ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

LAWRENCE GRUMAN

L'image d'une application holomorphe

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 12, nº 1 (1991), p. 75-101

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1991_5_12_1_75_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XII, n° 1, 1991

L'image d'une application holomorphe

LAWRENCE GRUMAN[1]

RÉSUMÉ. — Dans une première partie, nous construisons des ensembles discrets E dans $\mathbb{C}^n$ tels que l'image de $\mathbb{C}^n$ par n'importe quelle application holomorphe non dégénérée rencontre E. Dans une deuxième partie, nous montrons qu'on peut construire une famille E_a d'ensembles discrets répondant aux critères de la première partie paramétrisés par $a \in \mathbb{C}^n$ tel que, si $B(0,r)$ est la boule euclidienne, la croissance asymptotique en r de $F^{-1}(E_a) \cap B(0,r)$ soit la même sauf peut-être pour un ensemble exceptionnel de valeurs de a pluripolaire. Cette croissance asymptotique peut être exprimée par une fonction de $\log M_F(r) = \sup\limits_{B(0,r)} \log\big\|F(z)\big\|$.

ABSTRACT. — In the first part, we construct discrete sets E on $\mathbb{C}^n$ such that the image of $\mathbb{C}^n$ by every non-degenerate holomorphic map intersects E. In the second part, we show how to construct a familly E_a of discrete sets satisfying the conditions of the first part paramatrized by a $a \in \mathbb{C}^n$ such that, if $B(0,r)$ is the Euclidean ball, the asymptotic growth of $F^{-1}(E_a) \cap B(0,r)$ when $r \to +\infty$ is the same except perhaps for an exceptional set of a which is pluripolar in $\mathbb{C}^n$. This asymptotic growth can be expressed as a function of $\log M_F(r) = \sup\limits_{B(0,r)} \log\big\|F(z)\big\|$.

Nous désignerons par $\|z\| = \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right)^{1/2}$ la norme euclidienne dans $\mathbb{C}^n$ et par $B_n(a,r)$ la boule euclidienne ouverte de centre a et de rayon r, $B(a,r) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z-a\| < r\}$. Notre but est d'étudier la fréquence asymptotique de $F^{-1}(a)$, $a \in \mathbb{C}^n$, où $F = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est une application holomorphe non dégénérée, c'est-à-dire telle que $J_F \not\equiv 0$, où J_F est le jacobien de F. Nous commençons par un petit aperçu historique de ce problème.

L'étude de la distribution des valeurs d'une fonction f holomorphe ou méromorphe dans $\mathbb{C}$ a été couronnée par la théorie de Nevanlinna : f prend chaque valeur sur la sphère de Riemann avec la même fréquence asymptotique sauf peut-être pour un ensemble exceptionnel E au plus

[1] UFR MIG, Université Paul Sabatier, F-31062 Toulouse Cedex, France

dénombrable, et en plus, on a une minoration asymptotique de $f^{-1}(E) \cap B_1(0, r)$. Comme corollaire, on obtient aisément le théorème de Picard : une fonction méromorphe ne peut omettre deux valeurs sur la sphère de Riemann.

On espérait trouver des résultats analogues pour les applications holomorphes, non dégénérées de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$. On sait déjà depuis longtemps qu'il n'en est rien. Il existe des applications holomorphes $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ qui sont même des homéomorphismes sur leurs images telle que $J_F \equiv 1$ mais dont l'image omet un ouvert (cf. [B-M], [D-E], [R-R]). Récemment, J.P. Rosay et W. Rudin [R-R] ont même construit une application holomorphe dont le jacobien est identiquement un et dont le volume de l'image est fini.

La meilleure façon de comprendre ce phénomène est de se rappeler qu'une fonction holomorphe est conforme et ainsi préserve les angles. Ceci veut dire que $\mathbb{C}$ sous l'action d'une fonction holomorphe est rigide et ainsi Aut($\mathbb{C}$), le groupe des automorphismes holomorphes de $\mathbb{C}$, ce réduit aux seules translations, rotations, et dilatations. Pour une application holomorphe $F = (f_1, \ldots, f_n)$, par contre, en général il n'y a pas de rapport entre les f_j ; ainsi, même si $J_F \equiv 1$, c'est-à-dire même si les volumes sont préservés, les angles ne le sont pas en général. Il en résulte que Aut($\mathbb{C}^n$), le groupe des automorphismes holomorphes de $\mathbb{C}^n$, est très riche (cf. [R-R]).

Toutefois, des résultats positifs ne sont pas exclus. J.P. Rosay et W. Rudin [R-R] ont montré qu'il existe des ensembles discrets dans $\mathbb{C}^n$ tels que l'image d'une application holomorphe non dégénérée rencontre toujours ces ensembles. Ils appellent de tels ensembles "unavoidable" (inévitables). Dans un travail antérieur [G], nous avons déjà étudié de tels ensembles que nous avous appelés "essentiels" et nous reprendrons cette terminologie. Ainsi, si $\mathcal{F}$ est une famille d'applications holomorphes non dégénérées, nous dirons que l'ensemble E est essentiel pour $\mathcal{F}$ si quelle que soit $F \in \mathcal{F}$ et quels que soient r, $r' \in \mathbb{R}^+$ on ait $F(\complement B_n(0, r)) \cap E \cap \complement B_n(0, r')$ non vide.

Si $\mathcal{F}$ est la famille de toutes les applications holomorphes non dégénérées, les résultats de J.P. Rosay et W. Rudin [R-R] montre l'existence d'ensembles essentiels pour $\mathcal{F}$. Leurs techniques ne sont pas constructives et ne permettent pas de préciser de tels ensembles. Dans une première partie de notre travail, nous montrons comment construire des ensembles discrets essentiels pour $\mathcal{F}$ ainsi que pour d'autres familles d'applications holomorphes non dégénérées.

Dans la deuxième partie de notre travail, nous montrons que pour les familles d'applications holomorphes non dégénérées considérées dans la première partie, il existe des ensembles essentiels E_a (qui dépend de la famille) paramétrisés par $a \in \mathbb{C}^n - \{z \mid \prod_{j=1}^n z_j = 0\}$ tels que l'on obtienne une minoration asymptotique de $F^{-1}(E_a) \cap B_n(0,r)$ par une fonction de $M_F(r) = \sup_{B_n(0,r)} \|F(z)\|$ uniformément en a sauf peut-être pour a appartenant à un ensemble pluripolaire dans $\mathbb{C}^n$ (un ensemble $X \subset \mathbb{C}^n$ est dit pluripolaire s'il existe $V(z)$ plurisousharmonique dans $\mathbb{C}^n$ telle que $X \subset \{z \in \mathbb{C}^n \mid V(z) = -\infty\}$).

Ceci nous permet le développement d'une sorte d'analogue à la théorie de Nevanlinna pour les applications holomorphes basée sur la structure complexe de $\mathbb{C}^n$.

1. Constructions d'ensembles essentiels discrets

Si $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est une application holomorphe (resp. une fonction V plurisousharmonique), nous notons

$$M_F(r) = \sup_{B_n(0,r)} \|F(z)\| \quad (\text{resp. } M_V(r) = \sup_{B_n(0,r)} V(z))\,.$$

Nous introduisons plusieurs familles d'applications holomorphes non dégénérées.

i) $\mathcal{F} = \{F \in \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n\,,\ F \text{ holomorphe non dégénérée}\}$.

ii) $\widehat{\mathcal{F}} = \{F \in \mathcal{F} \mid J_F \equiv 1\}$.

iii) Si $S : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante, on dit que S est d'ordre fini si

$$\limsup_{r \to +} \frac{\log S(r)}{\log r} = \rho < +\infty\ ;$$

Si $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est une application holomorphe, on dit que F est d'ordre ρ fini si $\log M_F(r)$ est d'ordre ρ fini et on définit $\mathcal{F}_\rho$ par

$$\mathcal{F}_\rho = \{F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n\ ;\ F \text{ holomorphe non dégénérée d'ordre } \rho\}\,.$$

J.P. Rosay et W. Rudin [R-R] ont montré l'existence d'ensembles essentiels discrets pour la famille $\mathcal{F}$. Leurs techniques ne permettent pas d'expliciter ces ensembles. Nous allons montrer comment, par des techniques constructives, on peut expliciter des ensembles essentiels pour les familles définies ci-dessus. Les éléments de base de la construction sont élémentaires :

le théorème des applications inverses, la formule de Cauchy et l'inégalité de la moyenne pour les fonctions sous-harmoniques. Nous écrirons, comme est l'habitude, $B(a,r)$ pour la boule euclidienne ouverte de centre $a \in \mathbb{C}^n$ et de rayon r. Nous aurons besoin de quelques lemmes.

LEMME 1.— ([G], p. 208) *Soit $S(r)$ une fonction croissante, $r \in \mathbb{R}^+$, telle que $S(r) \geq 1$ et $\lim_{r\to+\infty} S(r) = +\infty$. Alors quels que soient $\alpha > 1$, $\beta > 1$, il existe une constante $C(\alpha,\beta)$ telle que si $r_0 > 1$, on peut trouver $r' \in [\,r_0\,,\, C(\alpha,\beta)r_0\,]$ avec la propriété*

$$S\left(r' + r'\big(\log S(r')\big)^{-\beta}\right) \leq \alpha S(r')\,.$$

Pour $C(\alpha,\beta)$, on peut prendre $\prod_{k=1}^{\infty}\big(1+(k\log\alpha)^{-\beta}\big)$.

LEMME 2.— *Soit $S(r)$, $r \in \mathbb{R}^+$, une fonction d'ordre fini ρ. Alors quels que soient $\alpha > 1$, $\rho' > \rho$, il existe une suite $r_m \uparrow +\infty$ telle que $S(\alpha r_m) \leq \alpha^{\rho'} S(r_m)$.*

Démonstration.— Sinon, $A = \{r \mid S(\alpha r) \leq \alpha^{\rho'} S(r)\}$ est un ensemble borné. Soit

$$r_0 = \sup_{r\in A} r\,, \quad \widehat{r} = r_0 + 1\,.$$

Alors quel que soit m, $S(\alpha^m \widehat{r}) \geq \alpha^{m\rho'} S(\widehat{r})$ et ainsi

$$\limsup_{m\to+\infty} \frac{\log S(\alpha^m\widehat{r})}{\log(\alpha^m\widehat{r})} \geq \lim_{m\to+\infty} \frac{m\rho'\log\alpha + \log S(\widehat{r})}{m\log\alpha + \log\widehat{r}} = \rho' > \rho$$

ce qui est une contradiction. □

LEMME 3.— ([O]) *Soit $F : B(0,R) \to B(0,M)$ une application holomorphe telle que $F(0) = 0$ et soit J_F le jacobien de F. Alors l'image de F contient la boule $B(0,S)$ où*

$$S = \frac{M^{-2n+1}R^{2n}\big|J_F(0)\big|^2}{4(n+1)}\,.$$

Nous pouvons déjà tirer les premiers enseignements de ces lemmes.

THÉORÈME 1.— *Soient $\varepsilon > 0$ et $\widehat{E} \subset \mathbb{C}^n$ un ensemble tel que aucun point de $B(0,m+1) - B(0,m)$ ne se trouve à une distance supérieure à $\varepsilon m^{-2n+1-\varepsilon}$ de $\widehat{E}$. Alors $\widehat{E}$ est essentiel pour $\widehat{\mathcal{F}}$.*

Démonstration. — Soient R_1, $R_2 \in \mathbb{R}^+$ donnés. Choisissons r_0 tel que $r_0 \geq R_1 + 1$, $M_F(r_0) \geq R_2 + 1$. Si $\alpha = \beta = 2$, d'après le lemme 1, il existe $r' \in [\,r_0\,,\, Cr_0\,]$ tel que

$$M_F\left(r' + \frac{1}{\left[\log M_F(r')\right]^2}\right) \leq 2M_F(r')\,.$$

Soit m_0 un entier tel que $m_0 \leq M_F(r') < (m_0+1)$ et soit z_0 tel que $\|z_0\| = r'$ et $\|F(z_0)\| = M_F(r')$. Si $\widetilde{F}(z) = F(z) - F(z_0)$, on a $\|\widetilde{F}(z)\| \leq 3(m_0 + 1)$ sur $B\left(z_0\,,\,[\log(m_0+1)]^{-\beta}\right)$ et $\widetilde{F}(z_0) = 0$. D'après le lemme 3, l'image de $\widetilde{F}$ contient la boule $B(0, S)$ avec

$$S = \left[4(n+1)3^{2n-1}(m_0+1)^{2n-1}\log\left(m_0+1\right)^{4n}\right]^{-1}\,.$$

Si r_0 (et ainsi m_0) est assez grand, $S > \varepsilon m_0^{-2n+1-\varepsilon}$, donc l'image de $\mathbb{C}^n \cap \complement B(0, R_1)$ par F contient la boule $B\left(F(z_0)\,,\, \varepsilon m_0^{-2n}\right)$ et ainsi un point de $\widehat{E} \cap \complement B(0, R_2)$. □

Soit maintenant $F \in \mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}_\rho$). Nous allons montrer qu'il existe une suite $r_m \uparrow +\infty$ et une suite $Z_m \in \mathbb{C}^n$ avec $\|Z_m\| = r_m$ telle que on ait silmutanément la norme de $F(Z_m)$ pas trop grande et le jacobien de $F(Z_m)$ pas trop petit. D'après le lemme 3, l'image de F contiendra une boule dont on pourra estimer le rayon. Ainsi, si E est un ensemble tel que aucun point de $\mathbb{C}^n$ ne se trouve trop loin de E, E sera essentiel. Telle est l'idée de base de la construction. Comme ci-dessus, nous noterons par $B_m(a, r)$ la boule ouverte dans $\mathbb{R}^m$ de centre a et de rayon r, S_{m-1} sera la sphère unité dans $\mathbb{R}^m$, $S_{m-1} = \partial B(0, 1)$, et ω_{m-1} sera la mesure de Lebesgue sur S_{m-1} normalisée de telle sorte que $\omega_{m-1}(S_{m-1}) = 1$.

LEMME 4.— *Soient* $0 < R_1 < R_2$, $\tau < 1$, $V \geq 0$ *une fonction sous-harmonique et continue dans* $B(0, R_2)$. *Posons*

$$M_j = \sup_{x \in B(0, R_j)} V(x)\,, \quad j = 1, 2\,.$$

Alors, si $R_1 < r \leq R_2$ *et* $\Sigma_r = \{\alpha \in S_{m-1} \mid V(r\alpha) \geq \tau M_1\}$, *on a*

$$\omega_{m-1}(\Sigma_r) \geq \frac{(1-\tau)}{2}\,\frac{M_1}{M_2}\left(1 - \frac{R_1}{r}\right)^{m-1}\,.$$

Démonstration. — Posons $\widetilde{V}(x) = V(x)/_{M_2}$. Si x_0 est tel que $\|x_0\| = R_1$ et $V(x_0) = M_1$ et si $P(\widetilde{x}, \alpha)$ est le noyau de Poisson pour la boule unité $B_m(0,1)$ dans $\mathbb{R}^m$, on a d'après la formule de Poisson :

$$\int_{\Sigma_r} \widetilde{V}(r\alpha) P\Big(\frac{x_0}{r}, \alpha\Big)\, d\omega_{m-1}(\alpha) + \int_{\complement\Sigma_r} \widetilde{V}(r\alpha) P\Big(\frac{x_0}{r}, \alpha\Big)\, d\omega_{m-1}(\alpha) \geq$$
$$\geq \frac{V(x_0)}{M_2} = \frac{M_1}{M_2},$$

d'où

$$\int_{\Sigma_r} \widetilde{V}(r\alpha) P\Big(\frac{x_0}{r}, \alpha\Big)\, d\omega_{m-1}(\alpha) \geq \frac{M_1}{M_2} - \int_{\complement\Sigma_r} \widetilde{V}(r\alpha) P\Big(\frac{x_0}{r}, \alpha\Big)\, d\omega_{m-1}(\alpha).$$

Mais sur Σ_r, on a

$$\widetilde{V}(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad \Big|P\Big(\frac{x_0}{r}, \alpha\Big)\Big| \leq \frac{2}{\big(1 - (R_1/r)\big)^{m-1}}$$

donc

$$\omega_{m-1}(\Sigma_r) \geq \frac{(1-\tau)}{2} \frac{M_1}{M_2} \Big(1 - \frac{R_1}{r}\Big)^{m-1}. \square$$

LEMME 5. — *Soient $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ une application holomorphe non dégénérée, $F = (f_1, \dots, f_n)$ et supposons que $J_F(0) = C \neq 0$. Si L est un sous-espace (complexe) de $\mathbb{C}^n$ de dimension réelle m et $0 < R_1 < r \leq R_2$, $C' = n!\, C^{-1}$, $\tau < 1$ et*

$$\widetilde{\Sigma}_r = \Bigg\{ \alpha \in L \cap S_{2n-1} \ \Bigg| \ \log\big|J(r\alpha)\big| \leq \frac{\big(-\log C' - n\log M_F(R_2) + 2n\log(R_2 - r)\big)}{[(1-\tau)/3]\ [\log M_F(R_1)/\log M_F(R_2)]\, \big(1 - (R_1/R)\big)^{m-1}} \Bigg\}$$

alors

$$\omega_{m-1}(\widetilde{\Sigma}_r) \leq \frac{(1-\tau)}{3} \frac{\log M_F(R_1)}{\log M_F(R_2)} \Big(1 - \frac{R_1}{r}\Big)^{m-1}.$$

Démonstration. — D'après la formule de Cauchy, on a

$$\frac{\partial f_i(z)}{\partial z_j} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\delta} \frac{f_i(z_1, z_2, \ldots, z_j+\xi_j, z_{j+1}, \ldots, z_n)\,\mathrm{d}\xi_j}{\xi_j^2}$$

quels que soient i et j, d'où, si $\|z\| = r$ et $\delta = (R_2 - r)$,

$$\left|J_F(r\alpha)\right| \leq n!\, M_F(R_2)^n (R_2 - r)^{-2n}.$$

D'après l'inégalité de la moyenne pour la fonction sous-harmonique $\log\left|J(z)\right|$:

$$\log C = \log\left|J_F(0)\right| \leq \int_{\alpha\in L\cap S_{2n-1}} \log\left|J_F(r\alpha)\right| \mathrm{d}\omega_{m-1}(\alpha)$$

et ainsi

$$\log C - \int_{\complement\widetilde{\Sigma}_r} \log\left|J_F(r\alpha)\right| \mathrm{d}\omega_{m-1}(\alpha) \leq \int_{\widetilde{\Sigma}_r} \log\left|J_F(r\alpha)\right| \mathrm{d}\omega_{m-1}(\alpha)$$

$$-\log C' - n\log M_F(R_2) + 2n\log(R_2 - r) \leq \int_{\widetilde{\Sigma}_r} \log\left|J_F(r\alpha)\right| \mathrm{d}\omega_{m-1}(\alpha)$$

d'où le résultat. □

THÉORÈME 2. — *Soit $\beta > 1$ et soit $E \subset \mathbb{C}^n$ un ensemble tel que aucun point de $\left[B(0,m) - B(0,m-1)\right]$ ne se trouve à une distance supérieure à $m^{-(\log\log m)^\beta}$ de E. Alors E est essentiel pour $\mathcal{F}$.*

Démonstration. — Soit $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ une application holomorphe non dégénérée. Moyennant une translation au besoin, on peut supposer $J_F(0) \neq 0$. Posons $\beta' = (1+\beta)/2$, $\alpha = 2$. Si $r_0 \geq 0$ est donné, d'après le lemme 1, on peut trouver $\widehat{R} \in \left[r_0, C(\alpha,\beta')r_0\right]$ tel que, si

$$R_1 = \widehat{R}, \quad R_2 = \widehat{R}\left(1 + \frac{1}{\left[\log\log M_F(R_1)\right]^{\beta'}}\right),$$

$\log M_F(R_2) \leq 2\log M_F(R_1)$. Posons $r = (R_1 + R_2)/2$ et soit L une droite complexe qui passe par l'origine tel qu'il existe $z_0 \in \partial B(0,r) \cap L$ avec $\log\left\|F(z_0)\right\| = \log M_F(R_1)$. En appliquant les lemmes 4 et 5 à la droite L, avec $m = 2$ et $\tau = 1/2$, on voit qu'il existe un point $\widetilde{z} \in \partial B(0,r) \cap L$ tel que

i) $\frac{1}{2}\log M_F(R_1) \leq \log\|F(\widetilde{z})\| \leq 2\log M_F(R_1)$;

ii) $\log\|J_F(\widetilde{z})\| \geq -48n\log M_F(R_1)\big[\log\log M_F(R_1)\big]^{\beta'}$ si $r_0 > C_1$.

Supposons que m soit un entier tel que $(m-1) \leq \|F(\widetilde{z})\| < m$. Posons $\widetilde{F}(z) = F(z) - F(\widetilde{z})$ de sorte que, si $R = {}^{R_1}/(2\log\log m)^{\beta'}$, $\widehat{F}(B(\widetilde{z}, R)) \to B(0, M)$ avec $M = (m + m^4) \leq (2m^4)$. Alors, d'après le lemme 3, $\widehat{F}(B(\widetilde{z}, R))$ contient une boule de rayon

$$S = \left[(2n)^{4(2n-1)}(2\log\log m)^{2n\beta'} m^{96n(\log\log m)^{\beta'}}\right]^{-1}$$

et, si $r_0 > C_2$ et donc m est assez grand,

$$S \geq \frac{1}{m^{(\log\log m)^{\beta}}}$$

et ainsi $\widehat{F}(B(\widetilde{z}, R))$ contient un point de E. □

THÉORÈME 3.— *Soient $\rho' > \rho$ et $E \subset \mathbb{C}^n$ un ensemble tel que aucun point de $\big[B(0,m) - B(0, m-1)\big]$ ne se trouve à une distance supérieure à $m^{-C(\rho')}$ de E, où*

$$C(\rho') = 2n + 12n\left(1 - \frac{1}{4n}\right)\left(1 - \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(\left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{-\rho'/2} - 1\right)^{-1}.$$

Alors E est essentiel pour $\mathcal{F}_\rho$.

Démonstration.— C'est en grande partie une répétition de la démonstration du théorème 2. Soit $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ une application holomorphe non dégénérée; on suppose $J_F(0) \neq 0$. Posons $\tau = \alpha^{-\rho'} = \big(1 - ({}^1/{}_{4n})\big) < 1$. D'après le lemme 2, il existe une suite $r_\nu \uparrow +\infty$ telle que $\log M_F(\alpha r_\nu) \leq \alpha^{\rho'}\log M = (r_\nu)$. Comme dans la démonstration du théorème 2, on peut trouver $\widetilde{z}$ tel que

i) $\tau\log M_F(\tau_\nu) \leq \log\|F(z)\|$,

ii) $\log\|F(z)\| \leq \alpha^{\rho'}\log M_F(r_\nu)$ pour $z \in B(\widetilde{z}, 1)$,

iii) $\log|J_F(\widetilde{z})| \geq -\dfrac{6n\alpha^{2\rho'}\log M_F(r_\nu)}{(1-\tau)(\alpha-1)}$ si $\nu > \nu_0$.

Ainsi, si $(m-1) \leq \|F(\widetilde{z})\| < m$, $\widehat{F}(z) = F(z) - F(\widetilde{z})$, $R = 1$ et

$$\widehat{F} : B(\widetilde{z}, 1) \to B(0, M) \quad \text{avec} \quad M = 2m^{\alpha\rho'},$$

on voit d'après le lemme 3 que $\widehat{F}\big(B(\widetilde{z},1)\big)$ contient la boule de rayon

$$S = (2m)^{-\alpha^{\rho'}(2n-1)} m^{-T(\rho')}$$

avec

$$T(\rho') = 12n\left(1-\frac{1}{4n}\right)\left(1-\left(1-\frac{1}{4n}\right)^{1/2}\right)^{-1}\left(\left(1-\frac{1}{4n}\right)^{-\rho/2}-1\right)^{-1}$$

et

$$\alpha^{\rho'}(2n-1) = \left(1-\frac{1}{4n}\right)^{-1/2}(2n-1) < 2n\,,$$

donc $\widehat{F}\big(B(\widetilde{z},1)\big)$ contient un point de E. □

Remarque.— On aurait pu préciser l'ensemble E par le traitement des fonctions de type fini et plus généralement, par l'étude des ordres précisés (cf. [L-G]), mais cela nous aurait permis d'améliorer à peine la description des ensembles et ainsi nous ne l'avons pas jugé utile. De même, nous n'avons pas cherché la meilleure constante $C(\rho')$.

2. Minoration de la croissance asymptotique de $F^{-1}(E)$ pour certains ensembles essentiels E

Nous commençons par certains rappels. Dans ce qui suit, C représentera toujours une constante qui pourra varier même à l'intérieur d'un même énoncé.

Si $X \subset \mathbb{C}^n$ est un ensemble, on définit la fonction

$$\varphi_X(z) = \limsup_{z' \to z} \widetilde{\varphi}_X(z')$$

avec

$$\widetilde{\varphi}_X(z') = \sup\Big\{\psi(z') \text{ plurisousharmonique } \mid \psi(z') \le 0\,,\ z' \in X\,,\\ \psi(z') \le C_\psi + \log\big(1+\|z'\|^2\big)\Big\}.$$

$\varphi_X(z)$ est la fonction extrémale associée à X. On dit qu'un ensemble X est pluripolaire dans $\mathbb{C}^n$ si $X \subset \{z \mid V(z) = -\infty\}$ avec $V(z)$ plurisousharmonique sur $\mathbb{C}^n$. Si X est non pluripolaire et compact, on a les propriétés suivantes :

i) $\varphi_X(z)$ est plurisousharmonique;

ii) il existe une constante C_X telle que (cf. [S]) :

$$\log^+ \|z\| + C_X^{-1} \leq \varphi_X(z) \leq \log^+ \|z\| + C_X \ ;$$

iii) si $\mu_X = (i\partial\overline{\partial}\varphi_X)^n$, μ_X est une mesure positive, dite la mesure d'équilibrium de X, et $\operatorname{supp}\mu_X \in X$.

Ici

$$\partial = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j} \mathrm{d}z_j \quad \text{et} \quad \overline{\partial} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \mathrm{d}\overline{z}_j$$

sont des opérateurs différentiels sur l'algèbre extérieure des formes différentielles $d = \partial + \overline{\partial}$, $d^c = i(\overline{\partial} - \partial)$ et $\mu_X = (i\partial\overline{\partial}\varphi_X)^n = (dd^c\varphi_X)^n$ est l'opérateur de Monge-Ampère complexe défini comme un courant positif fermé (nous renvoyons le lecteur au livre [L-G] pour la théorie des courants positifs fermés et à l'article [B-T] pour les résultats sur l'opérateur Monge-Ampère complexe).

Nous rappelons des résultats de [G] dont nous aurons besoins.

Lemme 6.— *Soient h une combinaison linéaire (réelle) de fonctions plurisousharmoniques bornées dans un voisinage de $B(0,r)$ et θ un courant positif fermé de degré p. Alors*

$$\left| \int_{B(0,r)} (r^2 - \|z\|^2) i\partial\overline{\partial}h \wedge \theta \wedge \beta^{n-p-1} \right| \leq C_n \sup_{B(0,r)} |h| \int_{\beta(0,r)} \theta \wedge \beta^{n-p}$$

où $\beta = i\partial\overline{\partial}\|z\|^2$.

Ceci n'est autre que le corollaire du lemme 1 de [G] (on obtient le cas général par le procédé classique de régularisation et passage à la limite).

Corollaire 1.— *Soient $0 < r < r'$ et φ_i, $i = 1, \ldots, k$ des fonctions plurisousharmoniques et positives sur $\mathbb{C}^n$. Alors il existe une constante $C(n,k)$ telle que*

$$\int_{B(0,r)} \bigwedge_{j=1}^{k} (i\partial\overline{\partial}\varphi_j) \wedge \beta^{n-k} \leq C(n,k)(r'-r)^{-k}(r')^{2n-k} \prod_{j=1}^{k} \left[\sup_{z \in B(0,r')} \varphi_j(z) \right].$$

Démonstration. — On pose

$$r'_j = r + \frac{j}{R}(r' - r)\,, \quad j = 1, \ldots, k\,.$$

D'après le lemme 6, on obtient

$$\int_{B(0,r'_{q-1})} \bigwedge_{j=1}^{q} (i\partial\overline{\partial}\varphi_j) \wedge \beta^{n-q} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(r'_q - r'_{q-1})2r'_q} \left[\sup_{z\in B(0,r'_q)} \varphi_q(z)\right] \int_{B(0,r'_q)} \bigwedge_{j=1}^{q-1} (i\partial\overline{\partial}\varphi_j) \wedge \beta^{n-q-1}.$$

Le résultat s'obtient donc d'une itération et du fait que :

$$\int_{B(0,r')} \beta^n = C_n (r')^{2n}\,. \ \square$$

Soient $G = (g_1, \ldots, g_n)$ une application holomorphe non dégénérée de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ et X un ensemble non pluripolaire dans $\mathbb{C}^n$. On pose

$$\varphi^G(z) = \sup_{j=1,\ldots,n} (\log|g_j|\,, 0) \quad \text{et} \quad \varphi_X^G(z) = \varphi_X\big(G(z)\big)\,.$$

On voit, d'après (ii) ci-dessus, qu'il existe une constante C_X qui ne dépend que de X telle que

$$\left|\varphi^G(z) - \varphi_X^G(z)\right| \leq C_X\,.$$

Par conséquent, d'après le lemme 6 et son corollaire, on obtient :

LEMME 7. — *Soient* $0 < r < r'$ *et* X *un compact non pluripolaire de* $\mathbb{C}^n$. *Alors, il existe une constante* C_X *qui ne depend que de* X *telle que*

i) $$\int_{B(0,r)} (i\partial\overline{\partial}\varphi^G)^S \wedge (i\partial\overline{\partial}\varphi_X^G)^{n-S-1} \wedge \beta \leq$$

$$\leq C_X (r'-r)^{-n+1} (r')^{n+1} \left(\log\big(M_G(r') + 1\big)\right)^{n-1}\ ;$$

ii) $$\left|\int_{B(0,r)} (r^2 - \|z\|^2)[(i\partial\overline{\partial}\varphi^G) - (i\partial\overline{\partial}\varphi_X^G)] \wedge \right.$$

$$\left. \wedge\ (i\partial\overline{\partial}\varphi^G)^S \wedge (i\partial\overline{\partial}\varphi_X^G)^{n-S-1}\right| \leq$$

$$\leq C_X (r'-r)^{-n+1} (r')^{n+1} \left(\log\big(M_G(r') + 1\big)\right)^{n-1}\ ;$$

donc

$$iii)\ \left|\int_{B(0,r)}(r^2-\|z\|^2)\left[(i\partial\overline{\partial}\varphi^G)^n-(i\partial\overline{\partial}\varphi_X^G)^n\right]\right|\leq$$
$$\leq C_X(r'-r)^{-n+1}(r')^{n+1}\left(\log\left(M_G(r')+1\right)\right)^{n-1}.$$

Soit maintenant $N=(N_1,\ldots,N_n)$, $N_j\in\mathbb{Z}$, un n-uplet d'entiers et posons

$$G(N)(z)=\left(g_1\mathrm{e}^{2\pi N_1},\, g_2\mathrm{e}^{2\pi N_2},\,\ldots,\, g_n\mathrm{e}^{2\pi N_n}\right),$$
$$Z=\left\{z\in\mathbb{C}^n\ \middle|\ \prod_{j=1}^n z_j=0\right\}.$$

Si X est un non pluripolaire compact, $X\subset \complement Z$, on voit que

$$\operatorname{supp}(i\partial\overline{\partial}\varphi_X^{G(N)})^n\cap B(0,R)\quad\text{est vide dès que}\quad \|N\|\geq C_X\log^+M_G(R).$$

Ainsi, on obtient :

Corollaire .— *Soient $0<r<r'$ et X un ensemble compact non pluripolaire dans $\mathbb{C}^n$, $X\subset\complement Z$. Alors il existe une constante C_X qui ne dépend que de X telle que si*

$$\int_{B(0,r)}(r^2-\|z\|^2)\sum_N(i\partial\overline{\partial}\varphi^{G(N)})^n\geq$$
$$\geq 2C_X\left(1-\frac{r}{r'}\right)^{-n+1}(r')^2\left[\log\left(M_G(r')+1\right)^{2n-1}\right]$$

alors

$$\int_{B(0,r)}(r^2-\|z\|^2)\sum_N(i\partial\overline{\partial}\varphi_X^{G(N)})^n\geq$$
$$\geq\frac{1}{2}\int_{B(0,r)}(r^2-\|z\|^2)\sum_N(i\partial\overline{\partial}\varphi^{G(N)})^n.$$

Soit maintenant $G=(g_1,\ldots,g_n)$ une application holomorphe de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$. On pose $\exp G=(\exp g_1,\ldots,\exp g_n)$ et $\exp G(N)=\big(\exp(g_1+2\pi N_1),\,\exp(g_2+2\pi N_2),\,\ldots,\,\exp(g_n+2\pi N_n)\big)$.

THÉORÈME 4.— *Soient $\beta > 1$, X un ensemble compact non pluripolaire de $\mathbb{C}^n$, $X \subset \complement Z$, et G une application holomorphe non dégénérée de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$. Alors, il existe une constante C'_X qui ne dépend que de X, telle que si*

$$r > R_G\,, \quad r' = r + \frac{r}{\left[\log M_G(r)\right]^\beta}$$

et

$$\int_{B(0,r)} \left(r^2 - \|z\|^2\right) \left|J_G(z)\right|^2 \mathrm{d}\lambda(z) \geq \frac{r'^2}{\left(1 - \left({}^r/{}_{r'}\right)\right)^{n-1}} \left[M_G(r')\right]^{2n-1}$$

(où $\mathrm{d}\lambda$ est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}^n$), alors

$$\int_{B(0,r)} \left(r^2 - \|z\|^2\right) \sum_N \left(i\partial\overline{\partial}\varphi_X^{\log G(N)}\right)^n \geq$$
$$\geq C'_X \int_{B(0,r)} \left(r^2 - \|z\|^2\right) \left|J_G(z)\right|^2 \mathrm{d}\lambda(z)\,.$$

Démonstration.— Nous appliquons le théorème 1 de [G] et son corollaire à l'application $\widetilde{G}(z) = \left(\exp({}^{ig_1}/{}_4), \ldots, \exp({}^{ig_n}/{}_4)\right)$. Alors quel que soit $T > 0$, si $r > R_T$

$$\int_{B(0,r)} \left(r^2 - \|z\|^2\right) \left|J_G(z)\right|^2 \mathrm{d}\lambda(z) \geq$$
$$\geq (r')^2 \left(1 - \frac{r}{r'}\right)^{-n+1} \left[M_G(r')\right]^{2n-1}$$
$$\geq T(r')^2 \left(1 - \frac{r}{r'}\right)^{(-n+1)(4n-1)} \left[M_G(r')\right]^{2n-1}$$

et donc, quel que soit $C > 0$,

$$2C^{-1}C_X \int_{B(0,r)} \left(r^2 - \|z\|^2\right) \bigwedge_{j=1}^n \frac{\left[i\partial\overline{\partial}\left(\left|\Im\, \mathrm{e}^{\frac{i}{4}g_j}\right| + \left|\Re\, \mathrm{e}^{\frac{i}{4}g_j}\right|\right)\right]}{\prod_{j=1}^n \left|\mathrm{e}^{\frac{i}{4}g_j}\right|} \geq$$
$$\geq \frac{3}{2}\, C^{-1}C_X \int_{B(0,r)} \left(r^2 - \|z\|^2\right) \left|J_G(z)\right|^2 \mathrm{d}\lambda(z)\,.$$

D'après la discussion de ([G], p. 217), on voit que

$$\bigwedge_{j=1}^n \frac{i\partial\overline{\partial}\left(\left|\Im\, \mathrm{e}^{\frac{i}{4}g_j}\right| + \left|\Re\, \mathrm{e}^{\frac{i}{4}g_j}\right|\right)}{\prod_{j=1}^n \left|\mathrm{e}^{\frac{i}{4}g_j}\right|} = \sum_N \bigwedge_{j=1}^n i\partial\overline{\partial}\left|\Im\, \frac{i}{4}g_j + \frac{\pi}{2}\,N_j\right|$$
$$= \sum_N \frac{1}{4^n} \bigwedge_{j=1}^n i\partial\overline{\partial}\left|\Re\, g_j + 2\pi\, N_j\right|.$$

Si $\mu_1 = \bigwedge_{j=1}^n i\partial\overline{\partial}|x_j|$ dans $\mathbb{C}^n$, on voit aisément que μ_1 est un multiple positif de la mesure de Lebesgue (de dimension n) sur $i\mathbb{R}^n = (iy_1, \ldots, iy_n)$ $(i\partial\overline{\partial}|x_j| = 0$ pour $x_j \neq 0$, d'une part donc $\operatorname{supp}\mu_1 \in i\mathbb{R}^n$ et, d'autre part, μ_1 est invariant par rapport aux translations).

D'autre part, si $V(z)$ est la fonction plurisousharmonique

$$V(z) = \sup_{j=1,\ldots,n} (x_j, 0)\,,$$

on voit que $\mu_2 = \left[i\partial\overline{\partial}V(z)\right]^n$ est aussi un multiple positif de la mesure de Lebesgue sur $i\mathbb{R}^n$ (en effet, $\operatorname{supp}\mu_2 \in i\mathbb{R}^n$ parce que dans le complémentaire, V s'écrit localement comme la différence d'une fonction de $(n-1)$ variables au plus et une fonction pluriharmonique, et μ_2 aussi est invariant par rapport aux translations). Ainsi

$$\bigwedge_{j=1}^n \frac{i\partial\overline{\partial}\left(\left|\Im\, \mathrm{e}^{\frac{i}{4}g_j}\right| + \left|\Re\, \mathrm{e}^{\frac{i}{4}g_j}\right|\right)}{\prod_{j=1}^n \left|\mathrm{e}^{\frac{i}{4}g_j}\right|} = C\sum_N \left(i\partial\overline{\partial}\varphi^{\log G(N)}\right)^n.$$

Le résultat découle donc du corollaire du lemme 7. □

Nous allons maintenant interpréter la mesure $\left(i\partial\overline{\partial}\varphi_X^F\right)^n$ pour F une application holomorphe non dégénérée.

Lemme 8.— *Soient X un ensemble compact non pluripolaire, F une application holomorphe non dégénérée de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, et $\mu_X^F = (i\partial\overline{\partial}\varphi_X^F)^n$. Pour $a \in \mathbb{C}^n$, posons*

$$n_F(r,a) = \operatorname{card}\left(F^{-1}(a) \cap B(0,r)\right).$$

Alors

$$\int_{B(0,r)} (i\partial\overline{\partial}\varphi_X^F)^n = \int n_F(r,a)\,\mathrm{d}\mu_X(a) \quad \textit{où} \quad \mu_X = (i\partial\overline{\partial}\varphi_X)^n\,.$$

Démonstration.— Posons $Y = \{z \in \mathbb{C}^n \mid J_F(z) = 0\}$. Alors Y est un ensemble analytique dans $\mathbb{C}^n$ et ainsi un ensemble pluripolaire. D'après [B-T], quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage fermé F_ε de Y tel que

$$\int_{F_\varepsilon \cap B(0,r)} (i\partial\overline{\partial}\varphi_X^F)^n < \varepsilon\,.$$

Si $z_0 \in B(0,r) \cap \complement F_\varepsilon$, alors il existe un voisinage U_{z_0} de z_0, $U_{z_0} \subset B(0,r)$, tel que F est un homéomorphisme sur U_{z_0}, donc

$$\int_{U_{z_0}} (i\partial\overline{\partial}\varphi_X^F)^n = \int_{F(U_{z_0})} (i\partial\overline{\partial}\varphi_X)^n .$$

Si $Y' = F(Y)$, alors Y' est pluripolaire dans $\mathbb{C}^n$ (cf. [G-2]) et ainsi, d'après [B-T], $\int_{Y'} \mathrm{d}\mu_X = 0$. Ainsi

$$\int_{F_\varepsilon \cap B(0,r)} (i\partial\overline{\partial}\varphi_X^F)^n = \int \operatorname{card}\left(F^{-1}(a) \cap B(0,r) \cap \complement F_\varepsilon\right) \mathrm{d}\mu(a)$$

et si on fait tendre ε vers zéro

$$\begin{aligned}\int_{B(0,r)} (i\partial\overline{\partial}\varphi_X^F)^n &= \int_{\mathbb{C}^n - Y'} \operatorname{card}\left(F^{-1}(a) \cap B(0,r)\right) \mathrm{d}\mu_X(a) \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} n_F(r;a)\, \mathrm{d}\mu_X(a) . \square\end{aligned}$$

Soit maintenant $\mathcal{C} = \{C^{(j)}\}$, $j = 1, \ldots, 2n-1$, une famille de vecteurs (distincts) dans $\mathbb{C}^n$. Nous dirons que les éléments de $\mathcal{C}$ sont *en position générale* si chaque partie de n éléments de $\mathcal{C}$ est un système linéairement indépendant sur $\mathbb{C}$. Soit $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ un n-uplet d'entiers, $1 \leq \lambda_i \leq 2n-1$, $\lambda_j \neq \lambda_k$ pour $j \neq k$, donc

$$\operatorname{card}\{\Lambda\} = C\begin{pmatrix} 2n-1 \\ n \end{pmatrix}$$

et posons $\mathcal{C}(\Lambda) = \{C^{\lambda_1}, \ldots, C^{\lambda_n} \mid \lambda_j \in \Lambda\}$. La propriété essentielle de $\mathcal{C}$ dont nous aurons besoin est la suivante.

LEMME 9.— *Soit $\mathcal{C}$ une famille de vecteurs en position générale. Alors il existe une constante C (qui ne dépend que de $\mathcal{C}$) telle que, quel que soit $w \in \mathbb{C}^n$, il existe $\mathcal{C}(\Lambda)$ tel que $\left|\langle C^{\lambda_j}, w\rangle\right| \geq C\|w\|$, quel que soit $\lambda_j \in \Lambda$ (Λ dépend en général de w).*

Démonstration.— Quel que soit Λ, la matrice

$$\left[C_k^{\lambda_j}\right]_{k=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,n}$$

est inversible. Ainsi, si $\mu_{\lambda_j}(w) = \langle C^{(\lambda_j)}, w\rangle$, on peut écrire

$$w_k = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{C}_j^{(k)}(\Lambda)\mu_{\lambda_j}(w),$$

donc il existe un λ_j tel que $|\mu_{\lambda_j}(w)| \geq C^1\|w\|$, où C^1 ne dépend que des $\widetilde{C}_j^k$, donc que de $\mathcal{C}$. Puisqu'il existe $(2n-1)$ vecteurs $C^{(j)}$, on peut trouver un $\widetilde{\Lambda}_0 = (\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_n^{(0)})$ (qui dépend en général de w) tel que $|\mu_{\lambda_j}^{(0)}(w)| \geq C\|w\|$ quel que soit j, $j = 1, \ldots, n$. □

Soit maintenant $\mathcal{C}$ un système en position générale. Pour S un entier positif, on pose $G(\Lambda(\mathcal{C}), S) = \{\langle C^{(\lambda_1)}, w\rangle^S, \ldots, \langle C^{(\lambda_n)}, w\rangle^S\}$. Si $a \in \mathbb{C}^n$, $a \notin Z = \{a \in \mathbb{C}^n \mid \prod_{j=1}^n a_j = 0\}$ (ce qui est un ensemble analytique, donc pluripolaire), alors, on peut définir une branche de $\log a_j$, $j = 1, \ldots, n$. Posons donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_a(\mathcal{C}, S) &= \bigcup_N \bigcup_\Lambda \exp G\big(\Lambda(C), S\big)(N)^{-1}(a) \\ &= \bigcup_{\Lambda, N, N'} \{w \in \mathbb{C}^n \mid \langle C^{\lambda_j}, w\rangle^S = \log a_j + 2\pi N_j + 2\pi i N'_j\}.\end{aligned}$$

THÉORÈME 5.— *Soit $\mathcal{C}$ un système de vecteurs en position générale. Alors si $S > 2n$ est un entier*

i) pour $a \notin Z = \{a \in \mathbb{C}^n \mid \prod_{j=1}^n a_j = 0\}$, $\mathbb{E}_a(\mathcal{C}, S)$ satisfait aux conditions du théorème 1 et ainsi $\mathbb{E}_a(\mathcal{C}, S)$ est un ensemble discret essentiel pour $\widetilde{\mathcal{F}}$;

ii) soit $F \in \widetilde{\mathcal{F}}$ et $n_F(r; a) = \mathrm{card}\big(\mathbb{E}_a(\mathcal{C}, S)\big) \cap B(0, r)$. Alors

$$\psi_F = \left\{ a \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \lim_{r \to +\infty} \frac{n_F(r; a)}{\int_{B(0,r)} \|F(z)\|^{2n(S-1)} \, \mathrm{d}\lambda(z)} = 0 \right\}$$

et

$$\widetilde{\psi}_F = \left\{ a \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \lim_{r \to +\infty} \frac{n_F(r; a)}{[M_F(r)]^{2n(S-1)-\varepsilon}} = 0 \text{ pour } \varepsilon > 0 \right\}$$

sont pluripolaire dans $\mathbb{C}^n$.

Démonstration. — Posons

$$K(z) = \sum_{\Lambda} \left| J_{G(\Lambda,S)\circ F}(z) \right| = \sum_{\Lambda} \prod_{j=1}^{n} \left| \langle C^{(\lambda_j)}, F(z) \rangle \right|^{2(S-1)} \left| \det C_k^{(\lambda_j)} \right|^2 .$$

D'après le lemme 9, il existe une constante C telle que $C^{-1}\|F\|^{2n(S-1)} \le K(z) \le C\|F\|^{2n(S-1)}$. Si $S > 2n$, alors $2n(S-1) > S(2n-1)$. Soient $\varepsilon > 0$ donné, $\varepsilon < 1/2$ et $1 < \alpha < (2n(S-1) - \varepsilon/2)/(2n(S-1) - \varepsilon)$. D'après le lemme 1, il existe une suite croissante $r_\nu \uparrow +\infty$ telle que, si

$$r'_\nu = r_\nu \left(1 + \frac{1}{\left[\log\log M_F(r_\nu)\right]^2} \right) ,$$

alors

$$\log M_F(r'_\nu) \le a \log M_F(r_\nu) , \quad \text{d'où} \quad M_F(r'_\nu) \le M_F(r_\nu)^\alpha .$$

Posons maintenant

$$r''_\nu = r_\nu \left(1 + \frac{1}{\left[\log\log M_F(r_\nu)\right]^\beta} \right)$$

et soit

$$r \in [\, r_\nu^{(1)} , r_\nu^{(2)}] \quad \text{avec} \quad r_\nu^{(j)} = r_\nu + \frac{(2j-1)}{4} (r''_\nu - r_\nu) .$$

Choisissons $\tau < 1$ si grand que $\tau 2n(S-1) > 2n(S-1)^{2n(S-1)-\varepsilon/2}$. Alors, d'après le lemme 4 appliqué à la fonction plurisousharmonique $\log\|F\|$, si $S_r = \partial B(0,r)$ et $d\omega_r$ est la mesure de Lebesgue sur S_r, on voit que

$$\omega_r \left\{ z \in S_r \mid \log\|F(z)\| > \tau \log M_F(r_\nu) \right\} \ge \frac{C_\tau}{\alpha} \left[\log\log M_F(r_\nu)\right]^{-6(2n-1)} .$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,r''_\nu)} \left[(r''_\nu)^2 - \|z\|^2 \right] K(z) \,\mathrm{d}\lambda(z) \ge \\
&\quad \ge r_\nu^2 \left[\log M_F(r_\nu)\right]^{-12} \int_{B(0,r_\nu^{(1)}) - B(0,r_\nu^{(2)})} \|F(z)\|^{2n(S-1)} \,\mathrm{d}\lambda(z) \\
&\quad \ge \frac{C_\tau}{\alpha} r_\nu^{2n+2} \left[\log M_F(r_\nu)\right]^{-6(2n+1)} M_F(r_\nu)^{\tau 2n(S-1)} \\
&\quad \ge r_\nu^2 M_F(r_\nu)^{2n(S-1)-\varepsilon/2} \ge r_\nu^2 M_F(r'_\nu)^{2n(S-1)-\varepsilon} \\
&\quad \ge A (r''_\nu)^2 \left(1 - \frac{r''_\nu}{r'_\nu} \right)^{-n+1} M_F(r'_\nu)^{S(2n-1)}
\end{aligned}$$

quel que soit $A > 0$ pour $\nu > \nu(A)$. Ainsi, d'après le théorème 4, quel que soit X un compact non pluripolaire, $X \subset \complement Z$,

$$\begin{aligned}(r_\nu'')^2 \int_{B(0,r_\nu'')} \sum_{\Lambda,N} \left(i\partial\overline{\partial}\varphi_X^{\log G(\Lambda,S)(N)}\right)^n \geq \\ \geq \int_{B(0,r_\nu'')} [(r_\nu'')^2 - \|z\|^2] \sum_{\Lambda,N} \left(i\partial\overline{\partial}\varphi_X^{\log G(\Lambda,S)(N)}\right)^n \\ \geq C_X \int_{B(0,r_\nu'')} [(r_\nu'')^2 - \|z\|^2] K(z)\, \mathrm{d}\lambda(z) \\ \geq C_X'(r_\nu')^2 M_F(r_\nu')^{2n(S-1)-\varepsilon}\,.\end{aligned}$$

Posons

$$\Gamma_F^S(t) = \int_{B(0,t)} \|F(z)\|^{2n(S-1)}\, \mathrm{d}\lambda(z)\,.$$

Compte tenu du lemme 8, après une intégration par parties du deuxième et troisième termes, ceci se traduit par :

$$\begin{aligned}(r_\nu'')^2 \int_X n_F(r_\nu'', a)\, \mathrm{d}\mu_X(a) &\geq \int_X \mathrm{d}\mu_X(a) \int_0^{r_\nu''} 2tn_F(t,a)\, \mathrm{d}t \\ &\geq C_X \int_0^{r_\nu''} 2t\Gamma_F^S(t)\, \mathrm{d}t \\ &\geq C_X'(r_\nu'')^2 M_F(r_\nu'')^{2n(S-1)-\varepsilon}\end{aligned}$$

quel que soit X compact non pluripolaire dans $\mathbb{C}^n$. Posons

$$A_\nu(a) = \frac{\int_0^{r_\nu''} 2tn_F(t,a)\, \mathrm{d}t}{\int_0^{r_\nu''} 2t\Gamma_t^S(t)\, \mathrm{d}t}$$

et soit

$$\mathcal{E}_F = \left\{a \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \lim_{\nu\to+\infty} A_\nu(a) = 0\right\}.$$

Supposons que $\mathcal{E}_F$ soit non pluripolaire dans $\mathbb{C}^n$. Alors il existe K compact non pluripolaire dans $\mathcal{E}_F$, $K \subset \complement Z$ tel que $\lim_{\nu\to+\infty} A_\nu(a) = 0$ quel que soit $a \in K$. Ainsi, d'après le théorème d'Egorov, il existe un ensemble $A_F \subset K$ tel que $\mu_K(A_F) > 0$ et $\lim_{\nu\to+\infty} A_\nu(a) = 0$ uniformément sur A_F. Mais A_F est donc non pluripolaire parce que $\mu_K(E) = 0$ pour E pluripolaire (cf. [B-T]). Donc, il existe $K' \subset A_F$ compact non pluripolaire tel que

$\lim_{\nu \to +\infty} A_\nu(a) = 0$ uniformément sur K', ce qui contredit l'inégalité ci-dessus : $\int_{K'} \mathrm{d}\mu'_K(a) \geq C_K$. Si $a \in \mathcal{E}_F$, alors

$$\limsup_{\nu \to +\infty} \frac{\int_0^{r''_\nu} 2tn_F(t,a)\,\mathrm{d}t}{\int_0^{r''_\nu} 2t\Gamma_F^S(t)\,\mathrm{d}t} = C(a) > 0\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. On peut trouver $A(\varepsilon)$ tel que

$$\frac{\int_0^{r''_\nu} 2tn_F(t,a)\,\mathrm{d}t}{\int_0^{r''_\nu} 2t\Gamma_F^S(t)\,\mathrm{d}t} \geq C(a) - \frac{\varepsilon}{2}$$

pour $\nu > A(\varepsilon)$, c'est-à-dire

$$\int_0^{r''_\nu} 2t\Big(n_F(t,a) - \big(C(a) - \varepsilon\big)\Gamma_F^S(t)\Big)\,\mathrm{d}t \geq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{r''_\nu} 2t\Gamma_F^S(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

S'il existe t_0 tel que $n_F(t;a) < \big(C(a) - \varepsilon\big)\Gamma_F^S(t)$ pour $t < t_0$, alors le côté gauche reste borné quand ν tend vers l'infini tandis que le côté droit tend vers plus l'infini, ce qui est impossible, donc

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{n_F(t;a)}{\Gamma_F^S(t)} = C(a)\,.$$

On montre de façon identique que $\widetilde{\psi}_F$ est pluripolaire dans $\mathbb{C}^n$.

Il reste à montrer que E_a est un ensemble essentiel pour $\widetilde{\mathcal{F}}$ quel que soit $a \notin Z$. Soit $w_0 \in \mathbb{C}^n$. D'après le lemme 9, il existe Λ (qui dépend de w_0) tel que, si $\widetilde{w}_j^{(0)} = \langle C^{(\lambda_j)},\, , w_0\rangle$, $j = 1, \ldots, n$, $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors $|\widetilde{w}_j^{(0)}| \geq C\|w_0\|$ quel que soit j, où C ne dépend pas de w. Faisons le développement de Taylor de la fonction $\widetilde{w}_j^S = \langle C^{(\lambda_j)}\, , w\rangle^S$:

$$\widetilde{w}_j^S - (\widetilde{w}_j^{(0)})^S = \sum_{k=1}^{S} (\widetilde{w}_j^{(0)}) \frac{S!}{k!\,(S-k)!}\,(\widetilde{w}_j - \widetilde{w}_j^{(0)})^k\,.$$

Ainsi, si $\left|\widetilde{w}_j - \widetilde{w}_j^{(0)}\right| < \dfrac{A}{\left|\widetilde{w}_j^{(0)}\right|^{S-1}}$, on a

$$\left|\widetilde{w}_j^S - (\widetilde{w}_j^{(0)})^S\right| \leq SA + \sum_{k=2}^{S} \frac{S!\, A^k}{(S-k)!\, k!\, \left|\widetilde{w}_j^{(0)}\right|}$$

et si $||w_0||$ est assez grand $\left|\widetilde{w}_j^S - (\widetilde{w}_j^{(0)})^S\right| \leq (S+1)A$.

Ainsi, d'après le lemme 3, si $n = 1$, $R = A\left|\widetilde{w}_j^{(0)}\right|^{1-S}$ et $M = (S+1)A$, l'image de $\widetilde{w}_j^S - \left(\widetilde{w}_j^{(0)}\right)^S$ contient un disque de rayon $r = A/8(S+1)$, donc si $||w_0||$ et A sont assez grands (suivant S et $\log a_j$), il existe un point $\left(\widetilde{w}'_j\right)^S = \log a_j + 2\pi N_j + 2\pi i N'_j$ tel que $\left|\widetilde{w}'_j - (\widetilde{w}_j^{(0)})\right| < A\left|\widetilde{w}_j^{(0)}\right|^{-2n}$. Soit $B = [C_k^{(\lambda)}]$ et posons $w' = B^{-1}(\widetilde{w}'_1, \ldots, \widetilde{w}'_n)$. Il existe une constante $\widehat{C}$ qui ne dépend que de $\mathcal{C}$ tel que

$$||w' - w_0|| \leq C\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\widetilde{w}'_j - (\widetilde{w}_j^{(0)})\right|^2\right)^{1/2} \leq C^{-2n} nA ||w_0||^{-2n}.$$

Ainsi, d'après le théorème 1, $E_a(\mathcal{C})$ est essentiel par $\widehat{\mathcal{F}}$. □

Remarque.— Pour obtenir le théorème 5 pour F, il n'est pas nécessaire d'avoir $J_F \equiv 1$ mais il suffit que la croissance de $\left|J_F(z)\right|$ soit assez lente par rapport à $M_F(r)$ (cf. [G]).

Nous tournons notre regard vers la famille $\mathcal{F}_\rho$ maintenant.

THÉORÈME 6.— *Soit $\mathcal{C}$ un système de vecteur en position générale. Alors si $0 < \rho < \rho'$ et S est un entier,*

$$S > \left[12n \cdot 4^{2n-1}\left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{1/2}\left(\left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{1/2}\right)^{-1} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{\rho'/2} - 1\right)^{-2n+1}\right] + 2n$$

i) quel que soit $a \notin Z$, $E_a(\mathcal{C}, S)$ satisfait aux conditions du théorème 3 et ainsi $E_a(\mathcal{C}, S)$ est un ensemble discret essentiel pour $\mathcal{F}_\rho$;

ii) soit $F \in \mathcal{F}_\rho$ *; alors*

$$\psi_F = \left\{ a \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \lim_{r\to+\infty} \frac{n_F(r,a)}{\int_{B(0,r)} \|F(z)\|^{2n(S-1)} |J_F(z)|^2 \,\mathrm{d}\lambda(z)} = 0 \right\}$$

et

$$\widehat{\psi}_F = \left\{ a \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \lim_{r\to+\infty} \frac{n_F(r,a)}{M_F(r)^{S(2n-1)}} = 0 \right\}$$

sont pluripolaires dans $\mathbb{C}^n$.

Démonstration. — La démonstration est en grande partie une répétition de celle du théorème 5, donc nous n'indiquerons que les changements nécessaires. Soit $K(z)$ comme dans le théorème 5. Choisissons τ et α tels que $\tau = \alpha^{-\rho'} = \left(1 - ({}^1/{}_{4n})\right)^{1/2} < 1$. D'après le lemme 2, il existe une suite croissante $r_\nu \uparrow +\infty$ telle que $\log M_F(ar_\nu) \geq \alpha^{\rho'} \log M_F(r_\nu)$. Posons

$$r_\nu^{(j)} = r_\nu + \frac{1 + \left((j-1)/4\right)}{2}(\alpha - 1) r_\nu\,, \quad j = 1,\, 2,\, 3\,.$$

Pour $r \in [\,r_\nu^{(1)}\,,\, r_\nu^{(2)}\,]$, d'après les lemmes 4 et 5, il existe un ensemble Q_r sur S_r de mesure de Lebesgue au moins $C(\tau,\alpha) r_\nu^{2n-1}$ tel que pour $z \in Q_r$,

$$\|F(z)\| \geq M_F(r_\nu)^\tau \quad \text{et} \quad |J_F(z)|^2 \geq \exp - \frac{6n\, 2^{2n-1} \alpha^{2\rho'}}{(1-\tau)(\alpha-1)^{2n-1}} \log M_F(r_\nu)\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,r_\nu^{(3)})} & [(r_\nu^{(3)})^2 - \|z\|^2] K(z) \,\mathrm{d}\lambda(z) \geq \\
&\geq C \int_{B(0,r_\nu^{(3)})} [(r_\nu^{(3)})^2 - \|z\|^2]\, \|F(z)\|^{2n(S-1)} |J_F(z)|^2 \,\mathrm{d}\lambda(z) \\
&\geq C r_\nu^{2n+2} M_F(\alpha r_\nu)^\gamma
\end{aligned}$$

avec

$$\gamma = \frac{\tau}{\alpha^{\rho'}} \left[2n(S-1) - \frac{6n\, 4^{2n-1} \alpha^{\rho'}}{(1-\tau)(\alpha-1)^{2n-1}} \right].$$

Mais ${}^\tau/{}_{\alpha^{\rho'}} = 1 - ({}^1/{}_{4n})$, donc

$$\begin{aligned}
\frac{\tau}{\alpha^{\rho'}} (2n)(S-1) &= S(2n-1) + \left(1 - \frac{1}{4n}\right) 2n(S-1) - S(2n-1) \\
&= S(2n-1) + \frac{S}{2} + \frac{1}{2} - 2n
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\int_{B(0,r_\nu^{(3)})} \left[(r_\nu^{(3)})^2 - \|z\|^2\right] K(z)\, \mathrm{d}\lambda(z) \geq C r_\nu^{2n+2} M_F(\alpha r_\nu)^{S(2n-1)} .$$

Le reste de la démonstration suit exactement celle du théorème 5 en s'appuyant sur le théorème 3. □

Nous montrons maintenant un analogue de ces résultats pour la famille $\mathcal{F}$. Pour cela, nous serons amenés à introduire une fonction auxiliaire. Pour $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 1$, soit $h^\gamma(w)$ la fonction entière d'une variable

$$h^\gamma(w) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + ({}^{w}/{}_{a_j})\right) \quad \text{avec} \quad a_j = \exp\exp j^{1/\gamma} .$$

Nous développons les propriétés des fonctions $h^\gamma(w)$ dont nous aurons besoin.

i) Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $A_1(\varepsilon)$ tel que, si $|w| > A_1(\varepsilon)$,

$$\log\left|h^\gamma(w)\right| \leq C + (1+\varepsilon)\left(\log|w|\right)\left(\log\log|w|\right)^\gamma .$$

Soit m tel que $\exp\exp m^{1/\gamma} \leq |w| < \exp\exp(m+1)^{1/\gamma}$. Alors

$$\begin{aligned}\log\left|h^\gamma(w)\right| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{|w|}{\exp\exp j^{1/\gamma}}\right) \leq \\ &\leq (m+1)\log 2 + (m+1)\log|w| + \\ &\qquad + \sum_{j=m+2}^{\infty} \log\Bigl(1 + \exp\bigl(\exp(m+1)^{1/\gamma} - \exp j^{1/\gamma}\bigr)\Bigr) \\ &\leq C_\gamma + (m+1)\log 2 + (m+1)\log|w|\end{aligned}$$

et $|w| > \exp\exp m^{1/\gamma}$ entraîne $\left(\log\log|w|\right)^\gamma > m$.

ii) Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $A_2(\varepsilon)$ tel que si $|w| > A_2(\varepsilon)$ et $\Re w > 0$, alors

$$\log\left|h^\gamma(w)\right| \geq (1-\varepsilon)\left(\log(w)\right)\left(\log\log|w|\right)^\gamma .$$

En effet, si $\exp\exp m^{1/\gamma} \leq |w| < \exp\exp(m+1)^{1/\gamma}$, vu que $\log\left|1 + ({}^{w}/{}_{a})\right| > 0$ si $\Re w > 0$, $a \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}\log\left|h^\gamma(w)\right| &\geq \sum_{j=1}^{m-1} \log\left(1 + \frac{w}{\exp\exp j^{1/\gamma}}\right) \\ &\geq -(m-1)\log 2 + (m-1)\log|w| - \sum_{j=1}^{m-1} \exp j^{1/\gamma}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m-1} \exp j^{1/\gamma} &\leq C + \int_0^m \exp t^{1/\gamma}\,\mathrm{d}t \\ &\leq \gamma m^{1-1/\gamma} \int_0^m \frac{1}{\gamma} t^{1/\gamma - 1} \exp t^{1/\gamma}\,\mathrm{d}t + C \\ &\leq C + \gamma m^{1-1/\gamma} \exp m^{1/\gamma} \\ &\leq C + \gamma\bigl(\log\log|w|\bigr)^{\gamma-1} \log|w|\,.\end{aligned}$$

iii) Si $|\theta| \leq {}^{\pi}/_{2}$, $\left|h^\gamma(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\right| \leq r\left|h^{\gamma\prime}(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\right| + 1$.

On a

$$\frac{h^{\gamma\prime}(w)}{h^\gamma(w)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a_j} \frac{\bigl(1 + (\overline{w}/a_j)\bigr)}{\left|1 + (w/a_j)\right|^2}\,, \quad a_j = \exp\exp j^{1/\gamma}$$

et ainsi, si $w \neq 0$, $\arg\bigl(h^{\gamma\prime}(w)/h^\gamma(w)\bigr) \neq 0$, donc les zéros de $h^{\gamma\prime}(w)$ sont réels. Si $\Re w > 0$, alors $\Re\bigl(h^{\gamma\prime}(w)/h^\gamma(w)\bigr) > 0$, donc les zéros de $h^{\gamma\prime}(w)$ sont négatifs; ceci veut dire que

$$h^{\gamma\prime}(w) = \prod_{j=1}^{\infty} \bigl(1 + (w/b_j)\bigr) \quad \text{avec} \quad b_j \in \mathbb{R}^+\,.$$

Mais $\left|1 + (t\,\mathrm{e}^{i\theta}/b_j)\right|$ est une fonction croissante de t pour $|\theta| \leq {}^{\pi}/_{2}$ et $b_j \in \mathbb{R}^+$, donc $\left|h^{\gamma\prime}(t\,\mathrm{e}^{i\theta})\right|$ en est de même. Alors

$$h^\gamma(r\,\mathrm{e}^{i\theta}) = \int_0^r h^{\gamma\prime}(t\,\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}t + 1\,,$$

d'où

$$\left|h^\gamma(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\right| \leq \int_0^r \left|h^{\gamma\prime}(t\,\mathrm{e}^{i\theta})\right| \mathrm{d}t + 1 \leq \left|h^{\gamma\prime}(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\right| r + 1$$

si $|\theta| \leq {}^{\pi}/_{2}$.

Soit maintenant $\mathcal{C}$ un système de vecteurs en position générale; $S = (S_1, \ldots, S_n)$ sera un n-uplet, $S_j \in \mathbb{R}$, $|S_j| = 1$. Alors, quel que soit le vecteur $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, il existe S (qui dépend de w) tel que $\Re(-1)^{S_j} w_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$. On définit alors

$$G^\gamma(\Lambda, S) = \left\{h^\gamma\big((-1)^{S_1}\langle C^{(\lambda_1)}, w\rangle\big), \ldots, h^\gamma\big((-1)^{S_n}\langle C^{(\lambda_n)}, w\rangle\big)\right\}$$

et on pose, pour $a \notin Z$,

$$\begin{aligned} E_a^\gamma(\mathcal{C}) &= \bigcup_N \bigcup_{\Lambda,S} \exp G^\gamma\big(\Lambda(\mathcal{C}), S\big)(N)^{-1}(a) \\ &= \bigcup_{N,N',\Lambda,S} \left\{w \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; h^\gamma\big((-1)^{S_j}\langle C^{\lambda_j}, w\rangle\big) = \log a_j + 2\pi N_j + 2\pi i N_j'\right\}. \end{aligned}$$

THÉORÈME 7. — *Soient $\mathcal{C}$ un système de vecteurs en position générale et $\gamma > (2n-1)$. Alors,*

i) quel que soit $a \in Z$, $E_a^\gamma(\mathcal{C})$ satisfait aux conditions du théorème 2 et ainsi $E_a^\gamma(\mathcal{C})$ est un ensemble discret essentiel pour $\mathcal{F}$.

ii) si $F \in \mathcal{F}$ et $n_F(r;a) = \operatorname{card}\big(F^{-1}(\mathcal{C}) \cap B(0,r)\big)$, alors

$$\chi_F = \left\{a \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \lim_{r\to+\infty} \frac{n_F(r;a)}{\exp(2n-\varepsilon)\log M_F(r)\big[\log\log M_F(r)\big]^\gamma} = 0\right\}$$

est pluripolaire dans $\mathbb{C}^n$ quel que soit $\varepsilon > 0$.

Démonstration. — Posons

$$\begin{aligned} K(z) &= \sum_{\Lambda,S} \big|J_{G^\gamma(\Lambda,S)\circ F}(z)\big| \\ &= \sum_{\Lambda,S}\prod_{j=1}^n \left|h^{\gamma\prime}\big((-1)^{S_j}\langle C^{(\lambda_j)}, F(z)\rangle\big)\right|^2 \big|\det C_k^{(\lambda_j)}\big|^2 \times \big|J_F(z)\big|^2. \end{aligned}$$

D'après i), ii) et iii) ci-dessus, on voit que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que

$$\begin{aligned} &C^{-1}(\varepsilon)\exp\left(2n - \frac{\varepsilon}{2}\right)\big(\log(\|F\|+1)\big)\,\big[\log\log(\|F\|+1)\big]^\gamma \leq \\ &\leq K(z) \\ &\leq C(\varepsilon)\exp\left(2n - \frac{\varepsilon}{2}\right)\log(\|F\|+1)\,\big[\log\log(\|F\|+1)\big]^\gamma . \end{aligned}$$

Soient α et β tels que

$$1 < \beta < \frac{\gamma}{2n-1} \quad \text{et} \quad 1 < \alpha^2 < \inf\left[\frac{2n-\varepsilon/2}{2n-3\varepsilon/4}\right]$$

et $\varepsilon < 1$.

D'après le lemme 1, il existe une suite croissante $r_\nu \uparrow +\infty$ telle que, si $r'_\nu = r_\nu\left[1+\left[\log\log M_F(r_\nu)\right]^{-\beta}\right]$ alors $\log M_F(r'_\nu) \leq \alpha \log M_F(r_\nu)$.

Posons $r_\nu^{(j)} = r_\nu + (j/4)(r''_\nu - r_\nu)$, $j = 1, 2, 3$. D'après les lemmes 4 et 5, si $r \in [\,r_\nu^{(1)}, r_\nu^{(2)}\,]$ et si $\tau = \alpha^{-1}$, on voit que

$$\begin{aligned}
&\omega_r\Big\{z \in S_r \;\Big|\; \log\big\|F(z)\big\| > \tau \log M_F(r_\nu) \\
&\qquad \text{et } \log\big|J_F(z)\big| \geq \frac{-(n+1)3\alpha^2}{(1-\tau)} \log M_F(r_\nu)\big[\log\log M_F(r_\nu)\big]^{\beta(2n-1)}\Big\} \\
&\qquad \geq C r_\nu^{2n-1}\big[\log\log M_F(r_\nu)\big]^{\beta(2n-1)}
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,r_\nu^{(3)})}\big[(r_\nu^{(3)})^2 - \|z\|^2\big] K(z)\,\mathrm{d}\lambda(z) \geq \\
&\qquad \geq C r_\nu^2\big[\log\log M_F(r_\nu)\big]^{\beta}\int_{B(0,r_\nu^{(2)})-B(0,r_\nu^{(1)})} K(z)\,\mathrm{d}\lambda(z) \\
&\qquad \geq C r_\nu^{2n+2}\exp\Big\{\tau\Big(2n-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\log M_F(r_\nu)\big[\log\log M_F(r_\nu)\big]^{\gamma} + \\
&\qquad\qquad - \frac{3(n+1)\alpha^2}{(1-\tau)}\log M_F(r_\nu)\big[\log\log M_F(r_\nu)\big]^{\beta(2n-1)}\Big\} \\
&\qquad \geq C r_\nu^{2n+2}\exp\Big\{\Big[\frac{\tau}{\alpha}\Big(2n-\frac{\varepsilon}{2}\Big)-\frac{\varepsilon}{16}\Big]\alpha\log M_F(r_\nu)\big[\log\log M_F(r_\nu)\big]^{\gamma}\Big\}
\end{aligned}$$

si ν est assez grand (parce que $\beta(2n-1) < \gamma$)

$$\geq C r_\nu^{2n+2}\exp\Big\{\Big(2n-\frac{7\varepsilon}{8}\Big)\log M_F(r'_\nu)\big[\log\log M_F(r'_\nu)\big]^{\gamma}\Big\}$$

donc, quel que soit X non pluripolaire

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,r_\nu^{(3)})}\sum_{\Lambda,S,N}\big(i\partial\overline{\partial}\varphi_X^{\log G^\gamma(\Lambda,S)(N)}\big)^n \geq \\
&\qquad \geq C'_X\exp(2n-\varepsilon)\log M(r_\nu^{(3)})\big(\log\log M_F(r_\nu^{(3)})\big)^{\gamma}
\end{aligned}$$

et la suite se démontre comme le théorème 5.

Reste à vérifier que $E_a^\gamma(\mathcal{C})$ soit essentiel. D'après le lemme 9, si $w_0 \in \mathbb{C}^n$, il existe Λ et S (qui dépendent de w_0) tels que, si $\widetilde{w}_j^{(0)} = (-1)^{S_j}\langle C^{(\lambda_j)}\,,\,w\rangle$, alors $|\widetilde{w}_j^{(0)}| \geq C||w_0||$ et $\Re\widetilde{w}_j^{(0)} = 0$ quel que soit $j = 1, \ldots, n$ et C ne dépend pas de w_0. Faisons le développement de Taylor de $h^\gamma(\widetilde{w}_j)$ autour du point $\widetilde{w}_j^{(0)}$.

$$h^\gamma(\widetilde{w}_j) - h^\gamma(\widetilde{w}_j^{(0)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{\gamma(n)}}{n!}(\widetilde{w}_j^{(0)})(\widetilde{w}_j - \widetilde{w}_j^{(0)})^n .$$

Ainsi, si $|\widetilde{w}_j - \widetilde{w}_j^{(0)}| \leq A\big|h^{\gamma\prime}(\widetilde{w}_j^{(0)})\big|^{-1}$, d'après la formule de Cauchy,

$$\big|h^\gamma(\widetilde{w}_j) - h^\gamma(\widetilde{w}_j^{(0)})\big| \leq A\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\big|h^{\gamma(n)}(\widetilde{w}_j^{(0)})\big|}{n!\,\big|h^{\gamma\prime}(\widetilde{w}_j^{(0)})\big|^n}\right) \leq A(1+\varepsilon)$$

si $||w_0|| > C(\varepsilon)$, parce que

$$\left|\frac{h^{\gamma(n)}(\widetilde{w}_j^{(0)})}{n!}\right| \leq \exp C(\varepsilon)\exp(1+\varepsilon)\log|w_0|\,[\log\log|w_0|]^\gamma$$

et

$$\big|h^{\gamma\prime}(\widetilde{w}_j^{(0)})\big| \leq C(\varepsilon)\exp(1-\varepsilon)\log|w_0|\,[\log\log|w_0|]^\gamma .$$

Ainsi, d'après le lemme 3, si $n = 1$, $R = A\big|h^{\gamma\prime}(\widetilde{w}_j^{(0)})\big|^{-1}$, $M = (1+\varepsilon)A$, l'image de $h^\gamma(\widetilde{w}_j) - h^\gamma(\widetilde{w}_j^{(0)})$ contient le disque de rayon $S = A/8(1+\varepsilon)$, donc, si $||w_0||$ et A sont assez grand (suivant $\log a_j$), il existe un point

$$h^\gamma(\widetilde{w}_j') = \log a_j + 2\pi N_j + 2\pi i N_j'$$

tel que $|\widetilde{w}_j - \widetilde{w}_j^{(0)}| < A\big|h^{\gamma\prime}(\widetilde{w}_j^{(0)})\big|^{-1}$, si $B = \big[(-1)^{S_j}C_k^{(\lambda_j)}\big]$ et $w' = B^{-1}(\widetilde{w}_1', \ldots, \widetilde{w}_n')$ alors

$$||w' - w_0|| \leq CA\exp - \log||w_0||\,[\log\log|w_0|]^{\gamma'} \quad \text{pour } \gamma' < \gamma$$

et , ainsi E_a^γ est essentiel d'après le théorème 2. □

Ces résultats appellent certaines remarques et soulèvent quelques questions.

1) D'après nos résultats, les distances entre les points des ensembles essentiels se resserrent à l'infini. Une construction de J.P. Rosay et W. Rudin [R-R] montre que quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $F_\varepsilon : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ holomorphe non dégénérée telle que l'aire de l'image de F est inférieure à ε. Ainsi, un tel effet de resserrement est nécessaire. Il serait intéressant d'avoir des exemples qui mettent en évidence la vitesse minimale de resserrement.

2) Dans le théorème 7, le problème technique provient de la minoration de la croissance d'un produit de fonctions sous-harmoniques. On ne se sert pas du tout du fait que l'une soit le jacobien de l'application holomorphe en question. Serait-il possible donc de montrer le résultat du théorème 7 pour les ensembles essentiels du théorème 5?

3) Peut-on améliorer la description de l'ensemble exceptionnel? (montrer, par exemple, qu'il est analytique ou même égal à Z).

Bibliographie

[B-M] Bocher (S.) and Martin (W.T.) .— *Several Complex Variables*, Princeton University Press (1948).

[B-T] Bedford (E.) and Taylor (B.A.) .— *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta. Math. **149** (1982), pp. 1-41.

[D-E] Dixon (P.G.) and Esterle (J.) .— *Michael's problem and the Fatou-Bieberbach phenomenon*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **15** (1986), pp. 127-187.

[G] Gruman (L.) .— *Value distribution for holomorphic maps in* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. **245** (1979), pp. 199-218.

[G-2] Gruman (L.) .— *Ensembles exceptionnels pour les applications holomorphiques dans* $\mathbb{C}^n$, Séminaire P. Lelong-P. Dolbeault-H. Skoda (1981-1983), Lecture Notes in Math. n° 1028, Springer-Verlag, Berlin, pp. 125-162.

[L-G] Lelong (P.) and Gruman (L.) .— *Entire Functions of Several Complex Variables*, Grundlehren der mathematishen wissenshaften n° 282, Springer-Verlag, Berling (1986).

[O] Ono (I.) .— *Analytic vector functions of several complex variables*, J. Math. Soc. Japan **8** (1956), pp. 216-246.

[R-R] Rosay (J.P.) and Rudin (W.) .— *Holomorphic maps from* $\mathbb{C}^n$ *to* $\mathbb{C}^n$, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 310 **1** (1988), pp. 47-86.

[S] Siciak (J.) .— *Extremal plurisubharmonic functions in* $\mathbb{C}^n$, Proc. First Finnish Polish Summer School in Complex Analysis (1977), pp. 115-152.