ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ALAIN THOMAS

Discrépance en dimension un

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 10, nº 3 (1989), p. 369-399

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1989_5_10_3_369_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol. X, n°3, 1989

Discrépance en dimension un

ALAIN THOMAS[1]

RÉSUMÉ. — Dans cet article, je généralise le résultat de H. Faure, sur les suites de Van der Corput généralisées (en dimension un); je vérifie, sur un exemple, que cela permet d'obtenir des discrépances inférieures.

ABSTRACT. — I generalize a paper of H. Faure, about Van der Corput generalized sequences (in dimension one); I modify his example, in order to diminish the discrepancy.

Introduction

La discrépance ([1]) d'une suite finie

$$u = (u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}),$$

à valeurs dans $[0,1]$, est

$$D(u) = \sup_{0 \leq a < b \leq 1} (\operatorname{card}\{n/a \leq u_n < b\} - N(b-a)).$$

Pour une suite infinie

$$u \in [0,1]^{\mathbf{N}}$$

on s'intéressera à la discrépance définie par

$$D(u) = \overline{\lim_{N \to +\infty}} (\operatorname{Log} N)^{-1} D(u_0, \ldots u_{N-1}).$$

Schmidt [2] a démontré en 1972, que $D(u)$ n'est jamais nul. La meilleure minoration a été obtenue en 1982 par Bejian [3] :

$$D(u) > 0{,}12 \qquad \text{pour tout } u \in [0,1]^{\mathbf{N}}.$$

(1) UFR MIM, Université de Provence, 3 place Victor Hugo, 13331 Marseille cedex 3

La suite définie par Van der Corput [4] en 1935, a pour discrépance

$$D(u) = \frac{1}{3\mathrm{Log}2} \simeq 0,48 \qquad ([5],[6])$$

La suite des parties fractionnaires de $n\alpha$, a une discrépance finie, dans le cas où α est irrationnel à quotients partiels bornés [7], [1]. Cette discrépance est minimale pour $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et vaut alors

$$\left(5\mathrm{Log}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} \simeq 0,416\cdot \qquad \text{(Ramshaw, [8])}$$

En 1981, Faure [9] a défini, par généralisation de la suite de Van der Corput, des suites

S_r^α , associées à une base entière r,
et à une permutation α de $\{0,1,\dots r-1\}$.

Il a obtenu, dans le cas $r = 12$, l'encadrement

$$\frac{4828}{5181\quad \mathrm{Log}12} \leq D(S_{12}^{\sigma}) < 0,38$$

pour une certaine permutation σ_0 (ce qui représentait la plus faible discrépance connue). Récemment (début 1989), il a calculé une discrépance légèrement inférieure à celle-ci, avec $r = 36$.

Borel (J.P.) [10] a défini en 1982, un ensemble de suites, contenant les suites de Faure et celles de Ramshaw. Ces suites, qu'il appelle autoreproduites, sont associées à une famille finie ou dénombrable d'intervalles de $[0,1]$. Il donne une condition suffisante pour qu'une telle suite soit de discrépance finie, et une méthode de majoration de la discrépance.

Dans cet article, je définis un ensemble $\mathcal{U}_r$ de suites, associées aux développements en base r. Cet ensemble contient les suites S_r^σ de Faure, et sa méthode de calcul de la discrépance se généralise à $\mathcal{U}_r$ (chapitre III proposition 1). Au chapitre IV, je vérifie qu'il existe une suite u appartenant à $\mathcal{U}_{12}$, de discrépance inférieure à celle de $S_{12}^{\sigma_0}$; je calcule (proposition 2) une majoration de $D(u)$, et la valeur exacte de $D(S_{12}^{\sigma_0})$.

En posant $\qquad v_n = 12u_{12n} \qquad (n \in \mathrm{N})$

On obtient une suite auto-reproduite (associée à une famille dénombrable d'intervalles), et de discrépance au plus égale à celle de u.

II Définitions et notations

L'entier $r \in \mathbf{N}^*$ étant fixé, on définit un ensemble $\mathcal{U}_r$, de suites à valeurs dans $[0,1]$.

DÉFINITION .— *u appartient à $\mathcal{U}_r$ si, quels que soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \mathbf{N}$ tels que $k < r^n$, l'image réciproque par u de l'intervalle $[kr^{-n} \quad , \quad (k+1)r^{-n}[$ est une progression arithmétique de raison r^n.*

On pose

$$I = \{0, 1, \dots r-1\}$$
$$\overline{I} = I \cup \{r\}$$
$$I^* = \bigcup_{k=0}^{+\infty} I^k$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$ on note $[x]$ sa partie entière, et $frx = x - [x]$.

Pour toute suite s appartenant à

$$\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \quad , \quad \text{ou à } \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathbf{R}^k$$

On notera s_i son $(i+1)^{\text{ème}}$ terme

(en posant $s_i = 0$ si la suite n'a pas plus de i termes).

On pose $\pi_i s = (s_0, s_1, \dots s_{i-1})$ pour tout $i \in \mathbf{N}^*$,

$\pi_0 s = \phi$

Propriété caractéristique : u appartient à $\mathcal{U}_r$ si et seulement si il existe une application $\sigma : I^* \to I$ telle que

(i) pour tout $(\varepsilon_0, \dots \varepsilon_{n-1})$ appartenant à I^*, l'application $x \to \sigma(\varepsilon_0, \dots \varepsilon_{n-1}, x)$ soit une permutation de I; et $\sigma(\pi_i \varepsilon)$ soit différent de $r-1$ pour une infinité de valeurs de i;

(ii) pour tout $\mathbf{N} \in \mathbf{N}$, de développement $\sum_0^{+\infty} \varepsilon_i r_i$,

on a $u_N = \sum_0^{+\infty} \sigma(\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_i) r^{-i-1}$.

Démonstration. — Soit $u \in \mathcal{U}_r$; on pose

$$\sigma(\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_n) = [r^{n+1} u_N] - r[r^n u_N]$$

(pour tout $(\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_n) \in I^*$ et $N = \sum_0^n \varepsilon_i r_i$)

$\sigma(\phi) = 0$.

Cette application est à valeurs dans I.

Soient $(\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_{n-1}, x)$ et $(\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_{n-1}, y)$ deux éléments de I^*;

On pose $\quad H = \sum_0^{n-1} \varepsilon_i r_i + x r^n$ et $K = \sum_0^{n-1} \varepsilon_i r_i + y r^n$,

$$h = [r^n u_H] \quad \text{et} \quad k = [r^{n+1} u_K].$$

u_H appartient à $[hr^{-n}, (h+1)r^{-n}[$ donc, d'après la définition de $\mathcal{U}_r$, u_K y appartient aussi; par conséquent $[r^n u_H] = [r^n u_K]$; donc,

si on suppose $\sigma(\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_{n-1}, x) = \sigma(\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_{n-1}, y)$,

on a aussi $[r^{n+1} u_H] = [r^{n+1} u_K]$,

ce qui prouve que u_H appartient à $[kr^{-n-1}, (k+1)r^{-n-1}[$.

D'après la définition de $\mathcal{U}_r$, $\quad H \equiv K$ modulo r^{n+1},
d'où $x \equiv y$ modulo r
et $x = y$.

Ceci prouve la première partie de la condition (i).

Pour vérifier (i) et (ii), il reste donc à démontrer que, pour tout entier N de développement

$$N = \sum_0^{+\infty} \varepsilon_i r^i \quad ,$$

le développement de u_N est égal à $\sum_0^{+\infty} \sigma(\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_i) r^{-i-1}$.

Or l'entier $N' = \sum_{j=0}^{i} \varepsilon_j r^j$ est égal à N modulo r^{i+1} ,

d'où $[r^{i+1}u_{N'}] = [r^{i+1}u_N]$ et $[r^i u_{N'}] = [r^i u_N]$;

$\sigma(\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_i)$ est donc égal à $[r^{i+1}u_N] - r[r^i u_N]$,

c'est-à-dire au $(i+1)^{\text{ème}}$ terme du développement de u_N.

Réciproquement soient u vérifiant les conditions (i) et (ii), et un intervalle $[kr^{-n}, (k+1)r^{-n}[$;

un entier N, de développement $\sum_0^{+\infty} \varepsilon_i r^i$, appartient à l'image réciproque par u de cet intervalle si et seulement si

$$kr^{-n} = \sum_0^{n-1} \sigma(\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_i) r^{-i-1}.$$

Mais d'après la condition (i), il existe $\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_{n-1}$ uniques vérifiant cette égalité;

l'image réciproque est donc une progression arithmétique de raison r^n.

La suite $u \in \mathcal{U}_r$ et l'application σ étant fixées, on utilisera les notations suivantes :

• Quel que soit $k \in \mathbf{N}$, on associe à toute suite $\alpha \in I^k$, la suite unique $\widetilde{\alpha} \in I^k$ qui vérifie

$$\forall i < k \quad \alpha_i = \sigma(\widetilde{\alpha}_0, \ldots \widetilde{\alpha}_i).$$

On remarque que si deux suites, α et β, vérifient $\beta = \pi_i \alpha$, elles vérifient aussi $\widetilde{\beta} = \pi_i \widetilde{\alpha}$.

• On définit une application $\psi : I^* \times \overline{I} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ en posant :

$$(\text{pour } (\alpha, \gamma, x) \in I^* \times \overline{I} \times \mathbf{R} \quad \text{et} \quad k = [rfrx])$$

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \gamma, x) &= \text{card } \{i < k / \sigma(\widetilde{\alpha}, i) < \gamma\} - \gamma frx \qquad \text{si} \quad \sigma(\widetilde{\alpha}, k) \geq \gamma \\ &= -\text{card } \{i < k / \sigma(\widetilde{\alpha}, i) \geq \gamma\} + (r - \gamma) frx \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

LEMME .— *Soient $n \in \mathbf{N}^*$, h, k et γ appartenant à $\mathbf{N}$, et $\alpha \in I^{n-1}$ tels que $h < r^{n-1}$, $k < r$ et $\gamma \leq r$,*

soit $a = \sum_0^{n-2} \alpha_i r^{-i-1}$.

Si $\sigma(\widetilde{\alpha}, k) \geq \gamma$ *on a*

card $\{j < h + kr^{n-1} / a \leq u_j < a + \gamma r^{-n}\} =$ card $\{i < k / \sigma(\widetilde{\alpha}, i) < \gamma\}$ *;*

sinon

card $\{j < h + kr^{n-1} / a + \gamma r^{-n} \leq u_j < a + r^{-n+1}\} =$ card $\{i < k / \sigma(\widetilde{\alpha}, i) \geq \gamma\}$ *;*

Démonstration. — Les entiers $j < r^n$ qui vérifient

$$a \leq u_j < a + \gamma r^{-n}$$

sont, d'après la propriété caractéristique, les entiers

$$j = \sum_0^{n-2} \widetilde{\alpha}_\nu r^\nu + ir^{n-1} \quad , \quad \text{avec} \quad i \in I \quad \text{tel que} \quad \alpha(\widetilde{\alpha}, i) < \gamma.$$

Si on suppose $\sigma(\widetilde{\alpha}, k) \geq \gamma$, la condition ci-dessus implique $i \neq k$; on peut donc dire que la condition

$$(j < h + kr^{n-1} \quad \text{et} \quad a \leq u_j < a + \gamma r^{-n})$$

est équivalente à

$$(j = \sum_0^{n-2} \widetilde{\alpha}_\nu r^\nu + ir^{n-1} \quad , \quad 0 \leq i < k \quad \text{et} \quad \sigma(\widetilde{\alpha}, i) < \gamma)$$

d'où le résultat.

Vérification semblable dans le cas $\sigma(\widetilde{\alpha}, k) < \gamma$.

DÉFINITION de l'écart .— *pour toute suite finie* $v = (v_0, \ldots v_{k-1})$ *à valeur dans [0, 1], et pour* $a \in [0, 1]$, *on pose*

$$E(v, a) = card\ \{i < k / v_i < a\} - ka.$$

De la discrépance *:* $D(v)$ *est la borne supérieure de*

$$E(v, b) - E(v, a) \qquad (\textit{pour } a \textit{ et } b \textit{ dans } [0, 1]).$$

Pour une suite infinie v *à valeurs dans [0, 1],*

$$D(v) = \limsup_{k \to +\infty} (\operatorname{Log} k)^{-1} D(v_0, \ldots v_{k-1})$$

III. Calcul de l'écart

PROPOSITION 1.— *Soient* $n \in \mathbf{N}^*$

$n \in \mathbf{N}$ *tel que* $N < r^n$

$\sum_0^{n-1} \varepsilon_i r^i$ *le développement de* N

$\alpha \in I^{n-1} \times \overline{I}$

$\alpha' \in \overline{I}^n$ *telle que, pour* $1 \leq i \leq n$

$\alpha'_{i-1} = \alpha_{i-1}$ *si* $i = n$ *ou si* $\sigma(\pi_i \widetilde{\alpha}, \varepsilon_i) \geq \alpha'_i$

$\alpha'_{i-1} = \alpha_{i-1} + 1$ *sinon.*

Alors, en posant $a = \sum_0^{n-1} \alpha_i r^{-i-1}$ *, on a*

$$E(\pi_N u, a) = \sum_0^{n-1} \psi(\pi_i \alpha, \alpha'_i, N r^{-i-1})$$

Démonstration. — On vérifie d'abord la proposition dans le cas $n = 1$

Dans ce cas $\sum_0^{n-1} \psi(\pi_i \alpha, \alpha'_i, N r^{-i-1}) = \psi(\phi, ar, Nr^{-1}$ est égal

à card $\{i < N/\sigma(i) < ar\} - arNr^{-1}$ si $\sigma(N) \geq ar$,

à $-$ card $\{i < N/\sigma(i) \geq ar\} + (r - ar)Nr^{-1}$ sinon,

donc à $E(\pi_N u, a)$, puisque $u_i = \sigma(i) r^{-1}$ $\forall i < r$.

Dans le cas n quelconque, on utilise pour la récurrence l'entier

$M = \sum_0^{n-2} \varepsilon_i r^i$ et les réels $a' = \sum_0^{n-2} \alpha_i r^{-i-1}$

$$b = \sum_0^{n-3} \alpha_i r^{-i-1} + \alpha'_{n-2} r^{-n+1}$$

et on écrit

$$\begin{aligned} E(\pi_N u, a) - E(\pi_M u, b) &= E(\pi_N u, a) - E(\pi_N u, b) + E(\pi_N u, b) \\ &\quad - E(\pi_M u, b) \\ E(\pi_N u, a) - E(\pi_N u, b) &= \mathrm{card}\{j < N/u_j < a\} - \mathrm{card}\{j < N/u_j < b\} \\ &\quad - N(a - b). \end{aligned}$$

On applique le lemme, compte tenu que

$$N = M + \varepsilon_{n-1} r^{n-1}$$
$$a = a' + \alpha_{n-1} r^{-n}$$

$$b = a' \text{ si } \sigma(\pi_{n-1}\widetilde{\alpha}, \varepsilon_{n-1}) \geq \alpha_{n-1}$$
$$a' + r^{-n+1} \text{ sinon ;}$$

$E(\pi_N u, a) - E(\pi_N u, b)$ est alors égal à

$\text{card}\{i < \varepsilon_{n-1} / \sigma(\pi_{n-1}\widetilde{\alpha}, i) < \alpha_{n-1}\} - N\alpha_{n-1} r^{-n}$

si $\sigma(\pi_{n-1}\widetilde{\alpha}, \varepsilon_{n-1}) \geq \alpha_{n-1}$

$-\text{card}\{i < \varepsilon_{n-i} / \sigma(\pi_{n-1}\widetilde{\alpha}, i) \geq \alpha_{n-1}\} + N(r - \alpha_{n-1}) r^{-n}$ sinon,

donc dans les deux cas à $\psi(\pi_{n-1}\alpha, \alpha_{n-1}, N r^{-n})$.

D'autre part $E(\pi_N u, b) - E(\pi_M u, b) = \text{card}\{i \in \mathbf{N} / M \leq i < N$ et $u_i < b\} - (N - M) b$

(avec $N - M$ multiple de r^{n-1} et $b r^{n-1}$ entier) est nul d'après la définition de U_r;

donc $E(\pi_N u, a) = E(\pi_M u, b) + \psi(\pi_{n-1}\alpha, \alpha_{n-1}, N r^{-n})$.

Si on suppose la proposition 1 vérifiée au rang $n-1$, on peut l'appliquer à l'entier M et à la suite $\beta = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-3}, \alpha'_{n-2})$ $\quad (\Rightarrow \beta'_i = \alpha'_i \, \forall i \leq n-2)$ d'où $E(\pi_M u, b) = \displaystyle\sum_0^{n-2} \psi(\pi_i \alpha, \alpha'_i, M r^{-i-1})$;

elle est alors vérifiée au rang n, compte tenu que $M r^{-i-1} \equiv N r^{-i-1}$ modulo 1, pour tout $i \leq n-2$. ∎

IV. Exemple de calcul de discrépance

Dans ce chapitre r est égal à 12.

τ désigne la composée des permutations circulaires (1 7 6 9 8) et (2 3 10 4 5)

τ^* la composée de (0 3 10 4 5 2) et (1 7 6 9 11 8)

$\mathcal{E}$ l'ensemble des suites $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in I^*$ telles que

$$\begin{aligned} n \geq 6 \text{ et } (\alpha_{n-6}, \alpha_{n-5}, \ldots, \alpha_{n-1}) = {} & (0, 11, 4, 0, 11, 4) \\ & \text{ou } (1, 3, 8, 1, 3, 8) \\ & \text{ou } (11, 0, 7, 11, 0, 7) \\ & \text{ou } (10, 8, 3, 10, 8, 3) \end{aligned}$$

On définit par récurrence une application $\sigma : I^* \to I$ en posant : $\sigma(\emptyset) = 0$

$$\sigma(\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_n) = \begin{cases} \tau^*\varepsilon_n & \text{si } (\sigma(\pi_1\varepsilon), \ldots \sigma(\pi_n\varepsilon)) \text{ appartient à } \mathcal{E}, \\ \tau\varepsilon_n & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite u est définie par

$$u(\sum_0^{+\infty} \varepsilon_j r^i) = \sum_0^{+\infty} \sigma(\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_i) r^{-i-1} \quad (\forall \varepsilon \in I^*).$$

PROPOSITION 2.— $D(u) \leq \dfrac{1}{Log\,12}\left(\dfrac{4828}{5181} - 2 \cdot 10^{-5}\right)$.

D'autre part, la suite v (étudiée en [9]), qui à tout entier N de développement

$$N = \sum_0^{n-1} \varepsilon_i r^i, \text{ associe}$$

$$v_N = \sum_0^{n-1} \tau(\varepsilon_i) r^{-i-1},$$

vérifie $D(v) = \dfrac{4828}{5181\ Log\ 12}$

Les lemmes qui suivent serviront à démontrer cette proposition.

La fonction ψ ayant été définie au chapitre II, on pose aussi

$$\psi^+(x) = \sup_{\gamma \in \overline{I}} \psi(\emptyset, \gamma, x)$$

$$\psi^-(x) = \inf_{\gamma \in \overline{I}} \psi(\emptyset, \gamma, x)$$

f_4 fonction paire de période 1, définie par

$$f_4(x) = \begin{cases} 4(r^{-1} - x) & \text{si } x \in [0, r^{-1}[\\ 0 & \text{si } x \in \left[r^{-1}, \dfrac{1}{2}\right[\end{cases}$$

$$\varphi(\alpha, \gamma, x) = \psi(\alpha, \gamma, x) - \psi^-(x) + f_4(x)$$

$$\varphi(x) = \sup_{\gamma \in \overline{I}} \varphi(\emptyset, \gamma, x) \qquad (= (\psi^+ - \psi^- + f_4)(x)).$$

Valeurs de la fonction $r\varphi(\alpha, \gamma, xr^{-1})$ (dans le cas $\alpha \notin \mathcal{E}$) aux points $x = 0, 1, 1 + \dfrac{5}{7}, 2$, etc (fonction périodique de période 12) (les nombres entre parenthèses représentent la dérivée de cette fonction).

x	0	1	$1+\frac{5}{7}$	2	$2+\frac{2}{5}$	3	$3+\frac{3}{7}$	4	$4+\frac{4}{5}$	5	$5+\frac{1}{7}$	6	$6+\frac{6}{7}$	7	$7+\frac{1}{5}$	8	$8+\frac{4}{7}$	9	$9+\frac{3}{5}$	10	$10+\frac{2}{7}$	11	12
cas $\gamma = 0$	4	0	0	2	0	0	0	4	$\frac{12}{5}$	3	$\frac{12}{7}$	0	$+\frac{12}{7}$	3	$\frac{12}{5}$	4	0	0	0	2	0	0	4
		(−4)	(0)	(7)	(−5)	(0)	(0)	(7)	(−2)	(3)	(−9)	(−2)	(2)	(9)	(−3)	(2)	(−7)	(0)	(0)	(5)	(−7)	(0)	(4)
cas $\gamma = 1$	4	11	$\frac{72}{7}$	12	$\frac{48}{5}$	9	$\frac{60}{7}$	12	$\frac{48}{5}$	10	$\frac{60}{7}$	6	$+\frac{48}{7}$	8	$\frac{36}{5}$	8	$\frac{24}{7}$	3	$\frac{12}{5}$	4	$\frac{12}{7}$	1	4
		(7)	(−1)	(6)	(−6)	(−1)	(−1)	(6)	(−3)	(2)	(−10)	(−3)	(1)	(8)	(−4)	(1)	(−8)	(−1)	(−1)	(4)	(−8)	(−1)	(3)
cas $\gamma = 2$	4	10	$\frac{60}{7}$	10	$\frac{36}{5}$	6	$\frac{36}{7}$	8	$\frac{24}{5}$	5	$\frac{24}{7}$	0	0	1	0	0	$\frac{12}{7}$	6	$\frac{24}{5}$	6	$\frac{24}{7}$	2	4
		(6)	(−2)	(5)	(−7)	(−2)	(−2)	(5)	(−4)	(1)	(−11)	(−4)	(0)	(7)	(−5)	(0)	(3)	(10)	(−2)	(3)	(−9)	(−2)	(2)
cas $\gamma = 3$	4	9	$\frac{48}{7}$	8	$\frac{24}{5}$	3	$\frac{12}{7}$	4	0	0	0	6	$\frac{36}{7}$	6	$\frac{24}{5}$	4	$\frac{36}{7}$	9	$\frac{36}{5}$	8	$\frac{36}{7}$	3	4
		(5)	(−3)	(4)	(−8)	(−3)	(−3)	(4)	(−5)	(0)	(0)	(7)	(−1)	(6)	(−6)	(−1)	(2)	(9)	(−3)	(2)	(−10)	(−3)	(1)
cas $\gamma = 4$	4	8	$\frac{36}{7}$	6	$\frac{36}{5}$	12	$\frac{72}{7}$	12	$\frac{36}{5}$	7	$\frac{48}{7}$	12	$+\frac{72}{7}$	11	$\frac{48}{5}$	8	$\frac{60}{7}$	12	$\frac{48}{5}$	10	$\frac{48}{7}$	4	4
		(4)	(−4)	(3)	(3)	(8)	(−4)	(3)	(−6)	(−1)	(−1)	(6)	(−2)	(5)	(−7)	(−2)	(1)	(8)	(−4)	(1)	(−11)	(−4)	(0)
cas $\gamma = 5$	4	7	$\frac{24}{7}$	4	$\frac{24}{5}$	9	$\frac{48}{7}$	8	$\frac{12}{5}$	2	$\frac{12}{7}$	6	$+\frac{24}{7}$	4	$\frac{12}{5}$	0	0	3	0	0	0	5	4
		(3)	(−5)	(2)	(2)	(7)	(−5)	(2)	(−7)	(−2)	(−2)	(5)	(−3)	(4)	(−8)	(−3)	(0)	(7)	(−5)	(0)	(0)	(7)	(−1)
cas $\gamma = 6$	4	6	$\frac{12}{7}$	2	$\frac{12}{5}$	6	$\frac{24}{7}$	4	$\frac{36}{5}$	9	$\frac{60}{7}$	12	$\frac{60}{7}$	9	$\frac{36}{5}$	4	$\frac{24}{7}$	6	$\frac{12}{5}$	2	$\frac{12}{7}$	6	4
		(2)	(−6)	(1)	(1)	(6)	(−6)	(1)	(4)	(9)	(−3)	(4)	(−4)	(3)	(−9)	(−4)	(−1)	(6)	(−6)	(−1)	(−1)	(6)	(−2)

Valeurs de la fonction $r\varphi(\alpha,\gamma,xr^{-1})$,

pour $\alpha \in \mathcal{E}$, aux points où elle diffère de la précédente.

x	0		1		$1+\frac{5}{7}$		2		$2+\frac{2}{5}$		3
cas $\gamma = 1$	4	(-5)	-1	(-1)	$-\frac{12}{7}$	(6)	0	(6)	$\frac{12}{5}$	(11)	9
cas $\gamma = 2$	4	(-6)	-2	(-2)	$-\frac{24}{7}$	(5)	-2	(5)	0	(10)	6
cas $\gamma = 3$	4	(-7)	-3	(-3)	$-\frac{36}{7}$	(4)	-4	(4)	$-\frac{12}{5}$	(9)	3

Cas $\gamma \in \{7,8,\ldots 12\}$:

le calsul de $\varphi(\alpha,\gamma,x)$ donne la même valeur que pour $\varphi(\alpha,r-\gamma,1-x)$

Autre notation : soient $n \in \mathbf{N}^*$

$N \in \mathbf{N}$ tel que $N < r^n$

$\alpha \in I^{n-1} \times \overline{I}$

il leur correspond deux suites, ε et α', telles que $n, N, \varepsilon, \alpha, \alpha'$ vérifient les conditions de la proposition 1 ;

on notera $X_i(\alpha, N)$, ou X_i, l'expression

$X_i(\alpha,N) = \varphi(\pi_i\alpha, \alpha'_i, Nr^{-i-1})$.

LEMME 0.1.— *Soient* $n \in \mathbf{N}^*$

$N \in \mathbf{N}$ *tel que* $N < r^n$

$\alpha \in I^{n-1} \times \overline{I}$.

(i) Dans le cas où N n'est pas multiple de r,

en posant $M = r^n - N$

$\beta_{n-1} = r - \alpha_{n-1}$

$\beta_i = r - 1 - a_i$ *(pour* $0 \le i \le n-2$*)*

on a $X_i(\beta, M) = X_i(\alpha, N)$ $(0 \le i \le n-1)$

(ii) Soit m le plus grand entier tel que $Nr^{-m} \in \mathbf{N}$,

$N' = Nr^{-m}$

$a = \sum_{0}^{n-1} \alpha_i r^{-i-1}$ et $c = \sum_{0}^{n-m-1} \alpha_{m+i} r^{-i-1}$;

alors $|E(\pi_N, u, c) - E(\pi_N u, a)|$ est borné indépendamment de n, N et α.

Démonstration. — (i) soient $\varepsilon, \alpha', \eta, \beta^+$ tels que $(n, N, \varepsilon, \alpha, \alpha')$, et $(n, M, \eta, \beta, \beta')$, vérifient les conditions de la proposition 1;

$X_i(\beta, M) = \varphi(\pi_i\beta, \beta'_i, Mr^{-i-1})$;

comme $Mr^{-i-1} \equiv -Nr^{-i-1}$ modulo 1,

et $(\pi_i\beta \in \mathcal{E})$ équivaut à $(\pi_i\alpha \in \mathcal{E})$ (pour $0 \leq i \leq n-1$), on a donc $X_i(\beta, M) = \varphi(\pi_i\alpha, r - \beta'_i, Nr^{-i-1})$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que $r - \beta'_i$ est égal à α'_i; en remarquant que $\eta_i = 11 - \varepsilon_i$ (pour $1 \leq i \leq n-1$),

$$\begin{aligned} \sigma(\pi_i\widetilde{\beta}, \eta_i) + \sigma(\pi_i\widetilde{\alpha}, \varepsilon_i) = & \tau^*(11 - \varepsilon_i) + \tau^*(\varepsilon_i) \quad (\text{si } \pi_i\alpha \in \mathcal{E}) \\ & \tau(11 - \varepsilon_i)) + \tau(\varepsilon_i) \qquad (\text{sinon}) \end{aligned}$$

est égal à 11 dans les deux cas, on en déduit par récurrence, en partant de $i = n$, l'égalité $r - \beta'_{i-1} = \alpha'_{i-1}$ (pour $1 \leq i \leq n$).

(ii) En notant γ la suite $(\alpha_m, \dots, \alpha_{n-1})$, il existe deux suites μ et γ' telles que $(n - m, N', \mu, \gamma, \gamma')$ vérifie les conditions de la proposition 1.

On a $\mu_i = \varepsilon_{m+i}$ et, pour $i \geq 6$, $(\pi_i\gamma \in \mathcal{E})$ équivaut à $(\pi_{m+i}\alpha \in \mathcal{E})$;

d'où $\sigma(\pi_i\widetilde{\gamma}, \mu_i) = \sigma(\pi_{m+i}\widetilde{\alpha}, \varepsilon_{m+i})$ $(6 \leq i \leq n - m - 1)$;

ce qui permet de vérifier par récurrence

$\gamma'_i = \alpha'_{m+i}$ $(5 \leq i \leq n - m - 1)$;

d'où $\psi(\pi_i\gamma, \gamma'_i, N'r^{-i-1}) = \psi(\pi_{m+i}\alpha, \alpha'_{m+i}, Nr^{-m-i-1})$ $(6 \leq i \leq n - m - 1)$.

Compte tenu que $\psi(\pi_j\alpha, \alpha'_j, Nr^{-j-1})$ est nul pour $j < m$, on obtient, en utilisant la proposition 1,

$|E(\pi_N, u, c) - E(\pi_N u, a)| \leq 12S$, où S est le maximum de la fonction $|\psi|$. ∎

1) Minoration de $E(\pi_N u, a)$.

LEMME 1.1. — *Soient $n \in \mathbf{N}^*$*
$N \in \mathbf{N}$ tel que $n < r^n$ et $Nr^{-1} \notin \mathbf{Z}$
$a \in [0, 1]$ tel que $ar^n \in \mathbf{N}$.

Alors $E(\pi_N u, a) \geq \sum_{0}^{n-1} (\psi^- - f_4)(Nr^{-i-1})$.

Démonstration.—il existe $\alpha \in I^{n-1} \times \overline{I}$ tel que $a = \sum_{0}^{n-1} \alpha_i r^{-i-1}$; l'inégalité à démontrer équivaut à

$$\sum_{0}^{n-1} X_i(\alpha, N) \geq 0.$$

Après avoir remarqué que $X_i \geq 0$ si $\pi_i\alpha \notin \mathcal{E}$, on va chercher à minorer $S(i) = X_{i-2} + X_{i+1} + X_i$, dans le cas où $\pi_i\alpha$, ou $\pi_{i+3}\alpha$, appartient à $\mathcal{E}$.

Soit $\sum_{0}^{n-1} \varepsilon_i r^i$ le développement de N; on notera, dans cette démonstration,

$$\begin{aligned} t_i &= fr(Nr^{-i-1}) \\ &= \varepsilon_i r^{-1} + \varepsilon_{i-1} r^{-2} + \cdots + \varepsilon_0 r^{-i-1}. \end{aligned}$$

On remarque que, pour tout i tel que $\pi_i\alpha$ appartienne à $\mathcal{E}$, $\pi_j\alpha$ n'y appartient pas pour $j = i-1, i-2, i-4$ ou $i-5$.

<u>1</u> Cas $\pi_i\alpha \in \mathcal{E}$ et $\pi_{i+3}\alpha \in \mathcal{E}$:

on va vérifier $S(i) \geq 0$;

$S(i) = \varphi(\emptyset, \alpha'_{i-2}, t_{i-2}) + \varphi(\emptyset, \alpha'_{i-1}, t_{i-1}) + \varphi(\pi_i\alpha, \alpha'_i, t_i)$ avec $\pi_i\alpha \in \mathcal{E}$.

– Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i) = (11, 4, 0)$:

α'_i vaut 0 ou 1 donc $r\varphi(\pi_i\alpha, \alpha'_i, t_i) \geq -\dfrac{12}{7}$.

Si α'_{i-1} vaut 4,

$r\varphi(\emptyset, 4, t_{i-1}) \geq 4 \Rightarrow S(i) > 0$.

Si $\alpha'_{i-1} = 5$, alors d'après la définition de la suite α', $\tau^*\varepsilon_i < \alpha'_i$

$\Rightarrow \alpha'_i = 1$ et $\varepsilon_i = 2$;

mais alors $\varphi(\pi_i\alpha, \alpha'_i, t_i) \geq 0$ et $S(i) \geq 0$.

– Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, a_i) = (3, 8, 1)$:

$\alpha'_i = 1$ ou 2 d'où $r\varphi(\pi'_i\alpha, \alpha'_i, t_i) \geq -\dfrac{24}{7}$;

d'où le résultat si $\alpha'_{i-2} = 4$, ou si $\alpha'_{i-1} = 8$;

si ce n'est pas le cas, $\alpha'_{i-2} = 3$ et $\alpha'_{i-1} = 9$;

$\alpha'_{i-2} = \alpha_{1-2} \Rightarrow \tau\varepsilon_{i-1} \geq \alpha'_{i-1}$

$\varepsilon_{i-1} = 3, 6$ ou 11;

$r\varphi(\emptyset, 9, t_{i-1}) \geq 4$ si ε_{i-1} vaut 3 ou 11

$\geq \frac{5}{2}$ si $\varepsilon_{i-1} = 6$ et $\varepsilon_{i-2} < 6$;

dans le cas $\varepsilon_{i-2} \geq 6$, on utilise $r\varphi(\emptyset, 3, t_{i-2}) \geq 3$;

d'autre part $\alpha'_{i-1} = \alpha_{i-1} + 1 \Rightarrow \tau^*\varepsilon_i < \alpha'_i$

$\varepsilon_i = 2$ ou 8

$r\varphi(\pi_i\alpha, \alpha'_i, t_i) \geq -2$,

donc $S(i) > 0$

– Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i) = (0,7,11)$ ou $(8,3,10)$:

on se ramène aux deux cas précédents par le lemme 0.1 (i).

2 Cas $\pi_i\alpha \notin \mathcal{E}$ et $\pi_{i+3}\alpha \in \mathcal{E}$: ($S(i) = \sum_{j=i-2}^{i} \varphi(\emptyset, \alpha'_j, t_j)$ d'après la remarque du début.

– Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i) = (11,4,0)$;

si $\alpha'_{i-1} = 4$, on a $rS(i) \geq 4$;

si $\alpha'_{i-1} = 5$, alors $\tau\varepsilon_i < \alpha'_i$

$\Rightarrow \alpha'_i = 1$ et $\varepsilon_i = 0$

$r\varphi(\emptyset, \alpha'_i, t_i) \geq 4$

$rS(i) \geq 4$.

– Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i) = (3,8,1)$:

on minore $r\varphi(\emptyset, \alpha'_{i-2}, t_{i-2}) + r\varphi(\emptyset, \alpha'_{i-1}, t_{i-1})$ de la même façon qu'en 1; comme $\varphi(\emptyset, \alpha'_i, t_i) \geq 0$, on en déduit $rS(i) \geq \frac{5}{2}$.

– Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i) = (0,7,11)$ ou $(8,3,10)$:

on applique le lemme 0.1 (i).

3 Si on suppose seulement $\pi_i\alpha \in \mathcal{E}$ (et $i \leq n-1$), l'expression de $S(i)$ est la même qu'en 1, mais α'_i est quelconque dans $\overline{I}$.

– Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}) = (11,4)$:

on va vérifier $rS(i) \geq -4$;

on a en effet $r\varphi(\pi_i\alpha, \alpha'_i, t_i) \geq -4$, sauf dans les cas ($\alpha'_i = 3$ et $\varepsilon_i = 1$) ou ($\alpha'_i = 9$ et $\varepsilon_i = 10$);

or dans le premier cas $\tau^*(\varepsilon_i) \geq \alpha'_i$

$$\Rightarrow \alpha'_{i-1} = 4, \qquad \text{d'où } rS(i) > -4;$$

dans le second, on minore $rS(i)$ par $r\varphi(\emptyset,5,t_{i-1}) + r\varphi(\pi_i\alpha,9,10r^{-1} + t_{i-1}r^{-1})$;

le second terme étant au moins égal à -4 si $rt_{i-1} \geq 8$, et le premier à $\frac{12}{7}$ si $rt_{i-1} \leq 7 + \frac{1}{5}$, on a bien $rS(i) \geq -4$ dans ce cas;

si $rt_{i-1} \in \left[7 + \frac{1}{5}, 8\right]$, $rS(i) \geq 3(8 - rt_{i-1}) - 3(2 - t_{i-1})$
≥ -4

– Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}) = (3,8)$:

on vérifie la majoration $rS(i) \geq -\frac{5}{2}$, en minorant $r\varphi(\emptyset, \alpha'_{i-2}, t_{i-2}) + r\varphi(\emptyset, \alpha'_{i-1}, t_{i-1})$ de la même manière qu'en 1,

c'est-à-dire par 4, ou par $\frac{5}{2}$ dans le cas $\varepsilon_{i-1} = 6$;

d'où la minoration de $rS(i)$, compte tenu que, si $\varepsilon_{i-1} = 6$, $r\varphi(\pi_i\alpha, \alpha'_i, t_i) = r\varphi(\pi_i\alpha, \alpha'_i, \varepsilon_i r^{-1} + 6r^{-2} + t_{i-2}r^{-2})$ est minoré par $-\frac{19}{4}$, quels que soient α'_i, ε_i et t_{i-2}.

– Cas $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}) = (0,7)$ ou $(8,3)$: en appliquant le lemme 0.1 (i). ∎

Minoration de $\sum_{0}^{n-1} X_i$:

soit $J = \{i \leq n - 3 / \pi_i\alpha \notin \mathcal{E}$ et $\pi_{i+3}\alpha \in \mathcal{E}\}$;

à tout $i \in J$ on peut associer $h_i \in \mathbf{N}$, maximal, tel que $i + 3h_i \leq n-1$ et $(\alpha_{i-3}, \alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}) = (\alpha_{i-3+3j}, \alpha_{i-2+3j}, \alpha_{i-1+3j}) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots h_i\}$.

Etant donné $i \in J$, d'après les minorations faites en 2 et 3 on a $S(i) + S(i + 3h_i) \geq 0$;

avec 1 on en déduit $S(i) + S(i+3) + \cdots + S(i + 3h_i) \geq 0$;

mais d'après la remarque faite au début de la démonstration, les intervalles $K(i) = \{i-2, i-1, \dots, i+3h_i\}$ sont disjoints deux à deux pour $i \in J$.

Soit $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que $\pi_i\alpha \notin \mathcal{E}$, il existe $h \in \mathbf{N}^*$, minimal, tel que $\pi_{i-3h}\alpha \notin \mathcal{E}$;

on a alors $i - 3h \in J$ et $i \in K(i-3h)$; par conséquent, en notant H le complémentaire de $\bigcup_{i \in J} K(i)$ dans $\{0, 1, \cdots n-1\}$, tout $i \in H$ vérifie $\pi_i\alpha \notin \mathcal{E}$ donc $X_i \geq 0$;

$$\begin{aligned}\sum_0^{n-1} X_i &= \sum_{i\in H} X_i + \sum_{i \in J}(S(i) + S(i+3) + \cdots + S(i+3h_i)) \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

2) Développements et notations associées à la fonction φ.

Valeurs et dérivées de la fonction $r\varphi(xr^{-1})$ (périodique) :

x	0		1		$1+\frac{5}{7}$		2		$2+\frac{2}{5}$		3		$3+\frac{3}{7}$		4		$4+\frac{4}{5}$		5		$5+\frac{1}{7}$		6
$r\varphi(xr^{-1})$	4		11		$\frac{72}{7}$		12		$\frac{48}{5}$		12		$\frac{72}{7}$		12		$\frac{48}{5}$		11		$\frac{72}{7}$		12
		(7)		(-1)		(6)		(-6)		(4)		(-4)		(3)		(-3)		(7)		(-5)		(2)	

x		$6+\frac{6}{7}$		7		$7+\frac{1}{5}$		8		$8+\frac{4}{7}$		9		$9+\frac{3}{5}$		10		$10+\frac{2}{7}$		11		12
$r\varphi(xr^{-1})$		$\frac{72}{7}$		11		$\frac{48}{5}$		12		$\frac{72}{7}$		12		$\frac{48}{5}$		12		$\frac{72}{7}$		11		4
	(-2)		(5)		(-7)		(3)		(-3)		(4)		(-4)		(6)		(-6)		(1)		(-7)	

LEMME 2.1. — *Soient $N \in \mathbf{Z}$, non multiple de r,*
n l'entier minimal tel que $|Nr^{-n}| < 1$.

Il existe deux suites $\varepsilon \in \mathbf{Z}^n$ et $t \in \mathbf{R}^n$ telles que

$$N = \sum_0^{n-1} \varepsilon_i r^i$$

$$t_i = \sum_0^{i} \varepsilon_j r^{j-i-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \text{ linéaire affine sur } [\varepsilon_i r^{-1}, t_i] \text{ ou } [t_i, \varepsilon_i r^{-1}] \\ 1 \leq |\varepsilon_i| \leq 11 \end{array}\right\} \textit{(pour } 0 \leq i \leq n-1\textit{)}$$

Démonstration. — on définit ces suites par récurrence en posant :

$$\begin{aligned} t_{n-1} &= Nr^{-n} && \text{et, pour } 0 \le i \le n-1 \\ \varepsilon_i &= [rt_i] && \text{si } \varphi \text{ admet un minimum local en } t_i \\ & && \text{ou un maximum local} \\ & && \text{ou si } \varphi'(t_i) < 0 \\ &= [rt_i] + 1 && \text{si } \varphi'(t_i) > 0 \\ t_{i-1} &= rt_i - \varepsilon_i \end{aligned}$$

On vérifie par récurrence (en partant de $i = n-1$) :

$|t_i| < 1$ et $t_i r^{i+1} \in \mathbf{Z}$ (pour $-1 \le i \le n-1$); $|\varepsilon_i| \le 11$ $(0 \le i \le n-1)$;

en particulier $|t_{-1}| < 1$ et $t_{-1} \in \mathbf{Z}$ donc $t_{-1} = 0$.

Par récurrence, $t_i r^i \notin \mathbf{Z}$ (pour $0 \le i \le n-1$) donc $t_i \neq 0$ et, d'après les variations de $\varphi, \varepsilon_i \neq 0$.

La quatrième condition est donc vérifiée; les deux premières sont évidentes et la troisième se déduit du tableau de φ. ∎

Notations : Soient I' l'ensemble des $k \in \mathbf{Z}$ tels que $1 \le |k| \le 11$

$$I'^* = \bigcup_0^{+\infty} I'^h$$

$\mu(x,k)$ la dérivée à droite de φ en kr^{-1} (pour $k \in I'$, $x \in R^+$) ou sa dérivée à gauche si x réel négatif

$$\begin{aligned} \lambda(x,k) &= -\mu(x,k) \text{ si } x \ge 0 \\ &\quad\ \mu(x,k) \text{ si } x < 0. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots \varepsilon_{n-1})$ appartenant à I'^*, on pose

$$S(\varepsilon) = \frac{\varepsilon_{n-1}}{|\varepsilon_{n-1}|} \sum_0^{n-1} \varepsilon_i r^{i-n-1}$$

$S(\emptyset) = 0$

LEMME 2.2. — *Dans les conditions du lemme 2.1,*

$$\sum_0^{n-1} \varphi(Nr^{-i-1}) = \sum_0^{n-1} \varphi(\varepsilon_i r^{-1}) - \sum_1^{n-1} \lambda(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) S(\pi_i \varepsilon).$$

Démonstration. — pour $1 \le i \le n-1$, on a $t_i = \varepsilon_i r^{-1} + t_{i-1} r^{-1}$ et, par linéarité, $\varphi(Nr^{-i-1}) = \varphi(t_i) = \varphi(\varepsilon_i r^{-1}) + \mu(t_{i-1}, \varepsilon_i) t_{i-1} r^{-1}$;

$t_{i-1} r^{-1} = \dfrac{\varepsilon_{i-1}}{|\varepsilon_{i-1}|} S(\pi_i \varepsilon)$; d'autre part, $t_{i-1} r^{-1} = \varepsilon_{i-1} r^{-2} + t_{i-2} r^{-2}$ a même signe que ε_{i-1} car $|\varepsilon_{i-1}| \ge 1$ et $|t_{i-2}| < 1$;

d'où $\mu(t_{i-1}, \varepsilon_i) t_{i-1} r^{-1} = -\lambda(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) S(\pi_i \varepsilon)$. ∎

Autres notations : Pour $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \in I'^*$, soient $\widetilde{\varphi}(\varepsilon) = \sum_0^{n-1} \varphi(\varepsilon_i r^{-1}) - \sum_1^{n-1} \lambda(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) S(\pi_i \varepsilon)$ et $K(\varepsilon)$ l'ensemble des $i \leq n$ tels que $(\varepsilon_{i-8}, \ldots \varepsilon_{i-1})$ ou $(-\varepsilon_{i-8}, \ldots -\varepsilon_{i-1})$ soit égal à $(4,1,-2,4,1,-2,4,1)$ ou $(6,1,-3,6,1,-3,6,1)$;

$\chi(\varepsilon) = \operatorname{card} K(\varepsilon)$ et $\delta(\varepsilon) = \widetilde{\varphi}\varepsilon - 6 \cdot 10^{-5} \chi_\varepsilon - \left(\frac{4828}{5181} - 2 \cdot 10^{-5}\right) n$.

3) Majoration de $E(\pi_N u, a)$.

LEMME 3.1.— *Soient* $N \in \mathbf{N}$, *non multiple de* r,
$\varepsilon' = (\varepsilon'_0, \ldots \varepsilon'_{n-1})$ *la suite qui lui est associée au lemme 2.1*
$a \in [0,1]$ *tel que* $ar^n \in \mathbf{N}$.

Alors, $E(\pi_N u, a) \leq \sum_0^{n-1} \psi^+(Nr^{-i-1}) - r^{-2} \chi \varepsilon'$.

Démonstration.— soient $\varepsilon \in I^n$ tel que $N = \sum_0^{n-1} \varepsilon_i r^i$

$\alpha \in I^{n-1} \times \overline{I}$ tel que $a = \sum_0^{n-1} \alpha_i r^{-i-1}$

t la suite définie au lemme 2.1

$Y_i = \varphi(_i) - \varphi(\pi_i \alpha, \alpha'_i, t_i)$ $(0 \leq i \leq n-1)$;

On a $\sum_0^{n-1} \psi^+(Nr^{-i-1}) - E(\pi_N u, a) = \sum_0^{n-1} Y_i$ et $Y_i \geq 0$ pour tout i. ∎

Soit $(n_i)_{0 \leq i \leq h-1}$ la suite strictement croissante d'entiers telle que $K(\varepsilon') = \{n_i\}_{0 \leq i \leq h-1}$;

comme $n_{i+1} \geq n_i + 3$ pour tout i on a en posant $K' = \{n_{3i}\}_{0 \leq 3i \leq h-1}$,

$$\sum_0^{n-1} Y_i \geq \sum_{i \in K'} \sum_{j=i-9}^{i-1} Y_j \text{ et } \operatorname{card} K' \geq \frac{h}{3};$$

il suffit donc de minorer $\sum_{j=i-9}^{i-1} Y_j$ par $3r^{-2}$ pour tout $i \in K'$.

1[er]cas : Si $(\varepsilon'_{i-8}, \ldots \varepsilon'_{i-1} = (4,1,-2,4,1,-2,4,1)$, on a deux développements de t_{i-1} :

$t_{i-1} = \sum_{j=i-8}^{i-1} \varepsilon'_j r^{j-1} + t_{i-9} r^{-8}$ d'après le lemme 2.1, et, comme $t_{i-1} \equiv Nr^{-i}$ modulo 1, $fr\ t_{i-1} = \sum_{j=i-8}^{i-1} \varepsilon_j r^{j-1} + fr(t_{i-9}) r^{-8}$;

d'où $(\varepsilon_{i-7}, \ldots \varepsilon_{i-1}) = (1, 10, 3, 1, 10, 3, 1)$.

– Si $(\alpha'_{i-7}, \ldots, \alpha'_{i-1}) = (1, 11, 4, 1, 11, 4, 1)$,

on en déduit $(\alpha_{i-7}, \ldots, \alpha_{i-2}) = (0, 11, 4, 0, 11, 4)$;

$Y_{i-1} \geq 1$ car $\pi_{i-1}\alpha \in \mathcal{E}$

$\alpha'_{i-1} = 1$

$fr\ t_{i-1} \in [r^{-1}, 2r^{-1}]$.

– Si $\alpha'_{i-1} \neq 1$,

quelle que soit sa valeur on a $Y_{i-1} \geq r^{-1}$.

– Si $\alpha'_{i-2} \neq 4$:

$t_{i-2} = Nr^{-i+1}$ modulo 1, donc $fr\ t_{i-2}$ appartient à $[3r^{-1} + 10r^{-2}, 3r^{-1} + 11r^{-2}]$; alors $Y_{i-2} \geq 3r^{-2}$.

– Si $\alpha'_{i-3} \neq 11$:

$fr\ t_{i-3} \in [10r^{-1}, 11r^{-1}] \Rightarrow Y_{i-3} \geq r^{-1}$.

– De même si $\alpha'_{i-4} \neq 1$ ou $\alpha'_{i-5} \neq 4$ ou $\alpha'_{i-6} \neq 11$ ou $\alpha'_{i-7} \neq 1$.

2$^{\text{ième}}$cas : $(\varepsilon'_{i-8}, \ldots \varepsilon'_{i-1}) = (6, 1, -3, 6, 1, -3, 6, 1)$,

d'où $(\varepsilon_{i-7}, \ldots, \varepsilon_{i-1}) = (1, 9, 5, 1, 9, 5, 1)$.

– Si $(\alpha'_{i-7}, \ldots, \alpha'_{i-1}) = (1, 4, 8, 1, 4, 8, 1)$

alors $(\alpha_{i-7}, \ldots, \alpha_{i-2}) = (1, 3, 8, 1, 3, 8)$; même minoration qu'au premier cas.

– Si $\alpha'_{i-1} \neq 1$, même minoration qu'au premier cas.

– Si $\alpha'_{i-2} \neq 8$:

$fr\ t_{i-2} \in [5r^{-1} + 9r^{-2}, 5r^{-1} + 10r^{-2}] \Rightarrow Y_{i-2} \geq 4r^{-2}$.

– Si $\alpha'_{i-3} \neq 4$:

$fr\ t_{i-3} \in [9r^{-1} + r^{-2}, 9r^{-1} + 2r^{-2}] \Rightarrow Y_{i-3} \geq 4r^{-2}$.

– De même si $\alpha'_{i-4} \neq 1$ ou $\alpha'_{i-5} \neq 8$ ou $\alpha'_{i-6} \neq 4$ ou $\alpha'_{i-7} \neq 1$.

3$^{\text{ième}}$cas : Si $(\varepsilon'_{i-8}, \ldots, \varepsilon'_{i-1})$ a une valeur opposée à celle des deux premiers cas, on en déduit

$(\varepsilon_{i-7}, \ldots, \varepsilon_{i-1}) = (10, 1, 8, 10, 1, 8, 10)$ ou $(10, 2, 6, 10, 2, 6, 10)$;

le développement η (en base r) de $r^n - N$ vérifiant $\eta_j = r - 1 - \varepsilon_j$ pour $1 \le j \le n-1$, on est ramené aux deux premiers cas, compte tenu que l'égalité $Y_i = \varphi(Nr^{-i-1}) - X_i(\alpha, N)$ et celle du lemme 0.1 (i) impliquent $Y_i(\beta, M) = Y_i(\alpha, N)$.

4) Majoration de la discrépance de $(u_0, \dots u_{N-1})$.

LEMME 4.1.— *Soient $N \in \mathbf{N}$*
m le plus grand entier tel que $Nr^{-m} \in \mathbf{N}$
$N' = Nr^{-m}$
ε la suite associée à N' au lemme 2.1.
Il existe C, indépendant de N tel que

$$D(u_0, \dots u_{N-1}) \le \widetilde{\varphi}\varepsilon - r^{-2}\chi\varepsilon + C.$$

Démonstration.— pour majorer $E(\pi_N u, y) - E(\pi_N u, x)$ (pour tous x et y dans $[0,1]$) on pose $a = r^{-n}[xr^n]$ et $b = r^{-n}[yr^n]$ (n entier minimal tel que $N < r^n$); d'après la définition de $\mathcal{U}_r$, l'ensemble $\{k < N / a \le u_k < x\}$ a au plus un élément, d'où

$$|E(\pi_N u, x) - E(\pi_N u, a)| \le 2;$$

on fait de même pour $E(\pi_N u, y)$, et on en déduit

$$E(\pi_N u, y) - E(\pi_N u, x) \le E(\pi_N u, b) - E(\pi_N, a) + 4.$$

Si N n'est pas multiple de r, les lemmes 3.1, 1.1 et 2.2 permettent d'obtenir la majoration voulue; sinon on s'y ramène en posant $c = fr(ar^m)$, $d = fr(br^m)$, et en utilisant le lemme 0.1 (ii). ∎

Notations : Etant donnés $\varepsilon \in I'^n$ et $\varepsilon' \in I'^m$, on note $\varepsilon\varepsilon'$ la suite $(\varepsilon_0, \dots \varepsilon_{n-1}, \varepsilon'_0, \dots, \varepsilon'_{m-1})$ et on pose $Z(\varepsilon, \varepsilon') = -\frac{\varepsilon_{n-1}}{|\varepsilon_{n-1}|}(\mu(\varepsilon_{n-1}, \varepsilon'_0) + \sum_1^{m-1} \mu(\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon'_i) r^{-i})$.

LEMME 4.2.— *Dans ces conditions on a*

(i) $\widetilde{\varphi}(\varepsilon\varepsilon') = \widetilde{\varphi}\varepsilon + \widetilde{\varphi}\varepsilon' - S(\varepsilon)Z(\varepsilon, \varepsilon')$
$0 \le \chi(\varepsilon\varepsilon') - \chi\varepsilon - \chi\varepsilon' \le 3$;

(ii) étant donnés a et b appartenant à I' et de même signe,

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(\varepsilon b \varepsilon') - \widetilde{\varphi}(\varepsilon a \varepsilon') =& \varphi(br^{-1}) - \varphi(ar^{-1}) + (\lambda(\varepsilon_{n-1}, a) - \lambda(\varepsilon_{n-1}, b))S(\varepsilon) \\ &+ (|a| - |b|)r^{-2}Z(a, \varepsilon')\end{aligned}$$

$|\chi(\varepsilon b\varepsilon') - \chi(\varepsilon a\varepsilon')| \leq 3$

Démonstration. —

(i) $\widetilde{\varphi}(\varepsilon\varepsilon') = \widetilde{\varphi}\varepsilon + \sum_{0}^{m-1} \varphi(\varepsilon'_i r^{-1}) - \lambda(\varepsilon_{n-1}, \varepsilon'_0)S(\varepsilon) - \sum_{1}^{m-1} \lambda(\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon'_i)$ $S(\pi_{n+i}\varepsilon\varepsilon')$,

avec $S(\pi_{n+i}\varepsilon\varepsilon') = S(\pi_i\varepsilon') + \frac{\varepsilon'_{i-1}\varepsilon_{n-1}}{|\varepsilon'_{i-1}\varepsilon_{n-1}|} r^{-i} S(\varepsilon)$, d'où la première égalité.

D'autre part $\chi(\varepsilon\varepsilon') - \chi\varepsilon - \chi\varepsilon'$ est égal à $\mathrm{card}(K(\varepsilon\varepsilon') \cap \{n+1, \ldots n+7\})$, donc compris entre 0 et 3.

(ii) En appliquant deux fois (i) à $\widetilde{\varphi}(\varepsilon a\varepsilon')$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(\varepsilon a\varepsilon') &= \widetilde{\varphi}\varepsilon + \widetilde{\varphi}a + \widetilde{\varphi}\varepsilon' - S(\varepsilon)Z(\varepsilon, a\varepsilon') - S(a)Z(a, \varepsilon') \\
&= \widetilde{\varphi}\varepsilon + \varphi(ar^{-1}) + \widetilde{\varphi}\varepsilon' - S(\varepsilon)(\lambda(\varepsilon_{n-1}, a) + r^{-1}\frac{a\varepsilon_{n-1}}{|a\varepsilon_{n-1}|} Z(a, \varepsilon')) \\
&\quad - |a| r^{-2} Z(a, \varepsilon');
\end{aligned}$$

de même pour $\widetilde{\varphi}(\varepsilon b\varepsilon')$, d'où la deuxième égalité.

La dernière inégalité vient du fait que

$\chi(\varepsilon b\varepsilon') - \chi(\varepsilon a\varepsilon') = \mathrm{card}(K(\varepsilon b\varepsilon') \cap \{n+1, \ldots n+8\}) - \mathrm{card}(K(\varepsilon a\varepsilon') \cap \{n+1, \ldots n+8\})$. ∎

Maximum de la fonction δ.

N étant fixé, soit $\mathcal{S}(N)$ l'ensemble des suites $\varepsilon = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n)$ appartenant à I'^* telles que $2 \leq n \leq N$

$$(\varepsilon_0, \varepsilon_1) = (4, 1)$$
$$|\varepsilon_n| = 3 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n < 0.$$

On se donne une suite $s = (s_0, \ldots, s_n)$ appartenant à $\mathcal{S}(N)$, telle que $\delta(s)$ soit le maximum de $\delta(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \in \mathcal{S}(N)$

On va démontrer par l'absurde que certains mots n'apparaissent pas dans la suite s (en construisant, s'ils apparaissaient, une suite $t \in \mathcal{S}(N)$ telle que $\delta(t) > \delta(s)$).

LEMME 5.1.— *Pour tout i,* $|s_i| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$$s_{i-1}s_i > 0 \text{ si } |s_i| = 1$$
$$< 0 \text{ si } |s_i| \neq 1.$$

Démonstration. — Si la première condition n'est pas vérifiée, soit i le plus petit indice tel que $|s_i| \notin \{1, 2, 3, 4, 6\}$;

on applique le lemme 4.2 (ii) avec

$\varepsilon = (s_0, \dots s_{i-1})$
$\varepsilon' = (s_{i+1}, \dots s_n)$
$a = s_i$
b de même signe que a, avec $|b| = 4$ ou 6,

d'où la minoration

$$\delta(\varepsilon b \varepsilon') - \delta(s) \geq \begin{cases} S(\varepsilon) - 18 \cdot 10^{-5} & \text{pour } (|s_i| \in \{8,9,10\} \text{ et } |b| = 6) \\ & \text{ou pour } (|s_i| \in \{5,7\} \text{ et } |b| = 4) \\ r^{-1} - S(\varepsilon) - 18 \cdot 10^{-5} & \text{pour } (|s_i| = 11 \text{ et } |b| = 6). \end{cases}$$

$r^2 S(\varepsilon) = \dfrac{s_{i-1}}{|s_{i-1}|}(s_{i-1} + s_{i-2} r^{-1} + \cdots)$ est compris entre $\dfrac{5}{11}$ et $\dfrac{72}{11}$, puisque $1 \leq |s_j| \leq 6$ pour tout $j \leq i-1$;

d'où $\delta(\varepsilon b \varepsilon') - \delta(s) > 0$.

Ceci prouve par l'absurde $|s_i| \in \{1,2,3,4,6\}$ pour tout i. ∎

Soit i tel que $s_{i-1} s_i < 0$ et $|s_i| = 1$;

on a donc $\lambda(s_{i-1}, s_i) = 7$
$\lambda(-s_{i-1}, s_i) = 1$
$|\mu(s_{j-1}, s_j| \leq 7 \quad \forall j$;

on pose alors $\varepsilon = (s_0, \dots s_{i-1})$
$-\varepsilon = (-s_0, \dots - s_{i-1})$
$\varepsilon' = (s_i, \dots s_n)$

et on déduit du lemme 4.2 (i)

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}((-\varepsilon)\varepsilon') - \widetilde{\varphi}(\varepsilon\varepsilon') &= S(\varepsilon)(Z(\varepsilon, \varepsilon') - Z(-\varepsilon, \varepsilon')) \\ &\geq \frac{5}{11} r^{-2} (6 - 2 \sum_{j=1}^{n-i} 7 r^{-j}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \delta((-\varepsilon)\varepsilon') - \delta(\varepsilon\varepsilon') > 0$; la deuxième condition est donc vérifiée.

Soit i tel que $s_{i-1} s_i > 0$ et $|s_i| \neq 1$;

$\lambda(s_{i-1}, s_i)$ et $\lambda(-s_{i-1}, s_i)$ sont égaux, donc

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}((-\varepsilon)\varepsilon') - \widetilde{\varphi}(\varepsilon\varepsilon') &\geq S(\varepsilon) \left(-2 \frac{s_{i-1}}{|s_{i-1}|} r^{-1} \mu(s_i, s_{i+1}) - 2 \sum_{j=2}^{n-i} 7 r^{-j} \right) \\ &\geq \frac{5}{11} r^{-2} \left(2 r^{-1} - \frac{7}{66} \right), \end{aligned}$$

$\delta((-\varepsilon)\varepsilon') - \delta(\varepsilon\varepsilon') > 0$, d'où la troisième condition.

On notera S l'ensemble des suites finies ε qui vérifient pour tout i $|\varepsilon_i| \in \{1,2,3,4,6\}$

$\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i > 0$ si $|\varepsilon_i| = 1$

< 0 si $|\varepsilon_i| \neq 1$

Pour $\varepsilon \in S$ et $\varepsilon' \in S$, la suite $\varepsilon\varepsilon'$, ou la suite $(-\varepsilon)\varepsilon'$, appartient à S; on notera $\varepsilon \cdot \varepsilon'$ celle qui y appartient;

on pose aussi $\varepsilon^0 = \emptyset$ et

$$\varepsilon^n = \varepsilon^{n-1} \cdot \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*;$$

Dans le cas où $\varepsilon\varepsilon'$ appartient à S, $Z(\varepsilon, \varepsilon')$ ne dépend que de ε'; on le notera donc $Z(\varepsilon')$.

On notera aussi $\lambda(k)$ la valeur de $\lambda(h,k)$ $((h,k)$ appartenant à $Z^2 \cap S)$; $\lambda(k)$ vaut $r|k|^{-1}$si $|k| \neq 1$

1 si $|k| = 1$.

LEMME 5.2.— *Soient trois suites finies $\delta, \varepsilon, \delta'$ telles que $\delta\varepsilon\delta' \in S$; alors* $\widetilde{\varphi}(\delta\varepsilon\delta') - \widetilde{\varphi}(\delta \cdot \delta') = \widetilde{\varphi}\varepsilon - S\delta Z\varepsilon - (S(\delta\varepsilon) - S\delta)Z\delta'$

$|\chi(\delta\varepsilon\delta') - \chi(\delta \cdot \delta') - \chi(\varepsilon)|$ *est au plus égal à 6, ou à 9 si ε n'a qu'un terme*

Démonstration.— Il suffit

- d'appliquer le lemme 4.2 (i) à $\widetilde{\varphi}(\delta \cdot \delta')$:
  $\widetilde{\varphi}(\delta \cdot \delta') = \widetilde{\varphi}\delta + \widetilde{\varphi}\delta' - S\delta Z\delta'$;
  puis de l'appliquer deux fois à $\widetilde{\varphi}(\delta\varepsilon\delta')$:
  $\widetilde{\varphi}(\delta\varepsilon\delta') = \widetilde{\varphi}\delta + \widetilde{\varphi}\varepsilon + \widetilde{\varphi}\delta' - S(\delta\varepsilon)Z\delta' - S\delta Z\varepsilon$;
- de remarquer que (en notant n et m le nombre de termes des suites δ et ε),
  $\chi(\delta\varepsilon\delta') - \chi(\delta \cdot \delta') - \chi(\varepsilon)$ est égal à $\operatorname{card}(K(\delta \in \delta') \cap (\{n+1, \ldots n+7\} \cup \{n+m+1, \ldots n+m+7\}))$ $\operatorname{card} K(\delta \cdot \delta') \cap \{n+1, \ldots n+7\}$. ∎

LEMME 5.3.— *Soit $\varepsilon = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ appartenant à S.*

En posant $\varepsilon' = (\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_{n-2})$ et $\varepsilon'' = (\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{n-1})$, on a

(i)
$$r^2 S\varepsilon = \begin{cases} |\varepsilon_{n-1}| + rS\varepsilon' & \text{si } |\varepsilon_{n-1}| = 1 \\ |\varepsilon_{n-1}| - rS\varepsilon' & \text{sinon} \end{cases}$$
$$Z\varepsilon = \begin{cases} \lambda\varepsilon_0 + r^{-1}Z_{\varepsilon''} & \text{si } |\varepsilon_0| = 1 \\ \lambda\varepsilon_0 - r^{-1}Z_{\varepsilon''} & \text{sinon} \end{cases}$$

(ii)
$$1 \leq S\varepsilon \leq 6$$
$$1 \leq Z\varepsilon \leq 6$$

Demonstration (i).— $r^2 \sum_0^{n-1} \varepsilon_i r^{i-n-1} = \varepsilon_{n-1} + r \sum_0^{n-2} \varepsilon_i r^{i-n}$;

compte tenu du signe de $\varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}$, on obtient l'expression de $r^2 S\varepsilon$.

On obtient celle de $Z\varepsilon$, en utilisant un nombre a de même signe que ε_0 si $|\varepsilon_0| = 1$, de signe contraire, sinon, d'où

$$\begin{aligned} Z\varepsilon &= \frac{a}{|a|}(\mu(a, \varepsilon_0) + \sum_1^{n-1} \mu(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) r^{-i}) \\ &= \lambda(\varepsilon_0) + \frac{a\varepsilon_0}{|a\varepsilon_0|} r^{-1} Z\varepsilon'' \end{aligned}$$

(ii) se démontre par récurrence en utilisant (i), compte tenu que $|\varepsilon_{n-1}|$ et $\lambda(\varepsilon_0)$ appartiennent à $\{1, 2, 3, 4, 6\}$. ∎

LEMME 5.4.— *La suite* $(s_0, \ldots, s_{n-1})$ *peut se décomposer sous la forme :* $(s_0, \ldots s_{n-1}) = \sigma^{(0)} \cdot \sigma^{(1)} \ldots \sigma^{(k)}$, *avec, pour tout* i, $\sigma^{(i)}$ *ou* $-\sigma^{(i)}$ *égal à (3, 1) ou (4, 1) ou (-2, 4, 1) ou (-3, 6, 1).*

Démonstration.— soit ν le plus grand entier tel que $(s_0, \ldots, s_{\nu-1})$ vérifie cette condition;

en supposant $\nu < n$, on va construire une suite s' telle que $\delta s' > \delta s$.

En posant pour $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 11r^{-1} - y - (r^{-2} - 11r^{-1}y)z & \text{si } x = 1 \\ & 1 - (rx^{-1}y - (xr^{-2} - 13r^{-1}y)z & \text{sinon,} \end{aligned}$$

et en notant $S = S(s_0, \ldots s_{\nu-1})$

$Z = Z(s_{\nu+1}, \ldots s_n)$

$s' = (s_0, \ldots s_{\nu-1}), \cdot(s_{\nu+1}, \ldots s_n)$,

on a (lemme 5.2) $\widetilde{\varphi} s - \widetilde{\varphi} s' = f(|s_\nu|, S, Z)$.

ν ne peut être égal à 0 ni 1 ni n donc s' appartient à $\mathcal{S}(N)$.

$|s_{\nu-1}| = 1$ et $|s_{\nu-2}| \in \{3, 4, 6\}$ par conséquent (lemme 5.3)

$r^2 S = 1 + r^{-1}|s_{\nu-2}| - S(s_0, \ldots s_{\nu-3})$;

d'où l'encadrement $\frac{29}{24} \leq r^2 S \leq \frac{3}{2}$. ∎

La fonction $z \to f(|s_\nu|, S, z)$ est alors croissante si $|s_\nu| = 1$
décroissante sinon.

1^er^cas : $|s_\nu| = 1$; alors

$$f(1,S,Z) \leq f(1,S,6)$$
$$\leq f\left(1,\frac{1}{96},6\right)$$
$$\Rightarrow \delta s - \delta s' < 0.$$

2^ième^cas : $|s_\nu| = 2$;

on va vérifier qu'on ne peut avoir

$|s_{\nu+1}| = 2$ ni $(|s_{\nu+1}|,|s_{\nu+2}|) = (3,1)$ ou $(3,6)$;

si on était dans un de ces trois cas,

$Z = \lambda(s_{\nu-1}) - r^{-1}\lambda(s_{\nu+2}) \pm r^{-2}Z(s_{\nu+3},\dots s_n)$

$\geq 4 - \frac{1}{6}$ d'où

$$f(2,S,Z) \leq f\left(2,S,4-\frac{1}{6}\right)$$
$$\leq f\left(2,\frac{29}{24}r^{-2},4-\frac{1}{6}\right);$$

$\delta s - \delta s' < 0$

3^ième^cas : $|s_\nu| = 3$;

si $|s_{\nu+1}|$ valait 2 ou 3, on aurait

$Z \geq 4 - \frac{1}{2}$ donc

$$f(3,S,Z) \leq f\left(3,S,4-\frac{1}{2}\right)$$
$$\leq f\left(3,\frac{29}{24}r^{-2},4-\frac{1}{2}\right);$$

$\delta s - \delta s' < 0$

4^ième^cas : $|s_\nu| = 4$;

si $|s_{\nu+1}|$ valait 2, 3 ou 4 alors

$Z \geq 3 - \frac{1}{2}$,

$$f(4,S,Z) \leq f\left(4,S,3-\frac{1}{2}\right)$$
$$\leq f\left(4,\frac{29}{24}r^{-2},3-\frac{1}{2}\right);$$

$\delta s - \delta s' < 0$

5^ième^cas On suppose $|s_\nu| = 6$, ou $(|s_\nu|,|s_{\nu+1}|) = (2,1)$ ou $(2,6)$ ou $(4,6)$, et on pose $a = 3\frac{s_\nu}{|s_\nu|}$.

La suite $s'' = (s_0,\dots s_{\nu-1},a,s_{\nu+1},\dots s_n)$ appartient à $\mathcal{S}(N)$ et, d'après le lemme 4.2 (ii),

$\widetilde{\varphi}s - \widetilde{\varphi}s'' = (4-12|s_\nu|^{-1})S + (3-|s_\nu|)r^{-2}Z$;

on utilise la minoration $S \geq \dfrac{29}{24}r^{-2}$, puis on majore S en remarquant que si $|s_{\nu-2}| = 6$, on a

$$\begin{aligned}(|s_{\nu-4}|, |s_{\nu-3}|, |s_{\nu-2}|, |s_{\nu-1}|) &= (1,3,6,1) \text{ et}\\ S = r^{-2} + 6r^{-3} - 3r^{-4} &+ r^{-5} + r^{-4}S(s_0, \dots s_{\nu-5})\\ \leq r^{-2} + 6r^{-3} &- 3r^{-4} + r^{-5} + 6r^{-6};\end{aligned}$$

cette majoration reste bien sûr valable si $|s_{\nu-2}| \leq 4$.
De même on déduit du lemme 5.3

$$\begin{aligned}&Z \geq 1 \text{ et}\\ &Z \leq 2 \text{ si } |s_{\nu+1}| = 1 \text{ ou } 6\\ &Z \geq 2 - 6r^{-1} + r^{-2} \text{ si } |s_{\nu+1}| = 6.\end{aligned}$$

Ces encadrements permettent d'obtenir

$$\begin{aligned}&\widetilde{\varphi}s - \widetilde{\varphi}s'' < -18 \cdot 10^{-5}\\ &\delta s - \delta s'' < 0.\end{aligned}$$

$6^{\text{ième}}$cas On suppose $\nu \leq n-2$ et
$(|s_\nu|, |s_{\nu+1}|) = (3,6)$ avec $|s_{\nu+2}| \neq 1$
ou $(3,4)$ avec $(|s_{\nu+2}| \neq 1$ ou $(|s_{\nu+2}|, |s_{\nu+3}|) = (1,2))$,
ou $(2,3)$ ou $(2,4)$ avec $|s_{\nu+2}| \in \{2,3,4\}$.
Dans ces cas, en posant $t = (s_0, \dots, s_\nu) \cdot (s_{\nu+2}, \dots s_n)$

$$\begin{aligned}S' &= S(s_0, \dots s_\nu)\\ Z' &= Z(s_{\nu+2}, \dots, s_n),\end{aligned}$$

on a $\widetilde{\varphi}s - \widetilde{\varphi}t = f(|s_{\nu+1}|, S', Z')$;
$r^2 S' = |s_\nu| - r^{-1} - S(s_0, \dots s_{\nu-2})$
$\Rightarrow |s_\nu| - \dfrac{1}{8} \leq r^2 S' \leq |s_\nu| - \dfrac{1}{12}$ (et $|s_\nu|$ vaut 2 ou 3).
La fonction $z \to f(|s_{\nu+1}|, S', z)$ est alors décroissante
On minore Z', si $|s_{\nu+2}| \neq 1$, par $2 - 6r^{-1}$;
si $(|s_{\nu+2}|, |s_{\nu+3}|) = (1,2)$, par $1 + 6r^{-1} - 6r^{-2}$;
si $|s_{\nu+2}| \in \{2,3,4\}$, par $3 - 6r^{-1}$;
d'où $f(|s_{\nu+1}|, S', Z') < -18 \cdot 10^{-5}$ et
$\delta s - \delta t < 0$.

$7^{\text{ième}}$cas $\nu \leq n-3$ et $(|s_\nu|, |s_{\nu+1}|, |s_{\nu+2}|) = (3,4,1)$, avec $|s_{\nu+3}| \neq 2$.
Alors, $Z' \leq 1 + 4r^{-1}$.
Soit $b = 6\dfrac{s_{\nu+1}}{|s_{\nu+1}|}$; la suite $t' = (s_0, \dots, s_\nu, b, s_{\nu+2}, \dots s_n)$ appartient à

$\mathcal{S}(N)$ et

$$\widetilde{\varphi}s - \widetilde{\varphi}t' = 2r^{-2}Z' - S' \leq 2r^{-2}(1+4r^{-1}) - r^{-2}\left(3 - \frac{1}{8}\right) \text{ donc}$$

$\delta s - \delta t' < 0.$

8[ième]cas $(|s_\nu|, |s_{\nu+1}|, |s_{\nu+2}|) = (2,4,6) \qquad (\Rightarrow \nu \leq n-3).$

– Si $(|s_{\nu+3}|, |s_{\nu+4}|) = (1,1), \qquad (\nu \leq n-5)$

on obtient $\delta s - \delta((s_0, \ldots, s_{\nu+3}) \cdot (s_{\nu+5}, \ldots s_n)) < 0$,

par le même calcul qu'au 1[er]cas.

– Si $(|s_{\nu+3}|, |s_{\nu+4}|) = (1,6) \qquad (\nu \leq n-5)$, alors

$\delta s - \delta(s_0, \ldots s_{\nu+3}, 3\dfrac{s_{\nu+4}}{|s_{\nu+4}|}, s_{\nu+5}, \ldots s_n) < 0$, par celui du 5[ième]cas.

– Dans les autres cas, en posant
$$Z'' = Z(s_{\nu+3}, \ldots s_n)$$
$$S'' = S(s_0, \ldots s_{\nu+1})$$
$$t'' = (s_0, \ldots s_{\nu+1}) \cdot (s_{\nu+3}, \ldots s_n),$$

on a $Z'' \geq 1 + 3r^{-1} - 6r^{-2}$, $4 - \dfrac{1}{6} \leq S'' \leq 4$ et $\widetilde{\varphi}s - \widetilde{\varphi}t'' = f(6, S'', Z'') \Rightarrow$

$\delta s - \delta t'' < 0$

LEMME 5.5.— *Soient* $\tau \in S$

$$m_1 = (3,1)$$
$$m_2 = (4,1)$$
$$m_3 = (-2,4,1)$$
$$m_4 = (-3,6,1)$$
$$S = S(m_2) \text{ et } Z = Z(\tau)$$
$$S_i = (1 - r^{-3})^{-1} S(m_i) \text{ et}$$
$$Z_i = (1 - r^{-3})^{-1} Z(m_i) \quad (i = 3 \text{ ou } 4).$$

On a

$\widetilde{\varphi}(m_2 \cdot m_1 \cdot \tau) - \widetilde{\varphi}(m_2 \cdot \tau) = 2 - r^{-1} - 3r^{-2} - r^{-2}(1+4r^{-1})(4-r^{-1}) + r^{-2}(r^{-1} + r^{-2} + 4r^{-3})Z,$

$\widetilde{\varphi}(m_2 \cdot m_2 \cdot \tau) - \widetilde{\varphi}(m_2 \cdot \tau) = 2 - r^{-1} - 4r^{-2} - r^{-2}(1+4r^{-1})(3-r^{-1}) + r^{-2}(r^{-2} + 4r^{-3})Z,$

et, pour $i \in \{3,4\}$ *et* $\lambda \in \mathbf{N}^*$,

$$\widetilde{\varphi}(m_2 \cdot m_i^\lambda \cdot \tau) - \widetilde{\varphi}(m_2 \cdot \tau) = (1 - r^{-3\lambda})(S - S_i)(Z - Z_i) + \frac{4828}{1727}\lambda.$$

Démonstration.— Les deux premières égalités s'obtiennent par le lemme 5.2; la troisième en utilisant d'abord le lemme 5.2 :

$$\widetilde{\varphi}(m_2 \cdot m_i^\lambda \cdot \tau) - \widetilde{\varphi}(m_2 \cdot \tau) = \widetilde{\varphi}(m_i^\lambda) - SZ(m_i^\lambda) - (S(m_i^\lambda) + r^{-3\lambda}S - S)Z;$$

puis par applications successives du lemme 4.2 (i) :

$$\widetilde{\varphi}(m_i^\lambda) = \lambda\widetilde{\varphi}(m_i) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} S(m_i^j)Z(m_i),$$

en remarquant que

$$S(m_i^j) = (1 - r^{-3j})S_i$$
$$Z(m_i^j) = (1 - r^{-3j})Z_i. \quad \blacksquare$$

LEMME 5.6.— *Avec les notations du lemme 5.5, on a*

$$\delta(m_2 \cdot m_1 \cdot \tau) - \delta(m_2 \cdot \tau) < -0,00026$$
$$\delta(m_2 \cdot m_2 \cdot \tau) - \delta(m_2 \cdot \tau) < -0,0014$$
$$\delta(m_2 \cdot m_i^\lambda \cdot \tau) - \delta(m_2 \cdot \tau) \leq (1 - r^{-3\lambda})(S - S_i)(Z - Z_i) + 12 \cdot 10^{-5}.$$

Démonstration.— Ces inégalités se déduisent du lemme 5.5 avec $Z \leq 6$,

$\chi(m_2 \cdot m_i \cdot \tau) \geq \chi(m_2 \cdot \tau)$ pour $i = 1$ ou 2,

$\chi(m_2 \cdot m_i^\lambda \cdot \tau) \geq \chi(m_2 \cdot \tau) + \lambda - 2$ pour $i = 3$ ou 4. $\blacksquare$

LEMME 5.7.— $s = (4, 1, -3)$

Démonstration.— Si ce n'était pas le cas, il existerait $\tau \in S$ et $\lambda \in \mathbf{N}^*$ tels que $s = m_2 \cdot m_i \cdot \tau$, avec $i = 1$ ou 2

ou $s = m_2 \cdot m_3^\lambda \cdot \tau$, avec $\tau_0 = -3$ ou -4 $\quad (\Rightarrow Z(\tau) \leq 4)$

ou $m_2 \cdot m_4^\lambda \cdot \tau$, avec $\tau_0 = -2$ ou $\tau = (-3)$ $\quad (\Rightarrow Z(\tau) \geq 4)$

ou $m_2 \cdot m_4^\lambda \cdot m_i \cdot \tau$, $i = 1$ ou 2 $\quad \Rightarrow Z(m_i \cdot \tau) > Z_4$ si $i = 1$

$> Z_4 - 1$ si $i = 2$).

$m_2 \cdot \tau$ appartient à $\mathcal{S}(N)$.

Dans les trois premiers cas, $\delta s - \delta(m_2 \cdot \tau)$ est négatif d'après le lemme 5.6; dans le quatrième,

$\delta s - \delta(m_2 \cdot \tau) = \delta s - \delta(m_2 \cdot m_i \cdot \tau) + \delta(m_2 \cdot m_i \cdot \tau) - \delta(m_2 \cdot \tau)$ est négatif d'après le même lemme. $\blacksquare$

6) Démonstration de la proposition 2.

On va d'abord vérifier que la fonction δ est bornée sur I'^*.

A tout $\varepsilon \in I'^*$ on associe la suite

$\eta(\varepsilon) = (4, 1)\varepsilon \cdot (3)$

qui appartient à $\bigcup_{N \in \mathbf{N}} \mathcal{S}(N)$ et vérifie donc $\delta(\eta(\varepsilon)) \leq \delta(4, 1, -3)$.

Il découle du lemme 4.2 (i) qu'il existe une constante K telle que $\forall \varepsilon \in I'^{*} \quad \delta(\eta(\varepsilon)) \geq \delta(\varepsilon) - K$; donc δ est bornée.

Soient $N \in \mathbf{N}$,
m le plus grand entier tel que Nr^{-m} soit entier,
$N' = Nr^{-m}$,
n le plus petit entier tel que $N' < r^n$.

Il résulte du lemme 4.1 que $D(u_0, \dots u_{N-1}) - \left(\frac{4828}{5181} - 2 \cdot 10^{-5}\right) n$ est majoré par $\delta\varepsilon + C$ donc borné;

comme $r^{n-1} \leq N' \leq N$, on en déduit

$$D(u) \leq (\mathrm{Log} r)^{-1} \left(\frac{4828}{5181} - 2 \cdot 10^{-5}\right).$$

La suite v vérifie la propriété caractéristique de $\mathcal{U}_r$, avec l'application σ' définie par $\sigma'(\varepsilon_0, \dots \varepsilon_n) = \tau\varepsilon_n$; il lui correspond donc une fonction ψ_v définie au chapitre II.

En notant ψ_u la fonction ψ associée à u, on a la relation

$$\psi_v(\alpha, \gamma, x) = \psi_u(\emptyset, \gamma, x) \qquad \forall(\alpha, \gamma, x) \in I^* \times \overline{I} \times \mathbf{R}.$$

Soient $N \in \mathbf{N}$, n le plus petit entier tel que $N < r^n$,
a et b appartenant à $[0, 1]$ tels que ar^n et br^n soient entiers,
α et β appartenant à $I^{n-1} \times \overline{I}$, tels que
$a = \sum_0^{n-1} \alpha_i r^{-i-1}$ et $b = \sum_0^{n-1} \beta_i r^{-i-1}$;

il résulte de la proposition 1 (appliquée à v), que

$$E(\pi_N v, b) - E(\pi_N v, a) = \sum_0^{n-1} (\varphi_u(\emptyset, \beta'_i, Nr^{-i-1}) - \varphi_u(\emptyset, \alpha'_i, Nr^{-i-1})). \quad (1)$$

– Pour la minoration de la discrépance de v, on se place dans le cas où N vaut $N(k) = (4 + r - 2r^2) \sum_{i=0}^{k-1} r^{3i} \qquad (k \in \mathbf{N}^*)$;

l'expression (1) est alors maximale quand α' et β' sont de période 3 avec $(\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2) = (7, 12, 5)$ et
$(\beta'_0, \beta'_1, \beta'_2) = (4, 1, 11)$

(d'où α et β de période 3, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (6, 11, 5)$ et
$(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = (4, 0, 11)$).

L'expression (1) vaut alors

$$\sum_{0}^{3k-1} \varphi_u(N(k)r^{-i-1}).$$

Quand k tend vers $+\infty$,

$(\mathrm{Log}\, N(k))^{-1} \sum_{0}^{3k-1} \varphi_u(N(k)r^{-i-1})$ a même limite que

$(3k\mathrm{Log}\, r)^{-1} \sum_{0}^{3k-1} \varphi_u(x(k)r^{-i-1})$ avec $x(k) = (4 + r - 2r^2) \sum_{-\infty}^{k-1} r^{3i}$, et
cette limite vaut $\dfrac{4828}{5181 \mathrm{Log}\, r}$.

– Pour la majoration, on déduit de (1)

$$E(\pi_N v, b) - E(\pi_N v, a) \le \sum_{0}^{n-1} (\varphi_u - f_4)(Nr^{-i-1}).$$

Soient m le plus grand entier tel que $Nr^{-m} \in \mathbf{N}$,
$N' = Nr^{-m}$,
ε la suite associée à N' par le lemme 2.1;

$\sum_{0}^{n-1} (\varphi_u - f_4)(Nr^{-i-1})$ est alors égal à $\sum_{0}^{n-m-1} (\varphi_u - f_4)(N'r^{-i-1})$ et d'après le lemme 2.2, au plus égal à $\widetilde{\varphi}_u \varepsilon$.

Pour x et y quelconques dans [0, 1], on a, en posant $a = r^{-n}[xr^n]$
$b = r^{-n}[yr^n]$

$E(\pi_N v, y) - E(\pi_N v, x) \le E(\pi_N v, b) - E(\pi_N v, a) + 4$ (par la même démonstration qu'au lemme 4.1);

on a donc $D(\pi_N v) \le \widetilde{\varphi}_u \varepsilon + 4$.

Or $\widetilde{\varphi}_u \varepsilon - 6 \cdot 10^{-5} \chi\varepsilon - \left(\dfrac{4828}{5181} - 2 \cdot 10^{-5}\right) n$ est majoré par le maximum de la fonction δ donc, compte tenu que $\chi\varepsilon < \dfrac{n}{3}$, $D(\pi_N v) - \dfrac{4828}{5181} n$ est borné indépendamment de N et n.

Références

[1] KUIPERS (L.), NIEDERREITER (H.). — *Uniform distribution of sequences*, J. Wiley and Sons, 1974.

[2] SCHMIDT (W.). — Irregularities of distribution, **VII**, *Acta Arithm. 21*, p. 45-50, 1972.

[3] BEJIAN (R.). — Minoration de la discrépance d'une suite quelconque sur T, *Acta Arith. 41*, **n° 2**, p. 185-202, 1982.

[4] VAN DER CORPUT (J.G.). — Verteilgsfunktionen, I, II, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetens.* **38**, p. 813-821, 1058-1066, 1935.

[5] BEJIAN (R.), FAURE (H.). — Discrépance de la suite de Van Der Corput, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **t. 285 série A**, p. 313-316, 1977.

[6] HABER (S.). — *On a sequence of points of interest for numerical quadrature*, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. **B70**, p. 127-136, 1966.

[7] GILLET (A.). — *Sur la répartition modulo 1.* Thèse (Marseille) 1968.

[8] RAMSHAW (L.). — On the discrepancy of the sequence formed by the multiples of an irrational number, *J. of Number Theory* **13**, p. 138-175, 1981.

[9] FAURE (H.). — Discrépance de suites associées à un système de numération, *Bull. Soc. Math. France 109*, **n°2**, 1981.

[10] BOREL (J.P.). — *Suites ayant de bonnes discrépances*, Publications départ. de math. de l'Université de Limoges, **4**, p. 1-21, 1982.

(Manuscrit reçu le 5 septembre 1988)