ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ROBERTO NATALINI

Multiplication de distributions avec conditions de compatibilité

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 10, nº 1 (1989), p. 75-91

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1989_5_10_1_75_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol. X, n°1, 1989

Multiplication de distributions avec conditions de compatibilité

ROBERTO NATALINI[1]

RÉSUMÉ. — On s'intéresse au prolongement d'une application bilinéaire, définie sur les fonctions régulières, en une application continue des espaces $\{(H^s_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n))^N\}^2$ à valeurs dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, pour $s < 0$. Des conditions supplémentaires de régularité sont alors imposées par l'action d'un opérateur pseudo-différentiel A. Dans cet article on développe les précédents travaux de HANOUZET et JOLY [7] et HANOUZET [6] au sujet des applications compatibles avec un tel opérateur. Notamment on montre par un contre-exemple que la condition nécessaire de A-compatibilité de [7] n'est pas une condition suffisante.

ABSTRACT. — We are interested in defining distribution valued bilinear mappings on Sobolev spaces $(H^s_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n))^N$, for $s < 0$. Some additional regularity conditions are imposed by the action of a pseudodifferential operator A. In this paper we develop the former works of HANOUZET and JOLY [7] and HANOUZET [6] on bilinear mappings compatible with such an operator. Moreover we show, by a counter-example, the inadequacy of the necessary condition of A-compatibility of [7].

1. Introduction

Soit $F(x) = (F_{ij}(x))_{i,j=1\ldots N}$ une matrice $N \times N$ à coefficients réguliers dans $\mathbf{R}^n$. On lui associe une application bilinéaire définie sur $\{(\mathcal{D}(\mathbf{R}^n))^N\}^2$ par :

$$f(x;\, u, v) = (u, F(x)v) = \sum_{i,j=1}^{N} F_{ij}(x) u_i v_j \tag{1.1}$$

[1] Istituto per le Applicazioni del Calcolo (IAC) "M. Picone", C.N.R., Viele del Policlinico 137, I – 00161 Roma, Italie

Cette application, que nous allons appeler par la suite f-multiplication, se prolonge de façon naturelle en une application de $\{(H^s_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n))^N\}^2$ à valeurs dans $H^\sigma_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ pour $s \geq 0$ et σ déterminé en fonction de s.

Cette propriété est généralement fausse lorsque $s < 0$ à cause de la présence de singularités trop fortes. En revanche il est utile de considérer des sous-espaces plus petits de distributions, éventuellement liés aux applications considérées, pour obtenir encore des extensions continues de la f-multiplication. Dans la suite nous utiliserons les espaces :

$$\begin{aligned} &W_{\text{loc}}(A; s,t) = \{u \in (H^s_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n))^N \ ; \ Au \in (H^t_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n))^M\} \\ &W_{\text{comp}}(A; s,t) = W_{\text{loc}}(A; s,t) \cap \xi' \end{aligned}$$

où A appartient à la classe $(P^m)_{M\times N}$ des opérateurs pseudo-différentiels polyhomogènes proprement supportés (matriciels $M \times N$) d'ordre m (cfr. [11] et [17]). Par la suite on notera $\sigma_p(A)$ le symbole principal de A. On fera aussi l'hypothèse : $s \leq t+m \leq s+1$ qui nous assure la densité des fonctions régulières dans les espaces considérés.

L'opérateur A fixé, nous voudrions établir alors des conditions nécessaires et des conditions suffisantes, voire nécessaires et suffisantes, qui caractérisent les applications bilinéaires f admettant un prolongement de $\{W_{\text{loc}}(A; s,t)\}^2$ à valeurs dans les distributions pour $s < 0$.

La condition nécessaire est traitée dans la première partie de cet article et à ce propos nous considérons la définition suivante :

DÉFINITION 1.1.— *Soit $f(x,\cdot,\cdot)$ une application bilinéaire donnée par (1.1) et soient $A_i \in (P^{m_i})_{M\times N}, i = 1,2$. On dit que f est (A_1,A_2)-compatible s'il existe deux matrices $N \times M$, $p_1(x,\xi)$ et $p_2(x,\xi)$ telles que, pour tout $(x,\xi) \in T^*(\mathbf{R}^n)\backslash 0$, on ait :*

$$F(x) = {}^t p_2(x,\xi)\sigma_p(A_2)(x,\xi) + {}^t \sigma_p(A_1)(x,-\xi)p_1(x,\xi) \tag{1.2}$$

Si $A_1 = A_2 = A$ on dit simplement que f est A-compatible.

Soit $N_A = \{(x,\xi,w) \in (T^*(\mathbf{R}^n)\backslash 0) \times (\mathbf{C}^N\backslash 0); \sigma_p(A)(x,\xi)w = 0\}$. Dans [8] HANOUZET et JOLY ont montré que f est (A_1,A_2)-compatible si et seulement si pour $(x^\circ,\xi^\circ,w_1) \in N_{A_1}$ et $(x^\circ,-\xi^\circ,w_2) \in N_{A_2}$ on a :

$$f(x^\circ; w_1, w_2) = 0 \tag{1.3}$$

Sous cette forme MURAT et TARTAR avaient déjà utilisé cette condition, dans [12] et [16], dans le cadre de la compacité par compensation. Ils montraient notamment qu'une application bilinéaire f est faiblement (séquentiellement) continue de $\{W(A;0,0)\}^2$ à valeurs dans les distributions si et seulement si elle est A-compatible, A étant un opérateur différentiel du premier ordre à coefficients constants. En vertu du théorème de RELLICH la A-compatibilité est aussi une condition nécessaire pour la f-multiplication dans $\{W_{\mathrm{loc}}(A;s,t)\}^2$ si $s<0$.

Nous généralisons ce résultat à deux classes assez importantes d'opérateurs *pseudo-différentiels* d'ordre quelconque; respectivement, avec leur *symbole principal indépendant de x et hyperboliques de multiplicité constante.* D'autre part nous observons une impossibilité à prouver ce résultat, par exemple en présence de propriétés de sub-ellipticité (microlocale) de l'opérateur.

Dans la partie suivante nous démontrons le résultat principal de cet article :

THÉORÈME 1.2.— *Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un opérateur différentiel A à coefficients constants d'ordre 1 et une application bilinéaire A-compatible f qui n'admet aucun prolongement continu de $\{W_{\mathrm{comp}}(A;-\varepsilon,-\varepsilon)\}^2$ dans $\mathcal{D}'$.*

La condition de A-compatibilité est donc *insuffisante* pour un résultat de f-multiplication quand $s<0$, même dans le cas des coefficients constants où elle est par ailleurs nécessaire.

Nous montrons en revanche, dans la troisième partie, que la condition plus forte de *compatibilité régulière*, considérée dans [7] dans le cas d'opérateurs différentiels à coefficients variables, permet aussi dans le cas pseudo-différentiel d'obtenir un théorème de f-multiplication.

On trouve beaucoup d'exemples d'applications régulièrement compatibles (et notamment exemples d'applications qui sont bien compatibles, mais non régulièrement compatibles) dans [7] et [6]. Pour des résultats concernant les systèmes hyperboliques voir aussi HANOUZET et JOLY [8], [9], [10] et BACHELOT [3].

Finalement nous faisons quelques remarques relatives à l'analyse microlocale des singularités. Les résultats de cet article montrent en fait les limites de conditions purement algébriques de compatibilité des *fronts d'ondes polarisés* (cfr. [5]) des distributions que l'on voudrait multiplier. Cet article élabore les résultats précédents de [13] et [14].

2. Une condition nécessaire pour la multiplication : la A-compatibilité

La A-compatibilité donnée par la définition 1.1. est une condition nécessaire pour le prolongement de la f-multiplication aux espaces $\{W_{\mathrm{loc}}(A; s, t)\}^2$ quand $s < 0$, au moins pour deux classes assez générales d'opérateurs : on considère successivement le cas des opérateurs dont le symbole principal ne dépend pas de x et celui des opérateurs hyperboliques de multiplicité constante.

PROPOSITION 2.1.— *Soient $A_i \in (P^{m_i})_{M\times N}, i = 1,2$ deux opérateurs dont les symboles principaux ne dépendent pas de x. Soit f une application bilinéaire continue de $W_{\mathrm{comp}}(A_1; s_1, t_1) \times W_{\mathrm{comp}}(A_2; s_2, t_2)$ à valeurs dans $\mathcal{D}'$ pour $s_1 + s_2 < 0$. Alors f est (A_1, A_2)-compatible.*

Démonstration.— La composition de A_1 et A_2 avec des opérateurs elliptiques ne changeant pas leurs noyaux, on peut se ramener, sans perte de généralité, au cas $m_1 = m_2 = 1$. Pour démontrer la compatibilité de f on va utiliser la caractérisation (1.3).

Soit $\xi^\circ \in \mathbf{R}^n\backslash 0$ fixé, $|\xi^\circ| > C > 0$. Soit $A \in (P^m)_{M\times N}$ un opérateur dont le symbole principal ne dépend pas de x. On décompose le symbole complet $a(x, \xi)$ de A par :

$$a(x, \xi) = \sigma_p(A)(\xi) + a(x, \xi)$$

où $\sigma_p(A)(\xi)$ est homogène de degré 1 en ξ pour $|\xi| > C > 0$ et $A^\circ(x, D)$, l'opérateur associé à $a^\circ(x, \xi)$, appartient à $(P^0)_{M\times N}$. Soit donc $w \in \mathbf{C}^N\backslash 0$ tel que $\sigma_p(A)(\xi^\circ)w = 0$. On pose :

$$u^\nu(x) = \nu^\tau \varphi(x) w \exp\,[i\nu(x, \xi^\circ)]$$

où $\varphi \in \mathcal{D}$, $\tau \in \mathbf{R}$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Nous avons alors :

$$u^\nu \to 0 \text{ dans } W(A; s, t) \text{ si } t + \tau \leq s + \tau < 0 \tag{2.1}$$

D'abord on a $u^\nu \to 0$ dans $(H^s(\mathbf{R}^n))^N$ si $\nu \to \infty$ pour $s + \tau < 0$. Pour $\xi \in \mathbf{R}^n$ on pose $< \xi >= (1 + |\xi|^2)^{1/2}$; $\|u\|_s = \| < \xi >^s \widehat{u}\|_{L^2}$ est alors la norme de u dans H^s. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\|u^\nu\|_s^2 &= \int < \xi >^{2s} |\widehat{\varphi}(\xi - \nu\xi^\circ)w|^2 \nu^{2\tau} d\xi \\ &= \int < \xi + \nu\xi^\circ >^{2s} |\widehat{\varphi}(\xi)w|^2 \nu^{2\tau} d\xi\end{aligned}$$

On utilise ensuite l'inégalité de Peetre et on obtient :

$$\|u^\nu\|_s^2 \leq C \int <\nu\xi^\circ>^{2s}<\xi>^{2|s|} |\widehat{\varphi}(\xi)w|^2\nu^{2\tau}d\xi \leq C\nu^{2(s+\tau)}\|\varphi\|_{|s|}^2$$

De même $Au^\nu \to 0$ dans $(H^t(\mathbf{R}^n))^M$ si $\nu \to \infty$ pour $t+\tau < 0$. En effet, si on utilise la décomposition de A il vient :

$$\|Au^\nu\|_t^2 = \int <\xi>^{2t} |\sigma_p(A)(\xi)\widehat{\varphi}(\xi - \nu\xi^\circ)w|^2\nu^{2\tau}d\xi + \|A^\circ u^\nu\|_t^2$$

Nous avons par ailleurs, pour tout $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$ et $C > 0$ fixé :

$$|\sigma_p(A)(\xi+\eta) - \sigma_p(A)(\eta)| \leq C <\xi>$$

Cette inégalité est une conséquence immédiate de la lipschitzianité locale de la $\sigma_p(A)(\xi)$ sur $\mathbf{R}^n$ et de l'homogénéité en ξ à l'extérieur d'une boule de rayon fixé, centrée à l'origine. Donc :

$$\begin{aligned}\|Au^\nu\|_t^2 \leq &\int <\xi+\nu\xi^\circ>^{2t} |\sigma_p(A)(\xi^\circ)\widehat{\varphi}(\xi)w|^2\nu^{2\tau+1}d\xi + \\ &+\int <\xi+\nu\xi^\circ>^{2t} |[\sigma_p(A)(\xi+\nu\xi^\circ) - \sigma_p(A)(\nu\xi^\circ)]\widehat{\varphi}(\xi)w|^2\nu^{2\tau}d\xi + \\ &+ \|A^\circ u^\nu\|_t^2\end{aligned}$$

Comme $\sigma_p(A)(\xi^\circ)w = 0$, on obtient, avec les mêmes arguments que précédemment :

$$\|Au^\nu\|_t^2 \leq C\nu^{2(\tau+t)} + \|A^\circ u^\nu\|_t^2$$

Si $t+\tau < 0$ le premier terme tend vers zéro. Le deuxième aussi car A° est d'ordre $0, u^\nu$ tend vers zéro dans $(H^s(\mathbf{R}^n))^N$ et $t \leq s$. Nous avons donc établi (2.1).

Soient maintenant w_1 et w_2 dans $\mathbf{C}^N$ tels que $(x^\circ, \xi^\circ, w_1) \in N_{A_1}$ et $(x^\circ, -\xi^\circ, w_2) \in N_{A_2}$, et soit

$$u_j^\nu(x) = \nu^{\tau j}\varphi(x)w_j \exp\,[i(-1)^j\nu(x,\xi^\circ)], \quad j = 1,2$$

où on a choisi $\tau_1 = -\tau_2 = -s_1 - \varepsilon^\circ$, $s_1 + s_2 < -\varepsilon^\circ < 0$. Alors nous avons encore :

$$u_j^\nu \to 0 \text{ dans } W_{\text{comp}}(A_j; s_j, t_j) \text{ quand } \nu \to \infty, \quad j = 1,2.$$

Or $f(x;\cdot,\cdot)$ est une application binaire continue de $W_{\text{comp}}(A_1;s_1,t_1)\times W_{\text{comp}}(A_2;s_2,t_2)$ dans $\mathcal{D}'$; donc, pour tout $\psi\in\mathcal{D}$, on doit avoir :

$$\int f(x;u_1^\nu,u_2^\nu)\psi(x)dx\to 0 \text{ quand } \nu\to\infty.$$

Par conséquent, pour tout $\psi\in\mathcal{D}$:

$$\int f(x;w_1,w_2)\varphi^2(x)\psi(x)dx=0$$

et donc la conclusion. ∎

Soit $P(x,t,D_x,D_t)=I_ND_t-K(x,t,D_x)\in(P^1)_{N\times N}$ sur $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$ un opérateur pseudo-différentiel hyperbolique par rapport à t. On fait l'hypothèse de "multiplicité constante" : pour tout $(x,t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$ et $\xi\in\mathbf{R}^n\backslash 0$ la matrice $\sigma_p(P)(x,t,\xi)$ possède p valeurs propres réelles dont la multiplicité est constante. On a la condition nécessaire suivante :

PROPOSITION 2.2.— *Soit $P\in(P^1)_{N\times N}$ un opérateur hyperbolique de multiplicité constante. Soit f une application bilinéaire continue de $\{W_{\text{comp}}(P;s,t)\}^2$ dans $\mathcal{D}'$, pour $s<0$. Alors f est P-compatible.*

Démonstration.— Pour $j=1,\ldots,p$ on appelle $\lambda_j(x,t,\xi)$ la j$^{\text{ième}}$valeur propre de $\sigma_p(K)$ à (x,t,ξ). Les λ_j appartiennent à $C^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times(\mathbf{R}^n\backslash 0))$ et sont des fonctions homogènes de degré 1 en ξ.

Si $(x^\circ,t^\circ,\xi^\circ,\tau^\circ,w^\circ)\in N_p$ il existe $j\in[1,\ldots p]$ tel que :

$$\tau^\circ=\lambda_j(x^\circ,t^\circ,\xi^\circ)=\lambda(x^\circ,t^\circ,\xi^\circ)$$

On peut choisir alors un vecteur propre correspondant w°. Soit φ une solution locale de l'équation eikonale :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=\lambda(x,t,\nabla_x\varphi)\\ \varphi(x,t^\circ)=x\cdot\xi^\circ\end{cases}$$

Il existe alors un voisinage U de (x°,t°) où $\varphi\in C^\infty(U)$ et $\nabla_{x,t}\varphi\neq(0,0)$ dans U, car nous avons $\nabla_{x,t}\varphi(x^\circ,t^\circ)=(\xi^\circ,\tau^\circ)$. En vertu de l'hypothèse de multiplicité constante, il existe aussi une section $w\in(C^\infty(U))^N$ telle que :

$$\begin{cases}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}I_N-\sigma_p(K)(x,t,\nabla_x\varphi)\right]w=0 & \text{sur } U\\ w(x^\circ,t^\circ)=w^\circ\end{cases}\tag{2.2}$$

Soit $\theta \in \mathcal{D}(U)$, $\theta(x^\circ, t^\circ) \neq 0$. On pose

$$(2.3) \qquad u^k = (\theta w)(x,t) \exp\,[ik\varphi(x,t)], \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Nous avons alors :

$$(2.4) \qquad u^k \to 0 \text{ dans } W_{\text{comp}}(A; s, t) \text{ si } t \leq s < 0, \text{ quand } k \to \infty$$

En effet en vertu du théorème de la phase stationnaire on obtient facilement :

$$(2.5) \qquad u^k \to 0 \text{ dans } (H^s(\mathbf{R}^n))^N \text{ si } k \to \infty$$

Soit maintenant $P \in \mathcal{D}$, $P \equiv 1$ sur (suppPu^kU supp u^k) qui est contenu dans un compact fixé de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. Soit $A \in (P^1)_{N\times 1}$ associé au symbole $a(x,t,\xi,\tau) = [\tau I_N - \sigma_p(K)(x,t,\xi)]P^2 w(x,t)$. On vérifie aisément alors qu'il existe $R \in (P^0)_{N\times N}$ tel que, pour tout $k = 1, 2, \ldots$:

$$Pu^k = A(\theta e^{ik\varphi(x,t)}) + Ru^k$$

Encore une fois en vertu du théorème de la phase stationnaire $Ru^k \to 0$ dans $(H^s(\mathbf{R}^n))^N$ si $s < 0$. On applique ensuite le développement asymptotique de $A(\theta e^{ik\varphi(x,t)})$ (cfr. TREVES [17] ch. VI, théorème 3.1) et on obtient :

$$\begin{aligned}
A(\theta e^{ik\varphi(x,t)}) &= k\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} I_N - \sigma_p(K)(x,t,\nabla_x\varphi)\right] w(x,t)(\theta e^{ik\varphi(x,t)}) + \\
&+ e^{ik\varphi(x,t)}[\sum_{|\alpha|=1} D^\alpha_{\xi,\tau}\sigma_p(A)(x,t,\nabla_{x,t}\varphi) D^\alpha_{x,t}\theta + \\
&+ \sum_{|\alpha|=1} [i(\alpha!)^{-1} D^\alpha_{\xi,\tau}\sigma_p(A)(x,t,\nabla_{x,t}\varphi)\theta D^\alpha_{x,t}\varphi] + \\
&+ k^{-1} f(x,t,k)
\end{aligned}$$

En vertu de (2.2) nous avons donc :

$$(2.6) \qquad A(\theta e^{ik\varphi(x,t)}) \to 0 \text{ dans } (H^s_{\text{comp}}(\mathbf{R}^n))^M, \text{ si } t < 0 \text{ quand } k \to \infty$$

et on obtient alors (2.4).

Soient maintenant w_1°, w_2° dans $\mathbf{C}^N$ tels que

$$(x^\circ, t^\circ, (-1)^j\xi^\circ, (-1)^j\tau^\circ, w_j) \in N_p, \quad j = 1, 2.$$

Comme dans (2.3) on pose :

$$u_j^k = (\theta w_j)(x,t) \exp\,[(-1)^j ik\varphi(x,t)], \quad j = 1,2, \ k = 1,2,\ldots$$

On a encore (2.4) et donc pour tout $\psi \in \mathcal{D}$, on a :

$$\int f(x,t;u_1^k,u_2^k)\psi dx dt \to 0, \text{ quand } k \to \infty.$$

D'ailleurs

$$\int f(x,t;u_1^k,u_2^k)\psi dx dt = \int f(x,t;w_1,w_2)\theta^2\psi dx dt$$

La dernière intégrale est donc nulle et ceci étant vrai pour tout $\psi \in \mathcal{D}$ on en déduit la conclusion. ∎

Remarque 2.3.— La condition de compatibilité n'est pas toujours nécessaire pour établir un théorème de f-multiplication. On considère par exemple l'opérateur de Mizohata défini pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$, par :

$$Pu = (D_{x_1} + ix_1 D_{x_2})u$$

On a :

$$N_p = \text{ Car } P \times \mathbf{C}\backslash 0 = \{(x,\xi) \in T^*(\mathbf{R}^2)\backslash 0;\ \xi_1 = x_1 = 0\} \times \mathbf{C}\backslash 0$$

Donc l'application bilinéaire donnée par $F(x) = 1$ n'est pas P-compatible, comme on peut facilement vérifier. On a pourtant le résultat suivant :

PROPOSITION 2.4.— *Pour $s \geq -1/4$ la multiplication des fonctions régulière se prolonge en une application bilinéaire de $\{W_{\text{loc}}(A;s,s)\}^2$ dans H^σ_{loc}, où $\sigma = inf(s, 2s - 1/2 - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Si $s \neq 1$ alors $\varepsilon = 0$.*

La proposition 2.4 est une conséquence immédiate des propriétés de subellipticité microlocale de l'opérateur P([11], vol. IV prop. 26.3.4), et du théorème bien connu de produit avec conditions microlocales (cfr. aussi la Proposition 4.5 ci-dessous).

3. La A-compatibilité n'est pas une condition suffisante

Nous allons donner une démonstration du théorème 1.2. La démonstration de ce théorème est subordonnée au lemme suivant :

LEMME 3.1.— *Pout tout ε fixé, $0 < \varepsilon \leq 1/2$, il existe $v^\varepsilon \in S'(\mathbf{R}^2)$, avec $\mathcal{F}v^\varepsilon$ réelle et supp$\mathcal{F}v^\varepsilon \cap 0 = \phi$, telle que :*

(3.1) $\quad v^\varepsilon \in H^{-\varepsilon}(\mathbf{R}^2)$;

(3.2) $\quad D_y^2 v^\varepsilon \notin H^{-2}(\mathbf{R}^2)$ *et* $0 = suppsing_{H^{-2}} D_y^2 v^\varepsilon$;

(3.3) *pour tout entier $m > 3 + 2/\varepsilon$ on a*

$$D_y^m v^\varepsilon \in H^{-m+1-\varepsilon}(\mathbf{R}^2).$$

Démonstration du théorème 1.2.— Soit $\varepsilon > 0$ fixé et p un entier tel que $p > 1/\varepsilon + 3/2$. Pour $u = (u^1, \ldots, u^{2p+3}) \in \{\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)\}^{2p+3}$ on considère l'opérateur donné par :

$$Au = \begin{cases} D_x u^{p+3} - D_y u^1 + D_x u^2 \\ D_y u^{p+3} + D_x u^1 \\ D_y u^{p+2} \\ \left.\begin{array}{l} D_x u^{p+3+j} - D_y u^{j+2} + D_y u^{j+1} \\ D_y u^{p+3+j} + D_x u^{j+2} \end{array}\right\} \quad 1 \leq j \leq p \end{cases}$$

Le noyau de A est donné par :

$$N_A = \{(x, y, \xi, \eta, w) \in (T^*(\mathbf{R}^2)\backslash 0) \times (\mathbf{C}^{2p+3}\backslash 0\ );$$
$$\eta = 0, w^2 = -w^{p+3} \text{ et } w^j = 0 \text{ si } j \neq 2, p+3\}$$

L'application :

(3.4) $$f(w, v) = w^3 v^3 \qquad w, v \in \mathbf{C}^{2p+3}$$

est donc A-compatible. Soit v^ε la distribution donnée par le lemme 3.1. On appelle $U = (U^1, \ldots, U^{2p+3})$ la distribution construite à partir de v^ε par :

(3.5) $$\begin{cases} \mathcal{F}U^1 = \dfrac{\xi_1\xi_2}{|\xi|^2}\mathcal{F}v^\varepsilon \\ \mathcal{F}U^2 = \mathcal{F}v^\varepsilon \\ \mathcal{F}U^j = \left(\dfrac{\xi_2}{|\xi|}\right)^{2j-4} \mathcal{F}v^\varepsilon & , \quad 3 \leq i \leq p+2 \\ \mathcal{F}U^{p+3} = -\left(\dfrac{\xi_1}{|\xi|}\right)^2 \mathcal{F}v^\varepsilon \\ \mathcal{F}U^j = \left(\dfrac{\xi_1\xi_2^{2j-2p-7}}{|\xi|^{2j-2p-6}}\right)^2 \mathcal{F}v^\varepsilon & , \quad p+4 \leq j \leq 2p+3 \end{cases}$$

On vérifie aisément que $U \in W_{\text{comp}}(A; -\varepsilon, -\varepsilon)$. D'ailleurs, à cause de (3.2) on a $U^3 \notin L^2(\mathbf{R}^{2)}$ et $\{0\} = \text{suppsing}\,_{L^2} U^3$.

Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ telles que : φ est une fonction réelle hermitienne, $\varphi \equiv 1$ dans un voisinage de l'origine, $\psi \equiv 1$ dans un voisinage de supp φ. On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = (\psi U)(x, y) \\ u_2 = (\varphi U)(x, -y) \end{array} \right. \tag{3.6}$$

$u_1, u_2 \in W\text{comp}(A; -\varepsilon, -\varepsilon)$ et en outre $u_1^3, u_2^3 \notin L^2(\mathbf{R}^2)$. Soit $\{U_k\}$ une suite dans $\{\mathcal{D}(\mathbf{R}^2)\}^{2p+3}$ qui converge vers U dans $W\text{comp}(A; -\varepsilon, -\varepsilon)$. On pose encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{1k} = (\psi U_k)(x, y) \\ u_{2k} = (\varphi U_k)(x, -y) \end{array} \right.$$

avec les mêmes notations de (3.6). u_{ik} converge alors vers u_i, $i = 1, 2$, dans $W\text{comp}(A; -\varepsilon, -\varepsilon)$. On termine la démonstration si l'on montre que pour f donnée par (3.4), l'intégrale $\left| \int f(u_{1k}, u_{2k}) \varphi \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right|$ n'est pas bornée quand $k \to \infty$, φ étant la même fonction considérée en (3.6). En effet :

$$\begin{aligned} \int f(u_{1k}, u_{2k}) \varphi \mathrm{d}x \mathrm{d}y &= \int u_{1k}^3 u_{2k}^3 \varphi \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= \int \mathcal{F}(u_{1k}^3 \varphi)(-\xi, -\eta) \mathcal{F}(u_{2k}^3)(\xi, \eta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \\ &= \|u_{2k}^3\|_{L^2} \end{aligned}$$

toutes les transformées de Fourier de ces fonctions étant réelles.

Or si la suite $\{u_{2k}^3\}$ était bornée dans L^2, on pourrait en extraire une sous-suite faiblement convergente, donc fortement convergente dans H^s pour tout $s < 0$. D'autre part u_{2k}^3 converge vers u_2^3 dans $H^{-\varepsilon}$, ce qui impliquerait $u_2^3 \in L^2$, ce qui aboutit à une contradiction. □

Démonstration du lemme 3.1. — Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}_+)$ une fonction réelle, $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi(r) = 1$ si $r > 2$, $\chi(r) = 0$ si $r \leq 1$. Pour tout k entier, $k \geq 2$, on définit une distribution tempérée g_k sur $\mathbf{R}^2$ par sa transformée de Fourier exprimée en coordonnées polaires :

$$\mathcal{F} g_k(r, \theta) = \chi(r) \exp[-|\theta|(1 + r^2)]$$

Nous allons montrer que pour tout m entier non négatif, $D_y^m g_k \in H^s(\mathbf{R}^n)$ pour tout $s < s_m = -m - 1 + (2m + 1/k) \leq 0$, mais $D_y^m g_k \notin H^{s_m}(\mathbf{R}^n)$. En effet soit $s < s_m$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\|D_y^m g_k\|_s^2 &\leq C \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_1^\infty r^{2(m+s)}(\sin^{2m}\theta)\mathrm{e}^{-2\theta^k r^2} r\ \mathrm{d}r \\
&\leq C \int_0^\pi \theta^{-k(m+s+1)} \sin^{2m}\theta\ \mathrm{d}\theta \int_{2\theta^k}^\infty w^{m+s}\mathrm{e}^{-w}\ \mathrm{d}w \\
&\leq C \int_0^{2\pi^k} w^{m+s}\ \mathrm{e}^{-w}\ \mathrm{d}w \int_0^{(2w)^{1/k}} \theta^{2m-k(m+s+1)}\ \mathrm{d}\theta \\
&+ \int_{2\pi^k}^\infty w^{m+s}\ \mathrm{e}^{-w}\ \mathrm{d}w \int_0^\pi \theta^{2m-k(m+s+1)}\ \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

ce qui converge pour $s < s_m$. Nous allons maintenant montrer que $D_y^m g_k \notin H^{s_m}(\mathbf{R}^n)$. On a, pour tout $\delta > 0$:

$$\begin{aligned}
\|D_y^m g_k\|_{sm}^2 &\geq C \int_\delta^\pi \mathrm{d}\theta \int_\delta^\infty r^{m+s}(\sin^{2m}\theta)\mathrm{e}^{-2\theta^k r}\ \mathrm{d}r \\
&\geq C \int_\delta^{\pi/2} \theta^{-k(s_m+m+1)} \sin^{2m}\theta\ \mathrm{d}\theta \int_{\delta\pi^k}^\infty w^{m+s_m}\mathrm{e}^{-w}\ \mathrm{d}w \\
&\geq C \int_\delta^{\pi/2} \theta^{-1}\ \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

car $k(s_m + m + 1) = 2m + 1$, par conséquent l'intégrale diverge pour $\delta \to 0$.

Nous montrerons enfin que si $k > 2(m+1)$ alors $\{0\} = \mathrm{suppsing}_{H^{s_m}} D_y^m g_k$. Il suffit de montrer que $(x,y)D_y^m g_k \in \{H^{s_m}(\mathbf{R}^n)\}^2$ et sans perte de généralité, on peut se ramener à l'étude de la régularité de $(x,y)g_k$. Nous examinons alors la décroissance du gradient de $\mathcal{F}g_k$ en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
r^{-1}\partial_\theta(\mathcal{F}g_k)(r,\theta) &= -\chi(r)k(sgn\theta)|\theta|^{k-1}r^{-1}(1+r^2)\exp[-|\theta|(1+r^2)] \\
\partial_r(\mathcal{F}g_k)(r,\theta) &= [\chi'(r) - 2\chi(r)|\theta|^k r]\exp[-|\theta|(1+r^2)]
\end{aligned}$$

Pour tout $r \gg 1$ et $0 \leq |\theta| \leq \delta$ ces deux fonctions se comportent respectivement comme $(1+r^2)^{-(k-2)/2}\mathcal{F}D_y^{k-1}g_k$ et $(1+r^2)^{-(k-1)/2}\mathcal{F}D_y^k g_k$. Par conséquent $(x,y)g_k \in \{H^\sigma(\mathbf{R}^n)\}^2$ pour $\sigma \leq \sigma_k$ inf $= (k-2+s_{k-1}, k-1+s_k) = -1/k$ et donc $(x,y)D_y^m g_k \in \{H^{s_m}(\mathbf{R}^n)\}^2$ si $k > 2(m+1)$.

Nous allons terminer la démonstration. Soit k le plus petit entier vérifiant $k > 4/\varepsilon$ et p un réel tel que $0 \leq p < \varepsilon - 4/k$. On pose alors

$$\mathcal{F}v^\varepsilon = (1+r^2)^{-1-p-5/k)/2}\mathcal{F}g_k$$

On vérifie aisément que v^ε remplit les conditions de l'énoncé. □

4. Une condition suffisante : la A-compatibilité régulière

Ci-dessous, nous donnons une généralisation au cas pseudo-différentiel des résultats précédents de HANOUZET et JOLY [7] et HANOUZET [6]. Dans ce but on rappelle leur définition d'application régulièrement compatible avec un opérateur, adaptée ici de façon convenable.

DÉFINITION 4.1.— *Soit f une application bilinéaire (A_1, A_2)-compatible, A_1 et A_2 étant deux opérateurs respectivement dans $(P^{m_1})_{M\times N}$ et $(P^{m_2})_{M\times N}$. Si dans la décomposition (1.2) on peut choisir les matrices p_1 et p_2 dans $\{C^\infty(T^*(\mathbf{R}^n)\backslash 0)\}^{M\times N}$, homogène en ξ de degré respectif $-m_1$ et $-m_2$, alors on dit que f est (A_1, A_2)-régulièrement compatible.*

Remarques 4.2.— La A – compatibilité, généralement strictement plus faible, implique la A – compatibilité régulière si A est un opérateur de rang constant ou bien s'il est hyperbolique de multiplicité constante (cfr. [7]). Les résultats de la seconde partie et le théorème 4.3 ci-dessous montrent alors que dans ces cas la compatibilité régulière est bien une condition nécessaire et suffisante.

THÉORÈME 4.3.— *Soit f une application bilinéaire (A_1, A_2) – régulièrement compatible. Soient $s_i, t_i, i = 1, 2$, des réels vérifiant : $s_i \leq t_i + m_i \leq s_i + 1, s_1 + t_2 + m_2 \geq 0, s_2 + t_1 + m_1 \geq 0$. Alors f se prolonge en une application bilinéaire continue de $W_{loc}(A_1; s_1, t_1) \times W_{loc}(A_2; s_2, t_2)$ dans $H^\sigma_{loc}(\mathbf{R}^n)$, où $\sigma = \inf(s_1, s_2, s_1 + s_2 - n/2 - \varepsilon)$ et $\varepsilon > 0$.*

Si $s_j \neq n/2$, $i = 1, 2$, $s_1 + t_2 + m_2 > 0, s_2 + t_1 + m_1 > 0$, alors on peut choisir $\varepsilon = 0$.

Démonstration.— Sans perte de généralité nous pouvons nous ramener au cas $m_1 = m_2 = 0$. En suivant HANOUZET [6] on décompose f par (1.2). Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $\chi(0) \neq 0$. On pose :

$$\widetilde{p}_i(x,\xi) = [1 - \chi(\xi)]p_i(x,\xi), \ i = 1,2$$
$$g(x,\xi) = \chi(\xi)\check{F}(x)$$

On vérifie aisément que l'on peut associer à $\widetilde{p}_1$ et $\widetilde{p}_2$ deux opérateurs $P_1, P_2 \in (P^0)_{N\times M}$, modulo un opérateur régularisant. De même on peut associer à g un opérateur régularisant. On remarque enfin que l'on peut associer aux symboles $\sigma_p(A_2)(x,\xi)$ et ${}^t\sigma_p(A_1)(x,-\xi)$ les opérateurs A_2 et

${}^tA_1$, modulo un opérateur d'ordre -1, en vertu des propriétés bien connues des opérateurs pseudo-différentiels. On a finalement :

$$F(x) = {}^tP_2(x,D)A_2(x,D) + {}^tA_1(x,D)P_1(x,D) + R(x,D) \tag{4.1}$$

où R est un opérateur d'ordre -1.

Soient $u_i \in W_{\mathrm{loc}}(A_i; s_i, t_i)$, $i = 1,2$. Par densité on va les supposer régulières à support compact. On décompose alors $f(x; u_1, u_2)$ par :

$$\begin{aligned} f(x;u_1,u_2) &= (u_1, F(x)u_2) \\ &= (u_1, {}^tA_1(x,D)P_1(x,D)u_2) \\ &+ (u_1, {}^tP_2(x,D)A_2(x,D)u_2) + (u_1, R(x,D)u_2) \end{aligned} \tag{4.2}$$

où, pour $u, v \in \mathbf{C}^N$, nous avons noté $(u,v) = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i$.

Alors $u_2 \in W_{\mathrm{comp}}(A_2; s_2, t_2)$ et donc, puisque $t_2 \leq s_2 + 1$, nous avons :

$${}^tP_2(x,D)A_2(x,D)u_2 + R(x,D)u_2 \in (H^t_{\mathrm{comp}}(\mathbf{R}^n))^M$$

et d'après le théorème de produit dans les espaces de Sobolev, on obtient, pour $s_1 + t_2 \geq 0$:

$$(u_1, {}^tP_2(x,D)A_2(x,D)u_2 + R(x,D)u_2) \in H^\sigma_{\mathrm{comp}}(\mathbf{R}^n) \tag{4.3}$$

On étudie ensuite le terme $(u_1, {}^t A_1(x,D)P_1(x,D)u_2)$ pour lequel on va obtenir une estimation par dualité. Soit $\theta \in \mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned} &\int \theta(u_1, {}^tA_1(x,D)P_1(x,D)u_2)\, \mathrm{d}x \\ &= \int ([{}^tA_1(x,D), \theta I]u_1, P_1(x,D)u_2)\, \mathrm{d}x \\ &+ \int \theta(A_1(x,D)u_1, P_1(x,D)u_2)\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Le terme $(A_1(x,D)u_1, P_1(x,D)u_2) \in H^\sigma_{\mathrm{comp}}(\mathbf{R}^n)$, car $s+t \geq 0$ et donc on l'estime directement. Pour étudier le premier terme on a besoin en revanche d'un lemme de commutation dû à Beals & Reed [4] (voir aussi [2]).

Lemme 4.4.— *Soient $v \in H^t_{\mathrm{comp}}(\mathbf{R}^n)$ et $w \in H^s_{\mathrm{comp}}(\mathbf{R}^n)$, $s + t \geq 0$, et $B \in P^0$. Alors :*

$$[v, B] \in H^\tau_{\mathrm{comp}}(\mathbf{R}^n) \tag{4.4}$$

et on a :

$$\|[v,B]w\|_\tau \leq C(B)\|v\|_t\|w\|_s \tag{4.5}$$

$\tau = inf(s+1, t, s+t-n/2-\varepsilon), \varepsilon > 0.$

Si $s+t>0$ et $s, t-1 \neq n/2$, alors on peut choisir $\varepsilon = 0$.

On a $s_1 \geq \sigma$ et donc $[{}^tA_1(x,D), \theta I]u_1 \in (H^\tau_{\text{comp}}(\mathbf{R}^n))^N$,

$\tau = inf(s_1+1, -\sigma, s-\sigma-n/2-\varepsilon), \varepsilon > 0$. D'après (4.5) on obtient alors :

$$\left| \int ([{}^tA_1(x,D), \theta I]u_1, p_1(x,D)u_2) \mathrm{d}x \right| \leq C\|\theta\|_{-\sigma}\|u_1\|_{s_1}\|u_2\|_{s_2}$$

ce qui termine la démonstration. ∎

Nous pouvons ainsi retrouver le résultat de multiplication de distributions à valeurs dans $\mathbf{C}$ ($N = 1$ et $F(x) \equiv 1$) avec conditions microlocales de [11] (voir aussi [1] et [15]) comme conséquence du théorème 4.3. Le front d'onde H^t de $u \in \mathcal{D}'$ est noté par $\mathbf{WF}_t(u)$.

PROPOSITION 4.5.— *Soient s et t des réels, $s \leq t \leq s+1$ et $s+t \geq 0$, $u, v \in H^s_{\text{loc}}$, tels que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$:*

$$(x,0) \notin \mathbf{WF}_t(u) + \mathbf{WF}_t(v) \tag{4.6}$$

Alors le produit uv est défini à valeurs dans $\mathcal{D}'$.

Cette proposition est démontrée dans [14] en utilisant le théorème 4.3 et le lemme suivant :

LEMME 4.6.— *Soient A_1 et A_2 dans p°. On a alors l'équivalence suivante :*

(4.7) $\quad 1$ *est* (A_1, A_2) – *compatible* ;

(4.8) $\quad 1$ *est* (A_1, A_2) – *régulièrement compatible* ;

(4.9) $\quad (x,0) \notin$ *Car* $A_1 +$ *Car* A_2, *pour tout* $x \in \mathbf{R}^n$

Démonstration.— (4.7) et (4.9) sont évidemment équivalentes. En outre (4.8) implique (4.7). Nous devons montrer seulement que (4.9) implique (4.8). Soit donc $(x^\circ, \xi^\circ) \in$ Car A_1. Alors il existe deux ouverts coniques dans $T^*(\mathbf{R}^n)\backslash 0$, $V_1(x^\circ, \xi^\circ)$ et $U_1(x^\circ, \xi^\circ)$, tels que si $(y, \eta) \in V_1(x^\circ, \xi^\circ)$, $\sigma_p(A_2)(y, -\eta) \neq 0$ et $\overline{U}_1(x^\circ, \xi^\circ) \subset V_1(x^\circ, \xi^\circ)$. Soit ensuite $(\widetilde{x}^\circ, \widetilde{\xi}^\circ)$ tel que $(\widetilde{x}^\circ, \widetilde{\xi}^\circ) \in$ Car A_2. Il existe alors deux ouverts coniques $V_2(\widetilde{x}^\circ, \xi^\circ)$ et $U_2(\widetilde{x}^\circ, \widetilde{\xi}^\circ)$ tels que si $(y, \eta) \in V_2(\widetilde{x}^\circ, \widetilde{\xi}^\circ)$, alors $\sigma_p(A_1)(y, \eta) \neq 0$ et $\overline{U}_2(\widetilde{x}^\circ, \widetilde{\xi}^\circ) \subset V_2(\widetilde{x}^\circ, \widetilde{\xi}^\circ)$. De plus, on peut choisir les ouverts $u_1(x, \xi)$ et $u_2(\widetilde{x}, \widetilde{\xi})$ tels que, pour tout $(x, \xi) \in$ Car A_1 et $(\widetilde{x}, -\widetilde{\xi}) \in$ Car A_2 :

$$\overline{U}_1(x, \xi) \cap \overline{U}_1(\widetilde{x}, \widetilde{\xi}) = \phi$$

On définit $\theta \in P^\circ$ par :

$$\theta = \begin{cases} 0 \quad \text{sur} \quad \displaystyle\bigcup_{(x,\xi) \in \text{ Car } A_1} \overline{U}_1(x,\xi) \\ 1 \quad \text{sur} \quad \displaystyle\bigcup_{(x,-\xi) \in \text{ Car } A_2} \overline{U}_2(x,\xi) \end{cases}$$

Les deux fonctions :

$$p_1(x,\xi) = \theta(x,\xi)[\sigma_p(A_1)(x,\xi)]^{-1}$$
$$p_2(x,\xi) = [1-\theta(x,\xi)][\sigma_p(A_2)(x,-\xi)]^{-1}$$

vérifient les hypothèses de la définition 4.1. ∎

Remarques de conclusion. — Nous discutons brièvement ici les liens existant entre la compatibilité et le front d'onde polarisé de DENCKER [5], introduit dans l'étude des singularités des distributions à valeurs dans $\mathbf{C}^N$. On le définit, pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ et $t \in \mathbf{R}$, par :

$$\text{(4.10)} \qquad \mathbf{WF}_{pol_t}(u) = \bigcap_{Bu \in H^t} N_B$$

$B \in (P^0)_{1\times N}$ étant à support compact en x et $N_B = \{(x,\xi,W) \in (T^*(\mathbf{R}^n)\backslash 0) \times (\mathbf{C}^N\backslash 0); \sigma_p(B)(x,\xi)w = 0\}$ le noyau du symbole principal de B.

Soit maintenant $A \in (P^m)_{M\times N}$ et $u,v \in W_{\text{loc}}(A;s,t)$. Si l'on a :

$$(x^\circ,\xi^\circ,\lambda) \in \mathbf{WF}_{\text{pol}_t}(u) \quad \text{et} \quad (x^\circ,-\xi^\circ,\eta) \in \mathbf{WF}_{\text{pol}_t}(v)$$

et si f est une application bilinéaire A-compatible, alors, en vertu de (1.3), nous avons :

$$\text{(4.11)} \qquad f(x^\circ;\lambda,\eta) = 0$$

La A-compatibilité de f se traduit donc par la condition de f – orthogonalité des polarisations relatives aux $(x,\xi) \in T^*(\mathbf{R}^n)\backslash 0$ tels que :

$$\text{(4.12)} \qquad (x,\xi) \in \mathbf{WF}_t(u) \quad \text{et} \quad (x,-\xi) \in \mathbf{WF}_t(v)$$

$\mathbf{WF}_t(u)$ (resp. $\mathbf{WF}_t(v)$) étant l'union des fronts d'onde H^t des composantes de u (resp. v).

On rappelle que si la condition (4.12) ne se vérifie pas pour tout (x,ξ), alors le théorème de multiplication avec conditions microlocales de [11] et [1] permet de définir les produits u_iv_j individuellement et donc le produit $f(x;u,v)$. En dépit du fait que la f-orthogonalité des polarisations (4.11) se présente comme une condition plutôt naturelle de contrôle des singularités sur les points où se vérifie (4.12), dans cet article nous avons montré qu'on ne peut pas définir la f-multiplication sans conditions supplémentaires. En vertu du théorème 1.2 nous savons en fait que pour tout $s < 0$ il existe $A \in (p^m)_{M\times N}$ et une application bilinéaire f qui vérifie (4.11), mais pour laquelle on ne peut pas définir un produit $f(x;u,v)$ continu dans les distributions, d'où la nécessité d'une condition strictement plus forte.

En suivant HANOUZET et JOLY [7] nous avons présenté ici la condition suffisante de A-compatibilité régulière.

Le problème se pose de trouver une condition optimale, compte tenu aussi des propriétés de sub-ellipticité de certains opérateurs (cfr. remarque 2.3).

Je remercie Bernard HANOUZET et Jean-Luc JOLY pour m'avoir toujours suivi et conseillé pendant mon travail et m'avoir introduit à l'étude de ces problèmes. Je remercie aussi Alain BACHELOT pour ses remarques essentielles à propos de cet article et Guy MÉTIVIER pour l'idée de la remarque 2.3.

Bibliographie

[1] AMBROSE (W.).— Product of distributions with values in distributions,, *J. reine angew. Math.*, t. **315**, 1980, p. 79-91.

[2] BACHELOT (A.).— *Régularité microlocale des produits dans les espaces de type* L^p, .— Publ. d'analyse Appliquée - Univ. Bordeaux I, n° 8407.

[3] BACHELOT (A.).— Equirépartition d'énergie pour des systèmes hyperboliques et formes compatibles; *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. **301**, 1985, p. 573-576. *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor.*, vol. **46**, n°1, 1987, p. 45-76.

[4] BEALS (M.), REED (M.).— Propagation of singularities for hyperbolic pseudo-differential operators with non-smooth coefficients, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **35**, 1982, p. 169-184.

[5] DENCKER (N.).— On the propagation of polarisation sets for systems or real principal type., *J. Funct. Analysis*, t. **46**, 1982, p. 351-372.

[6] HANOUZET (B.).— Applications bilinéaires compatibles avec un système à coefficients variables. Continuité dans les espaces de Besov, *Comm. in Part. Diff. Eq.*, t. **10 (4)**, 1985, p. 433-465.

[7] HANOUZET (B.), JOLY (J.L.).— Formes multilinéaires sur des sous-espaces de distributions, *Publ. d'Analyse Appliquée - Uni. Bordeaux I, n°8203; Sém. Goulauic - Meyer - Schwartz Ec. Polytech.* 1982 *n°14; C.R. Acad. Sc. Paris*, , t. **294**, 1982, p. 745-747.

[8] HANOUZET (B.), JOLY (J.L.).— Bilinear maps compatibles with a system, *Research notes in Math. 89, Pitman*, 1983, p. 208-217.

[9] HANOUZET (B.), JOLY (J.L.).— Applications bilinéaires compatibles avec un opérateur hyperbolique, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. **301** 1985, p. 491-494; Ann. Inst. H. Poincaré, vol. **4**, n°4, Analyse non lin., 1987, p. 357-376.

[10] Hanouzet (B.), Joly (J.L.).— Explosions pour des problèmes hyperboliques semi-linéaires avec second membre non compatible, *Publ. d'Analyse Appliquée – Univ. Bordeaux I*, n°8518; *C.R. Acad. Sc. Paris*, **t. 301** 1985 p. 581-584.

[11] Hörmander (L.).— The analysis of linear partial differentiel operators, *Springer-Verlag*, 1983 .

[12] Murat (F.).— Compacité par compensation III, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, *8*, 1981, p. 69-102 et les articles précédents .

[13] Natalini (R.).— Formules de produit pour des distributions à valeurs dans C^N, *C.R. Acad. Sc. Paris,*, t **302**, 1986, p. 581-584 .

[14] Natalini (R.).— Multiplication de distributions et polarisation des singularités, *Thèse de Doctorat de l'Univ. Bordeaux I*, 1986 .

[15] Overguggenberger (M.).— Product of distributions, *J. für Mathematik*, band **365**, 1986, p. 1-11.

[16] Tartar (L.).— Compensated compactness and applications to partial differential equations, *Research notes in Math.*, **39**, Pitman 1979, p. 136-212.

[17] Treves (F.).— Introduction to pseudo-differential operators and Fourier integral operators, *Plenum Press*, 1980..

(Manuscrit reçu le 7 juin 1988)