ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

W. T. VAN EST

Algèbres de Maurer-Cartan et Holonomie

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome S10 (1989), p. 93-134

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1989_5_S10__93_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse

Algèbres de Maurer-Cartan et Holonomie

W.T. VAN EST[(1)]

RÉSUMÉ. — On interprète l'algèbre de Godbillon-Vey (ou plutôt de Cartan-Reeb-Godbillon-Vey) comme l'algèbre de Maurer-Cartan du groupe infini d'une variable. En cherchant à étendre le "théorème fondamental de la géométrie differentielle" (p. 6) à cette situation on établit le lien entre l'holonomie d'un feuilletage de codimension 1 et cette algèbre.

Introduction

On sait comment l'algèbre de Maurer-Cartan d'un groupe de Lie G intervient via les formes de structure de Darboux-Cartan dans la géométrie différentielle basée sur G.

Comme CARTAN l'a fait remarquer [C. 1937], même en théorie des "groupes de Lie infinis" l'algèbre de Maurer-Cartan du "groupe" infini intervient via les prolongements successifs dans des situations où ce "groupe" opère sur une variété. (Ici le terme "groupe" doit être pris au sens de pseudo-groupe).

On trouve par exemple dans [C. 1937] une description (incomplète) de l'algèbre de Maurer-Cartan du "groupe" d'une variable. (En quelque sorte il est miraculeux que ce "groupe" corresponde à un véritable groupe). Cette algèbre a été retrouvée en théorie des feuilletages de codimension 1 par G. REEB (non publiée) et plus tard par GODBILLON et VEY [G-V. 1971].

Le but de cet article est de dégager, en premier lieu, la signification géométrique de l'algèbre de Cartan-Reeb-Godbillon-Vey pour le feuilletage et plus particulièrement pour l'holonomie. Pour cela on s'est laissé inspirer

(1) Aert Van Neslaan 628, 2341 HV Oegstgeest, Pays-Bas

par la théorie en dimension finie, en cherchant à étendre les résultats du cas classique au cas infini du "groupe" d'une variable.

A cet effet on a formulé la théorie classique en langage de cohomologie non-commutative (chose connue), langage qui permet de formuler de façon commode l'essentiel de la théorie pour le cas infini.

Nous ne prétendons pas à l'originalité pour les résultats de ce travail; l'essentiel ne consiste qu'à englober du "folklore" dans la théorie des algèbres de Maurer-Cartan.

L'auteur tient à signaler que des séjours à l'Université Paul Sabatier et à la Universidad Autónoma de Madrid ont grandement favorisé le travail; sa reconnaissance va également au CWI[(1)] pour l'assistance dactylographique qui lui a été accordée.

1. Algèbres de Maurer-Cartan

Une *algèbre de Maurer-Cartan* est une algèbre extérieure $\Gamma = (\Gamma^0, \Gamma^1, \Gamma^2, \cdots)$, $\Gamma^i = (\Gamma^1)^{\wedge i}$, d'un espace vectoriel Γ^1 munie d'une différentielle d. Γ^0 est le corps de base que nous supposerons toujours être celui des nombres réels. Cependant la plupart des énoncés gardent leur validité pour un corps quelconque de caractéristique zéro. On pose *dimension* $\Gamma :=$ dimension Γ^1.

Pour tout $X \in (\Gamma^1)^*, i_x$ désignera la dérivation de degré -1 pour la structure multiplicative telle que

$$\forall \xi \in \Gamma^1 | i_x \xi := X(\xi) \in \Gamma^0 = \mathbf{R}.$$

On définit un crochet de Lie sur $(\Gamma^1)^*$ en posant

$$i_{[X,Y]}\xi := i_Y i_X d\xi, \xi \in \Gamma^1 \text{ }^{(2)}.$$

Soit $\xi_1, \xi_2, \ldots$ une base de Γ^1 [(3)]. Une fonction $pds : \{\xi_1, \xi_2 \ldots\} \to \mathbf{Z}$ bornée inférieurement sera appelée une *une fonction pondératrice* et $pds(\xi_i)$ sera dit le *poids* de ξ_i. De même on dira que $\xi_1, \xi_2, \ldots$ est une *base pondératrice* par rapport à pds.

On prolonge la fonction pds sur $(\Gamma^1)^\wedge$ en définissant $pds(\xi_{i_1}, \wedge \ldots \wedge \xi_{i_k}) := \sum_{s=1}^{k} pds(\xi_{i_s})$, et en posant pour $\omega \in \Gamma^k, pds\, \omega :=$ *maximum* des poids des

(1) Centrum voor Wiskunde en Informatica.

(2) Pour vérifier l'identité de Jacobi on constate que la dérivation $[i_X; i_Y] = i_X i_Y + i_Y i_X$ de degré -2 est nécessairement nulle et que, en posant $\theta_X := i_X d + d i_X = [d, i_X]$, on a $i_{[X,Y]} = [i_Y, \theta_X] = i_Y \theta_X - \theta_X i_Y$ et $\theta_{[X,Y]} = \theta_Y \theta_X - \theta_X \theta_Y$.

(3) On ne considèrera que des espaces Γ^1 à base dénombrable.

monômes qui figurent dans une expression réduite pour ω; ω est dit de ***poids homogène*** si tous ces monômes ont le même poids.

On dira que *pds* est *compatible avec* d si $d\xi_i$ est toujours de poids homogène égal à $pds(\xi_i)$.

On dira que la fonction pondératrice *pds* est de *type fini* si pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $pds^{-1}(n)$ est une partie finie de la base $\xi_1, \xi_2, \ldots$.

> Dorénavant toutes les fonctions pondératrices seront supposées de type fini et compatibles avec d sauf mention expresse du contraire.

Soit alors *pds* une fonction pondératrice, et $X_1, X_2, \ldots$ la base duale de $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Les X_i engendrent le sous-espace $L(\Gamma) \subset (\Gamma^1)^*$ des fonctions linéaires qui s'annulent presque partout sur $\{\xi_i\}$. De plus $L(\Gamma)$ est une *sous-algèbre* de $(\Gamma^1)^*$. En effet supposons que $X, Y \in L(\Gamma)$ s'annulent sur les ξ_i de poids supérieur à $N \in \mathbf{Z}$. Alors on vérifiera que $[X, Y]$ s'annule sur les ξ_j de poids supérieur à $2N$. Puisque *pds* est bornée inférieurement et de type fini il s'ensuit que $[X, Y] \in L(\Gamma)$.

On définit une fonction $pds^* : L(\Gamma) \to \mathbf{Z}$ en posant $pds^*(X_i) := pds(\xi_i)$ et en posant pour $X \in L(\Gamma)$, $pds^*(X) = maximum\, pds^*(X_i)$ des X_i qui figurent dans une expression réduite pour X; on dira que X est de ***poids homogène*** si les $pds^*(X_i)$ dans ce cas sont égaux.

On vérifie les propriétés suivantes :

— pds^* est bornée inférieurement

— $pds^{*-1} \cap \{X_i\}$ est une partie finie

— $[X_i, X_j]$ est de poids homogène égal à $pds\, X_i + pds\, X_j$.

Une fonction jouissant de ces propriétés sera appelée un ***poids***.

On vérifie que les algèbres de Maurer-Cartan à fonction pondératrice et les algèbres de Lie à poids sont en parfaite dualité les unes avec les autres.

L'exemple bien connu d'une algèbre de Lie à poids est celui de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs polynomiaux sur $\mathbf{R}^n$. Un champ de vecteurs $A_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \ldots + A_n \frac{\partial}{\partial X_n}$ est compté de poids homogène k si $A_1, \ldots, A_n$ sont des polynômes homogènes en $X_1, \ldots, X_n$ de degré $k + 1$.

En particulier les algèbres de Lie et de Maurer-Cartan de dimension finie admettent un poids identiquement nul.

2. Variétés de Maurer-Cartan

Un *système de Maurer-Cartan* sur une variété connexe V de dimension n

est un système de 1 -formes $\omega_1, \ldots \omega_n$ de rang n partout tel que la sous-algèbre extérieure $\mathbf{R}[\omega_1, \ldots, \omega_n]^\wedge \subset \Omega(V)^{(4)}$ soit stable par rapport à d, i.e. soit une sous-algèbre de Maurer-Cartan de dimension n.

Réciproquement, soit Γ une algèbre de Maurer-Cartan de base $\xi_1, \ldots, \xi_n$ (pour Γ^1), alors une variété connexe V de dimension n sera appelée Γ *-variété* si l'on s'est donné un morphisme $\varphi : \Gamma \to \Omega(V)$ d'algèbres différentielles, $\varphi^0 : \Gamma^0 = \mathbf{R} \to \Omega^0(V)$ étant l'injection canonique, tel que $\omega_i := \varphi(\xi_i)$ soit un système de Maurer-Cartan.

V_i, φ_i, $i = 1, 2$, étant des Γ -variétés, un morphisme de variétés $\Phi : V_1 \to V_2$ est dit Γ *-morphisme* si $\Phi^*(\varphi_2) = \varphi_1$.

Un Γ -morphisme est nécessairement étale.

Réciproquement soit V_2, φ_2 une Γ -variété et $\Phi : V_1 \to V_2$ un morphisme étale de variétés, alors $V_1, \varphi_1 := \Phi^*(\varphi_2)$ est une Γ -variété et Φ est un Γ -morphisme.

En particulier tout revêtement d'une Γ -variété est encore (de façon évidente) une Γ -variété.

Par un argument de feuilletages on démontre que deux Γ -morphismes qui coïncident en un seul point sont identiques. Par conséquent si V est une Γ -variété, le groupe $Aut_\Gamma(V)$ des Γ -automorphismes opère librement i.e. $A_1(\nu_0) = A_2(\nu_0), A_1, A_2 \in Aut_\Gamma(V), \nu_0 \in V \Rightarrow A_1 = A_2$.

Une Γ -variété V est dite *complète* si $Aut_\Gamma(V)$ opère transitivement. Si V est une Γ -variété complète tout revêtement de V est encore une Γ -variété complète.

Pour une Γ -variété complète V on désigne $Aut_\Gamma(V)$ par $G_\Gamma(V)$ et le groupe des morphismes de variété $V \to V$ qui commutent à tout $g \in G_\Gamma(V)$ sera désigné par $D_\Gamma(V)$. On a

PROPOSITION .— *Une Γ -variété complète V, φ s'identifie à l'espace d'un groupe de Lie connexe G de manière que $\varphi(\Gamma)$ s'identifie à l'algèbre des formes invariantes à gauche, que $G_\Gamma(V)$ s'identifie au groupe des translations à gauche et D_Γ à celui des translations à droite. L'identification de V avec G est déterminée à une translation à gauche près.*

On notera donc que $D_\Gamma(V)$ opère de manière simplement transitive et à cause de l'interprétation ci-dessus on écrira les éléments de $D_\Gamma(V)$ comme opérateurs à droite.

---

(4) $\Omega(V)$ désignera toujours l'algèbre de de Rham.

De plus on a le

THÉORÈME .— (Lie III). *Pour toute algèbre de Maurer-Cartan Γ de dimension finie il existe une Γ -variété complète simplement connexe; celle-ci est déterminée à un Γ -isomorphisme près.*

Remarque. — On doit à E. CARTAN une démonstration de Lie III (parmi d'autres) dans le cadre des Γ -variétés [C. 1936]. Sa démonstration repose sur le fait que le second nombre de Betti d'une Γ -variété complète simplement connexe est nul. Pour une discussion de cette démonstration voir [E. 1988].

Le premier livre sur les groupes de Lie qui contient une démonstration géométrique (due à GORBATSEVICH [Go. 1986]) utilisant ce fait topologique est celui de POSTNIKOV [P. 1985].*) La démonstration de Gorbatsevich est analogue (quoique plus élaborée) à celle de [E. 1953].

3. Γ – **cocycles** (voir aussi [Gr.1974])[(5)]

Soient Γ une algèbre de Maurer-Cartan (éventuellement de dimension infinie) et V une variété connexe. Un morphisme d'algèbres différentielles $\varphi : \Gamma \to \Omega(V)$ tel que $\varphi : \Gamma_0 = \mathbf{R} \to \Omega^0(V)$ soit l'injection canonique, s'appelle Γ *-cocycle*.

Soit $\{\xi_i\}$ une base de Γ^1 avec $d\xi_i = c_i^{jk}\xi_j \wedge \xi_k$, $c_i^{jk} = -c_i^{kj} \in \mathbf{R}$, alors le Γ -cocycle est entièrement déterminé par le système de 1 -formes $\tau_i := \varphi(\xi_i)$ avec les relations $d\tau_i = c_i^{jk}\tau_j \wedge \tau_k$.

Réciproquement tout système $\{\tau_i\}$ de 1 -formes tel que $d\tau_i = c_i^{jk}\tau_j \wedge \tau_k$ détermine un Γ -cocycle $\varphi : \Gamma \to \Omega(V)$ avec $\tau_i = \varphi(\xi_i)$.

En supposant la base $\{\xi_i\}$ donnée une fois pour toutes, on spécifiera désormais un Γ -cocycle par le système $\vec{\tau} := (\tau_1, \dots, \tau_n)$ des formes correspondantes.

En particulier si Γ est de dimension finie et W une Γ -variété connexe, le système de Maurer-Cartan $\vec{\omega} := (\omega_1, \dots, \omega_n)$ qui correspond à $\xi_1, \dots, \xi_n$ est un Γ -cocycle. Puisque le pull-back d'un Γ -cocycle est un Γ -cocycle, on a en particulier que pour tout morphisme de variétés connexes $\phi : V \to$

*) (ajouté sur épreuves) ce renvoi est faux; l'édition de 1985 ne contient pas une démonstration du type mentionné.

(5) Dans [F. 1988] on utilise le vocable g -structures ($g = L(\wedge)$).

W, $\phi^*(\vec{\omega}) =: \vec{\tau}$ est un Γ -cocycle sur V. Par un argument de feuilletages on établit que ϕ est déterminé complètement par $\vec{\tau}$ et un seul couple $(x, \phi(x))$. En particulier si W est en plus complète cela entraîne que ϕ est déterminé par $\vec{\tau}$ à un multiplicateur à gauche $g \in G_\Gamma(V)$ près. De plus on écrit dans ce cas $\vec{\tau} = d_\Gamma \phi$.

Encore par un argument de feuilletages on établit que pour tout Γ -cocycle $\vec{\tau}$ sur une variété connexe et simplement connexe V, on a $\vec{\tau} = d_\Gamma \phi$ pour ϕ convenable.

Cela conduit au théorème fondamental de la géométrie différentielle :

THÉORÈME .— *Soit W une Γ -variété complète et V une variété connexe et simplement connexe munie d'un Γ -cocycle $\vec{\tau}$. Alors il existe un morphisme de variétés $\phi : V \to W$ tel que $\vec{\tau} = d_\Gamma \phi$; ϕ est déterminé à un multiplicateur à gauche $g \in G_\Gamma(W)$ près.*

Soit maintenant V quelconque munie d'un Γ -cocycle $\vec{\tau}$, et $p : \widetilde{V} \to V$ le revêtement universel de groupe fondamental G_V. Alors $\widetilde{\vec{\tau}} := p^*(\vec{\tau})$ est un Γ -cocycle sur $\widetilde{V}$ et donc $\widetilde{\vec{\tau}} = d_\Gamma \widetilde{\phi}$ pour $\widetilde{\phi} : \widetilde{V} \to W$ convenable.

COROLLAIRE .— *$\widetilde{\phi}$ détermine un morphisme de groupes $h_{\widetilde{\phi}} : G_V \to G_\Gamma(W)$ tel que*

$$\widetilde{\phi} \circ g = h_{\widetilde{\phi}}(g) \circ \widetilde{\phi}.$$

En multipliant $\widetilde{\phi}$ à gauche par $g' \in G_\Gamma(W)$, $h_{\widetilde{\phi}}$ subit une conjugaison par g'. La classe de conjugaison de $h_{\widetilde{\phi}}$ est complètement déterminée par $\vec{\tau}$.

$h_{\widetilde{\phi}}$ s'appelle un *morphisme de périodes* associé au cocycle $\vec{\tau}$; la classe de conjugaison $[h_{\widetilde{\phi}}]$ de $h_{\widetilde{\phi}}$ sera appelée le *comportement périodique* de $\vec{\tau}$.

Réciproquement soit $\widetilde{\phi} : \widetilde{V} \to W$ un morphisme de variétés tel que pour tout $g \in G_V$ il existe $g' \in G_\Gamma(W)$ tel que $\widetilde{\phi} \circ g = g' \circ \widetilde{\phi}$. Alors $d_\Gamma \widetilde{\phi} = \widetilde{\phi}^*(\vec{\omega})$ est invariant par rapport à G_V. Par conséquent $d_\Gamma \widetilde{\phi}$ est le relèvement $p^*(\vec{\tau})$ d'un Γ -cocycle $\vec{\tau}$ sur V, et $g \mapsto g'$ est un morphisme de périodes associé. Supposons de plus que $\delta : V \to D_\Gamma(W)$ soit un morphisme de variétés (rappelons que $D_\Gamma(W)$ est un groupe de Lie). Alors en posant $\widetilde{\delta} = \delta \circ p$ et $\widetilde{\phi}' := \widetilde{\phi} \cdot \widetilde{\delta}$ (i.e. $\widetilde{\phi}'(\widetilde{v}) = \widetilde{\phi}(\widetilde{v}) \cdot \widetilde{\delta}(\widetilde{v})$ en rappelant que les éléments de $D_\Gamma(W)$ sont des opérateurs à droite) on a

$$\widetilde{\phi}' \circ g = (\widetilde{\phi} \circ g) \cdot (\widetilde{\delta} \circ g) = (g' \circ \widetilde{\phi}) \cdot \widetilde{\delta} = g' \circ (\widetilde{\phi} \cdot \widetilde{\delta}) = g' \circ \widetilde{\phi}'$$

En vertu de la remarque précédente on a $d_\Gamma \widetilde{\phi}' = p^*(\vec{\tau}')$ où $\vec{\tau}'$ est un Γ -cocycle sur V; $\vec{\tau}'$ et $\vec{\tau}$ ont donc même comportement périodique.

Réciproquement, à cause de la transitivité simple de $D_\Gamma(W)$, on établit facilement que, si $\vec{\tau}$ et $\vec{\tau}'$ sont deux Γ -cocycles sur V à même comportement périodique, il existe $\delta : V \to D_\Gamma(W)$ et $\widetilde{\phi}$ et $\widetilde{\phi}'$ tels que $\widetilde{\phi}' = \widetilde{\phi}\widetilde{\delta}, \widetilde{\delta} := \delta \circ p$, et $d_\Gamma\widetilde{\phi} = p^*(\vec{\tau}), d_\Gamma\widetilde{\phi}' = p^*(\vec{\tau}')$.

La relation entre $\vec{\tau}$ et $\vec{\tau}'$ se décrit directement, sans qu'on ait besoin de passer par le revêtement universel, par la formule

$$\vec{\tau}' = Ad(\delta)\vec{\tau} + d_\Gamma\delta_L \qquad (\star)$$

dont nous allons expliquer le sens.

Remarquons tout d'abord que D_Γ, en tant que groupe qui opère à droite sur V et qui commute à G_Γ, induit une action linéaire à gauche sur l'espace des 1 -formes $G_\Gamma(W)$ -invariantes; cette action sera désignée par Ad. Soit de plus, pour $a \in D_\Gamma(W)$, $A_i^j(a)$ la matrice de $Ad(a)$ par rapport à la base $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Alors pour un système quelconque $\vec{\sigma} := (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ de 1 -formes sur V on définit le système $Ad(\delta)\vec{\sigma} =: \vec{\overline{\sigma}}$ par

$$\overline{\sigma}_i(\nu) = A_i^j(\delta(\nu))\sigma_j(\nu),$$

où $\sigma(\nu)$ désigne la valeur $\in T_\nu^*$ de σ en ν. Cela explique la partie $Ad(\delta)\vec{\tau}$ de la formule $(\star)$.

En fixant $w \in W$, l'application $\delta : V \to D_\Gamma(W)$ donne lieu à une application

$$\Delta_w : \nu \mapsto w \cdot \delta(\nu).$$

Puisque D_Γ commute à G_Γ et que G_Γ opère transitivement, on voit qu'un changement de choix pour w se traduit par une multiplication à gauche de Δ_w par un $g \in G_\Gamma$ convenable. Par conséquent $d_\Gamma\Delta_w$ ne dépend que de δ, et l'on écrit par abus de notation $d_\Gamma\delta(:= d_\Gamma\Delta_w)$. Cela explique le reste de la formule $(\star)$.

Les cocycles $\vec{\tau}$ et $\vec{\tau}'$ reliés par la formule $(\star)$ sont dits *cohomologues entre eux* ou plus précisément on dira que *$\vec{\tau}'$ diffère de $\vec{\tau}$ par le cobord de δ.*

On remarquera que si Γ est l'algèbre de Maurer-Cartan de dimension 1, un Γ -cocycle n'est autre qu'une 1 -forme fermée. Si dans ce cas on prend pour W la droite réelle avec $\omega := dx$, les groupes G_Γ et D_Γ se réduisent au groupe des translations et la formule $(\star)$ exprime le fait que τ et τ' diffèrent par une forme exacte.

Comme dans le cas classique la relation de cohomologie $(\star)$ est une relation d'équivalence et l'on obtient une partition des Γ -cocycles "à valeurs dans W" en *classes de cohomologie à valeurs dans W.*

En résumant on a obtenu la

PROPOSITION .— *Deux Γ -cocycles ont même comportement périodique ssi ils appartiennent à la même classe de cohomologie à valeurs dans W.*

Jusqu'ici on a supposé que V et W sont connexes tous les deux. Cependant pour certaines applications on a besoin de Γ -variétés W non-connexes.

Une Γ -variété W quelconque, i.e. une variété où toute composante connexe est une Γ -variété, est dite *complète* si elle est munie d'un groupe simplement transitif $G_\Gamma(W)$ de Γ -automorphismes.

Dans le cas où W est connexe on a automatiquement $G_\Gamma(W) = Aut_\Gamma(W)$ alors que dans le cas général on n'a que $G_\Gamma(W) \subset Aut_\Gamma(W)$.

Cependant toute la théorie précédente reste valable dans le cas où W est non-connexe et complète, toujours en conservant l'hypothèse de connexité pour V. En plus la formule $(\star)$ garde toujours son sens et la proposition ci-dessus garde sa validité dans le cas où W est complète éventuellement non-connexe.

4. Γ_{sl} -cocycles

Dans cette section Γ_{sl} désignera l'algèbre de Maurer-Cartan associée à l'algèbre de Lie $sl(2,\mathbf{R})$. Γ_{sl} possède une base $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ avec les relations $d\omega_0 = \omega_0 \wedge \omega_1$, $d\omega_1 = \omega_0 \wedge \omega_2$, $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$. Les Γ_{sl} -variétés complètes connexes sont les revêtements du groupe $PL(1,\mathbf{R})_0$, i.e. le groupe projectif de la droite réelle projective qui conserve l'orientation; de plus $PL(1,\mathbf{R})_0 \cong SL(2,\mathbf{R})/\{1,-1\}$. En posant pour $X \in SL(2,\mathbf{R})$,

$$X^{-1}dX =: \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix} \quad \text{, on peut prendre}$$

$$\omega_0 := \omega_{12} \quad \omega_1 := 2\omega_{11} \quad , \omega_2 := -2\omega_{21}.$$

Les formes ω_{ij}étant invariantes à gauche, elles descendent sur $PL(1,\mathbf{R})_0$

En prenant comme paramétrage sur $SL(2,\mathbf{R})$ le suivant

$$X = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \sigma & \rho^{-1} \end{pmatrix}, \rho > 0$$

on trouve $\omega_0 = \omega_{12} = -\dfrac{d\varphi}{\rho^2}$. Observons que $d\varphi$ descend sur $PL(1,\mathbf{R})_0$ ainsi que ρ. Donc pour tout morphisme $\Phi : V \to PL(1,\mathbf{R})_0$ le Γ_{sl} -cocycle

$\vec{\tau} := d_{\Gamma_{sl}}\Phi$ a la propriété que $r^2\tau_0$, avec $r := \rho \circ \Phi > 0$, est fermée. Si en particulier $\tau_0 \neq 0$ partout, $r^2\tau_0$ est une forme fermée non-singulière. Donc si V est en plus simplement connexe cette forme est en même temps exacte ce qui implique, en vertu de la non-singularité, que V est non-compacte.

Rappelons qu'une 1 -forme τ non-nulle partout qui remplit la condition de Frobenius $d\tau = \tau \wedge \sigma$ détermine un feuilletage de codimension 1. On dira que le feuilletage est *transversalement 1 -projectif* si l'on peut choisir τ de manière que τ soit le τ_0 d'un Γ_{sl} -cocycle. La constatation précédente conduit à l'énoncé.

Le groupe fondamental d'une variété compacte à feuilletage transversalement 1 -projectif est d'ordre infini.

Remarque. — Le théorème est un cas particulier du théorème d'HAEFLIGER sur les feuilletages de codimension 1 transversalement analytiques [H. 1958]. En effet on peut établir qu'un feuilletage transversalement 1 -projectif admet un atlas transverse dont les cartes sont des intervalles ouverts de $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ et où le pseudogroupe d'holonomie est formé de transformations projectives donc analytiques.

En particulier ω_0 détermine un feuilletage transversalement 1 -projectif sur $PL(1,\mathbf{R})_0$; c'est la fibration par les classes à gauche du sous-groupe

$$B_0 := \left\{ \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \sigma & \rho^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; \sigma \in \mathbf{R}, \rho > 0 \right\}$$

Sur B_0 ainsi que sur toute fibre gB_0 la forme ω_0 s'annule et les restrictions $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2$ à gB_0 de ω_1, ω_2 constituent la base d'une $\Gamma(B_0)$ -structure complète avec les relations $d\overline{\omega}_1 = 0, d\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2$.

De même, si $\vec{\tau}$ est un Γ_{sl} -cocycle associé à un feuilletage $\mathcal{F}$ transversalement 1 -projectif, τ_0 s'annule sur chaque feuille $F \in \overline{\mathcal{F}}$ et les restrictions $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2$ définissent sur F un $\Gamma(B_0)$ -cocycle.

En général, étant donné un feuilletage transversalement 1 -projectif $\mathcal{F}$, le Γ_{sl} -cocycle qui le définit n'est nullement unique ni non plus sa classe de Γ -cohomologie à valeurs dans $PL(1,\mathbf{R})_0$. (Exemple : sur S^1 avec la coordonnée cyclique ψ les Γ_{sl} -cocycles $(d\psi, 0, -d\psi)$ et $(d\psi, 0, 0)$ définissent le feuilletage trivial; cependant leur comportement périodique est distinct.)

Néanmoins la classe de cohomologie à valeurs dans B_0 du Γ_{B_0} - cocycle induit sur une feuille est grosso modo intrinsèque.

Pour établir cela rappelons que deux 1 -formes σ_0, τ_0 qui définissent le même feuilletage diffèrent par un facteur unité $\in \Omega^0(V)$. Donc en vertu de la connexité de V on a $\sigma_0 = f\tau_0$ où $f > 0$ ou < 0; on dira que les Γ_{sl} - cocycles $\vec{\sigma}$ et $\vec{\tau}$ sont dans la même classe d'orientation si $f > 0$; il y a deux classes d'orientation. Cela permet de formuler le

THÉORÈME .— *(REEB). Pour un feuilletage transversalement 1 - projectif $\mathcal{F}$ la classe de cohomologie à valeurs dans B_0 du Γ_{B_0} - cocycle induit sur une feuille $F \in \mathcal{F}$ par le Γ_{sl} - cocycle $\vec{\tau}$ qui définit $\mathcal{F}$, ne dépend que du couple $(\mathcal{F}, F)$ et de la classe d'orientation de $\vec{\tau}$.*

Etudions tout d'abord comment $\vec{\tau}$ change par le cobord d'une application $\delta : V \to B_0$. Pour cela associons avec $\vec{\tau}$ la matrice $M_{\vec{\tau}} := \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix}$ où $\tau_{12} := \tau_0$, $\tau_{11} := {}^1\!/_2\tau_1 = -\tau_{22}$, $\tau_{21} := -{}^1\!/_2\tau_2$. (Pour V simplement connexe $M_{\vec{\tau}}$ est le pull-back de la matrice $X^{-1}dX = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix}, X \in SL(2, \mathbf{R})$.)

Alors le cocycle $\vec{\sigma}$ qui diffère de $\vec{\tau}$ par le cobord de δ se calcule par la formule

$$M_{\vec{\sigma}} = \delta^{-1} M_{\vec{\tau}} \delta + \delta^{-1} d\delta$$

. Supposons que δ soit du type $\begin{pmatrix} f^{-1} & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}, f > 0, f \in \Omega^0(V)$. Alors le calcul donne

$$\sigma_0 = f^2\tau_0 \quad \sigma_1 = \tau_1 - 2f^{-1}df \quad \sigma_2 = f^{-2}\tau_2.$$

Donc en changeant par le cobord d'un δ du type ci-dessus on peut remplacer $\vec{\tau}$ par un cocycle $\vec{\sigma}$ dans la même classe d'orientation où σ_0 diffère de τ_0 par un facteur positif quelconque.

Soit maintenant δ du type $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}, h \in \Omega^0(V)$ quelconque. Alors on obtient

$$\sigma_0 = \tau_0 \quad \sigma_1 = \tau_1 + 2h\tau_0 \quad \sigma_2 = \tau_2 + 2h\tau_1 + 2h^2\tau_0 - 2dh.$$

Observons en plus que deux Γ_{sl} - cocycles $\vec{\sigma}, \vec{\tau}$ où $\sigma_0 = \tau_0$, ne peuvent différer en les termes σ_1 et τ_1 que par un multiple de $\tau_0 (= \sigma_0)$ à cause de l'équation $d\sigma_0 = d\tau_0 = \tau_0 \wedge \tau_1 = \sigma_0 \wedge \sigma_1 = \tau_0 \wedge \sigma_1$.

Cela conduit à la conclusion que, si $\vec{\sigma}$ et $\vec{\tau}$ sont des Γ_{sl} -cocycles dans la même classe d'orientation, on peut changer toujours $\vec{\tau}$ par un cobord à valeurs dans B_0 de façon qu'on obtienne $\sigma_0 = \tau_0$, $\sigma_1 = \tau_1$. Ces deux équations entraînent $d\sigma_1 = d\tau_1 = \tau_0 \wedge \tau_2 = \sigma_0 \wedge \sigma_2 = \tau_0 \wedge \sigma_2$ d'où résulte $\sigma_2 = \tau_2 + k\tau_0, k \in \Omega^0(V)$.

Par conséquent dans ce cas on a sur une feuille $F, \overline{\sigma}_1 = \overline{\tau}_1, \overline{\sigma}_2 = \overline{\tau}_2$. Observons finalement que le changement de $\vec{\tau}$ par un cobord à valeurs dans B_0 fait changer le Γ_{B_0} -cocycle induit $\overline{\tau}_1\overline{\tau}_2$ par un cobord à valeurs dans B_0 ce qui établit le théorème.

Dans l'énoncé du théorème on peut se dispenser de l'orientation en considérant sur F la cohomologie à valeurs dans

$B := \left\{ \begin{pmatrix} \pm\rho & 0 \\ \sigma & \rho^{-1} \end{pmatrix} \mid \rho > 0, \sigma \in \mathbf{R} \right\}$ et en considérant le Γ_{sl} -cocycle $\vec{\tau}$ comme un cocycle à valeurs dans $PL(1, \mathbf{R})$, le groupe projectif total. Dans ce cas, étant donnés deux Γ_{sl} -cocycles $\vec{\sigma}, \vec{\tau}$ qui définissent le même feuilletage $\mathcal{F}$, on peut changer $\vec{\tau}$ par un cobord à valeurs dans B de façon à atteindre $\sigma_0 = \tau_0$, $\sigma_1 = \tau_1$. On obtient donc le

COMPLEMENT. *La classe de cohomologie à valeurs dans B du Γ_B -cocycle induit sur F par un Φ_{sl} -cocycle associé à $\mathcal{F}$ ne dépend que du couple $(\mathcal{F}, F)$.*

Remarque. — Ce théorème (pour une première version voir [R. 1952]) suggère clairement le théorème général correspondant pour les feuilletages de codimension 1, voir §8.

La classe de cohomologie sur $F \in \mathcal{F}$ à valeurs dans respectivement B, B_0 sera appelée *la classe d'holonomie, la classe d'holonomie orientée.*

Pour rattacher p. ex. la classe orientée à l'holonomie au sens de la théorie des feuilletages, fixons un Γ_{sl} -cocycle $\vec{\tau}$ qui définit $\mathcal{F}$. Soient $p : \widetilde{V} \to V$ le revêtement universel, et $\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\vec{\tau}}, \widetilde{F}$ des relèvements de $\overline{\mathcal{F}}, \vec{\tau}, F$. De plus on fixe $\nu_0 \in F$ et $\widetilde{\nu}_0 \in \widetilde{F}$ au-dessus de ν_0.

Alors on peut fixer $\widetilde{\phi} : \widetilde{V} \to PL(1, \mathbf{R})_0$ de manière que $\widetilde{\vec{\tau}} = d_{\Gamma_{sl}}\widetilde{\phi}$ et que $\widetilde{\phi}(\widetilde{\nu}_0) = \mathbf{1} \in PL(1, \mathbf{R})_0$. Puisque $\widetilde{\tau}_0 = \widetilde{\phi}^*\omega_0$, les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sont appliquées dans les feuilles de ω_0 i.e. dans les classes gB_0; en particulier $\widetilde{\phi}(F) \subset B_0$.

Soient

$$q : PL(1, \mathbf{R})_0 \to PL(1, \mathbf{R})_0/B_0 = \mathbf{P}^1(\mathbf{R})$$

la projection canonique et $0 := q(B_0)$.

Puisque $\widetilde{\tau}_0 \neq 0$, $q \circ \widetilde{\phi}$ induit une "immersion de la structure transverse" de $\widetilde{\mathcal{F}}$. En particulier on peut fixer un voisinage $\widetilde{U}$ de $\widetilde{\nu}_0$ tel que

(i) p applique $\widetilde{U}$ bijectivement sur un voisinage U de ν_0,

(ii) $\widetilde{\mathcal{F}}|\widetilde{U} := \widetilde{\mathcal{F}}_{\widetilde{U}}$ est une fibration,

(iii) $q \circ \widetilde{\phi}$ induit une bijection de $\widetilde{U}/\widetilde{F}_{\widetilde{U}}$ sur un intervalle ouvert J autour de 0.

Soit g un élément du groupe fondamental du revêtement p tel que $g(\widetilde{\nu}_0) \in \widetilde{I}$. Par conséquent $g\widetilde{F} = \widetilde{F}$ et l'on a le triangle commutatif.

$$\begin{tikzcd} g\widetilde{U} \arrow[rr, "g^{-1}"] \arrow[dr, "P"'] & & \widetilde{U} \arrow[dl, "P"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

D'autre part $q \circ \widetilde{\phi}$ induit sur $g\widetilde{U}$ une bijection sur $h_{\phi}^{\sim}(g)J$ (pour $h_{\phi}^{\sim}$ voir §3), et l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} g\widetilde{U} \arrow[r, "g^{-1}"] \arrow[d, "q \circ \widetilde{\phi}"] & \widetilde{U} \arrow[d, "q \circ \widetilde{\phi}"] \\ h_{\phi}^{\sim}(g)J \arrow[r, "h_{\phi}^{\sim}(g^{-1})"] & J \end{tikzcd}$$

Evidemment $h_{\phi}^{\sim}(g)$ fixe $0 = q \circ \widetilde{\phi}(\widetilde{F})$.

Les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ qui coupent $\widetilde{U}$ et $g\widetilde{U}$ se projettent par $q \circ \widetilde{\phi}$ dans $J \cap h_{\phi}(g)J$. Soit maintenant $\widetilde{\gamma}$ une courbe dans $\widetilde{F}$ qui relie v_0 et $g(v_0)$ alors $\gamma := p\widetilde{\gamma}$ est un lacet dans F. En faisant le tour le long de γ, les feuilles de U qui correspondent à $J \cap h_{\phi}^{\sim}(g)J$ "reviennent" comme feuilles de U correspondant aux points de $h_{\gamma}^{\sim}(g^{-1})J \cap J$, et l'application de retour, i.e. l'élément du groupe d'holonomie associé à γ, est donnée par $h_{\phi}^{\sim}(g^{-1})$.

Observons finalement que sur $\widetilde{F}$ le cocycle $(\widetilde{\overline{\tau}}_1, \widetilde{\overline{\tau}}_2) = d_{\Gamma_{B_0}}(\widetilde{\phi}|\widetilde{F})$ et que $h_{\phi}^{\sim}(g) = h_{\phi|\widetilde{F}}^{\sim}(g) \in \mathbf{B}_0$. Donc $h_{\phi}^{\sim}(g)$ est une période de $(\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2)$. Autrement dit :

Le comportement périodique de $(\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2)$ sur F détermine l'holonomie,

ou bien

La classe d'holonomie d'une feuille détermine complètement l'holonomie.

Remarque. — Le fait que le groupe fondamental opère à gauche alors que l'action de monodromie de $\pi_1(V, \nu_0)$ sur $p^{-1}(\nu_0)$ est une action à droite, se reflète visiblement au niveau de l'holonomie.

Exemple. — $V := \mathbf{R}^2/(0, \mathbf{Z}), \widetilde{V} := \mathbf{R}^2, p : (x, y) \mapsto (x, y \bmod 1), \widetilde{F} := (0, \mathbf{R}), \widetilde{\nu}_0 := (0, 0)$. $\widetilde{\tau}_0 = x^2dy + dx, \widetilde{\tau}_1 = 2xdy, \widetilde{\tau}_2 = 2dy, \widetilde{\tau}_{12} = x^2dy +$

$dx, \widetilde{\tau}_{12} = xdy, \widetilde{\tau}_{21} = -dy.$

$$\widetilde{\phi} : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ -y & 1 - xy \end{pmatrix}$$

$$g : (x, y) \mapsto (x, y + 1)$$

$$h_{\widetilde{\phi}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$q : \begin{pmatrix} u & \nu \\ w & z \end{pmatrix} \mapsto \nu / z =: \xi$$

$$h_{\widetilde{\phi}}(g)(\xi) = \frac{\xi}{1 - \xi}$$

$$h_{\widetilde{\phi}}(g^{-1})(\xi) = \frac{\xi}{1 + \xi}$$

. Les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sont les branches des hyperboles $\lambda(xy - 1) + \mu x = 0, (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

5. Le groupe infini d'une variable

Les feuilletages analytiques de codimension 1 transversalement orientables ne se définissent pas en général à l'aide d'un Γ_{sl} -cocycle; le pseudo-groupe d'holonomie ne se plonge pas en général dans le pseudo-groupe projectif. Pour cela il faut recourir au pseudo-groupe analytique d'une variable ou en terminologie classique au "groupe infini d'une variable".

Grâce à la dimension réelle 1 ce pseudo-groupe s'organise en un véritable groupe $GA(1)$ (voir l'appendice); le pseudo-groupe sera noté $PA(1)$.

Néanmoins même au niveau des pseudo-groupes la notion d'algèbre de Maurer-Cartan associée a toujours un sens à condition qu'on puisse définir ce que c'est qu'une structure différentielle sur le pseudo-groupe.

Rappelons que les auteurs classiques ont toujours défini la structure différentielle d'un (pseudo-) groupe de Lie de transformations à l'aide de familles de transformations paramétrées. Ce même procédé, proprement formalisé par SOURIAU [S. 1988] sous le nom de *difféologie*, est toujours applicable dans le cas des "groupes infinis" comme on l'a fait remarquer dans la littérature cf. p.ex. [H. 1976].

Pour simplifier un peu la terminologie appelons *ouvert euclidien* tout ouvert d'un espace numérique de dimension finie.

Alors, en empruntant la terminologie de Souriau, une famille f_u dans $PA(1)$ où u parcourt un ouvert euclidien U sera appelée *plaque à support* $J \subset \mathbf{R}$, J étant un intervalle ouvert, si

(i) $\forall u \in U | J \subset \mathrm{dom} f_u$,

(ii) $(u, x) \mapsto f_u(x)$, est analytique sur $U \times J$.

Nous dirons que la plaque est *élémentaire* si $0 \in J$.

Soit $\varphi : U' \to U$ un morphisme analytique d'ouverts euclidiens et $f : U \to PA(1)$ à support, disons, J, alors on désignera par f_φ la plaque $U' \to PA(1)$ définie par $u' \mapsto f_{\varphi(u')}$, le support étant toujours J.

Soit $J' \subset J$ un sous-intervalle ouvert, alors si f est une plaque à support J, f est en même temps une plaque à support J' et $f_u \mapsto f_u | J'$ s'appelle le *rétrécissement* de J à J'.

Soit $L \subset PA(1)$ le sous-ensemble des transitions[6] qui sont définies en 0 et qui conservent l'orientation.

Une p *-forme locale* ω sur L sera une fonctionnelle ω qui associe à chaque plaque élémentaire $f : U \to L$ une p -forme analytique ω_f sur U invariante vis-à-vis des rétrécissements et telle que $\omega_{f_\varphi} = \varphi^*(\omega_f), \varphi : U' \to U$ étant un morphisme analytique d'ouverts euclidiens. L'ensemble des p -formes locales sur L sera désigné par $\Omega^p(L)$. Il est évident que si $\omega \in \Omega^p(L), d\omega$, définie par $(d\omega)_f := d(\omega_f)$, est une $(p+1)$ -forme locale.

Une p -forme locale sera dite *invariante à gauche* si pour toute plaque élémentaire f et toute transition $T \in L$, telle que Tf, définie par $(Tf)_u := T \circ f_u$, soit encore une plaque élémentaire à même support que f, on a $\omega_{Tf} = \omega_f$.

6.$\Gamma(L)$; Heuristique

Toute transition $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui est définie en 0 est complètement déterminée par son développement en série entière à l'origine

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots .$$

Pour que f définisse un élément de L (vide supra) il faut et il suffit que $\alpha_1 > 0$. De plus pour qu'une suite $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ soit la suite des coefficients d'une série entière il faut et il suffit qu'elle soit majorée en valeur absolue à partir d'un certain rang par une suite du type $(1, A, A^2, A^3, \dots)$ pour $A > 0$

[6] transition = difféomorphisme d'un intervalle sur un intervalle.

convenable. L'espace $\mathcal{E}$ de ces suites fournit un paramétrage bijectif de L. Les α_i sont des fonctions analytiques locales sur L. Par conséquent leurs différentielles $d\alpha_i$ sont des 1 -formes sur L et l'on écrit formellement

$$\delta f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(d\alpha_n)x^n$$

Ainsi on est amené à considérer des séries formelles

$$\omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n x^n$$

où les ω_n sont des formes différentielles sur L de même degré.

On pose

$$\delta\omega(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(d\omega_n)x^n$$

$$\omega'(x) := \sum_{n=1}^{\infty}(n\omega_n)x^{n-1}.$$

Evidemment on a

$$\delta\omega' = (\delta\omega)'$$

Pour les séries de ce type on dispose des opérations arithmétiques, $+, -, \wedge$, avec les propriétés habituelles. Pour les séries entières on dispose en plus de l'opération de composition $(f, g) \mapsto f \circ g$ qui n'est définie que si $g(0)$ appartient à l'intervalle de convergence de f.

La série entière $0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \ldots$ sera désignée par $\mathbf{1}$ de même que l'élément neutre d'un groupe.

Comme Elie Cartan l'a fait remarquer, la formule

$$\overset{-1}{g} \circ (g + dg) = \mathbf{1} + \omega$$

définit pour un "groupe de Lie de transformations" de type fini ou infini un élément infinitésimal ω dont les paramètres (infinitésimaux !), exprimés en termes de paramètres de g et de leurs différentielles fournissent un système de générateurs de l'algèbre de Maurer-Cartan des formes invariantes à gauche; on suppose bien entendu qu'un système de paramètres "au voisinage" de $\mathbf{1}$ soit fixé. En particulier dans le cas d'un groupe linéaire où g est une matrice on a $\omega = \overset{-1}{g} \cdot dg$.

Dans le cas des séries entières les α_i peuvent être considérés comme des paramètres. Selon les règles du calcul infinitésimal on a

$$\begin{aligned}\overset{-1}{f} \circ (f+\delta f) &= \mathbf{1} + (\overset{-1}{f})' \cdot \delta f \\ &= \mathbf{1} + \frac{\delta f}{f'}\end{aligned}$$

d'où

$$\omega = \frac{\delta f}{f'}.$$

En posant $\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n x^n, \beta_n := (n+1)\alpha_{n+1}/\alpha_1, 1/\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x^n\right) =: \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n$, donc $\beta_0 = B_0 = 1$, on trouve

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{d\alpha_n}{\alpha_1} + B_1 \frac{d\alpha_{n-1}}{\alpha_1} + \cdots + B_n \frac{d\alpha_0}{\alpha_1} \\ \frac{d\alpha_n}{\alpha_1} &= \omega_n + \beta_1 \omega_{n-1} \cdots + \beta_n \omega_0\end{aligned}.$$

Les formules pour B_n en termes des β_n sont bien connues [Hg. 1883] et les relations de récurrence

$$\beta_0 = B_0 = 1$$

$$B_n + \beta_1 B_{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} B_1 + \beta_n = 0 n \geq 1$$

permettent de les calculer de proche en proche.

De la formule $\omega = \frac{\delta f}{f'}$ il s'ensuit que

$$\delta\omega = \frac{\delta f}{f'} \wedge \frac{\delta f'}{f'}.$$

D'autre part

$$\left(\frac{\delta f}{f'}\right)' = \frac{\delta f'}{f'} - \frac{f'' \delta f}{(f')^2}$$

d'où, en tenant compte de $\delta f \wedge \delta f = 0$, on obtient

$$\delta\omega = \frac{\delta f}{f'} \wedge \left(\frac{\delta f}{f'}\right)' = \omega \wedge \omega'.$$

ou bien

$$d\omega_n = \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i<j}} (j-i)\omega_i \wedge \omega_j$$

ce qui montre que les ω_n constituent sur L un système de Maurer-Cartan.

Souvent on remplace le système (ω_n) par le système $(\psi_n), \psi_n := n!\omega_n$, et l'on a

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\psi_n x_n$$
$$d\psi_n = \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i<j}} a_n^{ij}\psi_i \wedge \psi_j$$

où

$$a_n^{ij} = (j-i)\frac{n!}{i!j!}$$

Les coefficients a_n^{ij} sont entièrement déterminés par les relations de récurrence

$$a_{n+1}^{ij} = a_n^{i-1,j} + a_n^{i,j-1}, \quad i+j = n+2$$

et les conditions aux limites

$$\begin{aligned} a_0^{0,1} &= 1 \\ a_n^{i,j} &= 0 \qquad \text{si les conditions } i<j \text{ et} \\ & \qquad\quad\ i+j=n+1 \text{ ne sont pas vérifiées.} \end{aligned}$$

Cela permet d'écrire rapidement les premières équations

$$\begin{aligned} d\psi_0 &= \psi_0 \wedge \psi_1 \\ d\psi_1 &= \psi_0 \wedge \psi_2 \\ d\psi_2 &= \psi_0 \wedge \psi_3 + \psi_1 \wedge \psi_2 \\ d\psi_3 &= \psi_0 \wedge \psi_4 + 2\psi_1 \wedge \psi_3 \\ d\psi_4 &= \psi_0 \wedge \psi_5 + 3\psi_1 \wedge \psi_4 + 2\psi_2 \wedge \psi_3. \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Les formules précédentes montrent que, si l'on pose $pds\ \omega_n = pds\ \psi_n = n-1$, l'algèbre obtenue est de poids de type fini compatible avec d. De plus, si l'on munit α_n et $d\alpha_n$ tous les deux de poids $n-1$, on vérifie que les expressions de ω_n en termes de α_j et $d\alpha_j$ sont de poids homogène $n-1$.

Finalement l'invariance à gauche de ω est presqu' évidente. En effet, en multipliant f à gauche par un h fixe et en variant $h \circ f$ en variant seulement f, on obtient $h \circ f + \delta(h \circ f) = h \circ f + h'\delta f$ et par conséquent $(h \circ \overset{-1}{f})(h \circ f + \delta(h \circ f)) = \overset{-1}{f} \circ \overset{-1}{h} \circ (h \circ f + h'\delta f) = \overset{-1}{f} \circ (f + \frac{h'\delta f}{h'}) = \mathbf{1} + \frac{\delta f}{f'}$.

7. Γ_{ga} ; Théorie formelle

Soit Γ_{ga} l'algèbre différentielle sur $\mathbf{R}$ engendrée par une base $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$, en dimension 1, avec les équations de structure

$$d\omega_n = \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i<j}} (j-i)\omega_i \wedge \omega_j. \tag{1}$$

Pour vérifier que $dd = 0$, on introduit la série formelle

$$\omega := \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i t^i$$

et les équations (1) se résument sous la forme

$$\delta\omega = \omega \wedge \omega'$$

où les opérateurs δ et $'$ ont toujours le même sens qu'avant (mutatis mutandis); alors $dd = 0$ revient à $\delta\delta = 0$

En effet on a

$$\begin{aligned}
\delta(\delta\omega) = \ & \delta(\omega \wedge \omega') = && \delta\omega \wedge \omega' - \omega \wedge \delta\omega' \\
= \ & \omega \wedge \omega' \wedge \omega' && -\omega \wedge (\delta\omega)' \\
= \ & && -\omega \wedge (\omega \wedge \omega')' \\
= \ & && -\omega \wedge \omega' \wedge \omega' - \omega \wedge \omega \wedge \omega'' \\
= \ & && 0
\end{aligned}$$

Au lieu de la base (ω_i) on utilise souvent la base (ψ_i) où $\psi_n = n!\omega_n$, et alors les équations de structure (1) se présentent sous forme

$$d\psi_n = \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i<j}} a_n^{ij} \psi_i \wedge \psi_j \tag{L1}$$

où les coefficients a_n^{ij} sont ceux définis au paragraphe précédent.

On observera que

$$pds(\omega_n) = pds(\psi_n) := n - 1$$

définit sur l'algèbre de Maurer-Cartan Γ_{ga} un poids de type fini compatible avec d.

En plus si l'on munit la “variable” t de poids -1, ω et ω' sont alors homogènes de poids respectifs -1 et 0. L'algèbre de Lie $L(\Gamma_{ga})$ (§1) est celle des champs de vecteurs polynomiaux sur $\mathbf{R}$.

L'algèbre Γ_{ga} a été considérée la première fois par ELIE CARTAN [C. 1937] bien qu'il n'ait écrit que les premières équations de structure (la). Elle a été redécouverte par G. REEB [non publiée] en théorie des feuilletages de codimension 1, et par la suite elle a été redécouverte encore par GODBILLON et VEY qui l'ont décrite complètement [G.-V. 1971].

Pour étudier quelques propriétés de cette algèbre on a besoin de quelques notions d'algèbre différentielle.

7.1 Notions générales

Soit $\Omega = (\Omega^0, \Omega^1, \Omega^2, \ldots)$ une algèbre différentielle sur $\mathbf{R}$. En particulier Ω^0 est une algèbre commutative sur $\mathbf{R}$ et les Ω^i sont des Ω^0 -modules. On désignera le groupe des unités de Ω^0 par $(\Omega^0)^{-1}$; le noyau de $\Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega_1$ sera désigné par K, c'est l'algèbre des *constantes*. Pour des raisons formelles on complète l'algèbre Ω en degrés négatifs par des zéros, i.e. $\Omega^j = (0)$ pour $j < 0$.

Pour $\omega \in \Omega$ on définit

$$ann\,\omega := \{\sigma \in \Omega | \omega \wedge \sigma = 0\}$$

$$I(\omega) := \omega \wedge \Omega;$$

ce sont respectivement *l'annulateur de* ω et *l'idéal engendré par* ω.

On dira que $\omega \in \Omega^1$ est *primitif* lorsque $I(\omega) = ann\ \omega$.[7] (De même on peut poser que $\{\omega_1, \ldots, \omega_k\} \subset \Omega^1$ est un *système primitif* lorsque $ann\ (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_k) = \omega_1 \wedge \Omega + \omega_2 \wedge \Omega + \cdots + \omega_k \wedge \Omega$; mais nous n'avons pas besoin de cette notion plus générale).

[7] Par la suite nous n'utilisons la primitivité de ω que pour les $\sigma \in \Omega$ de dimensions $0, 1, 2$. C'est pour cela qu'on introduit parfois [M. 1976] le complexe (Ω, d_ω) où $d_\omega \sigma := \omega \wedge \sigma$. Alors la primitivité revient à l'acyclicité de (Ω, d_ω), mais nous utiliserons l'acyclicité seulement en dimensions $0, 1, 2$.

Si ω *est primitif,* ω *est libre sur* Ω^0 *et* $f\omega$ *est primitif ssi* $f \in (\Omega^0)^{-1}$.

En effet $f\omega = 0$ entraîne $f = \omega \wedge \tau$ où $\tau \in \Omega^{-1}$ donc $f = 0$. De plus si $f \in (\Omega^0)^{-1}$ on a *ann* $(f\omega) =$ *ann* ω et $I(f\omega) = I(\omega)$ donc $f\omega$ est primitif. Réciproquement si $f\omega$ est primitif $f\omega \wedge \omega = 0$ entraîne $\omega = gf\omega$ ou $(gf-1)\omega = 0$, donc $gf - 1 = 0$, ou bien $f \in (\Omega^0)^{-1}$.

$f \in \Omega^0$ sera appelé une *coordonnée* si df est primitif.

Un couple $\{f, g\} \subset \Omega^0$ sera dit *fonctionnellement dépendant si* $df \wedge dg = 0$; g *dépend (fonctionnellement)* de f si $dg \in I(df)$, i.e. $dg = hdf$ pour $h \in \Omega^0$ convenable.

Si g dépend de f, le couple $\{f, g\}$ est fonctionnellement dépendant ; la réciproque a lieu si f est une coordonnée et alors le facteur h dans l'équation $dg = hdf$ est bien déterminé puisque df est libre sur Ω^0, et l'on écrit $h =: \frac{dg}{df}$ ou $h =: g'(f)$, ou simplement $h = g'$ avec la coordonnée sous-entendue ; h s'appelle la *dérivée de* g *par rapport à* f. .

De plus de l'équation $dg = hdf$ il résulte $dh \wedge df = 0$ et par conséquent $dh = h_2 df$. De même on a $dh_2 = h_3 df$ etc. ; h_n est appelé la *n-ième dérivée* de g par rapport à f et sera noté $g^{(n)}(f)$ ou $g^{(n)}$; on pose $g^{(0)}(f) := g$.

Posons pour $f \in \Omega^0$

$$\mathcal{D}(f) := \{g \in \Omega^0 | df \wedge dg = 0\}.$$

$\mathcal{D}(f)$ est une sous-algèbre de Ω^0 qui contient l'algèbre K des constantes.

Si $g \in \mathcal{D}(f) \cap (\Omega^0)^{-1}$ alors $g^{-1} \in \mathcal{D}(f) \cap (\Omega^0)^{-1}$. En effet $dg^{-1} = g^{-2}dg$ d'où $g^{-1} \in \mathcal{D}(f) \cap (\Omega^0)^{-1}$, autrement dit, en posant

$$\mathcal{D}(f)^{-1} := \{g | g \in \mathcal{D}(f), g^{-1} \in \mathcal{D}(f)\},$$

on a $\mathcal{D}(f)^{-1} = \mathcal{D}(f) \cap (\Omega^0)^{-1}$.

On peut maintenant résumer les remarques précédentes en la

PROPOSITION .— *Si* f *est une coordonnée les propriétés suivantes ont lieu*

(i) $\mathcal{D}(f)$ *est stable par la dérivation par rapport à* f

(ii) $\mathcal{D}(f)^{-1} = \mathcal{D}(f) \cap (\Omega^0)^{-1}$

(iii) $g \in \mathcal{D}(f)$ *est une coordonnée ssi* $g'(f) \in \mathcal{D}(f)^{-1}$ *; dans ce cas* $\mathcal{D}(g) = \mathcal{D}(f)$.

De plus pour $h \in \mathcal{D}(f)$ on a $h'(f) = h'(g)g'(f)$.

$\omega \in \Omega^1$ est dit *intégrable* si $d\omega \in I(\omega)$; si ω est en plus primitif ω est intégrable *ssi* $\omega \wedge d\omega = 0$.

On dit que ω *admet un facteur intégrant* s'il existe $f \in \Omega^0, g \in (\Omega^0)^{-1}$ tels que $df = g\omega$; dans ce cas g est appelé un *facteur intégrant.*

Si ω admet un facteur intégrant i.e. $\omega = \dfrac{df}{g}, g \in (\Omega^0)^{-1}$, ω est intégrable; comme on sait la réciproque en général n'a pas lieu.

7.2 $\Omega[[t]]$

Pour toute algèbre différentielle Ω les séries entières formelles à coefficients dans Ω constituent une nouvelle algèbre différentielle où $\Omega^\Gamma[[t]]^p :=$ $\Omega^p[[t]]$ et où la différentielle δ est définie par

$$\delta(\sum_{i=0}^{\infty} \omega_i t^i) := \sum_{i=0}^{\infty} (d\omega_i) t^i$$

La dérivation par rapport à t sera désignée par $'$ et l'on a

$$\begin{aligned}(\delta\omega)' &= \delta\omega' \\ \delta(\omega \wedge \tau) &= \delta\omega \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge \delta\tau, \omega \in \Omega^p[[t]] \\ (\omega \wedge \tau)' &= \omega' \wedge \tau + \omega \wedge \tau'.\end{aligned}$$

On munit $\Omega[[t]]$ de la topologie *t -adique* à savoir celle admettant pour base la suite descendante des idéaux $t^n\Omega[[t]], n = 0, 1, 2, \ldots$ Dans la suite convergence, continuité etc. se réfèrent toujours à cette topologie. Par exemple les opérations arithmétiques ainsi que les opérateurs δ et $'$ sont continus au sens *t -adique.*

Comme on sait les unités de l'algèbre $\Omega^0[[t]]$ sont précisément les séries $f_0 + f_1 t + \cdots$ où f_0 est une unité de Ω^0.

De même on démontre par un argument de récurrence sur les coefficients que les primitifs de $\Omega^1[[t]]$ sont exactement les séries $\omega_0 + \omega_1 + \cdots$ où ω_0 est primitif. Par conséquent les séries $f_0 + f_1 t + \cdots$ où f_0 est une coordonnée sont des coordonnées.

Intuitivement on peut dire que les propriétés d'être une unité/une coordonnée dans Ω^0, de même que la propriété de primitivité dans Ω^1 sont stables par rapport à une "perturbation". Par contre la propriété d'intégrabilité de $\omega \in \Omega^1$ en général ne se conserve pas par "perturbation".

Soit $\phi = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots =: x_0 + X \in \Omega^0[[t]]$ une coordonnée (donc x_0 est une coordonnée $\in \Omega^0$), et soit $g \in \mathcal{D}(x_0)$ (voir §7.1). Alors on définit pour tout entier $n \geq 0$,

$$g^{(n)}(\phi) := g^{(n)}(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(n+k)}(x_0)}{k!} X^k;$$

puisque $X^k \in t^k\Omega[[t]]$, la série ci-dessus converge. En plus l'opérateur $\phi \mapsto g^{(n)}(\phi)$ est continu.

Observons que, si $g \in \mathcal{D}(x_0)$ est une coordonnée, $g^{(0)}(\phi) = g + \cdots$ est encore une coordonnée $\in \Omega^0[[t]]$, et si de plus $h \in \mathcal{D}(x_0)$, on a

$$h^{(0)}(g^{(0)}(\phi)) = h^{(0)}(\phi).$$

Par un calcul simple on constate que pour $g \in \mathcal{D}(x_0)$ quelconque on a

$$\begin{aligned} \delta g^{(n)}(\phi) &= g^{(n+1)}(\phi) \cdot \delta\phi \\ g^{(n)}(\phi)' &= g^{(n+1)}(\phi) \cdot \phi'. \end{aligned}$$

Supposons que ϕ' soit une unité (donc x_1 est une unité) et que $g \in \mathcal{D}(x_0)$ soit une coordonnée. Alors on constate facilement que $(g^0(\phi))' = g^{(1)}(x_0)x_1 + \cdots$ est encore une unité puisque $g^{(1)}(x_0)x_1$ est une unité $\in \Omega^0$. En vertu des formules précédentes on obtient alors l'identité

$$\frac{\delta g^{(0)}(\phi)}{g^{(0)}(\phi)'} = \frac{\delta\phi}{\phi'}.$$

Pour $\omega \in \Omega^p[[t]]$ et $X \in t\Omega^0[[t]]$ on définit le *produit de composition*

$$\omega \circ X := \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n X^n \in \Omega^p[[t]].$$

Le produit de composition est une opération binaire continue au sens t - adique.

On a

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2) \circ X &= (\omega_1 \circ X) \wedge (\omega_2 \circ X) \\ (\omega_1 + \omega_2) \circ X &= (\omega_1 \circ X) + (\omega_2 \circ X) \\ (\omega \circ X) \circ Y &= \omega \circ (X \circ Y) \\ \delta(\omega \circ X) &= \delta\omega \circ X + (-)^p(\omega' \circ X) \wedge \delta X \\ (\omega \circ X)' &= (\omega' \circ X) \cdot X'. \end{aligned}$$

B_{Ω^0} désignera le sous-ensemble des $X \in t\Omega^0[[t]]$ où x_1 est une unité, i.e. X' est une unité. B_{Ω^0} est un groupe vis-à-vis du produit de composition et il opère à droite sur chaque $\Omega^p[[t]]$; là encore l'action est continue au sens t -adique. L'élément neutre $1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \cdots$ de B_{Ω^0} sera noté $\mathbf{1}$; l'inverse de $X \in B_{\Omega^0}$ sera noté X^{-1}.

Rappelons qu'en topologie t -adique un produit infini $X_1 \circ X_2 \circ \ldots, X_i \in B_{\Omega^0}, i = 1, 2, \cdots$, converge dans B_{Ω^0} ssi la suite (X_i) converge vers $\mathbf{1}$.

Soient $\sigma \in \Omega^1[[t]]$ et $X \in B_{\Omega^0}$. On dit que $\tau \in \Omega^1[[t]]$ *diffère de σ par le cobord de X si*

$$\tau = \frac{\sigma \circ X}{X'} + \frac{\delta X}{X'}$$

Evidemment τ dépend continûment du couple σ, X.

Si dans ce cas ω diffère de τ par le cobord de $Y \in B_{\Omega_0}$, ω diffère de σ par le cobord de $X \circ Y$. En effet

$$\frac{\tau \circ Y}{Y'} + \frac{\delta Y}{Y'} = \frac{\left(\frac{\sigma \circ X}{X'} + \frac{\delta X}{X'}\right) \circ Y}{Y'} + \frac{\delta Y}{Y'} =$$
$$\frac{\sigma \circ X \circ Y}{(X' \circ Y) \cdot Y'} + \frac{\delta X \circ Y}{(X' \circ Y) \cdot Y'} + \frac{\delta Y}{Y'}.$$

En vertu de $(X \circ Y)' = (X' \circ Y) \cdot Y'$ et $\delta(X \circ Y) = \delta X \circ Y + (X' \circ Y) \cdot \delta Y$ (vide supra) on constatera que

$$\omega = \frac{\sigma \circ (X \circ Y)}{(X \circ Y)'} + \frac{\delta(X \circ Y)}{(X \circ Y)'}.$$

De même on vérifie que σ diffère de τ par le cobord de X^{-1}.

Autrement dit, la relation de différer par un cobord est une relation d'équivalence; les classes d'équivalence seront appelées *classes coexactes*.

On vérifie que si σ et τ sont dans la même classe coexacte, τ_0 diffère de σ_0 par un facteur $\in (\Omega^0)^{-1}$. Donc, si σ est primitif, τ est également primitif. De même si $\sigma_0 = 0$ on a $\tau_0 = 0$.

On dira que $\sigma \in \Omega^1[[t]]$ est un (Γ_{ga}) *-cocycle* si $d\sigma = \sigma \wedge \sigma'$. Les formules précédentes permettent de vérifier qu'une classe coexacte qui contient un cocycle est entièrement formée de cocycles. Une telle classe de cocycles sera appelée B_{Ω^0} *-classe de cohomologie* (à distinguer de la notion de cohomologie à valeurs dans B_{Ω^0}). Si la classe contient un seul cocycle primitif elle ne contient que des cocycles primitifs et sera dite *primitive*.

Si la classe contient un seul cocycle $\in t\Omega^1[[t]]$ toute la classe fait partie de $t\Omega^1[[t]]$. De tels cocycles seront appelés Γ_{ba} *-cocycles*, et la classe coexacte d'un Γ_{ba} *-cocycle* sera appelée sa *classe de cohomologie*.

Finalement soit $B_K \subset B_{\Omega_0}$ le sous-groupe des $X \in B_{\Omega_0}$ à coefficients constants.

Le changement de $\sigma \in \Omega^1[[t]]$ par le cobord de $X \in B_K$ revient alors à remplacer σ par $\tau := \dfrac{\sigma \circ X}{X'}$; c'est une opération linéaire en σ. De plus on vérifie que pour tout $n \geq 0$ on a $K\tau_0 + \cdots + K\tau_n = K\sigma_0 + \cdots + K\sigma_n$.

7.3 Propriétés de Γ_{ga} et des cocycles

Dans Γ_{ga} chaque élément de base ω_n est primitif. ω_0 est en plus intégrable puisque $d\omega_0 = \omega_0 \wedge \omega_1$. Par rapport à ces deux propriétés de ω_0 l'algèbre Γ_{ga} possède une propriété universelle.

PROPOSITION 1 .— *Soient Ω une algèbre différentielle et $\mu_0 \in \Omega^1$ un élément primitif intégrable. Alors il existe un morphisme $\varphi : \Gamma_{ga} \to \Omega$ d'algèbres différentielles tel que $\omega_0 \mapsto \mu_0$.*

En conservant les notations précédentes, posons $\varphi(\omega_i) =: \mu_i, \mu := \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i t^i \in \Omega^1[[t]]$. Visiblement on a $[[\varphi]]\omega = \mu$ et μ est un cocycle primitif au sens de §7.2. Réciproquement tout cocycle $\mu \in \Omega^1[[t]]$ (primitif ou non) définit un morphisme $\varphi = \Gamma_{ga} \to \Omega$ tel que $[[\varphi]] : \omega \mapsto \mu$.

On dira que les cocycles primitifs $\mu, \nu \in \Omega^1[[t]]$ sont *compatibles* si $\nu_0 = f\mu_0$ avec $f \in (\Omega^0)^{-1}$; la relation de compatibilité est une relation d'equivalence dont les classes sont les *classes de compatibilité*.

PROPOSITION 2 .— *Toute classe de compatibilité de cocycles primitifs est une B_{Ω^0} -classe de cohomologie et vice versa.*

Comme on l'a fait remarquer la primitivité de $\mu \in \Omega^1[[t]]$ revient à la primitivité de μ_0 alors que l'intégrabilité de μ_0 n'entraîne nullement celle de μ. Cependant pour les cocycles primitifs –intégrables par définition– on a la

PROPOSITION 3 .— *Le cocycle primitif $\mu \in \Omega^1[[t]]$ admet un facteur intégrant $\in \Omega^0[[t]]^{-1}$ ssi μ_0 admet un facteur intégrant $\in (\Omega^0)^{-1}$.*

De plus si $\mu_0 = \dfrac{df}{g}, g \in (\Omega^0)^{-1}$ il existe un unique $\phi = f_0 + f_1 t + \cdots \in \Omega^0[[t]]$ tel que $f_0 = f, f_1 = g, \mu = \dfrac{\delta\phi}{\phi'}$.

Désignons le ϕ ci-cessus par $\phi_{f,g}$ alors la proposition 3 se complète par la

PROPOSITION 4 .— *Si* $\mu_0 = \dfrac{df}{g} = \dfrac{dh}{k}, g, k \in (\Omega^0)^{-1}$ *on a* $\phi_{h,k} = h^{(0)}(\phi_{f,g})$ *(voir §7.2).*

Pour une démonstration de la proposition 1 voir [G.-V 1971], [M. 1976].

Nous reprenons essentiellement cette démonstration; le type de récurrence qui y intervient permet d'établir les autres propositions.

7.3.1 Les cocycles associés à un μ_0 primitif intégrable

Observons tout d'abord que $t^n\Omega[[t]]$ est un idéal pour la structure d'algèbre différentielle. On écrit $\sigma \equiv \tau\ (t^n)$ si $\sigma - \tau \in t^n\Omega[[t]]$.

De plus pour $\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k t^k \in \Omega[[t]]$ on pose

$$_{n-1}\sigma := \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k t^k$$

et l'on a

$$\sigma \equiv_{n-1} \sigma\ (t^n) \tag{1}$$

$$\sigma \equiv \tau\ (t^n) \Longleftrightarrow_{n-1} \sigma =_{n-1} \tau \tag{2}$$

De plus

$$(_{n-1}\sigma)' =_{n-1} \sigma' - n\sigma_n t^{n-1} \tag{3}$$

Supposons que μ_0 soit intégrable, alors on a

$$d\mu_0 = \mu_0 \wedge \mu_1, \mu_1 \in \Omega^1$$

Supposons de plus que μ_0 soit primitif et que $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n (n \geq 1)$ soient déterminés de façon qu'on ait

$$d\mu_k = \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i<j}} (j-i)\mu_i \wedge \mu j, k = 0, \ldots, n-1. \tag{$\star$}$$

En posant $\mu := \sum_{j=0}^n \mu_j t^j$, les relations $(\star)$ entraînent

$$\delta\mu = \mu \wedge \mu' \quad (t^n). \tag{$\star\star$}$$

En calculant toujours mod(t^n) on obtient

$$
\begin{aligned}
0 &\equiv \delta\delta\mu \equiv \delta\mu \wedge \mu' - \mu \wedge \delta\mu' \equiv \\
&\equiv \mu \wedge \mu' \wedge \mu' - \mu \wedge (\delta\mu)' \\
&\overset{(1)}{\equiv} - \mu \wedge_{n-1} (\delta\mu)' \\
&\overset{(3)(\star)}{\equiv} - \mu \wedge ({}_{n-1}\delta\mu)' - n(\mu_0 \wedge d\mu_n)t^{n-1} \\
&\overset{(\star\star)}{\equiv} - \mu \wedge ({}_{n-1}(\mu \wedge \mu'))' - n(\mu_0 \wedge d\mu_n)t^{n-1} \\
&\overset{(3)(\star)}{\equiv} - \mu \wedge_{n-1} ((\mu \wedge \mu')') \\
&+ n\mu_0 \wedge (\sum_{\substack{i+j=n+1 \\ 1 \le i < j}} (j-i)\mu_i \wedge \mu_j)t^{n-1} - n(\mu_0 \wedge d\mu_n)t^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Puisque $\mu \wedge (\mu \wedge \mu')' = \mu \wedge \mu' \wedge \mu' + \mu \wedge \mu \wedge \mu'' = 0$, on a $\mu \wedge_{n-1} ((\mu \wedge \mu')') \equiv 0$ et l'on obtient

$$0 \equiv n(\mu_0 \wedge (\sum_{\substack{1 \le i < j \\ i+j=n+1}} (j-1)\mu_i \wedge \mu_j - d\mu_n))t^{n-1}$$

d'où, selon (2),

$$\mu_0 \wedge (d\mu_n - \sum_{\substack{1 \le i < j \\ i+j=n+1}} (j-1)\mu_i \wedge \mu_j) = 0.$$

La primitivité de μ_0 entraîne l'existence de $\mu_{n+1} \in \Omega^1$ tel que $(\star)$ soit satisfait pour $k = 0, \dots, n$.

Ainsi on construit de proche en proche une suite $\mu_0, \mu_1 \dots$ telle que $\delta\mu = \mu \wedge \mu'$ où $\mu := \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n t^n$, ce qui établit la proposition 1.

Supposons maintenant que les cocycles μ et ν soient compatibles i.e. $\nu_0 = g\mu_0$ où $g \in (\Omega^0)^{-1}$. On va construire une suite $X_1, X_2, \cdots$ dans B_Ω qui converge vers $\mathbf{1}$ et telle que le changement de μ par le cobord de $X_1 \circ X_2 \circ \dots \circ X_n$ fournisse un cocycle ${}^{(n)}\mu$ dont les coefficients coïncident avec ceux de ν jusqu'à l'ordre n inclus. Alors par continuité il s'ensuit que ν se déduit de μ par le cobord de $X := \lim_{n \to \infty} X_1 \circ X_2 \circ \cdots \circ X_n$.

Tout d'abord on pose $X_1 := g^{-1}t$.

Alors en calculant on obtient

$${}^{(1)}\mu := \frac{\mu \circ X_1}{X_1'} + \frac{\delta X_1}{X_1'} = g\mu_0 + (\mu_1 - \frac{dg}{g})t + \sum_{n=2}^{\infty} g^{(n-1)}\mu_n t^n.$$

Supposons que ${}^{(n)}\mu$ ait été défini tel que ${}^{(n)}\mu_i = \nu_i$ pour $i = 0, \ldots, n-1$. En tenant compte de ces égalités on tire des équations

$$d^{(n)}\mu_{n-1} = \sum_{\substack{i+j=n \\ 0\leq i\leq j}} (j-i)^{(n)}\mu_i \wedge^{(n)} \mu_j$$

et

$$d\nu_{n-1} = \sum_{\substack{i+j=n \\ 0\leq i\leq j}} (j-i)\nu_i \wedge \nu_j$$

que $\nu_0 \wedge (\nu_n -^{(n)} \mu_n) = 0$ d'où

$$\nu_n =^{(n)} \mu_n + h\nu_0.$$

En posant

$$X_{n+1} := t - \frac{h}{n+1} t^{n+1}$$

et

$${}^{(n+1)}\mu := \frac{{}^{(n)}\mu \circ X_{n+1}}{X'_{n+1}} + \frac{\delta X_{n+1}}{X'_{n+1}},$$

on trouve

$${}^{(n+1)}\mu =^{(n)} \mu_0 +^{(n)} \mu_1 t + \cdots +^{(n)} \mu_{n-1} t^{n-1} + ({}^{(n)}\mu_n + h\nu_0)t^n \cdots$$

autrement dit les coefficients de ${}^{(n+1)}\mu$ et ν coïncident jusqu'à l'ordre n inclus. La suite de cocycles ${}^{(n)}\mu$ converge donc vers ν. Par ailleurs ${}^{(n)}\mu$ se déduit de μ par un changement par le cobord de $X_1 \circ X_2 \circ \cdots \circ X_n$. De plus la suite (X_i) converge vers $\mathbf{1}$. Par continuité ν se déduit donc de μ en changeant celui-ci par le cobord de $X := \lim_{n\to\infty} X_1 \circ \cdots \circ X_n$, d'où la proposition 2.

Comme corollaire on obtient en utilisant la dernière remarque du §7.2.

Une sous-algèbre différentielle de Γ_{ga} qui contient ω_0 comme élément primitif coïncide avec Γ_{ga} .

7.3.2 Les cocycles primitifs à facteur intégrant

Soit $\nu \in \Omega^1[[t]]$ un cocycle primitif qui admet un facteur intégrant, i.e. $\nu = \dfrac{\delta\phi}{\Psi}$ où $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n \in \Omega^0[[t]]$ et $\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n \in \Omega^0[[t]]^{-1}$. En particulier $g_0 \in (\Omega^0)^{-1}$, et l'on trouve $\nu_0 = \dfrac{df_0}{g_0}$ i.e. ν_0 admet un facteur intégrant.

Supposons maintenant que $\nu \in \Omega^1[[t]]$ soit un cocycle primitif où $\nu_0 = \dfrac{df}{g}, g \in (\Omega^0)^{-1}$. On va démontrer qu'il existe $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n \in \Omega^0[[t]]$ tel que $f_0 := f, f_1 := g$ et que $\nu = \dfrac{\delta\phi}{\phi'}$.

Pour cela on cherche à construire par récurrence une suite de polynômes $\phi_1, \phi_2, \ldots$, où

$$\begin{aligned} \phi_1 \ &:= f + gt && (\star) \\ \phi_{n+1} \ &:= \phi_n + f_{n+1}t^{n+1}, f_{n+1} \in \Omega^0, \end{aligned}$$

de manière que

$$^{(n)}\nu \ := \frac{\delta\phi_n}{\phi_{n'}} = \nu_0 + \nu_1 t + \cdots + \nu_{n-1}t^{n-1} + \ldots, \qquad (\star\star)$$

c'est-à-dire que les coefficients de $^{(n)}\nu$ coïncident avec ceux de ν jusqu'à l'ordre n.

Le procédé de construction met en évidence que

$$\begin{aligned} ^{(n+1)}\nu_i &= {}^{(n)}\nu_i, 0 \le i \le n-1 \\ ^{(n+1)}\nu_n - {}^{(n)}\nu_n &= -(n+1)f_{n+1}\, {}^{(n)}\nu_0 \\ &= -(n+1)f_{n+1}\nu_0 \end{aligned}$$

et, de plus, que

$$\begin{aligned} ^{(1)}\nu := \frac{\delta\phi_1}{\phi_1} &= \frac{df}{g} + \frac{dg}{g}t \\ &= \nu_0 + \frac{dg}{g}t. \end{aligned}$$

Par conséquent, en posant $\phi := \lim_{n\to\infty} \phi_n$, on aura $\nu = \dfrac{\delta\phi}{\phi'}$.

Supposons alors que $\phi_1, \ldots, \phi_k$ soient construits de manière que $(\star\star)$ soit remplie pour $n \le k$. Alors, puisque pour $\phi \in \Omega^0[[t]]$ à $\phi' \in \Omega^0[[t]]^{-1}$ le quotient $\dfrac{\delta\phi}{\phi'}$ est un cocycle, on a une part en vertu de $(\star\star)$

$$d^{(k)}\nu_{k-1} = d\nu_{k-1} = k\nu_0 \wedge^{(k)} \nu_k + \sum_{\substack{i+j=k \\ 1\le i\le j}} (j-i)\nu_i \wedge \nu_j$$

et d'autre part, ν étant un cocycle,

$$d\nu_{k-1} = k\nu_0 \wedge \nu_k + \sum_{\substack{i+j=k \\ 1\le i\le j}} (j-i)\nu_i \wedge \nu_j.$$

Il s'ensuit donc que $\nu_0 \wedge (\nu_k -^{(k)} \nu_k) = 0$. De la primitivité de ν_0 résulte $\nu_k -^{(k)} \nu_k = h\nu_0$, pour $h \in \Omega^0$ convenable. Donc si l'on pose

$$\phi_{k+1} := \phi_k - \frac{h}{k+1} t^{k+1}$$

on satisfait à $(\star\star)$ pour $n \leq k+1$.

Observons qu'une fois donné ϕ_1, la suite (ϕ_n) est déterminée sans ambiguïté par la condition $(\star\star)$.

Si on a maintenant une représentation $\nu = \dfrac{\delta\psi}{\psi}$ où $\psi = \sum\limits_{n=1}^{n} h_j t^j$, $h_0 = f, h_1 = g$, on constatera facilement que la suite $\psi_n := \sum\limits_{j=0}^{n} h_j t^j$, $n = 1, 2, \ldots$, remplit les conditions $(\star)$ et $(\star\star)$. Par conséquent (ψ_n) se confond avec (ϕ_n) et $\psi = \lim \psi_n = \lim \phi_n = \phi$.

Cela établit la proposition 3.

Supposons maintenant que $\nu_0 = \dfrac{df}{g} = \dfrac{dh}{k}, k \in \Omega^0[[t]]^{-1}$ et que $\psi = h + kt + \cdots$ soit tel que $\nu = \dfrac{d\psi}{\psi'}$. Alors ν_0 étant primitif, f et h sont des coordonnées, et $df \wedge dh = 0$. Donc h dépend de f.

Puisque $\dfrac{dh}{k} = \dfrac{h'(f)df}{k} = \dfrac{df}{g}$ il résulte que $k = h'(f)g$; par conséquent $h^{(0)}(\phi) = h + kt + \cdots$. D'autre part on a fait remarquer au §7.2 que

$$\frac{\delta h^{(0)}(\phi)}{(h^{(0)}(\phi))'} = \frac{\delta\phi}{\phi} = \nu = \frac{\delta\psi}{\psi}.$$

Etant donné que $h^{(0)}(\phi)$ et ψ coïncident en les termes d'ordre 0 et 1, l'unicité établie ci-dessus entraîne $h^{(0)}(\phi) = \psi$, d'où la proposition 4.

7.3.3 Les Γ_{ba} -cocycles

Puisqu'on a $d\omega_0 = \omega_0 \wedge \omega_1$ dans Γ_{ga}, l'algèbre $\Gamma_{ba} := \Gamma_{ga}/\omega_0 \wedge \Gamma_{ga}$ est de Maurer-Cartan avec la base $\overline{\omega}_i = \omega_i + \mathbf{R}\omega_0$, $i = 1, 2, \ldots$, les équations de structure étant

$$d\overline{\omega}_n = \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i \leq i < j}} (j-1)\overline{\omega}_i \wedge \overline{\omega}_j.$$

En posant $\overline{\omega} := \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\omega}_n t^n \in \Gamma^1_{ba}[[t]]$, les équations de structure se résument toujours sous la forme

$$d\overline{\omega} = \overline{\omega} \wedge \overline{\omega}'.$$

Etant donné un cocycle $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n t^n \in \Omega^1[[t]]$ au sens du §7.2, μ définit un morphisme

$$\varphi : \Gamma_{ba} \to \Omega$$

où

$$\varphi : \overline{\omega}_i \mapsto \mu_i \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Donc les Γ_{ba} -cocycles du §7.2 sont de véritables Γ_{ba} -cocycles (au sens du §3).

Soit toujours $\mu \in \Omega^1[[t]]$ un Γ_{ba} -cocycle, alors $d\mu_1 = 0$, et l'on dira que μ_1 est de type *logarithmique* si $\mu_1 = \dfrac{dg}{g}$ pour $g \in (\Omega^0)^{-1}$ convenable; dans ce cas g est bien déterminé à un facteur inversible constant près.

Ceci dit, l'analogue des propositions 3 et 4 pour les Γ_{ba} -cocycles s'énonce comme suit

PROPOSITION 5 .— *Si $\mu \in \Omega^1[[t]]$ est un Γ_{ba} -cocycle à premier coefficient μ_1 logarithmique et si $H^1(\Omega) = 0$, il existe $X \in B_\Omega$ tel que $\mu = \dfrac{\delta X}{X'}$.*

En plus on a

$$\frac{\delta X}{X'} = \frac{\delta Y}{Y'}, X, Y \in B_{\Omega^0} \Longleftrightarrow Y \circ X^{-1} \in B_K.$$

Pour la démonstration on cherche à construire de proche en proche une suite $Y_1, Y_2, \ldots$ dans B_Ω qui converge vers $\mathbf{1}$ et telle que le changement de $\mu =:^{(1)}\mu$ par le cobord de $Y_1 \circ Y_2 \circ \cdots \circ Y_n$ produise un cocycle ${}^{(n+1)}\mu \in t^{n+1}\Omega^1[[t]]$. Alors, en posant $Y = \lim_{n\to\infty} Y_1 \circ Y_2 \circ \cdots \circ Y_n$, on obtient ainsi que μ se réduit à zéro par le changement par le cobord de Y d'où, en posant $X := Y^{-1}$, on obtient $\mu = \dfrac{\delta X}{X'}$.

Tout d'abord on cherche à déterminer $Y_1 := ht, h \in (\Omega^0)^{-1}$ tel que ${}^{(2)}\mu := \dfrac{\mu \circ Y_1}{Y_1'} + \dfrac{\delta Y_1}{Y_1'} \in t^2\Omega^1[[t]]$.

En faisant le calcul on trouve ${}^{(2)}\mu = (\mu_1 + \frac{dh}{h})t + \cdots$. Puisque μ_1 est supposé logarithmique, on peut déterminer h en sorte que $\mu_1 + \frac{dh}{h} = 0$. Alors ${}^{(2)}\mu = {}^{(2)}\mu_2 t^2 + \cdots$. Puisque ${}^{(2)}\mu$ est toujours un Γ_{ba} -cocycle il s'ensuit que $d^{(2)}\mu_2 = 0$. On cherche maintenant à déterminer $Y_2 := 1 \cdot t + ft^2, f \in \Omega^0$, tel que ${}^{(3)}\mu := \frac{{}^{(2)}\mu \circ Y_2}{Y_2'} + \frac{\delta Y_2}{Y_2'} \in t^3\Omega^1[[t]]$.

Le calcul fait, on obtient ${}^{(3)}\mu = ({}^{(2)}\mu^2 + df)t^2 + \cdots$. Puisque $d^{(2)}\mu_2 = 0$ et que $H^1(\Omega) = 0$ il existe f tel que ${}^{(2)}\mu_2 + df = 0$.

Il est évident que la construction se poursuit de la manière indiquée.

Supposons maintenant qu'on ait $\frac{\delta X}{X'} = \frac{\delta Y}{Y'}; X, Y \in B_\Omega$. En posant $Z := Y \circ X^{-1}$ on calcule $\frac{\delta Z}{Z'}$. Tout d'abord $\delta Z = \delta(Y \circ X^{-1}) = (\delta Y \circ X^{-1}) + (Y' \circ X^{-1}) \cdot \delta(X^{-1})$, et $Z' = (Y \circ X^{-1})' = (Y' \circ X^{-}1) \cdot (X^{-1})'$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{\delta Z}{Z'} &= \frac{(\delta Y \circ X^{-1})}{(Y' \circ X^{-1}) \cdot (X^{-1})'} + \frac{\delta(X^{-1})}{(X^{-1})'} \\ &= \frac{(\frac{\delta Y}{Y'} \circ X^{-1})}{(X^{-1})'} + \frac{\delta(X^{-1})}{(X^{-1})'};\end{aligned}$$

En vertu de $\frac{\delta X}{X'} = \frac{\delta Y}{Y'}$ on a

$$\begin{aligned}&\frac{(\frac{\delta Y}{Y'} \circ X^{-1})}{(X^{-1})'} = \frac{(\frac{\delta X}{X'} \circ X^{-1})}{(X^{-1})'} = \frac{\delta X \circ X^{-1}}{(X' \circ X^{-1})(X^{-1})'} = \\ &\frac{\delta(X \circ X^{-1})}{(X' \circ X^{-1})(X^{-1})'} - \frac{(X' \circ X^{-1}) \cdot \delta X^{-1}}{(X' \circ X^{-1})'(X^{-1})'} = \\ &\frac{\delta \mathbf{1}}{\mathbf{1}'} - \frac{\delta(X^{-1})}{(X^{-1})'} = -\frac{\delta(X^{-1})}{(X^{-1})'}.\end{aligned}$$

d'où résulte $\frac{\delta Z}{Z'} = 0$, ce qui entraîne $\delta Z = 0$, ou bien $Z \in B_K$.

Réciproquement si $Z \in B_K$, i.e. $\delta Z = 0$, on obtient, en posant $Y := Z \circ X$,

$$\frac{\delta Y}{Y'} = \frac{\delta(Z \circ X)}{(Z \circ X)'} = \frac{\delta Z \circ X + (X' \circ X)\delta X}{(Z' \circ X)X'} = \frac{\delta X}{X'}.$$

Donc si un Γ_{ba} -cocycle μ admet une solution $X \in B_\Omega$ de l'équation

$$\frac{\delta Z}{Z'} = \mu', \tag{$\star$}$$

les solutions sont permutées de manière simplement transitive par le groupe B_K

Soit $Aut_K(\Omega, (\mu_n))$ le groupe des automorphismes de Ω en tant qu'algèbre sur K, qui fixe la suite (μ_n). Alors pour tout $A \in Aut_K(\Omega, (\mu_n)), [[A]]$ est un automorphisme de $\Omega[[t]]$, en tant qu'algèbre différentielle sur $K[[t]]$, qui fixe $\mu \in \Omega^1[[t]]$. De plus $[[A]]$ conserve le produit de composition.

En particulier si $X \in B_{\Omega^0}$ est une solution de l'équation $(\star)$, $[[A]](X)$ en est une autre. Donc $[[A]](X) = \Pi_X(A) \circ X$ où $\Pi_X(A) \in B_K$.

En tenant compte des remarques ci-dessus on trouve

$$\Pi_X(A_0A_1) \circ X = [[A_0A_1]](X) = [[A_0]]([[A_1]](X)) = [[A_0]](\Pi_X(A_1) \circ X) = \Pi_X(A_1) \circ ([[A_0]](X)) = \Pi_X(A_1) \circ \Pi_X(A_0) \circ X.$$

Autrement dit,

$$\Pi_X : Aut_K(\Omega, \mu_n)) \to B_K$$

est un antimorphisme de groupes.

Si l'on remplace X par $Z \circ X, Z \in B_K, \Pi_X$ change par une conjugaison par Z.

Ce résultat correspond au résultat antérieur sur le groupe fondamental G_V d'un revêtement universel $\widetilde{V} \to V$ où V est une variété à Γ -cocycle τ, Γ étant une algèbre de Maurer-Cartan de dimension finie.

En effet G_V opère à gauche sur $\widetilde{V}$ donc opère à droite sur $\Omega(\widetilde{V})$ en laissant invariant $\widetilde{\tau}$, et il opère encore à gauche sur l'ensemble des solutions $\widetilde{\phi}$ de l'équation $\widetilde{\tau} = d_\Gamma \widetilde{\phi}$.

8. Holonomie des feuilletages

Soit V une variété connexe réelle de classe C^∞ ou C^ω. On pose $\Omega := \Omega(V)$. Dans ce cas la sous-algèbre $K \subset \Omega^0$ des constantes se confond avec $\mathbf{R}$. De plus $f \in (\Omega^0)^{-1}$ ssi $f \neq 0$ partout.

Pour $\mu_0 \in \Omega^1$ on a

$$\mu_0 \neq 0 \textit{ partout } \Rightarrow \mu_0 \textit{ est un élément primitif } \in \Omega^1.$$

Rappelons brièvement la démonstration.

Tout d'abord $\mu_0 \neq 0$ partout entraîne : $f\mu_0 = 0, f \in \Omega^0 \Rightarrow f = 0$. De même $\mu_0 \wedge \nu = 0, \nu \in \Omega^1 \Rightarrow \nu = h\mu_0, h \in \Omega^0$.

Si $\mu \wedge \sigma = 0, \sigma \in \Omega^2$ on a partout localement $\sigma = \mu_0 \wedge \tau$, où τ est une 1 -forme locale. Donc il existe un recouvrement $\{U_i\}$ tel que $\sigma|U_i = \mu_0 \wedge \tau_i, \tau_i \in \Omega^1(U_i)$. Donc dans $U_i \cap U_j$ on a $\mu_0 \wedge (\tau_i - \tau_j) = 0$ d'où $\tau_i - \tau_j = f_{ij}\mu_0, \quad f_{ij} \in \Omega^0(U_i - U_j)$. $\{f_{ij}\}$ est un cocycle de Cech à valeurs dans le faisceau Ω^0. Dans les cas envisagés (C^∞ ou C^ω) cette cohomologie faisceautique s'annule d'où résulte $f_{ij} = f_i - f_j$ (quitte à un raffinement éventuel du recouvrement). En posant $\bar{\tau}_i = \tau_i - f_i\mu_0$ on a toujours $\sigma|U_i = \mu_0 \wedge \bar{\tau}_i$ et d'autre part on a obtenu $\bar{\tau} \in \Omega^1$ tel que $\bar{\tau}|U_i = \bar{\tau}_i$.

Pour arriver à la même conclusion pour $\sigma \in \Omega^p$ on utilise le fait que $H^j(V, \Omega^s) = 0, s+j = p-1, s = 0, \ldots, p-2$ (pour le cas C^ω voir [CH. 1957]).

Par conséquent une fonction f sur V est une coordonnée au sens du §7.1 ssi en chaque point elle se laisse compléter localement en un système de coordonnées locales par le choix de $(n-1)$ fonctions convenables.

Supposons que μ_0 soit partout localement intégrable et $\neq 0$. Alors $\mu_0 \wedge d\mu_0 = 0$ d'où résulte $d\mu_0 = \mu_0 \wedge \mu_1$. Autrement dit, dans ces conditions $\mu_0 \in \Omega^1$ est un élément primitif et intégrable au sens du §7.

D'autre part une telle forme de Pfaff μ_0 détermine sur V un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 1; un tel feuilletage sera dit *transversalement orientable.* Toute autre forme ν_0 ($\neq 0$ partout) qui détermine le même feuilletage diffère de μ_0 par un facteur $f \in (\Omega^0)^{-1}$. De plus μ_0 et ν_0 se prolongent en des Γ_{ga} -cocycles $\mu := \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n t^n$ et $\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n t^n$ qui sont donc compatibles au sens du paragraphe 7.3. Autrement dit, ν et μ appartiennent à la même B_{Ω^0} -classe de cohomologie (§7.3 proposition 2). On a obtenu

> *Un feuilletage transversalement orientable $\mathcal{F}$ détermine une B_{Ω^0} -classe primitive de Γ_{ga} -cocycles et vice versa.*

Remarque. — On notera que deux Γ_{sl} -cocycles qui déterminent le même feuilletage transversalement 1 -projectif mais qui ne sont pas dans la même classe de cohomologie à valeurs dans $PL(1, \mathbf{R})$ (voir l'exemple au §4) appartiennent tout de même à la même B_{Ω^0} -classe de cohomologie.

Sur chaque feuille $F \in \mathcal{F}$ le Γ_{ga} -cocycle μ induit, à cause de $\mu_0|F = 0$, un Γ_{ba} -cocycle $\mu|F = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n t^n$ et la B_{Ω^0} -classe de cohomologie de μ induit sur F la classe de cohomologie $[\mu|F]$ de $\mu|F$. Donc

> *Le couple $\mathcal{F}, F$ induit sur F une classe de cohomologie bien déterminée de Γ_{ba} -cocycles.*

Soit maintenant $\widetilde{F} \to F$ un revêtement universel de F et soit $\widetilde{\mu|F}$ le cocycle relevé. Puisque sur une variété simplement connexe toute forme fermée est de type logarithmique, on peut appliquer la proposition 5 et ses conséquences et l'on trouve que la classe $[\mu|F]$ détermine une classe de conjugaison $H_{[\mu|F]}$ de morphismes

$$G_F \to B_{\mathbf{R}}$$

dite *la classe d'holonomie associée à* $[\mu|F]$.

Pour rattacher cette classe à l'holonomie au sens de la théorie des feuilletages on a besoin de quelques préliminaires.

8.1 Recouvrements et groupe fondamental

Soit E un espace topologique connexe, localement connexe et simplement connexe par morceaux et soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ un recouvrement ouvert.

Les composants connexes d'une intersection non vide $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k} := U_{i_0}, \ldots, i_k$ seront désignées par $U_{i_0}, \ldots, i_k; \lambda$ où λ parcourt un ensemble d'indices convenable.

Pour toute inclusion $\{j_0, \ldots, j_r\} \subseteq \{i_0, \ldots, i_k\}$ l'unique composante connexe de $U_{j_0}, \ldots, j_r$ qui contient $U_{i_0}, \ldots, i_k; \lambda$ sera notée $U_{j_0}, \ldots, j_r; \widehat{\lambda}$.

Le complexe de Cech des composantes connexes associé à $\mathcal{U}$, noté $\sum_{\mathcal{U}}$, a comme simplexes de dimension k les $(k+2)$ - tuples $(i_0, \ldots, i_k; \lambda)$ où $U_{i_0}, \ldots, i_k; \lambda$ est une composante connexe. Les opérateurs de face sont définis de manière évidente, à savoir

$$d_j(i_0 \ldots, i_k; \lambda) = (i_0, \ldots, \widehat{i}_j, \ldots, i_k; \widehat{\lambda}).$$

Pour tout revêtement $p : \widetilde{E} \to E$, on pose $\widetilde{U}_i := p^{-1}(U_i), \widetilde{\mathcal{U}} := \{\widetilde{\mathcal{U}}_i\}_{i\in \mathrm{I}}$. Alors toute composante connexe de $\widetilde{U}_{i_0} \ldots i_k$ se projette sur une composante connexe de $U_{i_0}, \ldots, i_n$ ce qui induit un morphisme simplicial

$$\sum(p) : \sum_{\widetilde{\mathcal{U}}} \to \sum_{\mathcal{U}},$$

qui s'avère un revêtement simplicial. En général la correspondance fonctorielle $p \to \sum(p)$ n'est nullement "biunivoque". Cependant on a

Si les U_i sont tous simplement connexes, i.e. si leurs composantes connexes le sont, la correspondance de revêtements

$$p \to \sum(p)$$

est bijective à équivalence près. Par conséquent les groupes fondamentaux de E et $\sum_{\mathcal{U}}$ sont isomorphes.

Soient $\widetilde{E} \xrightarrow{p} E$ et $\sum(p) : \sum_{\widetilde{\mathcal{U}}} \to \sum_{\mathcal{U}}$ les revêtements universels correspondants. L'inclusion $e \in U_{i,\lambda}$ fait correspondre $p^{-1}(e)$ à $\sum(p)^{-1}((i,\lambda))$ en tant que G_E -ensembles. Les groupes $\pi_1(E,e)$ et $\pi_1(\sum_{\widetilde{\mathcal{U}}},(i,\lambda))$ agissent à droite sur les fibres respectives et cela de manière simplement transitive tout en conservant leur structure de G_E - ensemble. Il résulte donc :

L'inclusion $e \in U_{i,\lambda}$ induit un isomorphisme canonique.

$$\pi_1(E,e) \to \pi_1(\textstyle\sum_{\widetilde{\mathcal{U}}},(i,\lambda)).$$

8.2 Périodes

On conserve les notations de 8.1 et l'hypothèse de connexité simple des U_i.

Soit W un ensemble sur lequel opère un groupe G de manière simplement transitive et supposons que soient données des applications $\phi_i : U_i \to W$ telles que sur toute composante connexe $U_{ij,\lambda}$ on ait

$$\phi_j|U_{ij,\lambda} = g_{ji,\lambda}(\phi_i|U_{ij,\lambda}), g_{ji;\lambda} \in G \tag{$\star$}$$

Evidemment $g_{ii;\lambda} = \mathbf{1}$. De plus pour tout 2 -simplexe $(i,j,k;\lambda)$ on a

$$g_{ki,\widehat{\lambda}} = g_{kj;\widehat{\lambda}}g_{ji;\widehat{\lambda}}. \tag{$\star\star$}$$

Dans le faisceau $\mathcal{A}$ des germes d'applications $E \to W$ les ϕ_i définissent des ouverts et $\mathcal{E} := \bigcup\limits_{g\in G} g\phi_i \subset \mathcal{A}$ est un sous-espace ouvert.

En notant $q : \mathcal{A} \to E$ l'étalement canonique, la condition $(\star)$ entraîne que

$$q : \mathcal{E} \to e$$

est un revêtement (en général non-connexe) sur lequel G opère comme groupe d'automorphismes de revêtement. En particulier si $\mathcal{E}_0$ est une composante connexe de $\mathcal{E}$

$$q : \mathcal{E}_0 \to E$$

est un revêtement galoisien connexe à groupe de Galois $G_0 \subset G$.

De plus, si $p : \widetilde{E} \to E$ est un revêtement universel à groupe fondamental G_E, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{E} & \xrightarrow{r} & \mathcal{E}_0 \\ p\searrow & & \swarrow q \\ & E & \end{array}$$

r induit un morphisme de périodes (surjectif !)

$$h_r : G_E \to G_0.$$

En faisant varier r, h_r parcourt une classe de conjugaison.

Pour décrire ce groupe des périodes G_0 en termes des données, fixons une composante connexe $U_{i_0;\lambda_0} (\subset U_{i_0})$ et posons

$\mathcal{E}_\prime :=$ composante connexe de $\phi_{i_0}|U_{i_0}, \lambda_0$ dans $\mathcal{E}$.

En posant $\phi_{i;\lambda} := \phi_i|U_{i;\lambda}$ le sous-espace $\mathcal{E}_0$ est caractérisé par les conditions suivantes

(i) $\phi_{i_0;\lambda_0} \subset \mathcal{E}_0$

(ii) $\phi_{j;\lambda} \subset \mathcal{E}_0 \Rightarrow g_{ji;\mu}\phi_{i;\widehat{\mu}} \subset \mathcal{E}_0$ si $\lambda = \widehat{\mu}$.

(iii) $\mathcal{E}_0$ minimal par rapport à (i), (ii).

On vérifie alors que

$g\phi_{i_0;\lambda_0} \subset \mathcal{E}_0 \Leftrightarrow g = g_{i_0 i_1;\lambda_0} g_{i_1,i_2;\lambda_1} \cdots g_{i_k,i_0;\lambda_k}$
où pour deux simplexes consécutifs$(i_{s-1}, i_s; \lambda_{s-1}), (i_s, i_{s+1}; \lambda_s)$
on a$(i_s; \widehat{\lambda}_{s-1}) = (i_s; \widehat{\lambda}_s)$.

Cela caractérise les périodes $g \in G_0$. D'autre part, dans la caractérisation ci-dessus, $(i_0, i_1; \lambda_0)(i_1, i_2; \lambda_1) \cdots (i_k, i_0; \lambda_k)$ est un lacet simplicial Λ dans $\sum_{\mathcal{U}}$; g est appelé la *période associée*, per (Λ). A cause de la condition $(\star\star)$, per (Λ) ne dépend que de la classe d'homotopie simpliciale de Λ et l'on obtient un morphisme de groupes induit

$$\text{per } : \pi_1(\sum_{\mathcal{U}}, (i_0, \lambda_0)) \to G_0.$$

En théorie des revêtements on sait établir un isomorphisme $\nu : G_E = G_{\sum_{\mathcal{U}}} \to \pi_1(\sum_{\mathcal{U}}, (i_0, \lambda_0))$ qui n'est déterminé qu'à une conjugaison près.

Alors il s'avère que per $\circ\,\nu : G_E \to G_0$ est précisément un morphisme de périodes h_r considéré ci-dessus.

8.3 Jets

Soit $J \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert, et x, y deux coordonnées sur J.

On pose

$$\frac{Dy}{Dx} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n y}{dx^n} \right) t^n \in B_{\Omega^0(J)}.$$

En posant, pour $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n \in \Omega^0(J)[[t]], \phi_p \; : = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p) t^n \in \mathbf{R}[[t]]$, on obtient $\left(\frac{Dy}{Dx} \right)_p \in B_{\mathbf{R}}$; c'est le *jet de y par rapport à x en p.*

Pour une troisième coordonnée z on a

$$\left(\frac{Dz}{Dx} \right) = \left(\frac{Dz}{Dy} \right) \circ \left(\frac{Dy}{Dx} \right)$$
$$\left(\frac{Dz}{Dx} \right)_p = \left(\frac{Dz}{Dy} \right)_p \circ \left(\frac{Dy}{Dx} \right)_p$$

où $\circ$ désigne toujours la composition des séries formelles d'ordre ≥ 1.

Pour une série $\phi = x + \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n =: x + X, x_n \in \Omega^0(J)$, la série $y^{(0)}(\phi)$ définie au §7.2 s'écrit comme

$$y^{(0)}(\phi) = y + \left(\frac{Dy}{Dx} \right) \circ X$$

et

$$(y^0(\phi))_p = y_p + \left(\frac{Dy}{Dx} \right)_p \circ X_p.$$

Soit $\eta : J \to \mathbf{R}$ un plongement tel que $\eta(p) = p$, alors $x \circ \eta = y$ est toujours une coordonnée locale au voisinage de p et $\left(\frac{Dy}{Dx} \right)_p$ sera appelée le *jet* de η en p par rapport à x.

De plus si $\varphi_1 : J \to J_1$ est une bijection régulière d'intervalles et y une coordonnée sur $J_1, y \circ \varphi_1$ est une coordonnée sur J. Par abus de notation on écrira toujours $\frac{Dy}{Dx}$ au lieu de $\frac{D(y \circ \varphi_1)}{Dx}$.

Si $\varphi_2 : J_1 \to J_2$ est une autre bijection régulière et si z est une coordonnée sur J_2 on a

$$\frac{D(z \circ \varphi_2 \circ \varphi_1)}{Dx} = \left(\frac{D(z \circ \varphi_2)}{Dy} \circ \varphi_1 \right) \circ \left(\frac{Dy \circ \varphi_1}{Dx} \right)$$

où pour $\phi \in \Omega^0(J_1), \phi \circ \varphi \in \Omega^0(J)$ est le pull-back en un sens évident. Néanmoins les bijections étant données une fois pour toutes on écrira par abus de notation

$$\frac{Dz}{Dx} = \frac{Dz}{Dy} \circ \frac{Dy}{Dx}$$

et de même

$$\left(\frac{Dz}{Dx}\right)_{p_0} = \left(\frac{Dz}{Dy}\right)_{p_1} \circ \left(\frac{Dy}{Dx}\right)_{p_0}, \quad p_1 = \varphi_1(p_0).$$

8.4 Holonomie

On garde les notations des sections précédentes.

Soit $\mu_0 \neq 0$ une forme intégrable sur V et $\mathcal{F}$ le feuilletage de codimension 1 associé. Alors il existe un recouvrement $V = \{V_i\}_{i \in 1}$ tel que

(i) $\mu_0 | V_i = \dfrac{dx_{0i}}{x_{1i}}$ où x_{0i} est une coordonnée locale qui applique V_i surmersivement sur un intervalle J_i, et $x_{1i} \in (\Omega^0(V_i))^{-1}$.

(ii) les fibres de $x_{0i} : V_i \to J_i$ sont des disques.

Fixons une feuille $F \in \mathcal{F}$ et posons $U_i := F \cap V_i$. Alors $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in 1}$ est un recouvrement du type considéré aux §8.1.2.

Soit maintenant $(i_0, i_1; \lambda_0)(i_1, i_2; \lambda_1) \dots (i_k, i_{k+1}; \lambda_k) =: \Lambda$ un chemin simplicial dans $\sum_{\mathcal{U}}$. Alors il existe une suite $\Delta = (D_{i_0}, D_{i_1}, \dots, D_{i_{k+1}})$ telle que

(1) $D_{i_s} = x_{0,i_s}^{-1}(L_{i_s})$ où $L_{i_s} \subset J_{i_s}$ est un sous-intervalle ouvert

(2) $U_{i_s;\widehat{\lambda}_s} = U_{i_s;\widehat{\lambda}_{s+1}} \subset D_{i_s}; x_{0,i_s}(U_{i_s;\widehat{\lambda}_s}) =: p_{i_s}$

(3) $D_{i_s} \cap V_{i_{s+1}} = D_{i_{s+1}} \cap V_{i_s}$

(4) L'intersection avec $V_{i_{s+1}}$ ainsi qu'avec $V_{i_{s-1}}$ de chaque feuille du feuilletage induit sur D_{i_s} est connexe non-vide.

La construction d'une Δ s'effectue à l'aide du §I, b de [R. 1952].

La chaîne de correspondances bijectives $L_{i_s} \xrightarrow{x_{0,i_s}} \{\text{feuilles de } D_{i_s}\} \leftrightarrow \{\text{feuilles de } D_{i_s} \cap V_{i_{s+1}} = D_{i_{s+1}} \cap V_{i_s}\} \leftrightarrow \{\text{feuilles de } D_{i_{s+1}}\} \xleftarrow{x_{0,i_{s+1}}} L_{i_{s+1}}$ établit une bijection régulière $\varphi_{i_s} : L_{i_s} \to L_{i_{s+1}}$ qui fait correspondre p_{i_s} à $p_{i_{s+1}}$.

Supposons maintenant que Λ soit un lacet, i.e. $(i_{k+1}; \widehat{\lambda}_k) = (i_0; \lambda_0)$; par conséquent $p_{i_{k+1}} = p_{i_0}$. Alors la composition

$$\eta : L_{i_0} \xrightarrow{\varphi_{i0}} L_{i_1} \xrightarrow{\varphi_{i_1}} \cdots \to L_{i_k} \xrightarrow{\varphi_{ik}} L_{i_{k+1}} \subset J_{i_0}$$

est toujours une bijection régulière $L_{i_0} \to L_{i_{k+1}} \subset J_{i_0}$ qui fixe p_{i_0}. Le germe de η en p_{i_0} est *l'holonomie associée* à Λ. En posant $x_{0,i_0} \circ \eta = y_{o,i_0}$, le jet de l'holonomie $\dfrac{Dy_{o,i_0}}{Dx_{0,i_0}}$ par rapport à x_{0,i_0} se calcule selon la règle du §8.3.

$$\frac{Dy_{0,i_0}}{Dx_{0,i_0}} = \left(\frac{Dx_{0,i_0}}{Dx_{0,i_k}}\right)_{p_k} \circ \left(\frac{Dx_{0,i_k}}{Dx_{0,i_{k-1}}}\right)_{p_{k-1}} \circ \cdots \circ \left(\frac{Dx_{0,i_1}}{Dx_{0,i_0}}\right)_{p_{i0}} \qquad (\star)$$

D'autre part μ_0 se prolonge en un Γ_{ga} -cocycle $\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n t^n \in \Omega^0(V)[[t]]$. Selon la proposition 3 il existe sur chaque V_i une série formelle $\phi_i = x_{0,i} + x_{1,i}t + \cdots \in \Omega^0(V_i)[[t]]$ telle que $\mu|V_i = \dfrac{\delta\phi_i}{\phi_i'}$.

Posons $\mu|F = \nu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n t^n, \nu_n = \mu_n|F$. Puisque x_{0i} est localement constante sur $U_i = F \cap V_i$, on peut pour le calcul de ν enlever x_{0i} de $\phi_i|F$. Donc en posant $\psi_i := \sum_{n=1}^{\infty} x_{ni} t^n|F$ on obtient

$$\nu|U_i = \frac{\delta\psi_i}{\psi_i'}.$$

Evidemment ψ_i est une application $U_i \to B_{\Omega^0}(U_i)$. Le passage de ψ_i à ψ_j est donné par la formule

$$\psi_j = \frac{Dx_{0j}}{Dx_{0i}} \circ \psi_i \qquad \text{(§7.2 et §8.3)}$$

où $\dfrac{Dx_{0j}}{Dx_{0i}}$ est localement constant sur $U_i \cap U_j$. Alors sur toute composante connexe de $U_i \cap U_j$ on a $\dfrac{Dx_{0j}}{Dx_{0i}} \in B_{\mathbf{R}}$ et par suite ν donne lieu à un revêtement galoisien (on applique §8.2 avec $W := B_{\mathbf{R}}, G := B_{\mathbf{R}}$). De plus la période associée au lacet Λ est

$$\text{per}\,\Lambda = \frac{Dx_{0,i_0}}{Dx_{0,i_1}} \circ \frac{Dx_{0,i_1}}{Dx_{0,i_2}} \circ \cdots \circ \frac{Dx_{0,i_k}}{Dx_{0,i_0}}. \qquad (\star\star)$$

En comparant $(\star)$ et $(\star\star)$ on voit que

$$\frac{Dy_{0,i_0}}{Dx_{0,i_0}} = (\text{per}\Lambda)^{-1}$$

ou encore : *le jet d'holonomie et la période associés à Λ sont inverses l'un à l'autre.*

Ce résultat est conforme au résultat obtenu au §4 pour les Γ_{sl} -cocycles.

En résumant on a obtenu le

THÉORÈME .— *Soit* μ *un* Γ_{ga} *-cocycle associé à un feuilletage* $\mathcal{F}$ *transversalement orientable de codimension 1 sur* $V \cdot \mu$ *induit sur chaque feuille* $F \in \mathcal{F}$ *un* Γ_{ba} *-cocycle* ν_F. *Etant donnés* $f_0 \in F$ *et un choix de coordonnées locales transverses sur* V, ν_F *définit un morphisme de périodes per :* $\pi_1(F, f_0) \rightarrow B_{\mathbf{R}}$ *et un antimorphisme : jet d'holonomie :* $\pi_1(F, f_0) \rightarrow B_{\mathbf{R}}$. *Pour toute classe de lacets* $[\Lambda]$ *le jet d'holonomie et la période associés sont inverses l'un à l'autre.*

Comme on a fait remarquer à la fin du 8.2, en identifiant $\pi_1(F, f_0)$ avec G_F (identification déterminée à une conjugaison près), le morphisme *per* s'identifie avec un morphisme de périodes $G_F \rightarrow B_{\mathbf{R}}$. Ainsi le théorème établit le lien entre la classe d'holonomie associée à $[\mu|F]$ et l'holonomie au sens de la théorie des feuilletages.

COROLLAIRE .— *Dans le cas analytique du théorème précédent* μ_F *détermine complètement l'holonomie.*

En effet un germe analytique est complètement déterminé par son jet.

Cependant pour le cas analytique il reste toujours le problème de savoir dans quelles conditions on peut associer au feuilletage $\mathcal{F}$ un Γ_{ga} -cocycle μ pour lequel le relèvement $\widetilde{\mu}$ au revêtement universel $\widetilde{V}$ de V détermine une application $\widetilde{\phi} : \widetilde{V} \rightarrow GA(1)$ telle que $\widetilde{\phi}^{\star}(\omega) = \widetilde{\mu}$, ω étant le cocycle calculé au §6.

APPENDICE

Pour expliquer comment le pseudo-groupe $PA(1)$ s'élargit en un véritable groupe $GA(1)$ on rappelle brièvement quelques définitions et résultats de [E. 1980].

Une transition $t \in PA(1)$ est dite *maximale* si toute transition t' qui prolonge t, i.e. $t = t'|\operatorname{dom} t$, coïncide avec t. Toute transition admet un unique prolongement maximal.

Le produit $t_1 \circ t_2$ de transitions maximales (s'il est défini) est en général non-maximal; son prolongement maximal sera noté $t_1 \wedge t_2$.

L'ensemble T des transitions maximales avec la composition $\ldots \wedge \ldots$ constitue un groupe local abstrait au sens de Malcev. T satisfait au critère d'intégrabilité de Malcev, par conséquent T se plonge dans un groupe G de telle manière que $\ldots \wedge \ldots$ et $t \mapsto t^{-1}$ soient les opérations de produit et d'inversion dans G restreintes à T. Ce critère d'intégrabilité revient au fond à la nullité d'une certaine classe de cohomologie non-commutative en dimension 2 d'un certain complexe simplicial associé au groupe local.(*) En ce sens on peut considérer le critère de Malcev comme la transposition au cadre discret du "critère de Cartan" (nullité du second nombre de Betti).

La vérification du critère de Malcev va de pair avec la construction d'une variété (non -séparée) $\mathbf{A}$ connexe et simplement connexe de dimension un sur laquelle G opère de manière transitive. De plus $\mathbf{R}$ se plonge dans $\mathbf{A}$ de telle manière que la trace de G sur $\mathbf{R}$ soit précisément T. G est le groupe $GA(1)$ auquel on a fait allusion au §5.

(*) Voir p. ex. le dernier article du volume no. 27 de la série Travaux en Cours, Paris, Hermann.

BIBLIOGRAPHIE

[C] CARTAN, E., (1936). *La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie*, ŒUVRES I, 2 (éd. 1952), pp. 1307–1330.

[C] CARTAN, E., (1937). *La structure des groupes infinis*, OEUVRES II, 2 (éd. 1953), pp. 1335–1384.

[CH] CARTAN, H., (1957). *Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes*, ŒUVRES II, pp. 700–722.

[E] EST, W.T. VAN, (1953). *Group cohomology and Lie algebra cohomology in Lie groups*, Indag. Math. 15= Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet., A56, pp. 484– 504.

[E] EST, W.T. VAN, (1980). *Sur le groupe fondamental des schémas analytiques de variété à une dimension*, Ann. Inst. Fourier 30, pp. 45–77.

[E] VAN EST, W.T., (1988). *Une démonstration de E. Cartan du troisième théorème de Lie, Travaux en Cours no. 27, Paris, Hermann.*

[F] FUKS, D.B., (1986). Cohomology of infinite dimensional Lie algebras, Consultants Bureau, New York.

[G] GRIFFITHS, P., (1974). *On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in differential geometry*, Duke Math. J. 41, pp. 775–814.

[GO] GORBATSEVICH, V.V., (1986). *The construction of a simply connected Lie group with a given Lie algebra*, Russ. Math. Surveys 41, 3, pp. 207–208, Usp. Mat. Nauk 41, 3, pp. 177–178.

[G.-V.] GODBILLON, CL., VEY, J., (1971). *Un invariant des feuilletages en codimension un*, CRAS A273, pp. 92–95.

[H] HAEFLIGER, A., (1958). *Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes*, Comm. Math. Helv. 32, pp. 248– 329.

[H] HAEFLIGER, A., (1976). *Differentiable cohomology*, Cours CIME.

[Hg] HAGEN, J., (1882). *On division of series*, Am. J. Math. 5, pp. 236– 237.

[M] MALGRANGE, B., (1976).*Frobenius avec singularités I. Codimension un*, Publ. Math. IHES 46, pp. 163–173.

[P] POSTNIKOV, M.M., (1985). Leçons de Géométrie. Groupes et Algèbres de Lie, Moscou, Eds MIR.

[R] REEB, G., (1952). Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Paris, Hermann.

[S] SOURIAU, J.-M. (1988). *Quantification géométrique*, Travaux en Cours no 32, Paris, Hermann.