alpha, \beta} &\leq q_\beta - 1 \quad , \quad r_\beta + 2 \leq \alpha \leq d \quad \text{si} \quad 0 \leq r_\beta \leq d - 2 \end{aligned}$$

- a) \Rightarrow b) D'après ce qui suit la proposition 3.1
 b) \Rightarrow c) D'après le théorème 2.2.
 c) \Rightarrow a) D'après (3.16) et posant $s = \max_{1 \leq \beta \leq d} s_\beta$

4. La quasi-orthogonalité stricte (de dimension un)

On peut caractériser le fait pour la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ d'être $s + 1/d$ orthogonale strictement à l'aide de sa suite duale $\{\mathcal{L}_n\}_{n \geq 0}$.

THÉORÈME 4.1. — *Pour que la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ soit strictement $s + 1/d$ orthogonale par rapport à \mathcal{L} , il faut et il suffit qu'il existe $s + 1$ suites $\{\sigma_m\}_{m \geq 0}$, $\sigma_m \neq 0$, $\{\zeta_m^\tau\}_{m \geq 0}$, $0 \leq \tau \leq s - 1$, $d - 1$ tableaux $(\xi_{m,\mu}^\nu)$, $0 \leq \mu \leq m - 1$, $m \geq 1$, $0 \leq \nu \leq d - 2$ et une suite de polynômes normalisés $\{\Phi_m\}_{m \geq 0}$ tels que :*

$$(4.1) \quad \mathcal{L}_s = \sigma_0 \mathcal{L}(\Phi_0 \cdot) + \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_0^\tau \mathcal{L}_\tau$$

$$(4.2) \quad \mathcal{L}_{m d + s} = \sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m \cdot) + \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \mathcal{L}_\tau \\ + \sum_{\nu=0}^{d-2} \sum_{\mu=0}^{m-1} \xi_{m,\mu}^\nu \mathcal{L}_{\mu d + s + 1 + \nu}, \quad m \geq 1.$$

Remarques. — On peut convenir qu'une somme est nulle dès que l'indice supérieur \sum_n est négatif. Lorsque $d = 1$, on a en particulier :

$$(4.3) \quad \mathcal{L}_{m+s} = \sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m \cdot) + \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \mathcal{L}_\tau, \quad m \geq 0,$$

c'est le cas d'une suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ strictement quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à \mathcal{L} .

Lorsque $s = 0$, on retrouve le résultat classique :

$$\mathcal{L}_m = \sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m \cdot)$$

avec $\Phi_m = B_m$ et $\sigma_m = (\mathcal{L}(B_m^2))^{-1}$, $m \geq 0$.

On étudiera plus loin (4.3) lorsque $s \geq 1$.

Les conditions sont suffisantes. Car de (4.1), on a

$$\sigma_0 \mathcal{L}(\Phi_0 B_n) = 0 \quad , \quad n \geq s + 1$$

et de (4.2) :

$$\sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m B_m) = 0 \quad , \quad n \geq md + s + 1 \quad , \quad m \geq 1$$

ce qui entraîne :

$$\mathcal{L}(B_m B_n) = 0 \quad , \quad n \geq md + s + 1 \quad , \quad m \geq 0$$

D'autre part, de (4,1) et (4,2) :

$$1 = \sigma_0 \mathcal{L}(\Phi_0 B_s)$$

$$1 = \sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m B_{md+s})$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{L}(B_m B_{md+s}) \neq 0 \quad , \quad m \geq 0$$

Les conditions sont nécessaires. Supposons que la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ vérifie :

$$\mathcal{L}(B_m B_n) = 0 \quad , \quad n \geq md + s + 1 \quad , \quad m \geq 0$$

$$\mathcal{L}(B_m B_{md+s}) \neq 0 \quad , \quad m \geq 0$$

D'après le lemme 1.1, il existe des coefficients λ_m^ν tels que

$$(4.3) \quad \mathcal{L}(B_m \cdot) = \sum_{\nu=0}^{md+s} \lambda_m^\nu \mathcal{L}_\nu \quad , \quad \lambda_m^{md+s} \neq 0 \quad , \quad m \geq 0$$

Pour $m = 0$, on en déduit :

$$\mathcal{L}_s = (\lambda_0^s)^{-1} \mathcal{L}(B_0 \cdot) - \sum_{\nu=0}^{s-1} (\lambda_0^s)^{-1} \lambda_0^\nu \mathcal{L}_\nu$$

c'est (4.1), avec $\sigma_0 = (\lambda_0^s)^{-1}$, $\zeta_0 = -(\lambda_0^s)^{-1} \lambda_0^\nu$, $0 \leq \nu \leq s - 1$.

Supposons qu'on ait établi la formule (4.2) pour $0 \leq n \leq m$. De (4.3), on a :

$$\mathcal{L}_{(m+1)d+s} = \sigma_{m+1} \mathcal{L}(B_{m+1} \cdot) - \sum_{\nu=0}^{(m+1)d+s-1} \tilde{\lambda}_{m+1}^\nu \mathcal{L}_\nu$$

L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux

avec

$$\sigma_{m+1} = (\lambda_{m+1}^{(m+1)d+s})^{-1} \quad , \quad \tilde{\lambda}_{m+1}^\nu = \sigma_{m+1} \lambda_{m+1}^\nu$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(m+1)d+s} &= \sigma_{m+1} \mathcal{L}(B_{m+1} \cdot) - \sum_{\tau=0}^{s-1} \tilde{\lambda}_{m+1}^\tau \mathcal{L}_\tau - \sum_{\mu=0}^m \tilde{\lambda}_{m+1}^{\mu d+s} \mathcal{L}_{\mu d+s} \\ &- \sum_{\nu=0}^{d-2} \sum_{\mu=0}^{m-1} \tilde{\lambda}_{m+1}^{\mu d+s+1+\nu} \mathcal{L}_{\mu d+s+1+\nu} - \sum_{\nu=0}^{d-2} \tilde{\lambda}_{m+1}^{m d+s+1+\nu} \mathcal{L}_{m d+s+1+\nu} \end{aligned}$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^m \tilde{\lambda}_{m+1}^{\mu d+s} \mathcal{L}_{\mu d+s} &= \sum_{\mu=0}^m \tilde{\lambda}_{m+1}^{\mu d+s} \{ \sigma_\mu \mathcal{L}(\Phi_\mu \cdot) + \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_\mu^\tau \mathcal{L}_\tau \\ &+ \sum_{\nu=0}^{d-2} \sum_{\lambda=0}^{\mu-1} \xi_{\mu,\lambda}^\nu \mathcal{L}_{\lambda d+s+1+\nu} \} \\ &= \sum_{\mu=0}^m \sigma_\mu \tilde{\lambda}_{m+1}^{\mu d+s} \mathcal{L}(\Phi_\mu \cdot) + \sum_{\tau=0}^{s-1} \left(\sum_{\mu=0}^m \tilde{\lambda}_{m+1}^{\mu d+s} \zeta_\mu^\tau \right) \mathcal{L}_\tau \\ &+ \sum_{\nu=0}^{d-2} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \left(\sum_{\mu=\lambda}^{m-1} \tilde{\lambda}_{m+1}^{(\mu+1)d+s} \xi_{\mu+1,\lambda}^\nu \right) \mathcal{L}_{\lambda d+s+1+\nu}. \end{aligned}$$

On en déduit (4.2) pour l'indice $m+1$ en posant :

$$\Phi_{m+1}(x) = B_{m+1}(x) - \sum_{\mu=0}^m \sigma_\mu \lambda_{m+1}^{\mu d+s} \Phi_\mu(x)$$

$$\zeta_{m+1}^\tau = -\tilde{\lambda}_{m+1}^\tau - \sum_{\mu=0}^m \tilde{\lambda}_{m+1}^{\mu d+s} \zeta_\mu^\tau$$

$$\xi_{m+1,\mu}^\nu = -\tilde{\lambda}_{m+1}^{\mu d+s+1+\nu} - \sum_{\lambda=\mu}^{m-1} \tilde{\lambda}_{m+1}^{(\mu+1)d+s} \xi_{\lambda+1,\mu}^\nu \quad , \quad 0 \leq \mu \leq m-1$$

$$\xi_{m+1,m}^\nu = -\tilde{\lambda}_{m+1}^{m d+s+1+\nu}.$$

Remarques. — Ce résultat permettra de caractériser le fait pour une suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ d'être strictement quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à Γ de dimension d .

Pour le moment, traitons seulement le cas ordinaire, celui où $d = 1$.

THÉORÈME 4.2. — *Pour chaque suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ donnée par (1.1), les énoncés suivants sont équivalents :*

a) *Il existe un entier $s \geq 1$ et s suites $\{\zeta_n^\tau\}_{n \geq 0}$, $0 \leq \tau \leq s-1$ définies par les conditions :*

$$(4.4) \quad \chi_{m-1+s, m-1+s} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{m-1}^\tau \chi_{m-1+s, \tau} \neq 0 \quad , \quad m \geq 1$$

$$(4.5) \quad \zeta_m^\tau \{ \chi_{m-1+s, m-1+s} - \sum_{\nu=0}^{s-1} \zeta_{m-1}^\nu \chi_{m-1+s, \nu} \} \\ = (\beta_\tau - \beta_{m-1+s}) \zeta_{m-1}^\tau - \sum_{\mu=0}^{m-1} \zeta_\mu^\tau \delta_{m-1, \mu+1} \\ + \sum_{\mu=0}^{m-1} \zeta_\mu^\tau \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{m-1}^\nu \chi_{\mu+s-1, \nu} - \delta_{m-1+s, \tau+1} \\ + \sum_{\nu=0}^{s-1} \zeta_{m-1}^\nu \delta_{\nu, \tau+1} + \sum_{\nu=0}^{\tau-1} \zeta_{m-1}^\nu \chi_{\tau-1, \nu}, \quad 0 \leq \tau \leq s-1, m \geq 1$$

$$(4.6) \quad \chi_{n+s, m+s} = \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \chi_{n+s, \tau}, \quad n \geq m+1, \quad m \geq 0$$

b) *Il existe une forme \mathcal{L} , un entier $s \geq 1$, $s+1$ suites : $\{\sigma_n\}_{n \geq 0}$, $\sigma_n \neq 0$ et $\{\zeta_n^\tau\}_{n \geq 0}$, $0 \leq \tau \leq s-1$ et une suite de polynômes normalisés $\{\Phi_m\}_{m \geq 0}$ tels que :*

$$\mathcal{L}_{s+m} = \sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m \cdot) + \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \mathcal{L}_\tau, \quad m \geq 0$$

c) *Il existe une forme \mathcal{L} et un entier $s \geq 1$ tels que la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ soit strictement quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à \mathcal{L} .*

d) *Il existe une forme \mathcal{L} , un entier $s \geq 1$ et une suite de polynômes normalisés $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ tels que :*

$$(4.7) \quad \mathcal{L}(\Phi_m B_n) = 0 \quad , \quad s \leq n \leq m+s-1 \quad , \quad m \geq 1$$

$$(4.8) \quad \mathcal{L}(\Phi_m B_{s+m}) \neq 0 \quad , \quad m \geq 0$$

$$(4.9) \quad \mathcal{L}(\Phi_m B_n) = 0 \quad , \quad n \geq m+s+1 \quad , \quad m \geq 0.$$

L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux

a) \Rightarrow b) Considérons les formes suivantes :

$$\mathcal{F}_m = \mathcal{L}_{s+m} - \sum_{r=0}^{s-1} \zeta_m^r \mathcal{L}_r \quad , \quad m \geq 0.$$

On a par construction :

$$\mathcal{F}_m(B_\mu) = -\zeta_m^\mu \quad 0 \leq \mu \leq s-1$$

$$\mathcal{F}_m(B_\mu) = 0 \quad , \quad s \leq \mu \leq m+s-1 \quad , \quad m \geq 1$$

$$\mathcal{F}_m(B_{s+m}) = 1 \quad , \quad \mathcal{F}_m(B_\mu) = 0 \quad , \quad \mu \leq m+s+1 \quad , \quad m \geq 0$$

Ensuite, d'après (4.6) :

$$\mathcal{F}_m(xB_{n+s+1}(x)) = \chi_{n+s, m+s} - \sum_{r=0}^{s-1} \zeta_m^r \chi_{n+s, r} = 0 \quad , \quad n \geq m+1 \quad , \quad m \geq 0$$

et d'après (4.4)

$$\mathcal{F}_m(xB_{m+s+1}(x)) = \chi_{m+s, m+s} - \sum_{r=0}^{s-1} \zeta_m^r \chi_{m+s, r} \neq 0 \quad , \quad m \geq 0.$$

Soit maintenant les formes suivantes :

$$(4.10) \quad \mathcal{H}_m = \mathcal{F}_m - \sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu^m \mathcal{F}_{m-\mu} - \theta_m \mathcal{F}_{m-1}(x) \quad , \quad m \geq 1$$

où λ_μ^m , $1 \leq \mu \leq m$, θ_m , $m \geq 1$ sont arbitraires.

On a :

$$\mathcal{H}_m(B_n) = 0 \quad , \quad n \geq m+s+1$$

d'après les propriétés des formes \mathcal{F}_m .

Déterminons les paramètres λ_μ^m , $1 \leq \mu \leq m$, θ_m par les conditions :

$$\mathcal{H}_m(B_n) = 0 \quad , \quad s \leq n \leq m+s.$$

D'abord θ_m . On a :

$$\mathcal{H}_m(B_{m+s}) = 0 = 1 - \sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu^m \mathcal{F}_{m-\mu}(B_{m+s}) - \theta_m \mathcal{F}_{m-1}(xB_{m+s}(x)).$$

Or

$$\mathcal{F}_{m-\mu}(B_{m+s}) = \chi_{m-1+s, m-\mu+s} - \sum_{r=0}^{s-1} \zeta_{m-\mu}^r \chi_{m-1+s, r} = 0$$

pour $1 \leq \mu \leq m$, d'après (4.6). D'où :

$$(4.11) \quad 1 = \theta_m \left\{ \chi_{m-1+s, m-1+s} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{m-1}^{\tau} \chi_{m-1+s, \tau} \right\}$$

Ensuite :

$$\mathcal{H}_m(B_{\nu+s}) = 0 = \mathcal{F}_m(B_{\nu+s}) - \sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu}^m \mathcal{F}_{m-\mu}(B_{\nu+s}) - \theta_m \mathcal{F}_{m-1}(xB_{\nu+s}(x))$$

pour $0 \leq \nu \leq m-1$.

$$\text{Or } \mathcal{F}_m(B_{\nu+s}) = 0, 0 \leq \nu \leq m-1 \text{ et } \mathcal{F}_{m-\mu}(B_{\nu+s}) = 0$$

si $m-\mu \neq \nu$ de sorte que

$$\lambda_{m-\nu}^m = -\theta_m \mathcal{F}_{m-1}(xB_{\nu+s}(x)) \quad , \quad 0 \leq \nu \leq m-1.$$

Or d'après (1.1), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{m-1}(xB_{\nu+s}(x)) &= \mathcal{F}_{m-1}(xB_{\nu+s+1}) + \beta_{\nu+s} \mathcal{F}_{m-1}(B_{\nu+s}) \\ &\quad + \sum_{\tau=0}^{\nu+s-1} \chi_{\nu+s-1, \tau} \mathcal{F}_{m-1}(B_{\tau}) \\ &= \delta_{m-1, \nu+1} + \beta_{\nu+s} \delta_{m-1, \nu} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \chi_{\nu+s-1, \tau} \zeta_{m-1}^{\tau} \quad , \\ &\quad 0 \leq \nu \leq m-1 \end{aligned}$$

et ainsi :

$$(4.12) \quad \lambda_{m-\nu}^m = -\theta_m \left\{ \delta_{m-1, \nu+1} + \beta_{\nu+s} \delta_{m-1, \nu} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{m-1}^{\tau} \chi_{\nu+s-1, \tau} \right\}$$

pour $0 \leq \nu \leq m-1$.

Considérons maintenant pour chaque $0 \leq n \leq s-1$:

$$\mathcal{H}_m(B_n) = \mathcal{F}_m(B_n) - \sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu}^m \mathcal{F}_{m-\mu}(B_n) - \theta_m \mathcal{F}_{m-1}(xB_n(x)).$$

L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux

Or $\mathcal{F}_{m-\mu}(B_n) = -\zeta_{m-\mu}^n$, $0 \leq n \leq s-1$, $0 \leq \mu \leq m$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{m-1}(xB_n(x)) &= \delta_{m-1+s,n+1} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{m-1}^\tau \delta_{\tau,n+1} - \beta_n \zeta_{m-1}^n \\ &\quad - \sum_{\nu=0}^{n-1} \zeta_{m-1}^\nu \chi_{n-1,\nu} \quad , \quad 0 \leq n \leq s-1. \end{aligned}$$

Compte-tenu de (4.11) et (4.12) et de l'hypothèse (4.5), on vérifie facilement que

$$\mathcal{H}_m(B_n) = 0 \quad , \quad 0 \leq n \leq s-1$$

Pour chaque $m \geq 1$, la forme \mathcal{H}_m est identiquement nulle; il en résulte de (4.10) :

$$\mathcal{F}_m = \sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu^m \mathcal{F}_{m-\mu} + \theta_m \mathcal{F}_{m-1}(x \cdot) \quad , \quad m \geq 1$$

On en déduit, en procédant par récurrence :

$$\mathcal{F}_m = \sigma_m \mathcal{F}_0(\Phi_m \cdot) \quad , \quad m \geq 0$$

avec $\sigma_0 = 1$, $\sigma_m = \prod_{\mu=1}^m \theta_\mu$, $m \geq 1$.

Le point b) est ainsi démontré en posant $\mathcal{L} = \mathcal{F}_0$.

b) \Rightarrow c) D'après le théorème 4.1.

c) \Rightarrow d) Posons

$$\Phi_m = \sum_{\mu=0}^m a_{m,\mu} B_\mu(x) \quad , \quad m \geq 0 \quad , \quad a_{m,m} = 1.$$

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi_m B_\mu) &= \sum_{\nu=0}^{m-1} \mathcal{L}(B_\mu B_\nu) a_{m,\nu} + \mathcal{L}(B_\mu B_m) \quad , \\ &\quad m \geq 1 \quad , \quad \mu \geq 0. \end{aligned}$$

Pour chaque $m \geq 1$, les conditions (4.7) $\mathcal{L}(\Phi_m B_\mu) = 0$, $s \leq \mu \leq m+s-1$ permettent de déterminer de façon unique $a_{m,\nu}$, $0 \leq \nu \leq m-1$, car si

$$\begin{aligned} \delta_m &= \det(\mathcal{L}(B_\mu B_\nu)) \quad , \quad m \geq 1 \\ &\quad s \leq \mu \leq s+m-1 \\ &\quad 0 \leq \nu \leq m-1 \end{aligned}$$

on a

$$\delta_m = \prod_{\mu=0}^{m-1} \mathcal{L}(B_\mu B_{\mu+s}) \neq 0 \quad , \quad m \geq 1$$

en vertu de l'hypothèse :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(B_m B_n) &= 0 \quad , \quad n \geq m + s + 1 \quad , \quad m \geq 0 \\ \mathcal{L}(B_m B_{m+s}) &\neq 0 \quad , \quad m \geq 0 \end{aligned}$$

Dans (4.13), prenons $\mu = m + s$:

$$\mathcal{L}(\Phi_m B_{m+s}) = \mathcal{L}(B_{m+s} B_m) \neq 0 \quad , \quad m \geq 0$$

d'où (4.8). En prenant $\mu \geq m + s + 1$, on obtient (4.9).

d) \Rightarrow c) C'est évident d'après (4.8) et (4.9).

c) \Rightarrow b) D'après le théorème 4.1.

Avant de montrer que b) entraîne a), indiquons des propriétés plus précises de la suite $\{\Phi_m\}_{m \geq 0}$.

PROPOSITION 4.1. — *Si l'un quelconque des énoncés b), c) ou d) est vérifié, on a les propriétés suivantes :*

1)

$$(4.14) \quad B_n(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{\eta_{n,s+\nu}}{\eta_{\nu,s+\nu}} \Phi_\nu(x) \quad , \quad 0 \leq n \leq 2s$$

$$(4.15) \quad B_{n+2s}(x) = \sum_{\nu=0}^{2s} \frac{\eta_{n+2s,n+\nu+s}}{\eta_{n+\nu,n+\nu+s}} \Phi_{n+\nu}(x) \quad , \quad n \geq 0$$

où on a posé $\eta_{n,m} = \mathcal{L}(B_n B_m)$, $n, m \geq 0$.

2) Les suites $\{\zeta_n^\mu\}_{n \geq 0}$ $0 \leq \mu \leq s-1$ sont des solutions d'une récurrence linéaire d'ordre $2s$:

$$(4.16) \quad \sum_{\nu=0}^{2s} \eta_{n+2s,n+\nu+s} \zeta_{n+\nu}^\mu = 0 \quad , \quad n \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \mu \leq s-1$$

avec les conditions initiales :

$$(4.17) \quad \sum_{\nu=0}^n \eta_{n,s+\nu} \zeta_\nu^\mu + \eta_{n,\mu} = 0 \quad , \quad 0 \leq n \leq 2s \quad , \quad 0 \leq \mu \leq s-1$$

L'orthogonalité et les récurrences de polynomes d'ordre supérieur à deux

3) Notant $\{\mathcal{F}_m\}_{m \geq 0}$ la suite duale de $\{\Phi_m\}_{m \geq 0}$, on a :

$$(4.18) \quad \eta_{m,s+m} \mathcal{F}_m = \mathcal{L}(B_{s+m} \cdot) \quad , \quad m \geq 0.$$

4) Notant $\{\tilde{\beta}_n\}_{n \geq 0}$ et $(\tilde{\chi}_{n,m})_{0 \leq m \leq n, n \geq 0}$ les éléments de la relation de structure (1.1) pour la suite $\{\Phi_m\}_{m \geq 0}$, on a :

$$(4.19) \quad \tilde{\chi}_{n,m} = \frac{u_{n+1}}{u_m} \delta_{n,m} - \sum_{\nu=0}^{s-1} u_{n+1} \zeta_{n+1}^{\nu} \frac{\chi_{s-1+m,\nu}}{u_m} \quad ,$$

$$0 \leq m \leq n \quad , \quad n \geq 0$$

avec

$$(4.20) \quad u_m = \eta_{m,s+m} \quad , \quad m \geq 0$$

$$\tilde{\beta}_m = \beta_{s+m} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^{\tau} \chi_{s-1+m,\tau} \quad , \quad m \geq 0$$

1) On peut écrire :

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^n b_{n,\nu} \Phi_{\nu}(x) \quad , \quad n \geq 0$$

$$\mathcal{L}(B_n B_{s+\mu}) = \sum_{\nu=0}^n b_{n,\nu} \mathcal{L}(\Phi_{\nu} B_{s+\mu}), 0 \leq \mu \leq n \quad , \quad 0 \leq n \leq 2s$$

$$= b_{n,\mu} \mathcal{L}(\Phi_{\mu} B_{s+\mu}) = b_{n,\mu} \eta_{\mu,s+\mu}$$

d'où (4.14).

Pour (4.15), on écrit :

$$B_{n+2s}(x) = \sum_{\nu=0}^{n+2s} b_{n+2s,\nu} \Phi_{\nu}(x) \quad , \quad n \geq 0$$

$$\mathcal{L}(B_{n+2s} B_{\mu}) = \sum_{\nu=0}^{n+2s} b_{n+2s,\nu} \mathcal{L}(\Phi_{\nu} B_{\mu}) \quad , \quad 0 \leq \mu \leq n+s-1$$

Or

$$\mathcal{L}(B_{n+2s} B_{\mu}) = 0 \quad 0 \leq \mu \leq \nu + s - 1$$

$$\mathcal{L}(\Phi_{\nu} B_{\mu}) = 0 \quad \text{si} \quad s \leq \mu \leq \nu + s - 1 \text{ ou si } \mu \geq \nu + s + 1$$

donc

$$0 = b_{n+2s, \mu-s} \mathcal{L}(\Phi_{\mu-s} B_\mu) \quad , \quad s \leq \mu \leq n+s-1$$

c'est-à-dire :

$$b_{n+2s, \mu} = 0 \quad 0 \leq \mu \leq n-1$$

Il reste :

$$\begin{aligned} B_{n+2s}(x) &= \sum_{\nu=n}^{n+2s} b_{n+2s, \nu} \Phi_\nu(x) \\ \mathcal{L}(B_{n+2s} B_{n+s+\mu}) &= \sum_{\nu=n}^{n+2s} b_{n+2s, \nu} \mathcal{L}(\Phi_\nu B_{n+s+\mu}) \quad , \quad 0 \leq \mu \leq 2s \\ &= b_{n+2s, n+\mu} \mathcal{L}(B_{n+s+\mu} \Phi_{n+\mu}) \quad , \quad 0 \leq \mu \leq 2s \end{aligned}$$

d'où (4.15).

2) On a $\mathcal{L}(\Phi_m B_\mu) = -u_m \zeta_m^\mu$, $0 \leq \mu \leq s-1$, $m \geq 0$ d'après le point b). D'où (4.17) de (4.14) et (4.16) de (4.15).

3) Notant $\tilde{\mathcal{F}}_m = \sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m \cdot)$, $m \geq 0$, montrons d'abord que

$$(4.21) \quad \mathcal{F}_m = \sum_{\nu=0}^{m+s} \frac{\eta_{\nu+s, m+s}}{\eta_{m, m+s}} \tilde{\mathcal{F}}_\nu \quad , \quad 0 \leq m \leq s-1$$

$$(4.22) \quad \mathcal{F}_m = \sum_{\nu=0}^{2s} \frac{\eta_{s+m, m+\nu}}{\eta_{m, m+s}} \tilde{\mathcal{F}}_{m-s+\nu} \quad , \quad m \geq s$$

De (4.15), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_m(B_{n+2s}) &= 0 \quad , \quad m \geq m+1 ; \\ \mathcal{F}_m(B_{m+2s}) &= \frac{\eta_{m+2s, m+s}}{\eta_{m, m+s}} \neq 0 \quad , \quad m \geq 0 \end{aligned}$$

En vertu du lemme 1.1, on a donc :

$$\mathcal{F}_m = \sum_{\nu=0}^{m+2s} \lambda_\nu^m \mathcal{L}_\nu \quad , \quad m \geq 0$$

c'est-à-dire :

$$(4.23) \quad \mathcal{F}_m = \sum_{\nu=m}^{m+2s} \frac{\eta_{\nu,m+s}}{\eta_{m,m+s}} \mathcal{L}_\nu \quad , \quad m \geq 0$$

car $\mathcal{F}_m(B_\mu) = \lambda_\mu^m \quad , \quad 0 \leq \mu \leq m+2s$

et $\mathcal{F}_m(B_\mu) = 0 \quad 0 \leq \mu \leq m-1$; $\mathcal{F}_m(B_\mu) = \frac{\eta_{\mu,m+s}}{\eta_{m,m+s}}$, $m \leq \mu \leq m+2s$.

Supposons $0 \leq m \leq s-1$. De (4.23), on a :

$$\mathcal{F}_m = \sum_{\nu=m}^{s-1} \frac{\eta_{\nu,m+s}}{\eta_{m,m+s}} \mathcal{L}_\nu + \sum_{\nu=0}^{m+s} \frac{\eta_{\nu+s,m+s}}{\eta_{m,m+s}} \mathcal{L}_{\nu+s}$$

Or du point b), on a :

$$\mathcal{L}_{\nu+s} = \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_\nu^\tau \mathcal{L}_\tau + \tilde{\mathcal{F}}_\nu$$

de sorte :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_m &= \sum_{\nu=0}^{m+1} \frac{\eta_{\nu+s,m+s}}{\eta_{m,m+s}} \tilde{\mathcal{F}}_\nu + \sum_{\nu=m}^{s-1} \frac{\eta_{\nu,m+s}}{\eta_{m,m+s}} \mathcal{L}_\nu \\ &= \sum_{\tau=0}^{s-1} \left(\sum_{\nu=0}^{m+s} \frac{\eta_{\nu+s,m+s}}{\eta_{m,m+s}} \zeta_\nu^\tau \right) \mathcal{L}_\tau \end{aligned}$$

d'où (4.21), compte-tenu de (4.17) et de $\eta_{m+s,\tau} = 0$, $0 \leq \tau \leq m-1$.

Supposons $m \geq s$ et posons $m = s+p$, $p \geq 0$. Alors de (4.23) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{s+p} &= \sum_{\mu=p}^{2s+p} \frac{\eta_{s+\mu,2s+p}}{\eta_{s+p,2s+p}} \mathcal{L}_{s+\mu} = \sum_{\mu=p}^{2s+p} \frac{\eta_{s+\mu,2s+p}}{\eta_{s+p,2s+p}} \left\{ \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_\mu^\tau \mathcal{L}_\tau + \tilde{\mathcal{F}}_\mu \right\} \\ &= \sum_{\mu=p}^{2s+p} \frac{\eta_{s+\mu,2s+p}}{\eta_{s+p,2s+p}} \tilde{\mathcal{F}}_\mu + \sum_{\tau=0}^{s-1} \left(\sum_{\mu=0}^{2s} \frac{\eta_{2s+p,s+p+\mu}}{\eta_{s+p,2s+p}} \zeta_{p+\mu}^\tau \right) \mathcal{L}_\tau \end{aligned}$$

d'où (4.22), compte-tenu de (4.16).

On a maintenant de (4.21) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_m &= \sum_{\nu=0}^{m+s} \frac{\eta_{\nu+s,m+s}}{\eta_{m,m+s}} \sigma_\nu \mathcal{L}(\Phi_\nu \cdot) = \frac{1}{\eta_{m,m+s}} \mathcal{L} \left(\sum_{\nu=0}^{m+s} \frac{\eta_{\nu+s,m+s}}{\eta_{\nu,\nu+s}} \Phi_\nu \cdot \right) \\ &= \frac{1}{\eta_{m,m+s}} \mathcal{L}(B_{s+m} \cdot) \quad , \quad \text{d'après (4.14), } 0 \leq m \leq s-1. \end{aligned}$$

On a (4.18) pour $m \geq s$ d'après (4.22) et (4.15).

4) D'après (1.3) et (1.4), on a :

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_{n,m} &= \mathcal{F}_m(x\Phi_{n+1}(x)) \quad , \quad 0 \leq m \leq n \\ \tilde{\beta}_m &= \mathcal{F}_m(x\Phi_m(x)) \quad , \quad m \geq 0\end{aligned}$$

Or de (4.18), on a

$$u_m \mathcal{F}_m(x\Phi_{n+1}(x)) = \mathcal{L}(x B_{s+m}(x) \Phi_{n+1}(x)).$$

De

$$x B_{s+m}(x) = B_{s+m+1}(x) + \beta_{s+m} B_{s+m}(x) + \sum_{\nu=0}^{s+m-1} \chi_{s+m-1,\nu} B_{\nu}(x)$$

on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x B_{s+m}(x) \Phi_{n+1}(x)) &= \mathcal{L}(B_{s+m+1} \Phi_{n+1}) + \beta_{s+m} \mathcal{L}(B_{s+m} \Phi_{n+1}) \\ &= \sum_{\nu=0}^{s+m-1} \chi_{s+m-1,\nu} \mathcal{L}(B_{\nu} \Phi_{n+1}).\end{aligned}$$

Pour $0 \leq m \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} \mathcal{L}(\Phi_{n+1} B_{s+m+1}) &= \mathcal{L}_{s+n+1}(B_{s+m+1}) - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{n+1}^{\tau} \mathcal{L}_{\tau}(B_{s+m+1}) \\ &= \delta_{n,m}\end{aligned}$$

$$\sigma_{n+1} \mathcal{L}(\Phi_{n+1} B_{s+m}) = \mathcal{L}_{s+n+1}(B_{s+m}) - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{n+1}^{\tau} \mathcal{L}_{\tau}(B_{s+m}) = 0$$

$$\sigma_{n+1} \mathcal{L}(\Phi_{n+1} B_{\nu}) = \mathcal{L}_{s+n+1}(B_{\nu}) - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{n+1}^{\tau} \mathcal{L}_{\tau}(B_{\nu}) = - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{n+1}^{\tau} \delta_{\tau,\nu}$$

et donc

$$\sigma_{n+1} \mathcal{L}(x B_{s+m} \Phi_{n+1}(x)) = \delta_{n,m} - \sum_{\nu=0}^{s-1} \zeta_{n+1}^{\nu} \chi_{s+1+m,\nu}$$

d'où (4.19).

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned}u_m \mathcal{F}_m(x\Phi_m(x)) &= \mathcal{L}(x B_{s+m}(x) \Phi_{n+1}(x)) \\ \mathcal{L}(x B_{s+m}(x) \Phi_m(x)) &= \mathcal{L}(\Phi_m B_{s+m+1}) + \beta_{s+m} \mathcal{L}(\Phi_m B_{s+m}) \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^{s+m-1} \chi_{s-1+m,\nu} \mathcal{L}(\Phi_m B_{\nu}).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m B_{s+m+1}) &= 0 \\ \sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m B_{s+m}) &= 1 \\ \sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m B_\nu) &= \delta_{s+m,\nu} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \delta_{\tau,\nu}\end{aligned}$$

d'où facilement (4.20).

Démontrons maintenant que b) \Rightarrow a). On suppose que :

$$(4.24) \quad \sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m \cdot) = \mathcal{L}_{s+m} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \mathcal{L}_\tau \quad , \quad m \geq 0$$

On a

$$\begin{aligned}\sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m B_{s+m}) &= 1 \quad , \quad \text{donc} \quad \sigma_m u_m = 1 \\ \sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m B_\mu) &= -\zeta_m^\mu \quad , \quad 0 \leq \mu \leq s-1\end{aligned}$$

De

$$x\Phi_m(x) = \Phi_{m+1}(x) + \tilde{\beta}_m \Phi_m(x) + \sum_{\nu=0}^{m-1} \tilde{\chi}_{m-1,\nu} \Phi_\nu(x) \quad , \quad m \geq 0$$

on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x\Phi_m B_\tau(x)) &= -u_{m+1} \zeta_{m+1}^\tau - u_m \tilde{\beta}_m \zeta_m^\tau \\ &\quad - \sum_{\nu=0}^{m-1} \tilde{\chi}_{m-1,\nu} u_\nu \zeta_\nu^\tau \quad , \quad 0 \leq \tau \leq s-1.\end{aligned}$$

D'autre part, de l'hypothèse :

$$\sigma_m \mathcal{L}(x\Phi_m(x) B_\tau(x)) = \mathcal{L}_{s+m}(x B_\tau(x)) - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\nu \mathcal{L}_\nu(x B_\tau(x)).$$

Or de :

$$x B_\tau(x) = B_{\tau+1}(x) + \beta_\tau B_\tau(x) + \sum_{\mu=0}^{\tau-1} \chi_{\tau-1,\mu} B_\mu(x)$$

on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{s+m}(x B_\tau(x)) &= \mathcal{L}_{s+m}(B_{\tau+1}) + \beta_\tau \mathcal{L}_{s+m}(B_\tau) + \sum_{\mu=0}^{\tau-1} \chi_{\tau-1,\mu} \mathcal{L}_{s+m}(B_\mu) \\ &= \delta_{s+m,\tau+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\nu(xB_\tau(x)) &= \mathcal{L}_\nu(B_{\tau+1}) + \beta_\tau \mathcal{L}_\nu(B_\tau) + \sum_{\mu=0}^{\tau-1} \chi_{\tau-1,\mu} \mathcal{L}_\nu(B_\mu) \\ &= \delta_{\nu,\tau+1} + \beta_\tau \delta_{\nu,\tau} + \sum_{\mu=0}^{\tau-1} \chi_{\tau-1,\mu} \delta_{\nu,\mu}\end{aligned}$$

donc

$$\sigma_m \mathcal{L}(x\Phi_m(x)B_\tau(x)) = \delta_{s+m,\tau+1} - \sum_{\nu=0}^{s-1} \zeta_m^\nu \delta_{\nu,\tau+1} - \beta_\tau \zeta_m^\tau - \sum_{\nu=0}^{\tau-1} \zeta_m^\nu \chi_{\tau-1,\nu}$$

Il en résulte l'égalité :

$$\begin{aligned}\delta_{s+m,\tau+1} - \sum_{\nu=0}^{s-1} \zeta_m^\nu \delta_{\nu,\tau+1} - \beta_\tau \zeta_m^\tau - \sum_{\nu=0}^{\tau-1} \zeta_m^\nu \chi_{\tau-1,\nu} &= \\ - \frac{u_{m+1}}{u_m} \zeta_{m+1}^\tau - \tilde{\beta}_m \zeta_m^\tau - \sum_{\nu=0}^{m-1} \sigma_m u_\nu \zeta_\nu^\tau \tilde{\chi}_{m-1,\nu} &, \quad 0 \leq \tau \leq s-1\end{aligned}$$

c'est-à-dire, compte-tenu de (4.19) et (4.20) :

$$\begin{aligned}\frac{u_{m+1}}{u_m} \zeta_{m+1}^\tau &= (\beta_\tau - \beta_{s+m}) \zeta_m^\tau - \sum_{\nu=0}^{m-1} \zeta_\nu^\tau \delta_{m-1,\nu} - \delta_{s+m,\tau+1} \\ &+ \sum_{\nu=0}^m \zeta_\nu^\tau \sum_{\mu=0}^{s-1} \zeta_m^\mu \chi_{s-1+\nu,\mu} + \sum_{\nu=0}^{s-1} \zeta_m^\nu \delta_{\nu,\tau+1} \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\tau-1} \zeta_m^\nu \chi_{\tau-1,\nu} \quad , \quad 0 \leq \tau \leq s-1 \quad , \quad m \geq 0.\end{aligned}$$

C'est la condition (4.5) où $m \rightarrow m+1$, sous réserve de montrer que

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \chi_{m+s,m+s} - \sum_{\nu=0}^{s-1} \chi_{m+s,\nu} \zeta_m^\nu \quad , \quad m \geq 0$$

Or de (4.24), on a :

$$\sigma_m \mathcal{L}(x\Phi_m(x)B_{m+s+1}(x)) = \mathcal{L}_{s+m}(xB_{m+s+1}(x)) - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \mathcal{L}_\tau(xB_{m+s+1}(x))$$

soit

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \chi_{m+s,m+s} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \chi_{m+s,\tau} \neq 0 \quad , \quad m \geq 0$$

C'est (4.4). On a (4.6) par

$$\sigma_m \mathcal{L}(x \Phi_m(x) B_{n+s+1}(x)) = \mathcal{L}_{s+m}(x B_{n+s+1}(x)) - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \mathcal{L}_\tau(x B_{n+s+1}(x))$$

$$0 = \chi_{n+s, m+s} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \chi_{n+s, \tau} \quad , \quad n \geq m+1 \quad , \quad m \geq 0.$$

Le théorème 4.2 est complètement démontré.

Remarques. —

1. On aurait pu montrer directement que d) entraîne a), mais par un calcul long et peu éclairant.

2. Lorsque $s = 1$, on retrouve bien le résultat de Dickinson [8], obtenu en supposant la forme \mathcal{L} définie positive. En fait, les hypothèses faites dans le théorème 4.2 n'impliquent pas que la forme \mathcal{L} soit régulière. En effet, soit $\{B_n\}_{n \geq 0}$ une suite orthogonale par rapport à u_0 régulière et soit $\{u_m\}_{m \geq 0}$ sa suite duale. Prenons $\mathcal{L} = u_s$, $s \geq 1$. Alors :

$$\mathcal{L}(B_m B_n) = (u_0(B_s^2))^{-1} u_0(B_s B_m B_n) = 0 \quad , \quad n \geq m+s+1 \quad , \quad m \geq 0$$

$$\mathcal{L}(B_m B_{m+s}) = (u_0(B_s^2))^{-1} u_0(B_s B_m B_{m+s}) \neq 0 \quad , \quad m \geq 0$$

La suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ est strictement quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à une forme non régulière.

Le rôle tenu par la suite orthogonale qu'on peut associer à une suite strictement quasi-orthogonale par rapport à une forme régulière, est tenu, en réalité, par la suite $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ qui existe toujours. Lorsque la suite orthogonale existe, il faudra établir ses rapports avec la suite $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$. Ces questions seront abordées dans un prochain article.

3. Il est remarquable que les coefficients $\tilde{\chi}_{n,m}$ de la suite $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ soient également de rang fini et cela de façon plus simple que les coefficients $\chi_{n,m}$ de la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$.

Indiquons pour terminer, un résultat sur la régularité de la forme \mathcal{L} .

PROPOSITION 4.2. — *Soit \mathcal{L} une forme linéaire vérifiant l'un des énoncés du théorème 4.2. Pour que \mathcal{L} soit régulière, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées :*

$$(4.25) \quad \begin{vmatrix} \zeta_0^0 & \cdots & \zeta_n^0 \\ \zeta_0^n & \cdots & \zeta_n^n \end{vmatrix} \neq 0 \quad , \quad 0 \leq n \leq s-1$$

$$(4.26) \quad \begin{vmatrix} \zeta_{n+1}^0 & \cdots & \zeta_{n+s}^0 \\ \zeta_{n+1}^{s-1} & \cdots & \zeta_{n+s}^{s-1} \end{vmatrix} \neq 0 \quad , \quad n \geq 0$$

Notons $\{\Delta_n\}_{n \geq 0}$ la suite des déterminants de Hankel de la forme \mathcal{L} .

On a : [6]

$$\Delta_n = \det (\mathcal{L}(B_\nu B_\mu)) = \det (\mathcal{L}(\Phi_\nu B_\mu))_{\nu, \mu=0}^n \quad , \quad n \geq 0 \quad ,$$

d'où compte-tenu des propriétés de la suite $\{\Phi_m\}_{m \geq 0}$:

$$\begin{aligned} \Delta_n &= (-1)^{n+1} (\prod_{\nu=0}^n u_\nu) \begin{vmatrix} \zeta_0^0 & \cdots & \zeta_0^n \\ \zeta_0^n & \cdots & \zeta_n^n \end{vmatrix} \quad , \quad 0 \leq n \leq s-1 \\ \Delta_{n+s} &= (-1)^{n+s} (\prod_{\nu=0}^{n+s} u_\nu) \begin{vmatrix} \zeta_{n+1}^0 & \cdots & \zeta_{n+1}^{s-1} \\ \zeta_{n+s}^0 & \cdots & \zeta_{n+s}^{s-1} \end{vmatrix} \quad , \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

avec $u_\nu = \eta_{\nu, \nu+s}$.

D'où les conditions (4.25) et (4.26) après transposition.

Remarques.—

1. Lorsque $s = 1$, les conditions (4.25) et (4.26) se réduisent à $\zeta_n^0 \neq 0, n \geq 0$.
2. La suite $\{\Delta_n\}_{n \geq 0}$ vérifie également une relation de récurrence linéaire d'ordre $2s$, qu'il est malaisé d'écrire dans le cas général.

Pour $s = 1$, on a :

$$\Delta_{n+2} - \eta_{n+2, n+2} \Delta_{n+1} + \eta_{n+2, n+1}^2 \Delta_n = 0 \quad , \quad n \geq 0$$

Pour $s = 2$, on trouve :

$$\begin{aligned} \Delta_{n+4} - \eta_{n+4, n+4} \Delta_{n+3} + \eta_{n+4, n+3}^2 \Delta_{n+2} + \eta_{n+4, n+2}^2 \eta_{n+3, n+3} \Delta_{n+1} \\ - \eta_{n+1, n+3}^2 \eta_{n+4, n+2}^2 \Delta_n = 0 \quad , \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

3. On montrera dans un article ultérieur que la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ vérifie une récurrence d'ordre supérieur à deux, mais d'un type différent de celles introduites dans le paragraphe 2.

Bibliographie

- [1] ROMAN (S.M.), ROTA (G.C.).— The umbral calculus., *Adv. in Math.*, t. 27 , 1978, p. 95-188.
- [2] MARONI (P.).— L'orthogonalité non régulière et les suites de polynômes orthogonaux semi-classiques, *Publ. Labo. Anal. Num. Univ. P. et M. CURIE, C.N.R.S. n° 86005*, 1986, Paris.
- [3] MARONI (P.).— Sur la suite associée à une suite de polynômes *Publ. Labo. Anal. Num. Univ. P. et M. CURIE, C.N.R.S n° 86012*, 1986, Paris.
- [4] MARONI (P.).— *Le calcul des formes linéaires et les polynômes orthogonaux semi-classiques*, *Lect. Notes in Math*, 1329, Springer-Verlag, 1988, p. 279-290.
- [5] VAN, ISEGHEM (J.).— *Approximants de Padé vectoriels*. — Thèse. Univ. des Sci. et Tech. de Lille - Flandre - Artois, 1987.
- [6] MARONI (P.).— Une généralisation du théorème de Favard - Shohat sur les polynômes orthogonaux, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 293, I, 1981, p. 19-22.
- [7] MARONI (P.).— Une caractérisation des polynômes orthogonaux semi-classiques, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 301, I, 1985, p. 269-272.
- [8] DICKINSON (D.).— On quasi-orthogonal polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 12, 1961, p. 185-194.
- [9] CHIHARA (T.S.).— On quasi-orthogonal polynomials, *Proc. Math. Soc.*, t. 8, 1957, p. 765-767.

(Manuscrit reçu le 5 septembre 1988)