ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MARIE-THÉRÈSE LACROIX

MOHAMMED MARJANI

Interpolation linéaire associée à un générateur de semi-groupe intégré

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 12, nº 2 (1991), p. 163-183

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1991_5_12_2_163_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XII, n° 2, 1991

Interpolation linéaire associée à un générateur de semi-groupe intégré

MARIE-THÉRÈSE LACROIX et MOHAMMED MARJANI[1]

RÉSUMÉ. — Si A est générateur d'un semi-groupe α-intégré $S(t)$ (vérifiant $\left\|S(t)\right\| \leq M \dfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$, $0 \leq t$) sur un espace de Banach X, on introduit des espaces intermédiaires entre $D(A)$ et X, espaces qui peuvent être définis au moyen de la régularisée de Yoshida, de la méthode des traces et des sommes. On obtient les théorèmes d'interpolation de dualité et de perturbation.

ABSTRACT. — Let A be the generator of an α-integrated semigroup $S(t)$ on a Banach space X (such that $\left\|S(t)\right\| \leq M \dfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$, $0 \leq t$), we introduce intermediate spaces between $D(A)$ and X. Theses spaces can be obtained by the mean of the resolvent function, the trace method and the method of the sum. We obtain an interpolation, duality and perturbation theorem.

Introduction

Étant donnés un semi-groupe borné de classe C_0 $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach X, et son générateur infinitésimal A, Lions-Peetre [16] montrent que les espaces de moyennes entre $D(A)$ et X peuvent se définir à l'aide de $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$: avec les notations de Lions-Peetre (resp. [8], [9]), les espaces $S\{P, 1-\theta, D(A);\ P, -\theta, X\}$ (resp. $\big(X, D(A)\big)_{\theta,P}$) et $\left\{x \in X \;\middle|\; \|x\| + \left\| t^{-\theta} \|x - S(t)x\| \right\|_{L^P_*(0,\infty)} < \infty \right\}$ coïncident algébriquement et topologiquement.

---

[1] URA CNRS 741, Laboratoire de Mathématiques, UFR des Sciences et Techniques, 16 route de Gray F-25030 Besançon Cedex (France)

Dans ce travail, nous nous proposons d'étendre ce résultat à d'autres familles d'opérateurs linéaires bornés dans X. Pour cela, nous nous réfèrerons à la théorie des semi-groupes intégrés [2], [3], [12] et [13].

Le plan de ce travail est le suivant :

En premier lieu, on fait un rappel sur l'interpolation réelle et les semi-groupes intégrés.

Dans une seconde partie, nous caractérisons les espaces d'interpolation réelle à l'aide du semi-groupe intégré, du module de continuité d'ordre 1, et de la résolvante du générateur infinitésimal.

Dans la troisième partie, nous donnons les méthodes des traces et des sommes.

Dans une quatrième partie, nous obtenons les théorèmes d'interpolations et de dualité.

Dans la dernière partie, nous donnons comme application une nouvelle caractérisation des espaces de Besov ([1], [8]) et une résolution du problème de Cauchy dans des espaces intermédiaires.

0. Rappels : Interpolation réelle et semi-groupes intégrés

A. Interpolation, méthode réelle

Soient Y_0 et Y_1 deux espaces de Banach, tous deux contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé $\mathcal{U}$, les injections de Y_i $(i = 0,\ 1)$ dans $\mathcal{U}$ étant continues : on dira que le couple (Y_0, Y_1) *est compatible*. On appelle *espace intermédiaire* entre Y_0 et Y_1 tout espace de Banach Y tel que $Y_0 \cap Y_1 \subset Y \subset Y_0 + Y_1$, inclusion avec injection continue ($Y_0 \cap Y_1$ et $Y_0 + Y_1$ étant munis des normes usuelles).

DÉFINITION 0.1 ([8], [9] et [16]).— *Soit (Y_0, Y_1) un couple compatible d'espaces de Banach et Y un espace intermédiaire entre Y_0 et Y_1.*

Y est dit espace d'interpolation entre Y_0 et Y_1 si toute application linéaire continue de Y_0+Y_1 dans Y_0+Y_1, dont la restriction à Y_i est linéaire continue de Y_i dans Y_i $(i = 0,\ 1)$, alors sa restriction à Y est linéaire continue de Y dans Y.

Il existe différentes méthodes qui permettent de construire les espaces Y, comme par exemple : la méthode des traces, la méthode complexe et la méthode des moyennes [8] et [16].

Dans ce travail, on va s'intéresser à la méthode réelle suivante, dite parfois méthode K.

DÉFINITION 0.2 ([8], [9]). — *Soit (Y_0, Y_1) un couple compatible d'espaces de Banach, $\theta \in]0, 1[$ et $P \in [1, \infty]$. On appelle espace d'interpolation réelle et on note*

$$\left(Y_0, Y_1\right)_{\theta,P} = \left\{y \in Y_0 + Y_1 \mid t^{-\theta} K(t, y; Y_0, Y_1) \in L_*^P(0, \infty)\right\}$$

avec

$$K(t, y;\ Y_0, Y_1) = \inf_{y=y_0+y_1} \left(\|y_0\|_{Y_0} + t\|y_1\|_{Y_1}\right) \tag{0.1}$$

et

$$L_*^P(0, \infty) = L^P\left(\mathbb{R}^+, \frac{\mathrm{d}t}{t}\right).$$

Remarque. — $\left(Y_0, Y_1\right)_{\theta,P}$ muni de la norme

$$\|y\|_{\theta,P} = \left\|t^{-\theta} K(t, y; Y_0, Y_1)\right\|_{L_*^P(0,\infty)}$$

est un espace de Banach.

On obtient par cette méthode les deux importants résultats suivant.

THÉORÈME 0.3 (théorème d'interpolation [8]). — *Soit (Y_0, Y_1) et (Z_0, Z_1) deux couples compatibles d'espaces de Banach et T une application linéaire continue de $Y_0 + Y_1$ dans $Z_0 + Z_1$, donc la restriction à Y_i est linéaire continue de Y_i dans Z_i, de norme $\|T\|_{Y_i, Z_i}$, $i = 0, 1$. Alors, T applique continûment $\left(Y_0, Y_1\right)_{\theta,P}$ dans $\left(Z_0, Z_1\right)_{\theta,P}$ pour tout $\theta \in]0, 1[$ et tout $P \in [1, \infty]$, et de norme inférieure à*

$$\|T\|_{Y_0,Z_0}^{1-\theta} \|T\|_{Y_1,Z_1}^{\theta}.$$

De plus, on a

$$K(s, y; Y_0, Y_1) \leq \gamma_{\theta,P} s^{\theta} \|y\|_{\theta,P}, \quad \forall\ s > 0 \tag{0.2}$$

où $\gamma_{\theta,P}$ est une constante qui ne dépend que de θ et de P.

THÉORÈME 0.4 (théorème de dualité [1], [8] et [15]).— *Soit* (Y_0, Y_1) *un couple compatible d'espaces de Banach tel que* $Y_0 \cap Y_1$ *soit dense dans* Y_i, $i = 0, 1$. *Soit* Y_i' *le dual topologique de* Y_i, $i = 0, 1$. *Pour tout* $\theta \in]0, 1[$ *et tout* $P \in [1, \infty[$, $1/P + 1/P' = 1$, *on a*

$$(Y_0, Y_1)'_{\theta,P} = (Y_0', Y_1')_{\theta,P'} \quad (\textit{de normes équivalentes}).$$

B. Semi-groupes intégrés

Notation.— Pour tout $\beta > -1$, on définit la fonction $j_\beta :]0, \infty[\to \mathbb{R}$

$$t \mapsto j_\beta(t) = \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}$$

avec $\Gamma(\beta+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^\beta \, \mathrm{d}t$.

Si $\beta = -1$, on note j_{-1} la mesure de Dirac δ_0 en 0. On définit alors la convolution j_β $(\beta \geq -1)$ avec une fonction continue f de $]0, \infty[$ dans un espace de Banach X, par

$$j_\beta \star f(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{(t-s)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} f(s) \, \mathrm{d}s & \text{si } \beta < -1 \\ \displaystyle\int_0^t f(t-s) \, \mathrm{d}\delta_0(s) = f(t) & \text{si } \beta = -1. \end{cases}$$

On désigne par $L(X)$ l'espace des applications linéaires continues sur X.

PROPOSITION 0.5 ([2], [12]).— *Soient* X *un espace de Banach et* $\big(S(t)\big)_{t \geq 0} \subset L(X)$ *une famille fortement continue telle que* $\|S(t)\| \leq M e^{\omega t}$, $\forall\, t \geq 0$ $(M, \omega \geq 0)$.

Soit $\alpha > 0$, *on pose*

$$r(\lambda) := \lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) \, \mathrm{d}t \quad (\lambda > \omega). \tag{0.3}$$

Alors $\big(R(\lambda)\big)_{\lambda > \omega}$ *est pseudo-résolvante si et seulement si*

$$S_n(t) S_n(s) = \int_t^{t+s} \frac{(s+t-r)^{n-1}}{\Gamma(n)} S_n(r) \, \mathrm{d}r - \int_0^s \frac{(s+t-r)^{n-1}}{\Gamma(n)} S_n(r) \, \mathrm{d}r \tag{0.4}$$

pour tout $s, t \geq 0$ *avec* $n - 1 < \alpha \leq n$ $(n \in \mathbb{N})$ *et* $S_n x := j_{n-\alpha-1} \star Sx$ $(x \in X)$.

Remarque. — La relation (0.4) entraîne

$$\begin{aligned} S(t)S(s) &= S(s)S(t) \qquad s,t \geq 0 \\ S(t)S(0) &= 0 \qquad\qquad t \geq 0 . \end{aligned} \tag{0.5}$$

DÉFINITION ET PROPOSITION 0.6 ([2], [12]). — *Soient* $\alpha \in]0, \infty[$ *et* $(S(t))_{t\geq 0} \subset L(X)$ *une famille fortement continue.*

$(S(t))_{t\geq 0}$ *est dite un semi-groupe* α*-fois intégré si* $S(0) = 0$*, et si l'égalité (0.4) est vérifiée. On dira en plus qu'elle est exponentiellement bornée s'il existe* M, $\omega \in \mathbb{R}$ *tels que* $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $\forall\, t \geq 0$. *Par convention, on prendra comme semi-groupe* 0*-fois intégré le semi-groupe de classe* C_0.

Si $(S(t))_{t\geq 0}$ *vérifie en plus*

$$S(t)x = 0\,, \quad \forall\, t \geq 0 \quad \textit{entraîne } x = 0\,, \tag{0.6}$$

alors $R(\lambda)$ *est injective et il existe un unique opérateur linéaire* A *tel que* $]\omega, \infty[\subset e(A)$ *et* $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ *pour tout* $\lambda > \omega$, *où* $e(A)$ *désigne l'ensemble résolvant de* A.

On dira que A *est générateur de* $(S(t))_{t\geq 0}$.

DÉFINITION 0.7 ([2], [12]). — *Soient* A *un opérateur dans un espace de Banach* X *et* α *un réel* ≥ 0. A *est dit générateur d'un semi-groupe* α*-fois intégré sur* X *si et seulement si il existe une famille* $(S(t))_{t\geq 0} \subset e(A)$ *fortement continue telle que* $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$ *et* $]\omega, \infty[\subset e(A)$ *vérifiant*

$$R(\lambda\,;A) = \lambda^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t)\,\mathrm{d}t \quad (\lambda > \max\{\omega, 0\})\,. \tag{0.7}$$

On dira que $(S(t))_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe* α*-fois intégré engendré par* A.

Remarques

a) L'intégrale ci-dessus est prise au sens de Bochner.

b) D'après le théorème d'unicité de la transformation de Laplace $(S(t))_{t\geq 0}$ est déterminée d'une façon unique.

c) Si A est générateur d'un semi-groupe α-fois intégré $(S(t))_{t\geq 0}$, $(\alpha > 0)$, alors A est aussi générateur de semi-groupe β-fois intégré pour $\beta > \alpha$.

On prendra $S_\beta x = j_{\beta-\alpha-1} \star Sx$ $(x \in X)$ et, on en déduit pour λ assez grand :

$$R(\lambda\,;\,A) = \lambda^\beta \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_\beta(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

PROPOSITION 0.8 ([2], [12]).— *Soit A le générateur d'un semi-groupe α-fois intégré $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ dans un espace de Banach X.*

Alors pour tout $x \in D(A)$ et tout $t \geq 0$, on a

$$S(t)x \in D(A) \quad \textit{et} \quad AS(t)x = S(t)Ax\,, \tag{0.8}$$

$$S(t)x = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\,x + \int_0^t S(s)Ax\,\mathrm{d}s\,. \tag{0.9}$$

De plus $\int_0^t S(s)x\,\mathrm{d}s \in D(A)$ pour tout $x \in X$ et tout $t \geq 0$ et on a

$$A\int_0^t S(s)x\,\mathrm{d}s = S(t)x - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\,x\,. \tag{0.10}$$

1. Caractérisation des classes d'interpolation à l'aide des semi-groupes intégrés

Soient X un espace de Banach et A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$ ($D(A)$ étant muni de la norme du graphe qu'on note $\|\cdot\|_A$). On suppose que A est générateur d'un semi-groupe α-fois intégré $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ vérifiant l'hypothèse

$$\big\|S(t)\big\| \leq M\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\,, \quad \forall\, t \geq 0\,. \tag{H}$$

Il existe de nombreux semi-groupes intégrés qui satisfont l'hypothèse (H).

Exemples 1.1

a) Soit $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ un semi-groupe borné de classe C_0 sur X, de générateur infinitésimal A. On pose

$$S(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,T(s)\,\mathrm{d}s \quad (\alpha > 0)\,,$$

$\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ définit un semi-groupe α-fois intégré sur X vérifiant (H) et de générateur A ([2] et [12]).

b) Soit $X = C_0(0\,,1] = \{f \in C[0\,,1] \mid f(0) = 0\}$. On définit sur X l'opérateur A suivant:

$$Af(x) = -f'(x) + \frac{\beta}{x} f(x) \quad (x \in (0\,,1])$$

avec β fixé dans $]0\,,1[$.

A n'engendre pas un semi-groupe de classe C_0, mais il engendre le semi-groupe 1-fois intégré suivant :

$$S(t)f(x) = \begin{cases} x^\beta \displaystyle\int_0^x y^{-\beta} f(y)\,\mathrm{d}y & \text{si } x \le t \\ x^\beta \displaystyle\int_{x-t}^x y^{-\beta} f(y)\,\mathrm{d}y & \text{si } x > t \end{cases}$$

et on a $\|S(t)\| \le Mt$, $\forall\, t \ge 0$ [3].

c) Soit X l'un des espaces suivants :

$$L^P(\mathbb{R}^n)\,, \quad C_0(\mathbb{R}^n)\,, \quad B \cup C(\mathbb{R}^n) \quad \text{ou} \quad C_b(\mathbb{R}^n)\,.$$

Soit $a \in C_\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, on suppose que a est une fonction réelle, homogène de degré $m > 0$ et telle que $a(\rho) = 0$ entraîne $\rho = 0$.

On définit l'opérateur $A_X := F^{-1}(ia\widehat{f})$, de domaine

$$D(A_X) = \{f \in X \mid F^{-1}(ia\widehat{f}) \in X\}\,.$$

A_X est générateur d'un semi-groupe α-fois intégré $\big(S(t)\big)_{t\ge 0}$ pour tout $\alpha > n_X$ avec

$$n_X = \begin{cases} n\left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{P}\right| & \text{si } X = L^P(\mathbb{R}^n),\ 1 \le P < \infty \\ \dfrac{n}{2} & \text{si } X = L^\infty(\mathbb{R}^n),\ C_0(\mathbb{R}^n),\ B \cup C(\mathbb{R}^n) \text{ ou } C_b(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

et

$$S(t) = F^{-1}(u_t\widehat{f})\,, \quad u_t(\rho) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, e^{isa(\rho)}\,\mathrm{d}s$$

et on a

$$\|S(t)\| \le M \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\,, \quad \forall\, t \ge 0 \quad \text{(cf. [12]).}$$

DÉFINITION 1.2. — *Soient X un espace de Banach et A un opérateur linéaire dans X. On suppose que A est générateur d'un semi-groupe α-fois intégré $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$, vérifiant* (H). *Soit $\theta \in \,]\,0\,,\,1\,[$, $P \in [\,1\,,\,+\infty\,]$.*

On appelle ensemble intermédiaire d'ordre θ et on note :

$$B_{\theta,P}(A) = \Big\{ u_0 \in X \;\Big|\; \big\|u_0\big\|_{B_{\theta,P}} = \big\|u_0\big\| + \Big\| t^{-\theta} \big\|u_0 - \Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}S(t)u_0\big\| \Big\|_{L^P_*(0,\infty)} < \infty \,. \Big\}\,.$$

Remarque. — Sous l'hypothèse (H), $t^{-\theta}\big\|u_0 - \Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}S(t)u_0\big\| \in L^P_*(1,\infty)$, $\forall\; u_0 \in X$. On vérifiera également que l'espace $B_{\theta,P}(A)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{B_{\theta,P}}$ est un espace intermédiaire entre $D(A)$ et X.

Pour montrer que $B_{\theta,P}(A)$ est un espace d'interpolation, on aura besoin du résultat suivant.

THÉORÈME 1.3 (équivalence de la fonction K). — *On suppose que A est générateur d'un semi-groupe α-fois intégré $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ vérifiant* (H).

Pour tout $u_0 \in X$ et tout $t > 0$, on a

$$K(t, u_0\,;\, X, D(A)) \leq (M + \alpha + 2)\big[\min(1,t)\|u_0\| + \omega(t,u_0)\big] \tag{1.1}$$

$$\min(1,t)\|u_0\| + \omega(t,u_0) \leq (M+2)K(t,u_0\,;\,X,D(A)) \tag{1.2}$$

avec

$$\omega(t,u_0) = \sup_{s\leq t}\big\|u_0 - \Gamma(\alpha+1)s^{-\alpha}S(s)u_0\big\|$$

(module de continuité d'ordre 1).

Démonstration

1) Soit $u_0 \in X$ et $V = \Gamma(\alpha+2)t^{-(\alpha+1)}\int_0^t S(s)u_0\,\mathrm{d}s$ ($\in D(A)$).

Alors

$$u_0 - V = (\alpha+1)t^{-(\alpha+1)}\int_0^t s^\alpha\big(u_0 - \Gamma(\alpha+1)s^{-\alpha}S(s)u_0\big)\,\mathrm{d}s\,,$$
$$tAV = (\alpha+1)\big(\Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}S(t)u_0 - u_0\big)\,.$$

Comme

$$K\big(t,u_0\,;\,X,D(A)\big) \leq \min\big\{\|u_0\|\,;\,\|u_0 - V\| + t\|V\| + t\|AV\|\big\}\,,$$

on en déduit 1.1.

2) Par ailleurs $\forall\ u_0 \in X$

$$\min(1,t)\|u_0\| \leq K\big(t, u_0\,;\, X, D(A)\big)\,, \quad \forall\, t > 0\,.$$

De plus, $\forall\ V \in D(A)$, $\forall\ t > 0$

$$\omega(t,u_0) \leq \omega(t,u_0 - V) + \omega(t,V) \leq (M+1)\|u_0 - V\| + Mt\big\|V\big\|_A\,.$$

La dernière majoration résulte de l'hypothèse (H) et de la formule (0.9). On obtient ainsi l'inégalité 1.2. □

COROLLAIRE 1.4.— *Les espaces $B_{\theta,P}(A)$ coïncident algébriquement et topologiquement avec les espaces d'interpolation réelle $\big(X, D(A)\big)_{\theta,P}$. De plus, les expressions suivantes définissent des normes équivalentes sur $B_{\theta,P}(A)$:*

i) $\|u_0\| = \Big\|t^{-\theta}\big\|u_0 + \Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}S(t)u_0\big\|\Big\|_{L^P_*(0,\infty)}$;

ii) $\|u_0\| + \big\|t^{-\theta}\omega(t,u_0)\big\|_{L^P_*(0,\infty)}$;

iii) $\Big\|t^{-\theta}K\big(t,u_0\,;\,X,D(A)\big)\Big\|_{L^P_*(0,\infty)}$.

COROLLAIRE 1.5.— *Pour tout $u_0 \in B_{\theta,P}(A)$, on a*

$$\big\|u_0 - \Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}S(t)u_0\big\| \leq C(\theta,P,M,\alpha)t^{\theta}\big\|u_0\big\|_{B_{\theta,P}}\,, \quad \forall\, t > 0\,. \qquad (1.3)$$

On donne aussi une autre caractérisation des espaces $\big(X, D(A)\big)_{\theta,P}$ en introduisant la résolvante de l'opérateur linéaire A, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 1.6 (théorème d'équivalence).— *Soient X un espace de Banach et A un générateur d'un semi-groupe α-fois intégré $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ vérifiant* (H).

On note :

$$J_t = \frac{1}{t}R\left(\frac{1}{t}\,;A\right)\,, \quad t > 0$$

et

$$D_{\theta,P} = \left\{ u_0 \in X \;\middle|\; \|u_0\|_{D_{\theta,P}} = \|u_0\| + \left\| t^{-\theta} \|u_0 - J_t u_0\| \right\|_{L^P_*(0,\infty)} < \infty \right\}.$$

Pour tout $\theta \in]0\,,\,1[$ *et tout* $P \in [1\,,\,\infty]$, *on a*

$$B_{\theta,P}(A) = D_{\theta,P}(A) \quad \textit{(de normes équivalentes).} \tag{1.4}$$

Démonstration

1) Soit $u_0 \in B_{\theta,P}(A)$, comme

$$u_0 - J_t u_0 = \int_0^\infty \frac{e^{-s/t}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha+1} \left(u_0 - \Gamma(\alpha+1) s^{-\alpha} S(s) u_0\right) \frac{\mathrm{d}s}{s},$$

de l'inégalité de Young sur $\mathbb{R}^+$ muni de la mesure de Haar ${}^{\mathrm{d}t}/_{t}$ on déduit en posant

$$c = \left\| \frac{e^{-1/s}}{\Gamma(\alpha+1)} \, s^{-(\alpha+\theta+1)} \right\|_{L^1_*(0,\infty)},$$

$$\left\| t^{-\theta} \|u_0 - J_t u_0\| \right\|_{L^P_*(0,\infty)} \le c \left\| s^{-\theta} \|u_0 - \Gamma(\alpha+1) s^{-\alpha} S(s) u_0\| \right\|_{L^P_*(0,\infty)},$$

d'où $u_0 \in D_{\theta,P}(A)$.

2) Soit $u_0 \in D_{\theta,P}(A)$, du lemme suivant qui se démontre grâce à la formule (0.9).

LEMME 1.7.— *Pour tout* $u_0 \in X$, *et tout* $t > 0$, *on a*

$$\left\| u_0 - \Gamma(\alpha+1) t^{-\alpha} S(t) u_0 \right\| \le (M+1)\left[\|u_0 - V\| + t\|AV\|\right], \quad \forall\, V \in D(A). \tag{1.5}$$

On déduit, en posant $V = J_t u_0$ et en remarquant que $tAJ_t u_0 = J_t u_0 - u_0$, l'inégalité

$$\left\| t^{-\theta} \|u_0 - \Gamma(\alpha+1) t^{-\alpha} S(t) u_0\| \right\|_{L^P_*(0,\infty)} \le 2(M+1) \left\| t^{-\theta} \|u_0 - J_t u_0\| \right\|_{L^P_*(0,\infty)},$$

d'où $u_0 \in B_{\theta,P}(A)$. □

2. Méthode des traces et des sommes

D'après la remarque de la définition 1.2, on se limite à travailler sur $]0\,,1[$.

THÉORÈME 2.1 (théorème des traces). — *Soit X un espace de Banach réflexif ou à dual séparable. On suppose que A est générateur d'un semi-groupe α-fois intégré $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ sur X vérifiant* (H).

Les propriétés suivantes sont équivalentes : $\forall\ u_0 \in \overline{D(A)}$,

1) $u_0 \in B_{\theta,P}(A)$

2) $\exists\ v(t)$ absolument continue de $]0\,,1[\to X$, continue sur $[0\,,1]$ avec $v(0)=u_0$ et telle que $v(t)\in D(A)$ p.p.

$$t^{1-\theta}\big\|Av(t)\big\|\,,\ t^{1-\theta}\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t)\right\|\in L^P_*(0,1)\,.$$

Démonstration

a) Pour montrer que 1) entraîne 2), on a besoin des deux lemmes suivants.

LEMME 2.2 (lemme de Hardy [5], [10]). — *Soit $\psi(s)$ une fonction mesurable, positive sur $]0\,,1[$; pour $\gamma>0$, $1\leq P\leq\infty$, on a*

$$\left\|t^{-\gamma}\int_0^t \psi(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}\right\|_{L^P_*(0,1)}\leq\frac{1}{\gamma}\left\|s^{-\gamma}\psi(s)\right\|_{L^P_*(0,1)} \tag{2.1}$$

$$\left\|t^{-\gamma}\int_t^1 \psi(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}\right\|_{L^P_*(0,1)}\leq\frac{1}{\gamma}\left\|s^{-\gamma}\psi(s)\right\|_{L^P_*(0,1)}. \tag{2.2}$$

LEMME 2.3. — *Soit A un générateur d'un semi-groupe α-fois intégré $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ vérifiant* (H), *on a*

$$\forall\ u_0\in\overline{D(A)}\,,\quad \lim_{t\to 0}\big\|\Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}S(t)u_0-u_0\big\|=0\,. \tag{2.3}$$

Démonstration du lemme 2.3

Soit $u_0 \in \overline{D(A)}$, $u_0 = \lim_{n\to\infty} u_n$, $u_n \in D(A)$. De la proposition 0.8 et de l'hypothèse (H), on déduit :

$$\left\|\Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}S(t)u_0 - u_0\right\| \leq (M+1)\|u_n - u_0\| + \frac{M}{\alpha+1}t\|Au_n\|,$$
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, t > 0\,,$$

d'où on déduit (2.3). □

Soit $u_0 \in B_{\theta,P}(A)$, soit $v(t) = \left(\Gamma(\alpha+2)/t^{\alpha+1}\right)\int_0^t S(s)u_0\,\mathrm{d}s$ ($\in D(A)$). Du lemme 2.3, on obtient : $u_0 = \lim_{t\to 0} v(t)$.

Comme $v(t) \in W^{1,1}(0,1;X) \subset \widetilde{W}^{1,1}(0,1;X)$, elle est absolument continue sur $[\,0\,,\,1\,]$ [6]. Or $t^{1-\theta}\left\|Av(t)\right\| = (\alpha+1)t^{-\theta}\left\|u_0 - \Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}S(t)u_0\right\| \in L_*^P(0,1)$ en écrivant

$$v'(t) = \frac{\alpha+1}{t}\left[\Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}S(t)u_0 - u_0\right] +$$
$$+ \frac{(\alpha+1)^2}{t^{\alpha+2}}\int_0^t s^{\alpha+1}\left[u_0 - \Gamma(\alpha+1)s^{-\alpha}S(s)u_0\right]\frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

On déduit du lemme 2.2 que $t^{1-\theta}\left\|v'(t)\right\| \in L_*^P(0,1)$, d'où la propriété 2).

b) v étant absolument continue dans un espace de Banach réflexif ou à dual séparable, on en déduit en appliquant le lemme 1.7 que

$$t^{-\theta}\left\|u_0 - \Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}S(t)u_0\right\| \leq$$
$$\leq (M+1)\left[t^{-\theta}\int_0^t \left\|v'(s)\right\|\mathrm{d}s + t^{1-\theta}\left\|Av(t)\right\|\right]\ ,\ \text{p.p. } t\,.$$

Du lemme 2.2 et de la propriété 2), on déduit que $u_0 \in B_{\theta,P}(A)$. □

Lorsque X est un espace de Banach quelconque, on obtient un résultat analogue en remplaçant $v'(t)$ par la dérivée de sa variation

$$V_v(t) = \mathrm{var}\big(v\,,\,[\,t\,,\,1\,]\big)$$
$$= \sup_{t=t_1<t_2<\cdots<t_n=1}\sum_{i=1}^{n-1}\left\|v(t_{i+1}) - v(t_i)\right\|\,,\quad \text{(cf. [6]).}$$

THÉORÈME 2.4 (méthode des traces [17]).— *Soit X un espace de Banach, soit A un générateur d'un semi-groupe α-fois intégré $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ vérifiant* (H).

Les propriétés suivantes sont équivalentes : $\forall\ u_0 \in \overline{D(A)}$

1) $u_0 \in B_{\theta,P}(A)$;

3) $\exists\ v(t)$ *absolument continue de* $]\,0\,,\,1\,[$ *dans* X*, continue sur* $[\,0\,,\,1\,]$ *avec* $v(0) = u_0$ *et telle que* $v(t) \in D(A)$ p.p. t :

$$t^{1-\theta}\big\|Av(t)\big\|\,,\ t^{1-\theta}\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_v(t)\right\| \in L^P_*(0,1)\,.$$

Proposition 2.5 (méthode des sommes). — *Soient* X *un espace de Banach et* A *un générateur d'un semi-groupe* α*-fois intégré* $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ *vérifiant* (H).

Les propriétés suivantes sont équivalentes $\forall\ u_0 \in \overline{D(A)}$

1) $u_0 \in B_{\theta,P}(A)$;

4) $\exists\ v_1(t)$*,* $v_2(t)$ *fonctions mesurables de* $[\,0\,,\,1\,]$ *dans* X*, l'application* $t \to v_1(t)$ *est continue sur* $[\,0\,,\,1\,]$*,*

$$u_0 = v_1(t) + v_2(t) \text{ p.p. } t \in]\,0\,,\,1\,[\textit{ telles que } v_1(t) \in D(A) \text{ p.p. :}$$

$$t^{1-\theta}\big\|Av_1(t)\big\| \in L^P_*(0,1)\,, \quad t^{-\theta}\big\|v_2(t)\big\| \in L^P_*(0,1)\,.$$

Démonstration

i) 4) $\Rightarrow$ 1) se déduit du lemme 1.7 en posant $v = v_1(t)$.

ii) 1) $\to$ 4) s'obtient en posant

$$v_1(t) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{t^{\alpha+1}}\int_0^t S(s)u_0\,\mathrm{d}s\,. \ \square$$

3. Théorèmes d'interpolation et dualité

Théorème 3.1 (théorème d'interpolation). — *Soient* X_1 *et* X_2 *deux espaces de Banach de normes respectives* $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_2$*. On considère deux opérateurs linéaires* A_1 *et* A_2 *respectivement sur* X_1 *et* X_2*.*

On suppose que A_i *est générateur d'un semi-groupe* α_i*-fois intégré* $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ *vérifiant* (H)*,* $i = 1,\ 2$.

Soit T une application localement lipschitzienne de X_1 dans X_2 appliquant $D(A_1)$ dans $D(A_2)$ et telle que

$$\forall\, x \in D(A_1)\,, \quad \|A_2 T x\|_2 \leq c\|A_1 x\|_1 + \omega(\|x\|_1) \tag{3.1}$$

avec ω une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et $c \in \mathbb{R}^+$.

Alors T applique $B_{\theta,P}(A_1)$ dans $B_{\theta,P}(A_2)$ pour tout $\theta \in]\,0\,,\,1\,[$ et tout $P \in [\,1\,,\,\infty\,]$.

Démonstration

On montre ce théorème en utilisant la méthode des sommes. Soit $u_0 \in B_{\theta,P}(A_1)$, $Tu_0 = Tv(t) + v_2(t)$, avec

$$v(t) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + 2)}{t^{\alpha_1+1}} \int_0^t S_1(s) u_0 \,\mathrm{d}s \quad (\in D(A_1))\,.$$

Les applications ω et v étant continues, on en déduit de l'inégalité 3.1 et de la proposition 0.8

$$t^{1-\theta}\|A_2 T v(t)\|_2 \in L_*^P(0,1)\,.$$

Puisque T est localement lipschitzienne, on a sur $]\,0\,,\,\zeta\,[$, $\zeta > 0$

$$t^{-\theta}\|Tu_0 - Tv(t)\|_2 \leq L t^{-\theta}\|u_0 - v(t)\|_1 \in L_*^P(0,\zeta)\,, \quad (L > 0)\,.$$

Or l'application $t \mapsto \|Tu_0 - Tv(t)\|$ est continue sur $[\,\zeta\,,\,1\,]$.

On obtient

$$t^{-\theta}\|Tu_0 - Tv(t)\|_2 \in L_*^P(0,1)\,,$$

d'où $Tu_0 \in B_{\theta,P}(A_2)$. □

Remarque. — Si T est une application linéaire continue de X_1 dans X_2, appliquant continûment $D(A_1)$ dans $D(A_2)$ (autrement dit l'inégalité 3.1 est vérifiée avec $\omega(r) = c' r$, $\forall\, r \in \mathbb{R}^+$), on retrouve le théorème d'interpolation classique, théorème 0.3.

THÉORÈME 3.2 (théorème de dualité). — *Soit X un espace de Banach réflexif et séparable, et A un générateur d'un semi-groupe α-fois intégré $(S(t))_{t\geq 0}$ vérifiant* (H).
On note

$$T(t) = S(t)|_{D(A)} \in \mathcal{L}(D(A), D(A))\,.$$

Si $H(t)$ (resp. ${}^tA$) désigne le transposé de $T(t)$ (resp. A) dans $\mathcal{L}(D(A), D(A))$ (resp. $\mathcal{L}(D(A), X)$) [14], alors ${}^tA$ est un générateur du semi-groupe $\alpha+1$-fois intégré $(G(t))_{t\geq 0}$ sur $D(A)'$ vérifiant (H) *: $G(t) = \int_0^t H(s)\,\mathrm{d}s$ et on a*

$$B'_{\theta,P}(A) = B_{1-\theta,P'}({}^tA) \quad \textit{(de normes équivalentes)}$$

pour tout $\theta \in]\,0\,,\,1\,[$, et tout $P \in [\,1\,,\,\infty\,[$, $1/P + 1/P' = 1$.

Démonstration

Puisque X est un espace de Banach réflexif et $\|R(\lambda\,;\,A)\| \leq M/\lambda$, $\forall\,\lambda > 0$, on obtient $\overline{D(A)} = X$ [11]. Donc on peut considérer X' comme un sous-espace de $D(A)'$: $X' \subset D(A)'$ (injection continue).

L'application $t \to H(t)a^*$, $a^* \in D(A)'$, est $*$-faiblement continue dans $D(A)'$, espace de Banach réflexif et séparable. Donc, d'après le théorème de Pettis [18], elle est fortement mesurable. Par conséquent, l'application $t \mapsto G(t) = \int_0^t H(s)a^*\,\mathrm{d}s$ est bien définie et est fortement continue. On a

$$\left(a^*, R(\lambda\,;\,A)a\right) = \left(\lambda^{\alpha+1}\int_0^\infty e^{-\lambda t}G(t)a^*\,\mathrm{d}t\,,\,a\right)$$

pour tout $a^* \in D(A)'$ et tout $a \in D(A)$.

Or

$${}^tR(\lambda\,;\,A) = R(\lambda\,;\,{}^tA) \quad \text{et} \quad D(A)'' = D(A)\,,$$

on en déduit

$$R(\lambda\,;\,{}^tA)a^* = \lambda^{\alpha+1}\int_0^\infty e^{-\lambda t}G(t)a^*\,\mathrm{d}t\,, \quad \forall\,\lambda > 0 \text{ et } \forall\,a^* \in D(A)'\,,$$

d'où $(G(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe $\alpha+1$-fois intégré sur $D(A)'$ vérifiant (H) et de générateur ${}^tA$ de domaine $D({}^tA) = X'$.

On obtient

$$\begin{aligned} B_{1-\theta,P'}({}^tA) &= \left(D(A)', X'\right)_{1-\theta,P'} \quad \text{(corollaire 1.4)} \\ &= \left(D(A), X\right)'_{1-\theta,P} \quad \text{(théorème 3.7.1 de [8])} \\ &= B'_{\theta,P}(A)\,.\ \square \end{aligned}$$

DÉFINITION 3.3. — *Soient A et B deux opérateurs linéaires sur un espace de Banach X. On dit que B est dominé par A si $D(A) \subset D(B)$ et s'il existe un réel $k \in]\,0\,,\,1\,[$ et une fonction continue $c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tels que*

$$\forall\,x \in D(A)\,, \quad \|Bx\| \leq k\|Ax\| + c(\|x\|)\,. \tag{3.2}$$

THÉORÈME 3.4 (théorème de perturbation). — *Soient X un espace de Banach, A et B deux opérateurs linéaires sur X tels que B soit dominé par A. On suppose que A et $A+B$ sont des générateurs des semi-groupes respectivement, α-fois intégré $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ et β-fois intégré $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ vérifiant l'hypothèse* (H).

On a pour tout $\theta \in]\,0\,,\,1\,[$ et tout $P \in [\,1\,,\,\infty\,]$:

$$B_{\theta,P}(A) = B_{\theta,P}(A+B)\,.$$

Démonstration

i) Soit $u_0 \in B_{\theta,P}(A)$, $u_0 = v_1(t) + v_2(t)$ avec

$$v_1(t) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{t^{\alpha+1}} \int_0^t S(s)u_0 \,\mathrm{d}s \quad (\in D(A+B))\,.$$

De l'inégalité (3.2), on déduit que

$$t^{1-\theta}\big\|(A+B)v_1(t)\big\| \leq (1+k)(1+\alpha)t^{-\theta}\big\|u_0 - \Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}S(t)u_0\big\| + c\big\|v_1(t)\big\|\,.$$

L'application v_1 est continue sur $[\,0\,,\,1\,]$, on obtient

$$t^{1-\theta}\big\|(A+B)v_1(t)\big\| \in L_*^P(0,1)\,.$$

Or

$$\begin{aligned} t^{-\theta}\big\|v_2(t)\big\| \leq (\alpha+1)t^{-(\theta+\alpha+1)} \times \\ \times \int_0^t s^{\alpha+1}\big\|u_0 - \Gamma(\alpha+1)s^{-\alpha}S(s)u_0\big\| \frac{\mathrm{d}s}{s} \in L_*^P(0,1)\,, \end{aligned}$$

d'où $u_0 \in B_{\theta,P}(A+B)$.

ii) Soit $u_0 \in B_{\theta,P}(A+B)$, $\exists\ v_1(t)$, $v_2(t)$ telles que $u_0 = v_1(t) + v_2(t)$ p.p.

$$t^{1-\theta}\big\|(A+B)v_1(t)\big\|\,, \quad t^{-\theta}\big\|v_2(t)\big\| \in L_*^P(0,1)\,.$$

On a

$$0 \leq (1-k)\big\|Av_1(t)\big\| \leq \big\|(A+B)v_1(t)\big\| + c\big\|v_1(t)\big\|\,,$$

donc

$$t^{1-\theta}\big\|Av_1(t)\big\| \in L_*^P(0,1)\,,$$

d'où

$$u_0 \in B_{\theta,P}(A)\,. \ \square$$

Exemple 3.5

Soit A un générateur d'un semi-groupe 1-fois intégré $\big(S(t)\big)_{t>0}$, $\beta \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}\beta \leq 0$. On pose $B = \beta I_{\overline{D(A)}}$. Grâce à la proposition 3.1 du [13], on obtient que $A + B$ soit générateur du semi-groupe 1-fois intégré $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ donné par

$$T(t) = e^{\beta t} S(t) - \beta \int_0^t e^{\beta s} S(s)\, \mathrm{d}s\,.$$

On vérifie facilement, sous l'hypothèse $\operatorname{Re}\beta \leq 0$, que si $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ vérifie (H), alors $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ la vérifie aussi. On vérifie aussi que l'inégalité 3.2 est satisfaite, donc

$$\left\{u_0 \in X \;\middle|\; t^{-\theta} \left\| u_0 - \frac{S(t)}{t}\, u_0 \right\| \in L^P_*(0,\infty)\right\} =$$
$$= \left\{u_0 \in X \;\middle|\; t^{-\theta} \left\| u_0 - \frac{T(t)}{t}\, u_0 \right\| \in L^P_*(0,\infty)\right\}.$$

THÉORÈME 3.6.— *Soient X un espace de Banach, et A_i, $i = 1, \ldots, n$ des opérateurs linéaires dans X de domaine $D(A_i)$, $i = 1, \ldots, n$.*

On suppose que :

i) A_i est générateur d'un semi-groupe α_i-fois intégré $\big(S_i(t)\big)_{t\geq 0}$ vérifiant (H), $i = 1, \ldots, n$.

ii) $S_i(t)S_j(s) = S_j(s)S_i(t)$, $1 \leq i, j \leq n$, $s, t \geq 0$.

On définit l'opérateur A de domaine $D(A) = \bigcap_{i=1}^n D(A_i)$ muni de la norme

$$\|a\|_A = \|a\| + \sum_{i=1}^n \|A_i a\|$$

par

$$Aa = (A_1 a, \ldots, A_n a)\,.$$

Alors

$$\big(X, D(A)\big)_{\theta,P} = B_{\theta,P}(A) \quad \textit{(de normes équivalentes)}$$

pour tout $\theta \in]\,0\,,1\,[$, et tout $P \in [\,1\,,\infty\,]$, avec

$$B_{\theta,P}(A) = \Big\{u_0 \in X \;\Big|\; \|u_0\|_{B_{\theta,P}} = \|u_0\| +$$
$$+ \sum_{i=1}^n \Big\| t^{-\theta} \big\| u_0 - \Gamma(\alpha_i + 1) S_i(t) u_0 \big\| \Big\|_{L^P_*} \leq \infty \Big\}.$$

Remarque. — Ce théorème nous donne le résultat suivant, qui n'est pas en général vérifié :

$$\left(X, \bigcap_{i=1}^{n} D(A_i)\right)_{\theta,P} = \bigcap_{i=1}^{n} \big(X, D(A_i)\big)_{\theta,P} .$$

Démonstration

i) Pour tout $u_0 \in X$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} K\big(t, u_0\,;\, X, D(A_i)\big) \leq nK\big(t, u_0\,;\, X, D(A)\big) .$$

Or

$$K\big(t, u_0\,;\, X, D(A_i)\big) \simeq \|u_0\| + \Big\| t^{-\theta} \big\| u_0 - \Gamma(\alpha_i + 1) t^{-\alpha_i} S_i(t) u_0 \big\| \Big\|_{L^P_*(0,\infty)}$$

(corollaire 1.4), on en déduit que

$$\big(X, D(A)\big)_{\theta,P} \subset B_{\theta,P}(A) \quad \text{(injection continue)}.$$

ii) Pour montrer la deuxième inclusion, il suffit, d'après [8], qu'il existe une application mesurable $u :]\,0\,,\,\infty\,[\to X$ telle que

a) $\Big\| t^{1-\theta} \big\| u(t) \big\|_A \Big\|_{L^P_*(0,\infty)} \leq c_1 \big\| u_0 \big\|_{B_{\theta,P}(A)}$;

b) $\Big\| t^{1-\theta} \big\| u'(t) \big\|_A \Big\|_{L^P_*(0,\infty)} \leq c_2 \big\| u_0 \big\|_{B_{\theta,P}(A)}$;

a) $\lim\limits_{t \to 0} \big\| u(t) - u_0 \big\| = 0.$

Soit $u_0 \in B_{\theta,P}(A)$, $u(t) = \phi(t) g(t) u_0$ avec

$$g(t) u_0 = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\Gamma(\alpha_i + 2)}{t^{\alpha_i + 1}} \right) \int_0^t \cdots \int_0^t S_1(s_1) \ldots$$
$$\ldots S_n(s_n) u_0 \,\mathrm{d}s_1 \times \cdots \times \mathrm{d}s_n \quad (\in D(A)) ,$$

$\phi \in C^\infty([\,0\,,\,\infty\,[)$; $\phi(0) = 1$, $\phi(t) = 0$ sur $[\,1\,,\,\infty\,[$, $\big|\phi(t)\big| \leq 1$ et $\big|\phi'(t)\big| \leq K$, $t \geq 0$.

On obtient donc que $B_{\theta,P}(A) \subset \big(X, D(A)\big)_{\theta,P}$, d'où le théorème 3.6. □

4. Applications

A. Application à l'opérateur de Schrödinger

M. Hieber a montré dans sa thèse [12] que l'opérateur de Schrödinger $i\Delta$ de domaine $W^{2,q}(\mathbb{R}^n)$ engendre un semi-groupe de classe C_0 sur $L^q(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $q = 2$; et il engendre un semi-groupe α-fois intégré $\big(S_\alpha(t)\big)_{t\geq 0}$ sur $L^q(\mathbb{R}^n)$ vérifiant (H).

$\big(S_\alpha(t)\big)_{t\geq 0}$ est donné par

$$S_\alpha(t)f : F^{-1}(u_t\widehat{f}) \quad (f \in L^q(\mathbb{R}^n))$$

avec

$\widehat{f}$: l'image de Fourier de f,

$u_t(\xi) = \displaystyle\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-is|\xi|^2}\, \mathrm{d}s \ (\xi \in \mathbb{R}^n)$,

et $\alpha :> n\left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{q}\right|$, $q \in]\,1\,,\,\infty\,[$.

On obtient alors le résultat suivant qui se déduit du corollaire 1.3 et qui utilise la caractérisation bien connue des espaces de Besov dans [1], [8] et [9].

PROPOSITION 4.1.— *Soit $\theta \in]\,0\,,\,1\,[$, $P \in [\,1\,,\,\infty\,]$ et $q \in]\,1\,,\,\infty\,[$, on a*

$$\begin{aligned} B_{\theta,P}(i\Delta) = \Big\{ f \in L^q(\mathbb{R}^n) \;\Big|\; \|f\|_{B_{\theta,P}} &= \|f\|_q + \\ &+ \Big\| t^{-\theta} \big\| f - \Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha} S_\alpha(t) f \big\|_q \Big\|_{L^P_*(0,\infty)} < \infty \Big\} \\ &= B_P^{\theta,q}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{(de normes équivalentes)}, \end{aligned}$$

où $B_P^{\theta,q}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Besov.

B. Existence de solution de problème de Cauchy dans des espace intermédiaires

Soient X un espace de Banach et A un opérateur linéaire dans X. On suppose que A est générateur d'un semi-groupe n-fois intégré $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ ($n \in \mathbb{N}_0$) vérifiant (H).

On montre donc grâce au corollaire 1.3 et le théorème 0.3 que :

$\left(S_{\theta,P}(t)\right)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe n-fois intégré sur $B_{\theta,P}(A)$ de générateur infinitésimal $\overline{A}_{\theta,P}$ avec

$$S_{\theta,P}(t) = S(t)\big|_{B_{\theta,P}}(A)$$
$$D(A_{\theta,P}) = \left\{x \in D(A) \mid Ax \in B_{\theta,P}(A)\right\}, \quad A_{\theta,P}x = Ax\,,$$

où $\theta \in]\,0\,,\,1\,[$ et $P \in [\,1\,,\,\infty\,]$.

On déduit donc du théorème d'existence de solutions de problème de Cauchy ([2], prop. 5.4) le résultat suivant.

PROPOSITION 4.2.— *Soit* $f \in Cn+1\big([\,0\,,\,T\,]\,,\,B_{\theta,P}(A)\big)$ $(T>0)$ *;* *si* $u_1 := f(0) \in D(A_{\theta,P})$*,* $u_2 := Au_1 + f'(0) \in D(A_{\theta,P}), \ldots, u_n = Au_{n-1} + f^{(n-1)}(0) \in D(A_{\theta,P})$*, alors il existe une fonction unique* $u \in C^1\big([\,0\,,\,T\,]\,,\,B_{\theta,P}(A)\big)$ *vérifiant* $u(t) \in D(A_{\theta,P})$ *et telle que*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & \textit{sur}\ [\,0\,,\,T\,] \\ u(0) = 0\,. \end{cases}$$

Bibliographie

[1] ADAMS (R.A.) .— *Sobolev spaces*, Academic Press (1975).

[2] ARENDT (W.) .— *Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems*, Israël J. of Math., **99**, n° 3 (1987).

[3] ARENDT (W.) .— *Resolvent positive operators*, Proc. London Math. Soc. (3), **54** (1987) pp. 321-349.

[4] ARENDT (W.), NEUBRANDER (F.) and SCHLOTTERBECK (U.) .— *Interpolation of semigroups and integrated semigroups*, Semesterbericht Funktionalanalysis Tübigen, Wintersemester (1988/89).

[5] BREZIS (D.) .— *Interpolation et opérateurs non linéaires*, Thèse, Paris VI (1974).

[6] BREZIS (H.) .— *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Mathematics Studies (1973).

[7] BREZIS (H.) .— *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson (1983).

[8] BERGH (J.) and LOFSTROM (J.) .— *Interpolation spaces. An introduction*, Springer, Berlin - Heidelberg - New-York (1976).

[9] BUTZER (P.L.) and BERENS (H.) .— *Semigroups of operators and approximation,*
Springer-Verlag, Berlin (1967).

[10] DUFETEL (A.) .— *Interpolation non linéaire associée à un opérateur m-accrétif dans un espace de Banach,*
Thèse, Besançon (1981).

[11] DA PRATO (G.) and SINESTRARI (E.) .— *Differential operators with non dense domain,*
Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (1986).

[12] HIEBER (M.) .— *Integrated semigroup and differential operators on L^p,*
Dissertation, Tübingen (1989).

[13] KELLERMANN (H.) and HIEBER (M.) .— *Integrated semigroups,*
J. Functional Analysis, **84** (1986) pp. 160-180.

[14] KHOAN (VO-KHAC) .— *Distribution. Analyse de Fourier. Opérateurs aux dérivées partielles,*
Tome 1, Vuibert (1972).

[15] LIONS (J.L.) .— *Sur les espaces d'interpolation; dualité,*
Math. Scand., **9** (1961) pp. 147-177.

[16] LIONS (J.L.) et PEETRE (J.) .— *Sur une classe d'espaces d'interpolation,*
Pub. de l'I.H.E.S., **19** (1964) pp. 5-68.

[17] MARJANI (M.) .— *Interpolation linéaire associée à un générateur de semi-groupe intégré et estimation de la fonction K,*
Thèse, Besançon (1990).

[18] YOSIDA (K.) .— *Functional Analysis,*
Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New-York (1968).