

MARIANNE MORA

**La convergence des fonctions variance des familles exponentielles naturelles**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 11, n<sup>o</sup> 2 (1990), p. 105-120

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1990\\_5\\_11\\_2\\_105\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1990_5_11_2_105_0)

© Université Paul Sabatier, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## La convergence des fonctions variance des familles exponentielles naturelles

MARIANNE MORA<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — Soit  $F$  une famille exponentielle naturelle sur un espace vectoriel  $E$  de dimension  $d$ . La famille  $F$  est caractérisée par la donnée du domaine  $J_F$  des moyennes  $m$  des probabilités  $P(m, F)$  qui la composent et par la fonction variance  $V_F$  qui à tout  $m$  de  $J_F$  fait correspondre  $V_F(m)$  l'opérateur de variance de la loi  $P(m, F)$ . Nous montrerons que, sous certaines conditions, la fonction limite d'une suite de fonctions variance est encore la fonction variance d'une famille exponentielle naturelle.

**ABSTRACT.** — Let  $F$  be a natural exponential family on a  $d$ -dimensional vector space  $E$ . Denoting by  $J_F$  the domain of the means of the probability measure  $P(m, F)$  in  $F$  with mean  $m$ , let  $V_F(m)$  be the variance operator of the probability measure  $P(m, F)$ . Then the function  $V_F : m \in J_F \mapsto V_F(m)$  is called the variance function of  $F$ ; under fairly large conditions, it is shown that the limit function of a sequence of variance functions is still the variance function of a natural exponential family.

**KEY-WORDS :** Natural Exponential Families  
Variance Functions  
Limits of Laplace Transforms

AMS - Classification 60B10

---

### 0. Introduction

L'article traite de familles exponentielles naturelles définies sur un espace vectoriel réel, de dimension finie. Il est bien connu, et facile à vérifier, qu'une telle famille  $F$  est caractérisée par sa fonction variance  $V_F$ . En pratique ces fonctions variance sont souvent très simples (voir par exemple l'article

---

<sup>(1)</sup> Marianne Mora, U.F.R. Sciences Économiques, Université de Paris X Nanterre, 200, avenue de la République, 92001 Nanterre Cedex

de Morris [6], ou [3] et [4]) et s'avèrent aussi maniables pour identifier une famille que l'est, par exemple, une transformée de Fourier pour identifier une loi de probabilité. Il serait donc intéressant de disposer, pour ces variances, d'une sorte de "théorème de Paul Lévy" disant quand la limite d'une suite de fonctions variance est encore une fonction variance : ce problème est d'ailleurs esquissé dans quelques lignes de l'article de Morris [6]. Ce théorème de convergence (section 3) n'est qu'un outil technique, et dans le présent article, nous n'en présenterons pas d'applications; mais nous pensons à la classification des familles exponentielles par leurs fonctions variance : par exemple aux variances quadratiques à plusieurs dimensions [5] ou aux variances sur  $\mathbb{R}$  de la forme  $P + Q\sqrt{R}$  avec  $P, Q, R$  polynômes de degré inférieur ou égal à 3, 2 et 2 respectivement.

Par exemple, on peut vérifier facilement que  $V(m) = \sqrt{m}$  sur  $]0, +\infty[$  n'est pas une fonction variance. Notre résultat impliquera alors que  $\sqrt{m}(1 + \epsilon P(m))$  pour  $P$  polynôme et  $\epsilon$  petit ne peut être une fonction variance, chose difficile à voir directement.

Ce problème de "passage à la limite" s'est posé de façon naturelle dans un travail précédent [4] qui concernait l'étude et la classification de toutes les fonctions variance polynomiales de degré 3. Dans ce problème de classification, il est facile de prouver, à l'aide d'une formule de Lagrange, que la fonction  $V_F(m) = m(m+p)(m+p_1)$ , définie sur  $J = ]0, +\infty[$  et pour  $p$  et  $p_1 > 0$ , est une fonction variance. Il est alors tentant d'en déduire, par passage à la limite, en faisant tendre  $p_1$  vers 0, que la fonction  $V_F(m) = m^2(m+p)$  est aussi une fonction variance. Ce résultat a été prouvé de trois façons différentes : tout d'abord par une démonstration due à Paul Ressel et décrite dans [4], puis par un calcul explicite (G. Letac, [2]), à l'aide d'un certain processus stochastique et enfin grâce à un théorème de Jorgensen et d'un corollaire dû à Barlev décrits dans [3]. Nous en donnons ici une quatrième grâce au théorème de convergence pour les fonctions variance. La section 1 comprend des rappels sur les familles exponentielles naturelles. Dans la section 2 (plutôt qu'en appendice) certains points d'analyse réelle sont énoncés, enfin la section 3 est consacrée à l'énoncé et à la démonstration du théorème de convergence.

## 1. Familles exponentielles naturelles et fonctions variance sur un espace vectoriel de dimension finie

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $d$ , soit  $E^*$  son espace dual. Si  $\mu$  est une mesure  $\sigma$ -finie, positive, sur  $E$ , on définit pour tout  $\theta \in E^*$ , la fonction :

$$k_\mu(\theta) = \log \int \exp(\langle \theta, x \rangle) \mu(dx).$$

Nous noterons :

- $\Theta_\mu$  l'intérieur de l'ensemble convexe  $\{\theta \in E^* \mid k_\mu(\theta) < \infty\}$ ,
- $C_\mu$  le plus petit convexe fermé de  $E$  tel que son complémentaire soit de  $\mu$ -mesure nulle,
- $I_\mu$  l'intérieur de  $C_\mu$ .

Enfin nous considérons l'ensemble :

$$M(E) = \{\mu \text{ mesure } \sigma\text{-finie, positive sur } E \text{ tel que } \Theta_\mu \neq \emptyset \text{ et } I_\mu \neq \emptyset\}.$$

**DÉFINITION 1.1.** — Pour  $\mu$  dans  $M(E)$ , la famille de lois de probabilité sur  $E$ ,  $F(\mu)$ , définie par :

$$F(\mu) = \{P(\theta, \mu), \theta \in \Theta_\mu\}$$

où  $P(\theta, \mu)(dx) = \exp\{\langle \theta, x \rangle - k_\mu(\theta)\} \mu(dx)$ ,  $\forall \theta \in \Theta_\mu$ , est appelée famille exponentielle naturelle engendrée par  $\mu$ .

*Remarque.* — Il est facile de voir que pour  $\mu_1$  et  $\mu_2$  dans  $M(E)$ , on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} F(\mu_1) = F(\mu_2) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in E^* \times \mathbb{R} \text{ tel que } \mu_1(dx) = \exp(\langle a, x \rangle + b) \mu_2(dx). \end{aligned}$$

**DÉFINITION 1.2.** — Une famille  $F$  de lois de probabilité sur  $E$  est appelée famille exponentielle naturelle sur  $E$  s'il existe une mesure  $\mu$  dans  $M(E)$  telle que  $F = F(\mu)$ .

Nous omettrons dans ce qui suit le terme "naturel". La paramétrisation de la famille  $F = F(\mu)$  par l'ouvert  $\Theta_\mu$  est donc liée à un choix particulier de mesure  $\mu$ . Cependant il est possible de définir une autre paramétrisation de  $F$  à l'aide des moyennes. Pour cela il est nécessaire de rappeler certaines propriétés de la fonction  $k_\mu$ , dont nous omettons les démonstrations, très faciles (voir [3]).

PROPOSITION 1.1. — Soit  $\mu \in M(E)$ , alors :

- (1)  $\Theta_\mu$  est convexe;
- (2)  $k_\mu$  est strictement convexe, analytique-réelle sur  $\Theta_\mu$ ;
- (3)  $\forall \theta \in \Theta_\mu$ , la dérivée de  $k_\mu$  en  $\theta$  définie par :

$$k'_\mu(\theta) = \int xP(\theta, \mu)(dx)$$

appartient à  $I_\mu$  et la fonction dérivée  $k'_\mu$  est bijective de  $\Theta_\mu$  dans  $J_\mu = k'_\mu(\Theta_\mu)$ ;

- (4)  $\forall \theta \in \Theta_\mu, \forall (h_1, h_2) \in (E^*)^2$  et si  $m = k'_\mu(\theta)$ , alors :

$$k''_\mu(\theta) \cdot (h_1, h_2) = \int h_1(x - m)h_2(x - m)P(\theta, \mu)(dx).$$

De plus l'application :  $h \mapsto k''_\mu(\theta) \cdot (h, h)$  est une forme quadratique strictement définie positive sur  $E^*$ .

Notons alors  $\psi_\mu$  l'application réciproque de  $k'_\mu$  définie sur  $J_\mu$ . Il est possible de donner une nouvelle définition de la famille  $F(\mu)$ , sous la forme :

$$F(\mu) = \{P(\psi_\mu(m), \mu), \quad m \in J_\mu\}.$$

Nous appellerons  $J_\mu$  le domaine des moyennes de  $F(\mu)$ . C'est une partie ouverte et connexe de  $E$ .

PROPOSITION 1.2. — Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  dans  $M(E)$ . Alors :

$$\begin{aligned} F(\mu_1) = F(\mu_2) &\Rightarrow 1) I_{\mu_1} = I_{\mu_2} = I_F \\ &\Rightarrow 2) J_{\mu_1} = J_{\mu_2} = J_F \\ &3) \forall m \in J_F : P(\psi_{\mu_1}(m), \mu_1) = P(\psi_{\mu_2}(m), \mu_2). \end{aligned}$$

On a alors la définition suivante :

DÉFINITION 1.3. — Soit  $F$  une famille exponentielle sur  $E$  et  $\mu$  dans  $M(E)$  telle que  $F = F(\mu)$ .

L'application  $m \mapsto P(m, F)$ , de  $J_F$  dans  $F$ , définie par :

$$P(m, F)(dx) = P(\psi_\mu(m), \mu)(dx)$$

est appelée paramétrisation canonique de  $F$  par son domaine des moyennes.

La convergence des fonctions variance des familles exponentielles naturelles

On peut alors introduire la fonction variance d'une famille exponentielle  $F$ .

**DÉFINITION 1.4.** — Soit  $F = \{P(m, F), m \in J_F\}$  une famille exponentielle sur  $E$ . L'application  $V_F$  définie par :

$$\begin{aligned} V_F : J_F &\mapsto Q(E^*) = \{\text{formes quadratiques sur } E^*\} \\ m &\mapsto V_F(m) = \text{variance de } P(m, F) \end{aligned}$$

est appelée fonction variance de  $F$ .

Cette application a les propriétés suivantes :

**PROPOSITION 1.3.** — Soit  $F$  une famille exponentielle sur  $E$ . Soit  $V_F$  sa fonction variance définie sur  $J_F$ . Alors :

- 1)  $V_F(m) = k''_{\mu}(\psi_{\mu}(m)) = (\psi'_{\mu}(m))^{-1}, \forall m \in J_F, \forall \mu \in M(E)$  telle que  $F = F(\mu)$ .
- 2) De plus si  $F$  et  $F'$  sont deux familles exponentielles sur  $E$  :

$$F = F' \Leftrightarrow J_F = J_{F'} \quad \text{et} \quad V_F = V_{F'}.$$

Cette proposition montre que  $(J_F, V_F)$  caractérise la famille  $F$ .

## 2. Deux résultats d'analyse réelle

Dans la démonstration du théorème de convergence (section 3), nous aurons besoin des deux points suivants, concernant la différentiabilité de fonctions définies sur un espace de Banach  $E$ ; ils sont énoncés et démontrés dans le livre de Cartan ([1] théorème 3.6.1, p. 49 et théorème 3.4.1 p. 48) :

### THÉORÈME 2.1

Soit  $U$  un ouvert convexe d'un espace de Banach  $E$  et soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite d'applications différentiables sur  $U$ , et à valeurs dans un espace de Banach  $F$ . On suppose que :

- 1) La suite des applications dérivées  $(f'_n)_{n \geq 0}$

$$f'_n : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

converge, uniformément dans  $U$ , vers une application  $g$

$$g : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F).$$

2) Il existe  $a \in U$  tel que  $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$  existe. Alors :

$$\forall x \in U, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existe}$$

et la convergence de la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  vers  $f$  est uniforme sur chaque partie bornée de  $U$ .

De plus  $f$  est différentiable sur  $U$  avec  $f' = g$ .

### THÉORÈME 2.2

Soit  $U$  un ouvert connexe d'un espace de Banach  $E$ . Pour tout  $(a, b) \in U^2$  on définit la distance  $d_U(a, b)$  par :

$$d_U(a, b) = \inf \{ \text{longueurs des lignes brisées d'extrémités} \\ a \text{ et } b \text{ incluses dans } U \}.$$

Soit  $f : U \rightarrow F$  (Banach), différentiable et telle qu'il existe  $k > 0$  :

$$\|f'(x)\| \leq k.$$

Alors :  $\forall (x_1, x_2) \in U^2, \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k d_U(x_1, x_2).$

### 3. Théorème de convergence pour des suites de fonctions variance

Voici le résultat de l'article :

#### THÉORÈME 3.1

Soit  $(F_n)_{n \geq 1}$  une suite de familles exponentielles sur  $E$ , de domaine des moyennes et de fonctions variance respectifs  $J_n$  et  $V_n$ .

On suppose que :

1) Il existe un ouvert convexe de  $E$  non vide  $J$  tel que :

$$J \subset \bigcap_{n \geq 1} J_n.$$

2) Pour tout  $m$  dans  $J$ ,  $V(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(m)$  existe,  $V(m)$  est une forme quadratique sur  $E^*$  strictement positive et la suite  $(V_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $V$ , uniformément sur tout compact contenu dans  $J$ .

Alors :

i) il existe une famille exponentielle  $F$  sur  $E$  telle que :

$$V_F(m) = V(m), \quad \forall m \in J;$$

ii) pour tout  $m$  dans  $J$ , la suite  $(P(m, F_n))_{n \geq 1}$  converge vers  $P(m, F)$ , au sens de la convergence étroite.

*Démonstration.* — Cette démonstration comporte deux parties. Dans la partie (A) nous montrons que pour tout  $m \in J$  et, si l'on note :

$$\mu_n(m) = P(m, F_n) \quad \text{et} \quad k_n = k_{\mu_n}(m),$$

alors la suite  $(k_n)_{n \geq 1}$  converge vers la fonction  $k_{\mu(m)}$ , fonction génératrice des cumulants d'une mesure  $\mu(m)$  dans  $M(E)$ . De plus la mesure  $\mu(m)$  est telle que sa moyenne et sa variance sont respectivement  $m$  et  $V(m)$ .

Dans la seconde partie (B) de la démonstration nous montrerons qu'il existe une famille exponentielle  $F$  telle que  $F = F(\mu(m))$ ,  $\forall m \in J$ .

A) 1)  $\forall m \in J, \forall n \geq 1, V_n(m)$  et  $V(m)$  peuvent être considérés comme des isomorphismes de  $E^*$  dans  $E$ , étant des formes quadratiques strictement positives sur  $E^*$ . Nous noterons respectivement  $\psi'_n(m)$  et  $\psi'(m)$  leurs isomorphismes réciproques, bien que nous n'ayons pas encore montré que  $\psi'$  est une différentielle. Nous pouvons ainsi définir les fonctions  $\psi'_n$  et  $\psi'$  correspondantes en posant :

$$\begin{cases} \psi'_n : J \rightarrow \text{Isom}(E, E^*) & n \geq 1 \\ m \mapsto \psi'_n(m) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \psi' : J \rightarrow \text{Isom}(E, E^*) \\ m \mapsto \psi'(m). \end{cases}$$

On a alors le résultat suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Pour un compact } K \text{ fixé dans } J, \text{ la suite} \\ &(\psi'_n)_{n \geq 1} \text{ converge vers } \psi', \text{ uniformément sur } K. \end{aligned} \quad (1)$$

En effet si  $E$  et  $F$  sont des espaces de Banach, et si un opérateur  $u : E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  est inversible, alors :

$$\|u^{-1}\|^{-1} = \inf \{c \geq 0 : \|u(x)\| \geq c\|x\|, \forall x \in E\}$$

où :

$$\|u\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\|. \quad (2)$$



Donc, puisque :

$$\begin{aligned} \|\psi'_n(m) - \psi'(m)\| &= \left\| (V_n(m))^{-1} - (V(m))^{-1} \right\| \\ &\leq \left\| (V_n(m))^{-1} \right\| \left\| (V(m))^{-1} \right\| \|V_n(m) - V(m)\|, \end{aligned}$$

pour prouver (1), il suffit de prouver que la suite  $\left\| (V_n(m))^{-1} \right\|$  est uniformément bornée sur  $K$ .

Cela est conséquence immédiate de l'hypothèse (2) du théorème et de la formule (2) relative aux opérateurs inversibles.

Ainsi, la suite  $(\psi'_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\psi'$ , uniformément sur  $K$ .

2) Fixons maintenant  $m_0$  dans  $J$  et considérons un ouvert convexe borné  $J_1$  vérifiant :

$$m_0 \in J_1 \quad \text{et} \quad J_1 \subset \overline{J_1} \subset J.$$

Cet ouvert  $J_1$  dépend donc du point  $m_0$  choisi dans  $J$ , ( $J_1 = J_1(m_0)$ ).

Soit :

$$\mu_n = P(m_0, F_n) \quad \text{et} \quad \psi_n = \psi_{\mu_n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Alors :

- a)  $\forall m \in J_1, \quad f(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(m)$  existe.
- b)  $(\psi_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $f$ , uniformément sur tout compact de  $J_1$ . De plus  $f$  est différentiable sur  $J_1$  avec :

$$f' = \psi'.$$

En effet, puisque  $\forall m \in J_1$  et  $\forall n \geq 1$  on a par construction :

$$\psi_n(m_0) = 0 \quad \text{et} \quad \psi'_n(m) = (V_n(m))^{-1},$$

la suite  $(\psi_n)_{n \geq 1}$  vérifie les hypothèses du théorème 1 de la section 2 et l'on conclut immédiatement.

Nous noterons désormais  $\psi$  la fonction limite  $f$ ; on a alors  $\psi(m_0) = 0$ .

- 3) Soit  $I_n = \psi_n(J_1)$ ,  $n \geq 1$ .

Puisque  $I_n$  est ouvert, borné et contient 0 pour tout  $n \geq 1$ , on peut définir pour tout  $n \geq 1$  :

$$r_n = \inf\{\|x\|, x \in F_r(I_n)\}$$

où  $F_r(I_n)$  désigne la frontière de  $I_n$ .

Alors,  $\forall n \geq 1, B(0, r_n) \subset I_n$ .

Montrons alors que  $\inf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$ . Sinon  $\underline{\lim} r_n = 0$  et sans perte de généralité on peut alors supposer que  $\lim r_n = 0$ .

Mais, puisque  $\forall n \geq 1, \psi_n$  est bijective, bicontinue sur  $J$ , pour tout ouvert  $A$  on a :

$$\psi_n(\overline{A}) = \overline{\psi_n(A)}$$

et donc :

$$\psi_n(F_r(J_1)) = \psi_n(\overline{J_1} \cap \overline{\mathbb{C}J_1}) = \overline{\psi_n(J_1)} \cap \overline{\mathbb{C}\psi_n(J_1)} = F_r(I_n).$$

Puisque  $x \mapsto \|x\|$  est continue sur  $E$ , pour tout  $n \geq 1$ , il existe  $x_n$  dans  $F_r(I_n)$  et donc  $m_n$  dans  $F_r(J_1)$  tels que :

$$\|\psi_n(m_n)\| = r_n.$$

$F_r(J_1)$  étant compact, on peut alors supposer sans perte de généralité qu'il existe  $m$  dans  $F_r(J_1)$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|m_n - m\| = 0.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|\psi(m)\| &\leq \|\psi(m) - \psi_n(m)\| + \|\psi_n(m) - \psi_n(m_n)\| + r_n \\ &\leq \|m_n - m\| \|\psi'_n(\alpha_n)\| + \|\psi(m) - \psi_n(m)\| + r_n \end{aligned}$$

pour un  $\alpha_n$  dans  $[m, m_n]$ .

Enfin, puisque  $\|\psi'_n(\alpha_n)\|$  est uniformément bornée sur  $J_1$ , et que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \|m_n - m\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n(m) - \psi(m)\| = 0,$$

on conclut que  $\|\psi(m)\| = 0$ , ce qui est impossible car  $\psi$  est bijective et  $m \neq m_0$ .

Dans la suite nous fixerons  $r$  tel que  $0 < r < \inf r_n$ . On aura donc :

$$B(0, r) \subset \bigcap_{n \geq 1} \psi_n(J_1).$$

4) Considérons pour tout  $n \geq 1$ , les fonctions  $k'_n = k'_{\mu_n}$  définies respectivement sur  $\psi_n(J_1)$ .

De la même façon on peut définir  $k'$  comme la fonction réciproque de  $\psi$  (bien que nous n'ayons pas encore montré que  $k'$  est une différentielle).

Montrons que  $(k'_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $k'$ , uniformément sur  $B\left(0, \frac{r}{2}\right)$  :

Soit  $\theta \in B\left(0, \frac{r}{2}\right)$ . Soit  $m = k'(\theta)$  dans  $J$ , et soit pour tout  $n \geq 1$ ,  $\theta_n = \psi_n(m)$  dans  $\psi_n(J_1)$ . Alors :

$$k'_n(\theta) - k'(\theta) = k'_n(\theta) - k'_n(\theta_n)$$

et

$$\|k''_n(\theta)\| = \|V_n(m_n)\|, \quad \text{où } m_n = k'_n(\theta) \in J_1, \quad \forall n \geq 1.$$

Puisque  $V_n$  est uniformément bornée sur  $J_1$ , il existe  $M > 0$  tel que :

$$\|k''_n(\theta)\| \leq M, \quad \forall \theta \in B\left(0, \frac{r}{2}\right), \quad \forall n \geq 1.$$

$J_n$  étant connexe, on peut appliquer le théorème 2.2 et on a :

$$\|k'_n(\theta) - k'_n(\theta_n)\| \leq M d_n(\psi_n(m), \psi(m))$$

où  $d_n(\cdot, \cdot) = d_{I_n}(\cdot, \cdot)$ .

De plus  $(\psi_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\psi$ , c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon \leq \frac{r}{2}, \exists N(\epsilon, \overline{J_1}) \quad : \quad \forall n \geq N, \|\psi_n(m) - \psi(m)\| \leq \epsilon, \quad \forall m \in J_1.$$

Donc  $\forall n \geq N$ ,  $\psi_n(m) \in B(\psi(m), r/2)$  et ainsi :

$$\forall n \geq N, \quad d_n(\psi_n(m), \psi(m)) = \|\psi_n(m) - \psi(m)\| \leq \epsilon, \quad \forall m \in J_1.$$

En particulier pour  $\epsilon = r/2$ , il existe  $N((r/2), J_1)$  tel que :

$$\forall n \geq N \quad : \quad d_n(\psi_n(m), \psi(m)) \leq \epsilon.$$

Supposons maintenant qu'il existe  $\epsilon_0 \geq r/2$  tel que :

$$\forall N \geq 1, \exists n \geq N, \exists m_n \in J_1 \quad : \quad d_n(\psi_n(m_n), \psi(m_n)) \geq \epsilon_0. \quad (*)$$

Donc, pour  $N = N(r/2)$ , il existe  $n_0 > N$  et  $m_0$  dans  $J_1$  tels que :

$$d_{n_0}(\psi(m_0), \psi_{n_0}(m_0)) \geq \epsilon_0$$

et

$$d_{n_0}(\psi(m_0), \psi_{n_0}(m_0)) = \|\psi_{n_0}(m_0) - \psi(m_0)\| \geq \frac{r}{2}.$$

Cela implique que  $\|\psi_{n_0}(m_0) - \psi(m_0)\| = r/2$ .

Ainsi, sous l'hypothèse (\*) on peut construire une suite (strictement) croissante d'entiers  $(n_k)_{k \geq 1}$  et une suite de points  $(m_k)_{k=1}^\infty$  dans  $J$ , telles que :

$$\forall k \geq 1, \quad d_{n_k}(\psi_{n_k}(m_k), \psi(m_k)) = \frac{r}{2} = \|\psi_{n_k}(m_k) - \psi(m_k)\|.$$

Soit  $m$  dans  $\bar{J}_1$  telle que  $(m_k)_{k \geq 1}$  converge vers  $m$ . Alors :

$$\begin{aligned} & \|\psi_{n_k}(m_k) - \psi(m_k)\| \\ & \leq \|m_k - m\| (\|\psi'_{n_k}(\alpha_k)\| + \|\psi'(\beta_k)\|) + \|\psi_{n_k}(m) - \psi(m)\| \end{aligned}$$

pour  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  dans  $\bar{J}_1$ .

Enfin, de la convergence uniforme de  $(\psi_{n_k})_{k \geq 1}$  vers  $\psi$  sur  $\bar{J}_1$ , de la convergence de  $(m_k)_{k \geq 1}$  vers  $m$ , et sachant que  $\psi'_{n_k}$  et  $\psi'$  sont uniformément bornées sur  $\bar{J}_1$ , on déduit que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \quad : \quad \forall n \geq N, \|\psi_{n_k}(m_k) - \psi(m_k)\| = \frac{r}{2} \leq \epsilon,$$

ce qui est impossible. L'hypothèse (\*) est donc fautive, c'est-à-dire que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \geq N \quad : \quad d_n(\psi_n(m), \psi(m)) \leq \epsilon, \forall m \in J_1.$$

On a ainsi prouvé la convergence uniforme de  $(k'_n)_{n \geq 1}$  vers  $k'$  sur  $B(0, r/2)$ .

5) Enfin, considérons la suite  $(k_n)_{n \geq 1}$  définie sur  $B(0, r/2)$  par :

$$k_n = k_{\mu_n}.$$

on peut appliquer le théorème 2.1 et ainsi on a :

$$1) \forall \theta \in B\left(0, \frac{r}{2}\right), f(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n(\theta) \text{ existe.}$$

$$2) (k_n)_{n \geq 1} \text{ converge vers } f, \text{ uniformément sur tout borné dans } B\left(0, \frac{r}{2}\right).$$

$$3) f \text{ est différentiable avec } f' = k'.$$

Nous noterons  $k$  la fonction limite  $f$ .

B) Nous allons démontrer que  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  converge étroitement vers une mesure de probabilité  $\mu(m_0)$  telle que  $k = k_{\mu(m_0)}$  sur  $B(0, r/2)$ .

1) Pour cela considérons pour tout  $\theta$  dans  $B(0, r/2)$ , la loi  $P(\theta, \mu_n)$  dans  $F_n$ . Alors :

$$\forall C > 0, \quad \int_{\|x\| \geq C} \exp(\langle \theta, x \rangle) \mu_n(dx) = \exp(k_n(\theta)) \cdot P(\theta, \mu_n)(\|x\| \geq C)$$

et

$$P(\theta, \mu_n)(\|x\| \geq C) \leq \frac{1}{C^2} (V_n(m_n) + \|m_n\|^2), \quad \text{où } m_n = k'_n(\theta) \in J_1.$$

Puisque les suites  $(V_n)_{n \geq 1}$  et  $(k_n)_{n \geq 1}$  sont uniformément bornées, respectivement sur  $J_1$  et  $B(0, r/2)$ , et puisque la suite  $(m_n)_{n \geq 1}$  est bornée dans  $J_1$ , on peut conclure que pour tout  $\theta \in B(0, r/2)$ , la suite  $(P(\theta, \mu_n))_{n \geq 1}$  est tendue.

En appliquant le théorème de Helly, on en déduit l'existence d'une sous-suite  $(\nu_k)_{k \geq 1}$  de  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  convergeant vers une mesure de probabilité dépendant de  $m_0$  et notée  $\mu(m_0)$ . On a également prouvé le point suivant :

$$\forall \epsilon > 0, \exists C > 0 : \forall n \geq 1 \text{ et } \forall \theta \in B(0, \frac{r}{2})$$

on a :

$$\int_{\|X\| \geq C} \exp(\langle \theta, X \rangle) \mu_n(dx) \leq \epsilon.$$

2) Pour démontrer la convergence étroite de  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  vers  $\mu(m_0)$  nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME .— Soit  $(\mu_n)_{n \geq 1}^\infty$  et  $\mu$  des mesures de probabilité sur  $E$  (espace vectoriel de dimension finie  $d$ ) telles que la suite  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  converge étroitement vers  $\mu$ .

Soit  $g$  une fonction continue définie sur  $E$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\forall \epsilon > 0, \exists C > 0 : \forall n \geq 1$$

on ait :

$$\int_{\|X\| \geq C} |g(x)| \mu_n(dx) \leq \epsilon,$$

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g(x) \mu_n(dx) = \int g(x) \mu(dx).$$

La convergence des fonctions variance des familles exponentielles naturelles

*Démonstration.* — Tout d'abord pour toute  $g : E \mapsto \mathbb{R}$ , continue, il existe un ensemble au plus dénombrable de réels  $C$  tels que :

$$\mu \{x : g(x) = C\} > 0.$$

Soient alors deux réels  $C, C'$  tels que :

$$C' \geq C, \quad \mu \{x : \|x\| = C\} = \mu \{x : \|x\| = C'\} = 0.$$

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C \leq \|x\| \leq C'} |g(x)| \mu_n(dx) = \int_{C \leq \|x\| \leq C'} |g(x)| \mu(dx)$$

par convergence étroite.

De plus, puisque :

$$\int_{C \leq \|x\| \leq C'} |g(x)| \mu_n(dx) \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \int_{C \leq \|x\| \leq C'} |g(x)| \mu(dx) \leq \epsilon,$$

il existe  $N(\epsilon)$  tel que  $\forall n \geq N(\epsilon)$  :

$$\begin{aligned} & \left| \int_E g(x) \mu_n(dx) - \int_E g(x) \mu(dx) \right| \leq \\ & \leq \int_{\|x\| \geq C} |g(x)| (\mu_n(dx) + \mu(dx)) + \left| \int_{\|x\| < C} |g(x)| (\mu_n(dx) - \mu(dx)) \right| \\ & \leq 3\epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Appliquons le lemme à la suite  $(\nu_k)_{k \geq 1}$  convergeant vers  $\mu(m_0)$  et à  $g(x) = \exp(\langle \theta, x \rangle)$ ,  $\theta \in B(0, r/2)$ .

Ainsi on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n(\theta) = \log \int \exp(\langle \theta, x \rangle) \mu(m_0)(dx) = k_{\mu(m_0)}(\theta).$$

Puisque, sur  $B(0, r/2)$  on a l'égalité  $k_{\mu(m_0)} = k$ , chaque sous-suite convergente de  $(\nu_n)_{n \geq 1}$  doit converger vers la même mesure de probabilité. Donc  $(\nu_n)_{n \geq 1}$  converge étroitement vers  $\mu(m_0)$ , mesure de probabilité sur  $E$  telle que  $\Theta(\mu(m_0))$  contient  $B(0, r/2)$  et telle que  $k_{\mu(m_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} k_{\mu_n}$  sur  $B(0, r/2)$ .

De plus, par construction,  $k'_{\mu(m_0)}(0) = m_0$  est la moyenne de  $\mu(m_0)$  et  $k''_{\mu(m_0)}(0) = V(m_0)$  est son opérateur variance.

Puisque  $V(m_0)$  est une forme quadratique strictement positive,  $\mu(m_0)$  appartient à  $M(E)$ .

Ainsi,  $\forall m_0 \in J$ , la suite  $(P(m_0, F_n))_{n \geq 1}$  converge vers une mesure de probabilité  $\mu(m_0) \in M(E)$ , de moyenne  $m_0$  et de variance  $V(m_0)$ .

3) Pour achever la démonstration, il faut montrer que :

$$\forall m_0, m_1 \text{ dans } J, \quad F(\mu(m_0)) = F(\mu(m_1)).$$

Soit donc  $m_0 \in J$ ,  $\mu_0(m_0) = P(m_0, F_n)$  et  $\mu(m_0)$  la loi limite.

Pour simplifier on note :

$$I_n(m_0) = \psi_{\mu_n(m_0)}(J_1(m_0)), \quad I(m_0) = \psi_{\mu(m_0)}(J_1(m_0)), \\ \Theta_n(m_0) = \Theta(\mu_n(m_0)),$$

ainsi que :

$$\Theta(m_0) = \Theta(\mu(m_0)), \quad k_n = k_{\mu_n(m_0)} \quad \text{et} \quad k = k_{\mu(m_0)}.$$

On sait qu'il existe  $r(m_0) > 0$  tel que :

$$\text{i) } B(0, r(m_0)) \subset I(m_0) \cap \left( \bigcap_{n \geq 1} I_n(m_0) \right) \subset \Theta(m_0) \cap \left( \bigcap_{n \geq 1} \Theta_n(m_0) \right).$$

ii)  $(k_n)_{n \geq 1}$  et  $(k'_n)_{n \geq 1}$  convergent respectivement vers  $k$  et  $k'$ , uniformément sur toute partie bornée de  $B(0, r/2)$ .

$$\text{Soit } \eta(m_0) = \frac{1}{4} r(m_0).$$

Par un argument similaire à celui utilisé dans A) 4), on peut montrer qu'il existe  $\epsilon(m_0) > 0$  tel que :

$$B(m_0) = B(m_0, \epsilon(m_0)) \subset k'(B(0, \eta(m_0))) \cap \left( \bigcap_{n \geq 1} k'_n(B(0, \eta(m_0))) \right) \\ \subset J_1(m_0).$$

Pour tout  $m$  dans  $B(m_0)$ , on notera  $\theta = \psi_{\mu(m_0)}(m)$  et  $\theta_n = \psi_{\mu_n(m_0)}(m)$ .

Ainsi,  $\forall \alpha \in B(0, \eta(m_0))$ ,  $\theta + \alpha$  et  $\theta_n + \alpha$  ( $n \geq 1$ ) appartiennent à  $B(0, 2\eta(m_0))$ .

$$\text{Donc :} \quad k_{\mu_n(m)}(\alpha) = k_{\mu_n(m_0)}(\theta + \alpha) - k_{\mu_n(m_0)}(\theta)$$

$$\text{et} \quad k_{P(\theta, \mu(m_0))}(\alpha) = k_{\mu(m_0)}(\theta + \alpha) - k_{\mu(m_0)}(\theta)$$

La convergence des fonctions variance des familles exponentielles naturelles

sont bien définies sur  $B(0, \eta(m_0))$  et il est facile de voir que :

$$k_{P(\theta, \mu(m_0))}(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} k_{\mu_n(m)}(\alpha), \quad \forall \alpha \in B(0, \eta(m_0)).$$

Nous avons ainsi démontré que sur  $B(0, \eta(m)) \cap B(0, \eta(m_0))$  on a :

$$k_{P(\theta, \mu(m_0))}(\alpha) = k_{\mu(m)} \Rightarrow \mu(m) = P(\psi_{\mu(m_0)}(m), \mu(m_0)) = P(m, F)$$

si l'on note  $F = F(\mu(m_0))$ .

Donc  $\forall m_0 \in J$ , il existe  $B(m_0, \epsilon(m_0))$  telle que  $\forall m \in B(m_0, \epsilon(m_0))$  :

$$F(\mu(m)) = F(\mu(m_0)) \quad (\Leftrightarrow \mu(m) \sim \mu(m_0)).$$

Soient enfin  $m_0$  et  $m_1$  dans  $J$  :

Si  $B(m_0) \cap B(m_1) \neq \emptyset$ , alors  $\mu(m_0) \sim \mu(m_1)$ .

Donc  $\mu(m) \sim \mu(m_0)$  pour tout  $m \in \overline{B(m_0)}$ .

Si  $\overline{B(m_0)} \cap \overline{B(m_1)} = \emptyset$  ( $\Leftrightarrow \|m_0 - m_1\| > \epsilon(m_0) + \epsilon(m_1)$ ),

alors on peut construire une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  dans  $[m_0, m_1] \subset J$  telle que :

$$\mu(x_n) \sim \mu(m_0) \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

et  $\mu(x_n) \sim \mu(m_1)$  pour  $n$  assez grand.

On définit ainsi cette suite :

– on pose  $x_0 = \lambda_0 m_0 + (1 - \lambda_0) m_1$ ,  $0 < \lambda_0 < 1$  avec  $\|x_0 - m_0\| = \epsilon(m_0)$ , alors  $\mu(x_0) \sim m_0$ .

– successivement on définit :

$$x_n = \lambda_n x_{n-1} + (1 - \lambda_n) m_1 \quad \text{avec} \quad \|x_n - x_{n-1}\| = \epsilon(x_{n-1}).$$

Alors :  $\mu(x_n) \sim \mu(m_0)$  et  $x_n = (\lambda_0 \dots \lambda_n) m_0 + (1 - \lambda_0 \dots \lambda_n) m_1$

avec  $\alpha_n = \lambda_0 \dots \lambda_n$  tel que  $0 < \alpha_{n+1} < \alpha_n, \forall n \geq 0$ .

Donc pour  $n$  assez grand,  $x_n \in B(m_1)$  et  $\mu(x_n) \sim \mu(m_1)$ .

Alors :  $\mu(m_0) \sim \mu(m_1), \quad \forall m_0, m_1 \in J.$

La démonstration du théorème est ainsi achevée.



## Bibliographie

- [1] CARTAN (H.) .— *Calcul Différentiel*,  
Collection Méthodes, Hermann, Paris. (1977)
- [2] LETAC (G.) .— *La réciprocity des familles exponentielles naturelles sur  $\mathbb{R}$*  ,  
C. R. Acad. Sc., Paris, **303** Série I.2 (1986) pp. 61-64
- [3] LETAC (G.) et MORA (M.) .— *Natural real exponential families with cubic variance*,  
(À paraître aux Ann. Statist. (mars 1990)
- [4] MORA (M.) .— *Familles exponentielles et fonctions variance*,  
Thèse de 3<sup>ième</sup> cycle. Université Paul-Sabatier, Toulouse (1986)
- [5] LETAC (G.) .— *Le problème de la classification des familles exponentielles de  $\mathbb{R}^d$  ayant une fonction variance quadratique*,  
Probability on Groups IX, Lecture notes **1379** (1989) pp. 192-216. Springer
- [6] MORRIS (C.N.) .— *Natural exponential families with quadratic variance functions*,  
Ann. Statist., **10** (1982) pp. 65-80