ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HAMID ZAHIR

Représentation-$*$ régulière des groupes de Lie compacts

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 2, nº 1 (1993), p. 117-139

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1993_6_2_1_117_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. II, n° 1, 1993

Représentation-$*$ régulière des groupes de Lie compacts(*)

HAMID ZAHIR(1)

RÉSUMÉ. — Dans cet article on s'intéresse à la description de la représentation régulière d'un groupe de Lie compact G en quantifiant par déformation la variété symplectique $T^*(G)$. Il exsite dans la littérature deux produits-$*$ sur ce type de variété. Nous les avons étudiés dans cette optique de représentation de G, et nous avons réalisé la représentation régulière avec l'un d'eux.

ABSTRACT. — In this paper, we realize the cotangent bundle of a compact Lie groups as a coadjoint orbit of a larger group, that allows us to get a geometrical description of the regular representation, by quantization of this one by deformation.

0. Introduction

L'une des implications de la théorie de la quantification par déformation ([5]) dans l'analyse harmonique est la construction explicite de représentations des groupes de Lie, en construisant ce qu'on appelle des représentations-$*$, plus précisément :

soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\underline{g}$, W une orbite de la représentataion coadjointe de G dans le dual $\underline{g}^*$ de $\underline{g}$ et $d\mu$ une mesure invariante sur W.

(*) Reçu le 17 novembre 1992

(1) Département de Mathématiques, U.R.A. CNRS 399, Université de Metz, Ile de Saulcy, F-57045 Metz cedex 01 (France)

DÉFINITION . — *Une représentation-$*$ de G est une application définie sur G qui associe à chaque élément g de G une distribution $E(g)$ sur W telle que :*

i) $E(g^{-1}) = \overline{E(g)}$;

ii) si $f \in C_c^\infty(G)$, *E détermine une transformation de Fourier $\mathcal{E}$ par*

$$\mathcal{E}(f) = \int_G f(g)\, E(g^{-1})\, \mathrm{d}g\,,$$

c'est-à-dire $\mathcal{E}(f)$ ainsi défini est une fonction de $L^1(W)$. De plus, $\operatorname{Ker}\mathcal{E}$ *est stable par la convolution*

$$\big(i.e.,\quad \mathcal{E}(f) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}(f \times f') = \mathcal{E}(f' \times f) = 0\,,\quad \forall\, f' \in C_c^\infty(G)\big)\,;$$

iii) si $\widetilde{f}(g) = \overline{f(g^{-1})}\Delta(g)$ *($g \in G$, $\Delta(g)$ est la fonction module sur G), alors*

$$\big\langle \mathcal{E}(f)\,,\, \mathcal{E}(f')\big\rangle = \int_W \mathcal{E}(f \times \widetilde{f'})\, \mathrm{d}\mu\,,$$

est un produit scalaire sur l'espace $N = \mathcal{E}\big(C_c^\infty(G)\big) \subset L^1(W)$, *en particulier,* $\big\langle \mathcal{E}(f)\,,\, \mathcal{E}(f)\big\rangle$ *est strictement positif.*

Avec ceci, on définit sur N un produit-$*$ en posant $\mathcal{E}(f) * \mathcal{E}(f') = \mathcal{E}(f \times f')$.

D'autre part si on note R_g l'action régulière à droite de G sur N, alors on a une représentation e de G dans N définie par

$$e(g)\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}(R_g f)\,,$$

bien sûr si N est muni du produit scalaire défini ci-dessus, e est unitaire.

Une représentation-$*$ sera dite associée à la représentation unitaire (ρ, V) de G, si $(e, \widehat{N})$ ($\widehat{N}$ est le complété de N pour le produit scalaire ci-dessus) est unitairement équivalente à (ρ, V) à une normalisation près de $\mathrm{d}\mu$, c'est-à-dire s'il existe un opérateur unitaire T tel que :

$$e(g) \cdot T(u) = T\big(\rho(g) \cdot u\big)\,.$$

Ce programme, initié par C. Fronsdal [7], a été réalisé :

- par D. Arnal et J.-C. Cortet, dans le cas des groupes de Lie nilpotents [1], des groupes de Lie exponentiels [2], puis pour le revêtement universel $\widetilde{E}_2$ du groupe $\mathrm{SO}(2) \times \mathbb{R}^2$ [3];
- par D. Arnal, M. Cahen et S. Gutt [4] dans le cas compact.

Ici, on s'intéresse à la description de la représentation régulière d'un groupe de Lie compact, celui-ci peut être considéré comme un sous-groupe de $\mathrm{SO}(V)$ ou V est un espace euclidien de dimension $n+1$ (voir [11]), et alors le fibré cotangent $T^*(G)$ de G se réalise comme une orbite de la représentation coadjointe du groupe produit semi-direct de G avec n exemplaires de V.

La construction de la représentation-$*$ associée à cette orbite nous permet de décrire la représentation régulière de G.

Rappelons que sur $T^*(G)$, deux produits-$*$ ont été construits, l'un par A. Lichnerowicz [10], l'autre par S. Gutt [8]; on utilise celui de S. Gutt, les polarisations naturelles de celui de A. Lichnerowicz définissent, en effet, un espace de fonctions réduit à zéro.

Ainsi, dans la section 1., on fera quelques rappels pour fixer les notations, on réalisera $T^*(G)$ comme une orbite de $G \times V_n = G \times V \times V \times \cdots \times V$ n fois. Ensuite, on construira la représentation induite unitaire associée à cette orbite par la méthode des orbites de Kirillov.

Dans la section 2, on établira une correspondance entre un sous-espace B de l'espace $C^\infty(T^*(G))$ et l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $L^2(G)$ par $f \to A_f$, avec

$$A_f(\phi)(g) = \int_C \int_{\mathrm{g}^*} \mathrm{e}^{i\alpha(X)} f\Big(g \exp \frac{X}{2}\,,\, \alpha\Big)\, \phi(g \exp X)\, \mathrm{d}X\, \mathrm{d}\alpha\,,$$

où C est un ouvert de $\underline{\mathrm{g}}$ défini dans paragraphe 1.1. Ceci nous permet de définir un produit associatif dans B par

$$A_{f * f'} = A_f \circ A_{f'}\,.$$

On montrera que ce produit associatif correspond au produit-$*$ de S. Gutt [8] pour la valeur du paramètre $\nu = -i/2$. Ensuite, on définira la représentation-$*$ associée à l'orbite $T^*(G)$. Puis, on définira la transformée de Fourier adaptée sur $G \times V_n$, et on en déduira par restriction une description géométrique de la représentation régulière de G.

Section 1

1.0 Produit-$*$ [5]

DÉFINITION 1.0.1. — *Soit N une algèbre associative et de Lie de fonctions C^∞ sur une variété de Poisson W pour le crochet de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$. Un produit-$*$ est une déformation formelle de N, c'est-à-dire une application de $N \times N$ vers l'espace $E(N,\nu)$ des séries formelles en ν à coefficients dans N :*

$$u * v = \sum_{r \geq 0} \nu^r C^r(u,v)$$

ayant les propriétés :

i) $*$ *prolongé à $E(N,\nu)$ définit une loi associative,*

ii) $C^0(u,v) = uv$,

iii) $C^1(u,v) = \{u,v\}$,

iv) $C^r(u,v) = (-1)^r C^r(v,u)$,

v) $C^r(1,v) = C^r(v,1) = 0$ *$(r > 1)$,*

vi) les C^r sont des opérateurs bilinéaires.

Si les C^r sont tous bidifférentiels, on dira que le produit-$*$ est différentiel. Les conditions *iii)* et *iv)* impliquent que

$$[u,v]_* = \frac{1}{2\nu}(u * v - v * u)$$

est une déformation formelle du crochet de Poisson. *v)* et *iv)* assurent que 1 reste l'unité de la structure associative et que $*$ est distributif par rapport à l'addition. Si ν est "imaginaire pur", $u \mapsto \overline{u}$ est une involution de l'algèbre associative $E(N,\nu)$ obtenue. Dans la suite, on s'intéressera à des produits-$*$ non formels définis en général par des formules intégrales, et, pour une valeur fixée du paramètre ν, le développement (1) étant un développement asymptotique.

1.1 Groupes compacts [9]

G étant un groupe de Lie compact, soit $\mathbb{T}$ un tore maximal dans G, $\underline{t}$ son algèbre de Lie, $\underline{\Delta}$ le système des racines de la complexifiée $\underline{g}^{\mathbb{C}}$ de $\underline{g}$ par rapport à $\underline{t}^{\mathbb{C}}$, et $D(\underline{g})$ le diagramme :

$$D(\underline{g}) = \left\{ H \in \underline{t} \text{ tel que } \alpha(H) \in 2i\pi\mathbb{Z}\,, \text{ pour un certain } \alpha \in \underline{\Delta} \right\}.$$

Notons $\underline{t}_r = \underline{t} - D(\underline{g})$ et fixons une composante connexe P_0 de $\underline{t}_r$ telle que $0 \in \overline{P}_0$. Si on pose

$$\mathcal{C} = \mathrm{Ad}(G)P_0$$

où Ad est l'action adjointe de G, alors ([9]) l'application :

$$\begin{aligned} G/T \times P_0 &\to G_r \\ (gT, H) &\mapsto g(\exp H)g^{-1} \end{aligned}$$

est une bijection sur son image G_r qui sera appelée l'ensemble des points réguliers de G. G_r est dense dans G. Et par construction, l'application $\exp : \mathcal{C} \to G_r$ est bijective.

Pour X fixé dans $\mathcal{C}$, soit

$$D_X = \{Y \in \mathcal{C} \text{ tel que } \exp(-X)\exp Y \notin G_r\}$$

$$D'_X = \{Y \in \mathcal{C} \text{ tel que } \exp(-Y)\exp X \notin G_r\}$$

$$\mathcal{C}_X = \mathcal{C} \setminus D_X\,, \quad \mathcal{C}'_X = \mathcal{C} \setminus D'_X\,.$$

D'après ce qui précède, les applications

$$\psi(X, \cdot\,) : \mathcal{C}_X \to \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \psi(\,\cdot\,, X) : \mathcal{C}'_X \to \mathcal{C}$$

où $\exp \psi(X, Y) = \exp(-X)\exp Y$ sont des injections à image dense. De plus

$$\psi(X, Y) = -\psi(Y, X) \quad \text{si } Y \in \mathcal{C}_X \cap \mathcal{C}'_X\,.$$

1.2 Réalisation de $T^*(G)$ comme une orbite de $G \times V_n$

On garde les notations précédentes. Rappelons que G peut être considéré comme un sous-groupe de $\mathrm{SO}(V)$ où V est un espace euclidien de dimension $n+1$ [11]. Si on note $V_m = V \times \cdots \times V$ m fois, G agit alors sur V_m par :

$$g(e_1, \ldots, e_m) = (ge_1, \ldots, ge_m)\,, \quad e_i \in V \text{ et } g \in G\,.$$

Notons O_m l'orbite d'un point $(e_1, \ldots, e_m)$ dans V_m sous G.

LEMME 1.2.1.— *Si $m = n$ et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un système libre de V, alors O_n est isomorphe à G.*

Preuve.— Soit $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ une base de V. Si g appartient au stabilisateur $G(e_1, \ldots, e_n)$ de $(e_1, \ldots, e_n)$, alors $ge_i = e_i$ pour $i = 1, \ldots, n$, mais puisque g est dans $\mathrm{SO}(V)$, alors g stabilise $\rangle e_1, \ldots, e_n\langle^{\perp}$, et son orientation donc e_{n+1}, d'où $g = \mathrm{Id}$. Et par conséquent

$$O_n \simeq G/G(e_1, \ldots, e_n) \simeq G \,. \square$$

Considérons le groupe produit semi-direct $G \times V_n$ qu'on réalise matriciellement par

$$G \times V_n = \left\{ (g, Y_1, \ldots, Y_n) = \begin{pmatrix} g & \ldots & 0 & Y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & g & Y_n \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Le produit dans $G \times V_n$ s'écrit :

$$(g, Y_1, \ldots, Y_n)(g', Y_1', \ldots, Y_n') = (gg', gY_1' + Y_1, \ldots, gY_n' + Y_n) .$$

L'action adjointe de $G \times V_n$ est donnée par

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ad}(g, Y_1, \ldots, Y_n)(X, T_1, \ldots, T_n) = \\ &\qquad = \big(\mathrm{Ad}\, gX, -(\mathrm{Ad}\, gX)Y_1 + gT_1, \ldots, -(\mathrm{Ad}\, gX)Y_n + T_n\big) . \end{aligned}$$

Par conséquent, si $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ est un point du dual de $\underline{g}^* \times V_n^*$ de $\underline{g} \times V_n$ alors

$$\mathrm{Ad}^*(g, Y_1, \ldots, Y_n)(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) = (\xi', \eta_1', \ldots, \eta_n') ,$$

où

$$\xi' = \mathrm{Ad}^*(g)\xi + \sum_{i=1}^{n} g\eta_i \wedge Y_i \,, \quad \eta_i' = g\eta_i \,,$$

la forme $\eta \wedge Y$ étant définie sur $\underline{g}$ par

$$\langle \eta \wedge Y \,, X \rangle = \langle \eta \,, Y \cdot X \rangle$$

($X \cdot Y$ est l'action de X de $\underline{g}$ sur Y de V).

Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un système libre de V. Prenons le point $(0, e_1, \ldots, e_n)$ dans $\underline{g}^* \times V_n$. Notons O l'orbite de ce point sous $G \times V_n$.

PROPOSITION 1.2.2.— *O est symplectomorphe à $T^*(G)$.*

Preuve

$$T^*(G) = \{(g,\alpha) \text{ avec } g \in G \text{ et } \alpha \in T_g^*(G)\} \simeq G \times \underline{\mathrm{g}}^* .$$

Tout d'abord l'application

$$\begin{aligned} O &\to T^*(G) \\ (\alpha, g(e_1,\ldots,e_n)) &\mapsto (g,\alpha) \end{aligned}$$

est bijective, vu le lemme précédent.

D'autre part, soit λ la 1-forme de Liouville sur $T^*(G)$:

$$\lambda_{(g,\alpha)}(X,T) = \alpha(X) \quad \text{si } X \in \underline{\mathrm{g}} \text{ et } T \in \underline{\mathrm{g}}^* ,$$

alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\lambda_{(g,\alpha)}\big((X,T)\,,\,(X',T')\big) = (X,T)\lambda_{(g,\alpha)}(X',T') - (X',T')\lambda_{(g,\alpha)}(X,T) + \\ - \lambda_{(g,\alpha)}\left([(X,T)\,,\,(X',T')]\right) . \end{aligned}$$

Remarquons que :

1) si X est dans $\underline{\mathrm{g}}$, on peut voir $(X,0)$ comme un champ de vecteurs sur $G \times \underline{\mathrm{g}}^*$ et la fonction $(\widetilde{X,0})$ sur l'orbite est définie par

$$(\widetilde{X,0})_{(g,\alpha)} = \big\langle (X,0)\,,\,\big(\alpha,\, g\cdot(e_1,\,\ldots,\,e_n)\big)\big\rangle = \alpha(X) = \lambda_{(g,\alpha)}(X,0) \,;$$

2) si $Y \in T_g^*(G)$ vu comme un vecteur tangent à la fibre de $T^*(G)$ en (g,α), on a

$$\lambda_{(g,\alpha)}(0,Y) = 0 .$$

Soit maintenant ω la 2-forme symplectique sur O :

$$\omega\big((X,Y)\,,\,(X',Y')\big) = \big\{(\widetilde{X,Y})\,,\,(\widetilde{X',Y'})\big\} ,$$

où $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$ est le crochet de Poisson sur O.

On va montrer que

$$\omega_{(g,\alpha)} = \mathrm{d}\lambda_{(g,\alpha)} .$$

En effet, il suffit de voir que:

a) $\mathrm{d}\lambda_{(g,\alpha)}\big((X,0)\,,\,(X',0)\big) =$
$$= (X',0)\cdot\alpha(X) - (X,0)\cdot\alpha(X') + \alpha\big([X,X']\big)$$
$$= \big\{(\widetilde{X,0})\,,\,(\widetilde{X',0})\big\}_{(g,\alpha)} = \omega_{(g,\alpha)}\big((X,0)\,,\,(X',0)\big)\ ;$$

b) $\mathrm{d}\lambda_{(g,\alpha)}\big((X,0)\,,\,(0,Y)\big) =$
$$= (0,Y)\cdot\alpha(X) - (X,0)\cdot\lambda_{(g,\alpha)}(0,Y) + \lambda_{(g,\alpha)}\Big(\big[(X,0)\,,\,(0,Y)\big]\Big)$$
$$= \big((0,Y)\cdot(\widetilde{X,0})\big)(g,\alpha) = \big\{(\widetilde{X,0})\,,\,(\widetilde{0,Y})\big\}_{(g,\alpha)}\ ;$$

c) puisque $\big[(0,Y)\,,\,(0,Y')\big] = 0$, alors
$$\mathrm{d}\lambda_{(g,\alpha)}\big((0,Y)\,,\,(0,Y')\big) = 0 = \omega_{(g,\alpha)}\big((0,Y)\,,\,(0,Y')\big)\,.$$

1.3 La représentation induite unitaire

Au point $(0,\, e_1,\, \ldots,\, e_n)$ de l'orbite O, on choisit la polarisation algébrique réelle $\underline{\mathrm{h}} = \{0\} \times V_n$, et on choisit un caractère χ sur $\underline{\mathrm{h}}$ par :
$$\chi(0,\, v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_n) = i\sum_{j=1}^{n}\langle e_j\,,\,v_j\rangle \quad \big((v_1,\, \ldots,\, v_n) \in V_n\big)\,.$$

Si on exponentie χ au sous-groupe $H = \{I\} \times V_n$ par
$$\chi(I,\, v_1,\, \ldots,\, v_n) = \mathrm{e}^{i\sum_{j=1}^{n}\langle e_j\,,\,v_j\rangle}\,.$$

La représentation induite unitaire
$$\pi = \operatorname*{ind}_{H\uparrow G\times V_n} \chi$$
se réalise alors sur l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions F mesurables sur $G \times V_n$ à valeur complexes, telles que :
$$\begin{cases} 1)\ \ F(hA) = \chi(h)F(A) & \text{si } h \in H \\ 2)\ \ \displaystyle\int_{H\backslash G\times V_n} |F(A)|^2\,\mathrm{d}A < \infty\,, & \end{cases}$$

par
$$\big(\pi(A)\cdot F\big)(A') = F(A'A)$$

(A et A' sont dans $G \times V_n$).

Or ${}_H\backslash G \times V_n$ est canoniquement isomorphe à G. Considérons en effet la section τ,

$$\begin{aligned}\tau : G &\to G \times V_n \\ g &\mapsto (g, 0, \ldots, 0)\,.\end{aligned}$$

Alors, à chaque F de $\mathcal{H}$ on associe une fonction f sur G définie par

$$f(g) = F\big(\tau(g)\big)\,, \quad \forall\, g \in G\,.$$

Donc π se réalise sur $L^2(G)$, et, pour f dans $L^2(G)$, $(g,\, Y_1,\, \ldots,\, Y_n)$ dans $G \times V_n$ et g' dans G, on aura

$$\big(\pi(g,\, Y_1,\, \ldots,\, Y_n)f\big)(g') = \chi(I,\, g'^{-1}Y_1,\, \ldots,\, g'^{-1}Y_n)f(g'g)\,.$$

Les générateurs infinitésimaux de π sont

$$\begin{aligned}&\text{si } X \in \underline{\mathrm{g}}\,, \quad \big(\pi(X, 0)f\big)(g') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g' \exp tX)\big|_{t=0} \\ &\text{si } Y \in V_n\,, \quad \big(\pi(0, Y)f\big)(g') = \chi(I,\, g'^{-1}Y)f(g')\,.\end{aligned}$$

Remarquons que l'on peut écrire

$$\begin{aligned}\chi(I,\, g^{-1}Y) &= i\sum_{j=1}^{n}\langle e_j\,,\, g^{-1}Y_j\rangle = i\sum_{j=1}^{n}\widetilde{Y}_j(ge_j) \\ &= i\widetilde{Y}(g) \quad (Y = (Y_1,\, \ldots,\, Y_n))\,.\end{aligned}$$

Donc $\pi\big(\widetilde{(0, Y)}\big)$ est la multiplication par une fonction qui ne dépend que des variables de la base G du fibré $T^*(G)$.

Section 2

2.1 Représentation-*

Soit $\mathcal{C}$ l'ouvert de $\underline{\mathrm{g}}$ défini dans le paragraphe 1.1.

DÉFINITION 2.1.1.— *Soit f une fonction C^∞ à support compact sur $T^*(G)$ et φ une fonction de $L^2(G)$, on pose*

$$(A_f\varphi)(g) = \int_{\mathcal{C}}\int_{\underline{\mathrm{g}}^*} \mathrm{e}^{i\alpha(X)} f\left(g \exp\frac{X}{2}\,,\, \alpha\right)(g \exp X)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Ainsi défini, A_f est un opérateur linéaire sur $L^2(G)$.

Notons par B l'ensemble des fonctions de $C^\infty\big(T^*(G)\big)$, telles que la transformée de Fourier partielle $(\mathcal{F}_\alpha f)$ de f par rapport à la variable α dans la fibre ait un support κ compact et inclus dans $(G \times \mathcal{C})$.

PROPOSITION 2.1.2. — *Si f est dans B alors :*

i) A_f est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(G)$, et on a une estimation

$$\|A_f\|_{\mathrm{HS}} \leq C(\kappa)\|f\|_{L^2}$$

($C(\kappa)$ est une constante qui dépend de κ);

ii) L'adjoint de l'opérateur A_f est $A_f^* = A_{\overline{f}}$;

iii) $\operatorname{Tr} A_f = \displaystyle\int_{T^*(G)} f(g,\alpha)\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}\alpha.$

Preuve

i) Soit f un élément de B et φ une fonction de $L^2(G)$:

$$\begin{aligned}(A_f\varphi)(g) &= \int_{\mathcal{C}}\int_{\underline{\mathrm{g}}^*} \mathrm{e}^{i\alpha(X)} f\left(g\exp\frac{X}{2}\,,\,\alpha\right)\varphi(g\exp X)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_{\mathcal{C}} (\mathcal{F}_\alpha f)\left(g\exp\frac{X}{2}\,,\,X\right)\varphi(g\exp X)\,\mathrm{d}X\,.\end{aligned}$$

Si $\Delta(X)\,\mathrm{d}X$ est une mesure de Haar invariante à gauche sur $\exp\mathcal{C}$, on pose

$$\Phi_f(g\,,\,\exp X) = (\mathcal{F}_\alpha f)\left(g\exp\frac{X}{2}\,,\,X\right)\Delta(X)^{-1}\,.$$

Φ_f est C^∞ sur $G \times G$ et à support compact inclus dans $G \times \exp\mathcal{C}$. Alors si $\mathrm{d}g$ est la mesure de Haar sur G, on a

$$\begin{aligned}(A_f\varphi)(g) &= \int_{\mathcal{C}} \Phi_f(g\,,\,\exp X)\varphi(g\exp X)\Delta(X)\,\mathrm{d}X \\ &= \int_G \Phi_f(g,g')\varphi(gg')\,\mathrm{d}g' \\ &= \int_G \Phi_f(g\,,\,g^{-1}g')\varphi(g')\,\mathrm{d}g'\,.\end{aligned}$$

Donc A_f est un opérateur de noyau $K_f(g,g') = \Phi_f(g\,,\,g^{-1}g')$. D'où

$$\begin{aligned}
\|A_f\|_{\mathrm{HS}}^2 &= \int_{G\times G} |K_f(g,g')|^2 \,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}g' = \int_{G\times G} |\Phi_f(g\,,\,g^{-1}g')|^2 \,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}g' \\
&= \int_G \int_G |\Phi_f(g,g')|^2 \,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}g' \\
&= \int_G \int_{\mathcal{C}} |\Phi_f(g\,,\exp Y)|^2 \Delta(Y)\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}g \\
&= \int_G \int_{\mathcal{C}} \left|(\mathcal{F}_\alpha f)\Big(g\exp\frac{Y}{2}\,,\,Y\Big)\right|^2 \Delta^{-1}(Y)\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}g\,.
\end{aligned}$$

Mais, comme f appartient à B, $(\mathcal{F}_\alpha f)$ est à support compact κ dans $G \times \mathcal{C}$, ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}
\|A_f\|_{\mathrm{HS}}^2 &\le C(\kappa) \int_G \int_{\mathcal{C}} \left|(\mathcal{F}_\alpha f)\Big(g\exp\frac{Y}{2}\,,\,Y\Big)\right|^2 \,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}g \\
&\le C(\kappa) \int_{G\times \underline{\mathrm{g}}} |(\mathcal{F}_\alpha f)(g,Y)|^2 \,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}g = \text{constante}\,\|f\|_{L^2}^2\,,
\end{aligned}$$

puisque $\Delta(Y)$ est bornée sur la projection de κ sur $\mathcal{C}$.

ii) Si $K_f(g,g')$ est le noyau de l'opérateur A_f, alors l'adjoint A_f^* de A_f a comme noyau

$$\overline{K}_f(g',g) = \overline{\Phi}_f(g\,,\,g'^{-1}g)\,.$$

Posons $g = \exp X$, $g' = \exp Y$ avec X et Y dans $\mathcal{C}$ tels que $g'^{-1}g \in \exp\mathcal{C}$, alors

$$g^{-1}g' \in \exp\mathcal{C} \quad \text{et} \quad g^{-1}g' = \exp\psi(X,Y)\,,$$

ψ étant définie au paragraphe 1.1. Donc

$$\overline{K}_f(g',g) = \big(\overline{\mathcal{F}_\alpha f}\big)\left(g'\exp\frac{\psi(Y,X)}{2}\,,\,\psi(X,Y)\right)\Delta\big(\psi(Y,X)\big)^{-1}\,.$$

Mais

$$\big(\overline{\mathcal{F}_\alpha f}\big)(g,X) = \big(\mathcal{F}_\alpha \overline{f}\big)(g,-X) \quad \text{et} \quad \psi(Y,X) = -\psi(X,Y)\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\overline{K}_f(g',g) &= \big(\mathcal{F}_\alpha \overline{f}\big)\left(g\exp\frac{\psi(X,Y)}{2}\,,\,\psi(X,Y)\right)\Delta\big(\psi(X,Y)\big)^{-1} \\
&= \Phi_{\overline{f}}(g\,,\,\exp\psi(X,Y)) = \Phi_{\overline{f}}(g\,,\,g^{-1}g') \\
&= K_{\overline{f}}(g,g')\,.
\end{aligned}$$

D'où

$$\left(A_f\right)^* = A_{\overline{f}}\,.$$

iii) Se déduit du fait que le noyau de A_f est continu et donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} A_f &= \int_G K_f(g,g)\,\mathrm{d}g = \int_G \Phi_f(g,I)\,\mathrm{d}g \\ &= \int_G (\mathcal{F}_\alpha f)(g,0)\,\mathrm{d}g = \int_{T^*(G)} f(g,\alpha)\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}\alpha\,. \ \square\end{aligned}$$

Maintenant, si f est dans B, la formule

$$\|A_f\|^2_{\mathrm{HS}} = \operatorname{Tr}(A_f \circ A_{\overline{f}})$$

définit un produit scalaire dans B par

$$\langle f, f'\rangle = \operatorname{Tr}(A_f \circ A_{\overline{f'}})\,.$$

Notons L^2_* le complété de B pour cette norme.

PROPOSITION 2.1.3.— *L'application A qui à f associe A_f est une bijection de L^2_* sur l'espace $\mathrm{HS}(L^2(G))$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $L^2(G)$.*

Preuve.— D'une part, l'injectivité découle du fait que

$$\|A_f\|^2_{\mathrm{HS}} = \|f\|^2_{L^2_*}\,.$$

D'autre part, soit $\kappa \subset \kappa' \subset \mathcal{C}$ deux compacts, ρ_κ une fonction C^∞ telle que

$$\rho_\kappa(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \in \kappa \\ 0 & \text{si } X \in \mathcal{C}\setminus\kappa' \end{cases} \quad \text{et} \quad 0 \le \rho_\kappa(X) \le 1\,.$$

Si A est un opérateur dans $\mathrm{HS}(L^2(G))$, de noyau K, on définit la fonction f_κ dans B par

$$(\mathcal{F}_\alpha f_\kappa)\left(g\exp\frac{X}{2}\,,\, X\right) = \begin{cases} K(g\,,\, g\exp X)\Delta(X)\rho_\kappa(X) & \text{si } X \in \kappa' \\ 0 & \text{ailleurs.}\end{cases}$$

Notons K_{f_κ} le noyau de l'opérateur A_{f_κ}. Rappelons (voir *i)* de la preuve de la proposition 2.1.2) que

$$K_{f_\kappa}(g,g') = \Phi_{f_\kappa}(g\,,\, g^{-1}g')\,.$$

Si $g^{-1}g'$ s'écrit $\exp X$, avec X dans $\mathcal{C}$, alors $g' = g \exp X$, et

$$\begin{aligned} K_{f_\kappa}(g, g') &= (\mathcal{F}_\alpha f_\kappa)\left(g \exp \frac{X}{2}, X\right) \Delta^{-1}(X) \\ &= K(g\,,\, g \exp X)\rho_\kappa(X) = K(g, g')\rho_\kappa(X)\,. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\int_{G\times G} \left|(K - K_{f_\kappa})(g, g')\right|^2 \mathrm{d}g\,\mathrm{d}g' = \\ &\quad = \int_G \mathrm{d}g \left[\int_{\mathcal{C}\setminus\kappa} \left|K(g\,,\, g\exp X) - K(g\,,\, g\exp X)\rho_\kappa(X)\right|^2 \Delta(X)\,\mathrm{d}X\right] \\ &\quad \le \int_G \int_{\mathcal{C}\setminus\kappa} \left|K(g\,,\, g\exp X)\right|^2 \left|(1 - \rho_\kappa(X))\right|^2 \Delta(X)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}g \\ &\quad \le \int_G \int_{\mathcal{C}\setminus\kappa} \left|K(g\,,\, g\exp X)\right|^2 \Delta(X)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}g \\ &\quad = \int_G \int_{\exp(\mathcal{C}\setminus\kappa)} \left|K(g, g'\right|^2 \mathrm{d}g\,\mathrm{d}g'\,. \end{aligned}$$

Maintenant si κ_n est une suite de compacts dans $\mathcal{C}$ tel que $\kappa_n \subset \kappa_{n+1}$ et $\bigcup \kappa_n = \mathcal{C}$, alors la suite $K_{f_{\kappa_n}}$ converge vers K dans $L^2(G \times G)$. Ce qui entraîne que f_{κ_n} est une suite de Cauchy dans B. Elle converge donc dans L^2_* vers un certain vecteur f et $K = K_f$. □

DÉFINITION 2.1.4.— *Si f et f' sont deux éléments de L^2_*, on pose*

$$A_{f*f'} = A_f \circ A'_f\,.$$

Ceci définit un produit associatif dans L^2_*. On va montrer que ce produit est associé au produit-$*$ défini par S. Gutt sur $T^*(G)$ dans [8]. Rappelons la définition de ce produit-$*$.

Soit $\underline{g}$ l'algèbre de Lie de G, $S(\underline{g})$ l'algèbre symétrique de $\underline{g}$ et $U(\underline{g})$ l'algèbre enveloppante de $\underline{g}$. L'application de complète symétrisation σ de $S(\underline{g})$ vers $U(\underline{g})$ étant une bijection linéaire, on peut écrire

$$U(\underline{g}) = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \sigma(S^n(\underline{g}))\,,$$

si $S^n(\underline{g})$ représente l'espace des polynômes homogène de degré n. Un vecteur u de $U(\underline{g})$ se décomposera en $u = \sum u_n$ dans cette décomposition.

- Si P est dans $S^r(\underline{g})$ est Q dans $S^s(\underline{g})$, posons

$$P * Q = \sum_{n \geq 0} (2\nu)^n \sigma^{-1} \left(\left(\sigma(P) \cdot \sigma(Q) \right)_{r+s-n} \right) ,$$

  et prolongeons $*$ par bilinéarité à $S(\underline{g}) \times S(\underline{g})$.

- Si f et f' sont des fonctions de G seulement, on a

$$f * f' = f f' .$$

- Si f est dans $C^\infty(G)$, f' dans $C^\infty\big(T^*(G)\big)$ et τ est la projection canonique $T^*(G) \to G$, alors

$$\tau^*(f) * f' = \tau^*(f) f' + \sum_{r \geq 0} \frac{(-\nu)^r}{r!} \tau^*(X_{i_1} \dots X_{i_r}) Z_{i_1} \dots Z_{i_r} f' ,$$

  où les X_i forment une base de $\underline{g}$ et sont vus comme des champs de vecteurs sur G et les Z_i sont les champs de vecteurs verticaux de $T^*(G)$ tels que $\mathrm{d}\lambda_{(g,\alpha)}(Z_i, \tau^* X_j) = \delta_{i,j}$, λ est la 1-forme de Liouville sur $T^*(G)$.

Il existe alors un et un seul produit associatif formel sur $T^*(G) \simeq G \times \underline{g}^*$ qui vérifie ces trois relations (voir [8]).

PROPOSITION 2.1.5.— *On peut étendre la transformation A à $L^2_* \oplus (\underline{g} \times V_n)$ d'une façon unique en posant*

$$A_{\widetilde{X}} = -\pi(X) , \quad \forall\, X \in \underline{g} \times V_n .$$

Preuve.— Il suffit de montrer que la relation qui définit A_f peut être étendue aux éléments d'une base de $\underline{g} \times V_n$.

Si X_j est un élément de $\underline{g}$, on notera le nombre $(\widetilde{X, 0})(g, \alpha)$ par $\widetilde{X}(g, \alpha)$. Alors

$$\widetilde{X}_j = \alpha_j ,$$

donc si φ est C^∞ sur G et si $\operatorname{supp} \varphi$ est un compact inclus dans $g \exp \mathcal{C}$, posons

$$\phi(x) = \varphi \left(g \exp \sum_j x_j X_j \right) ,$$

alors ϕ est une fonction C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^m$ et

$$\begin{aligned}(A_{\widetilde{X}_j}\varphi)(g) &= \int_C \int_{\underline{g}^*} e^{i\alpha(X)}\alpha_j\varphi(g\exp X)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_{\underline{g}^*} \alpha_j(\mathcal{F}\phi)(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\,.\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}(A_{\widetilde{X}_j}\varphi)(g) &= \overline{\mathcal{F}}\big(\alpha_j(\mathcal{F}\phi)\big)(0) = -i\frac{\partial}{\partial x_j}\,\phi(x)\Big|_{x=0} \\ &= -i\big(\pi(X_j)\varphi\big)(g)\,.\end{aligned}$$

De même, si $(0,Y)$ est un élément de $\{0\}\times V_n \subset \underline{g}\times V_n$, alors la fonction $\widetilde{(0,Y)}$ que nous notons $\widetilde{Y}$ est une fonction des variables de G seulement. Mais si φ' est une fonction des variables de G seulement et φ a les mêmes propriétés que ci-dessus alors :

$$(A_{\varphi'}\varphi)(g) = \int_{\underline{g}^*} \mathcal{F}(\phi'\phi)(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \overline{\mathcal{F}}\big(\mathcal{F}(\phi'\phi)\big)(0)\,,$$

où on a posé pour $X = \sum x_iX_i$ et $x = (x_1,\ \ldots,\ x_{\dim \underline{g}})$:

$$\phi'(x) = \varphi'\left(g\exp\frac{X}{2}\right) \quad \text{et} \quad \phi(x) = \varphi(g\exp X)\,.$$

Ce qui entraîne que

$$(A_{\varphi'}\varphi)(g) = \varphi'(g)\varphi(g)\,.$$

Et, vu l'expression de $\pi\big((0,Y)\big)$ (voir paragraphe 1.3), on a

$$(A_{\widetilde{Y}}\varphi)(g) = -i\left(\pi\big((0,Y)\big)\varphi\right)(g)\,.\ \square$$

COROLLAIRE 2.1.6. — *$*$ "est " le produit de S. Gutt.*

Preuve. — En effet, d'après la proposition précédente, le prolongement de la transformation A à $L^2_* \oplus \underline{g}\times V_n$ définit un produit associatif sur un sous-espace de $L^2_* \oplus S(\underline{g})$ tel que :

- si P et Q sont dans $S(\underline{g})$ homogènes de degrés r et s alors

$$P * Q = \sum_{n\geq 0}(2\nu)^n\sigma^{-1}\left(\big(\sigma(P)\cdot\sigma(Q)\big)_{r+s-n}\right)\,,$$

où σ est la symétrisation de $S(\underline{g})$ dans $U(\underline{g})$; ceci se démontre par induction en utilisant la transformation A et le fait que π est une représentation de $U(\underline{g})$;

- si f et f' sont des fonctions C^∞ des variables de G seulement, d'après la preuve ci-dessus
$$f * f' = ff' \ ;$$
- un calcul direct en utilisant la transformation A et la proposition précédente montre que la troisième condition du produit-$*$ de S. Gutt est vérifiée. □

Remarque 1.1.7. — Rappelons que A. Lichnerowicz dans [10] avait défini un produit-$*$ sur $T^*(G)$ de la façon suivante.

Prenons l'exemple $G = \mathrm{SO}(V)$. On considère G comme une sous-variété de $V \times \cdots \times V$ n fois (comme dans la section 1.2), donc $T^*(G)$ se réalise comme une sous-variété de E :

$$E = \big((V \times \cdots \times V) - \{0\}\big) \times (V \times \cdots \times V)\,.$$

Soient $\{q_1, \ldots, q_n\}$, $\{p_1, \ldots, p_n\}$ deux systèmes libres de V, $\rho_i > 0$, $\sigma_{i,j}$, $\gamma_{i,j}$ et $\nu_{i,j}$ ($i, j = 1, \ldots, n$) des nombres réels, on définit des transformations linéaires sur E par

$$\begin{aligned}
q_1' &= \rho_1 q_1 \\
q_2' &= \rho_2(q_2 + \gamma_{2,1}\, q_1) \\
&\ \vdots \\
q_n' &= \rho_n \left(q_n + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{q,i}\, q_i \right) \\
p_n' &= \rho_n^{-1} \left(p_n + \sum_{i=1}^{n} \nu_{n,i}\, p_i \right) \\
p_{n-1}' &= \rho_{n-1}^{-1} \left(p_{n-1} + \sigma_{n-1,n}\, p_n + \sum_{i=1}^{n} \nu_{n-1,i}\, q_i \right) \\
&\ \vdots \\
p_1' &= \rho_1^{-1} \left(p_1 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{1,i}\, p_i + s \sum_{i=1}^{n} \nu_{1,i}\, q_i \right) .
\end{aligned}$$

Si on impose $\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q = \mathrm{d}p' \wedge \mathrm{d}q'$, on définit alors un groupe G_0 engendré par ces transformations qui agit sur E en préservant la structure symplectique et la connexion plate de E. De plus, l'espace des orbites de E sous G_0 est isomorphe à $T^*(G)$. On considère donc le fibré principal $\pi : E \to T^*(G)$ de groupe structurel G_0 et le produit-$*$ de Moyal usuel $*_M$ sur E. On pose alors, pour f et f' des fonctions C^∞ sur $T^*(G)$:

$$\pi^* f *_M \pi^* f' = \pi^*(f * f').$$

Ce produit-$*$ possède une polarisation-$*$ au sens de Fronsdal [7] réelle naturelle :

$$\{f \text{ tels que } f * q_i = 0\,,\ \forall\ i\}.$$

Un calcul direct dans le cas $G = \mathrm{SO}(3)$ montre que cette polarisation-$*$ est réduite à 0. C'est pourquoi on ne considérera pas ici le produit-$*$ de A. Lichnerowicz.

Notons que ces deux produits-$*$ (celui de S. Gutt et celui de A. Lichnerowicz) sont différents (voir [6]).

Soit maintenant f dans L^2_* et γ un élément de $G \times V_n$. $\pi(\gamma)$ est alors un opérateur unitaire, ce qui entraîne que $\pi(\gamma) \circ A_f$ est dans $\mathrm{HS}\big(L^2(G)\big)$. Ainsi, de l'action de $G \times V_n$ dans $\mathrm{HS}\big(L^2(G)\big)$, on déduit une action de $G \times V_n$ dans L^2_*, notée $E(\gamma)*$.

DÉFINITION 2.1.8.— *Pour γ dans $G \times V_n$ et f dans L^2_*, on pose*

$$A_{E(\gamma)*f} = \pi(\gamma) \circ A_f\,.$$

PROPOSITION 2.1.9.— *Les relations suivantes sont vérifiées :*

i) $E(\gamma^{-1}) = \overline{E(\gamma)}$;

ii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big((\exp t\Gamma) * f\big)\Big|_{t=0} = i\widetilde{\Gamma} * f, \quad \forall\ \Gamma \in \underline{\mathrm{g}} \times V_n,\ \forall\ f \in B.$

Preuve

i) résulte des égalités suivantes :

$$\begin{aligned} A_{E(\gamma^{-1})*f} &= \pi(\gamma^{-1}) \circ A_f = \pi(\gamma)^* \circ A_f = \big(A^*_f \circ \pi(\gamma)\big)^* \\ &= A^*_{\overline{f}*E(\gamma)} = A_{\overline{\overline{f}*E(\gamma)}} = A_{\overline{E(\gamma)}*f}\,. \end{aligned}$$

ii) Si f est dans B, A_f est de Hilbert-Schmidt et est un vecteur C^∞ pour la représentation de G sur $\mathrm{HS}\big(L^2(G)\big)$ définie par $(\gamma, A) \to \pi(\gamma) \circ A$. Donc f est un vecteur C^∞ pour la représentation $E(\gamma)*$ et

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_{E(\exp t\Gamma)*f}\big|_{t=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\pi(\exp t\Gamma) \circ A_f\right)\Big|_{t=0} = \pi(\Gamma) \circ A_f \\ &= A_{i\widetilde{\Gamma}*f} = A_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E(\exp t\Gamma)*f)|_{t=0}} . \square\end{aligned}$$

D'autre part, on peut définir $E(\gamma)$ comme une distribution sur B. Plus précisément, à partir du produit scalaire sur B défini précédemment, on définit une forme bilinéaire réelle sur B par

$$\langle\langle f, f' \rangle\rangle = \mathrm{Tr}(A_f \circ A_{f'}) \quad (\text{si } f \text{ et } f' \text{ sont dans } B) .$$

Avec les notations précédentes, si K_f (resp $K_{f'}$) est le noyau de l'opérateur A_f (resp $A_{f'}$), on a :

$$\begin{aligned}\langle\langle f, f' \rangle\rangle &= \int_{G\times G} K_f(g, g')K_{f'}(g', g)\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}g' \\ &= \int_{G\times G} \Phi_f(g, g^{-1}g')\Phi_{f'}(g', g'^{-1}g)\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}g' .\end{aligned}$$

Le changement de variable $g^{-1}g' = g''$ entraîne que

$$\begin{aligned}&\langle\langle f, f' \rangle\rangle = \\ &= \int_{G\times G} \Phi_f(g, g'')\Phi_{f'}(gg'', g''^{-1})\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}g'' \\ &= \int_{G\times C} (\mathcal{F}_\alpha f)\left(g \exp\frac{X}{2}, X\right)(\mathcal{F}_\alpha f')\left(g\exp\frac{X}{2}, -X\right)\Delta(-X)\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}X \\ &= \int_{G\times C} (\mathcal{F}_\alpha f)(g, X)\overline{\mathcal{F}_\alpha \overline{f'}}(g, X)\Delta(-X)^{-1}\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}X .\end{aligned}$$

Rappelons que Δ est définie par

$$\int_G f(g)\,\mathrm{d}g = \int_C f(\exp X)\Delta(X)\,\mathrm{d}X .$$

Si f' est une fonction de B, $\overline{\mathcal{F}_\alpha \overline{f'}}(g, X)\Delta(-X)^{-1}$ est un élément de l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions C^∞ à support compact inclus dans $G \times C$ et réciproquement. On identifie donc les duaux de ces deux espaces en disant qu'une forme T sur B est une distribution sur B (un élément de B') si et seulement s'il existe une distribution S de $\mathcal{D}'$ telle que

$$\langle T, f\rangle_B = \left\langle S\,,\, \overline{\mathcal{F}_\alpha \overline{f}}\Delta(-X)^{-1}\right\rangle_{\mathcal{D}}\,, \quad \forall\, f \in B\,.$$

En particulier, toute fonction f de B définit une distribution T_f sur B par

$$\langle T_f, f\rangle_B = \langle\!\langle f, f'\rangle\!\rangle = \left\langle (\mathcal{F}_\alpha f)\,,\, \overline{\mathcal{F}_\alpha \overline{f'}}\Delta(-X)^{-1}\right\rangle_{\mathcal{D}}\,.$$

- Si $X \in \mathcal{C}$, la formule

$$\langle E(\exp X), f\rangle_B = \mathrm{Tr}\big(\pi(\exp X)\circ A_f\big)$$

définit une distribution $E(\exp X)$ sur B.

En effet, le noyau $K_{X,f}$ de l'opérateur $\pi(\exp X)\circ A_f$ est

$$K_{X,f}(g, g') = K_f(g\exp X\,,\, g')\,.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\langle E(\exp X)\,,\, f\rangle_B &= \int_G K_{X,f}(g,g)\,\mathrm{d}g = \int_G K_f(g\exp X\,,\, g)\,\mathrm{d}g\\ &= \int_G \Phi_f(g\exp X\,,\, \exp -X)\,\mathrm{d}g\\ &= \int_G (\mathcal{F}_\alpha)\left(g\exp\frac{X}{2}\,,\, -X\right)\Delta(-X)^{-1}\,\mathrm{d}g\\ &= \int_G \big(\overline{\mathcal{F}_\alpha \overline{f}}\big)(g, X)\Delta(-X)^{-1}\,\mathrm{d}g\\ &= \left\langle 1_G\otimes\delta_X\,,\, \big(\overline{\mathcal{F}_\alpha \overline{f}}\big)\Delta(-X)^{-1}\right\rangle_{\mathcal{D}}\,.\end{aligned}$$

Ce que l'on écrira formellement :

$$E(\exp X) = \mathcal{F}_\alpha\big(1_G\otimes\delta_X\big) = 1_G\otimes \mathrm{e}^{i\alpha(X)} = 1_G\otimes\mathrm{e}^{i\widetilde{X}}\,.$$

- De même si $Y \in \{0\}\times V_n$, la distribution $E(\exp Y)$ définie par

$$\langle E(\exp Y)\,,\, f\rangle_B = \mathrm{Tr}\big(\pi(\exp Y)\circ A_f\big)\,, \quad \forall\, f\in B\,,$$

existe.

En effet, si φ est une fonction de $L^2(G)$:

$$\big(\pi(\exp Y)\circ A_f\varphi\big) = \mathrm{e}^{i\widetilde{Y}}(A_f\varphi)(g)\,.$$

Ce qui entraîne que le noyau $K_{Y,f}$ de l'opérateur $\pi(\exp Y)\circ A_f$ est

$$K_{Y,f}(g,g') = \mathrm{e}^{i\widetilde{Y}} K_f(g,g')\,.$$

Et alors,

$$\begin{aligned}
\big\langle E(\exp Y)\,,\, f\big\rangle &= \int_G \mathrm{e}^{i\widetilde{Y}(g)} K_f(g,g)\,\mathrm{d}g = \int_G \mathrm{e}^{i\widetilde{Y}(g)} \Phi_f(g,1)\,\mathrm{d}g \\
&= \int_G \mathrm{e}^{i\widetilde{Y}(g)} \big(\overline{\mathcal{F}_\alpha \overline{f}}(g,0)\big)\,\mathrm{d}g \\
&= \Big\langle\!\Big\langle \mathrm{e}^{i\widetilde{Y}(g)} \otimes \delta_0\,,\, \big(\overline{\mathcal{F}_\alpha \overline{f}}\big)\Delta(-X)^{-1} \Big\rangle\!\Big\rangle\,.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$E(\exp Y) = \mathcal{F}_\alpha\big(\mathrm{e}^{i\widetilde{Y}} \otimes \delta_0(\alpha)\big) = \mathrm{e}^{i\widetilde{Y}(g)} \otimes 1_{\underline{g}^*}\,.$$

Remarque 2.1.10. — On peut définir le produit-$*$ d'une distribution T de B' par une fonction f de B en posant

$$\langle T * f\,,\, f'\rangle_B = \langle T\,,\, f * f'\rangle_B\,, \quad \forall\, f' \in B\,,$$

quand ceci a un sens. En particulier si $T = \exp\Gamma$ ($\Gamma \in \underline{g} \oplus V_n$), la formule ci-dessus a un sens car

$$\begin{aligned}
\big\langle E(\exp\Gamma) * f\,,\, f'\big\rangle_B &= \mathrm{Tr}\big(\pi(\exp\Gamma)\circ A_f \circ A_{f'}\big) \\
&= \mathrm{Tr}\big(A_{E(\exp\Gamma)*f} \circ A_{f'}\big) \\
&= \big\langle\!\big\langle E(\exp\Gamma) * f\,,\, f'\big\rangle\!\big\rangle\,.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que les deux définitions de E coïncident.

2.2 Transformée de Fourier adaptée

Soit φ dans $C_c^\infty(G \times V_n)$ alors d'après [12] l'opérateur

$$\pi(\varphi) = \int_{G \times V_n} \varphi(\gamma)\pi(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma$$

est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(G)$ qui est l'espace de la réalisation de π. Si on pose

$$\pi(\varphi) = A_{\mathcal{E}(\varphi)},$$

on définit ainsi une transformation :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : C_c^\infty(G \times V_n) &\to L_*^2 \\ \varphi &\mapsto \mathcal{E}(\varphi)\,. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.2.1.— *Pour φ et φ' dans $C_c^\infty(G \times V_n)$, on a :*

i) $\mathcal{E}(\varphi \times \varphi') = \mathcal{E}(\varphi) * \mathcal{E}(\varphi')$ *(où $\times$ est le produit de convolution) ;*

ii) $\mathcal{E}(\check{\varphi}) = \overline{\mathcal{E}(\varphi)}$ *$(\check{\varphi}(\gamma) = \overline{\varphi(\gamma^{-1})})$;*

iii) $\operatorname{Tr}\pi(\varphi) = \int_{T^*(G)} \mathcal{E}(\varphi)\,\mathrm{d}\mu$ *(où $\mathrm{d}\mu$ une mesure invariante sur $T^*(G)$) ;*

iv) si on pose $\langle \mathcal{E}(\varphi), f\rangle = \operatorname{Tr}(\pi(\varphi) \circ A_f)$ pour $f \in B$, on définit une distribution qui au sens des distributions peut s'écrire :

$$\mathcal{E}(\varphi) = \int_{G \times V_n} \varphi(\gamma)E(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma\,.$$

Preuve.— *i)* est une conséquence des définitions puisque

$$\pi(\varphi \times \varphi') = A_{\mathcal{E}(\varphi \times \varphi')} = A_{\mathcal{E}(\varphi)} \circ A_{\mathcal{E}(\varphi')} = A_{\mathcal{E}(\varphi) * \mathcal{E}(\varphi')}\,.$$

ii) découle de la relation

$$\pi(\check{\varphi}) = \pi(\varphi)^* = A_{\overline{\mathcal{E}(\varphi)}}\,.$$

Pour iii), la proproposition 2.1.2, nous permet en effet d'écrire

$$\operatorname{Tr}\pi(\varphi) = \operatorname{Tr} A_{\mathcal{E}(\varphi)} = \int_{T^*(G)} \mathcal{E}(\varphi)\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Pour *iv)*, si on pose $\langle \mathcal{E}(\varphi)\,,\, f\rangle = \mathrm{Tr}\big(\pi(\varphi)\circ A_f\big)$ et si $\{\varphi_k\}$ est une base orthonormée de $L^2(G)$, alors

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{E}(\varphi)\,,\, f\rangle &= \sum_k \langle \pi(\varphi)\circ A_f\varphi_k\,,\, \varphi_k\rangle \\
&= \sum_k \int_{G\times V_n} \varphi(\gamma)\langle \pi(\gamma)\circ A_f\varphi_k\,,\, \varphi_k\rangle\,\mathrm{d}\gamma \\
&= \int_{G\times V_n} \varphi(\gamma)\sum_k \langle \pi(\gamma)\circ A_f\varphi_k\,,\, \varphi_k\rangle\,\mathrm{d}\gamma \\
&= \int_{G\times V_n} \varphi(\gamma)\,\mathrm{Tr}\big(\pi(\gamma)\circ A_f\big)\,\mathrm{d}\gamma \\
&= \int_{G\times V_n} \varphi(\gamma)\langle E(\gamma)\,,\, f\rangle\,\mathrm{d}\gamma\,.
\end{aligned}$$

Maintenant si on se restreint à G, π coïncide avec la représentation régulière droite de G (voir la preuve de la proposition 2.1.5), on a donc obtenu ici une représentation-$*$ associée à la représentation régulière droite de G.

Remarque 2.2.2.— Pour obtenir la représentation régulière gauche de G, il suffit de changer la définition de l'opérateur A_f comme suit :

$$(A_f\varphi)(g) = \int_C \int_{\underline{\mathrm{g}}^*} \mathrm{e}^{-i\alpha(X)} f\left(\exp -\frac{x}{2}\,g\,,\,\alpha\right)\varphi(\exp -Xg)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Remerciements

Mes vives remerciements au Professeur D. Arnal, pour ces nombreux conseils.

Bibliographie

[1] ARNAL (D.) et CORTET (J. C.). — **-product in the method of orbits for nilpotent groups*, J. Geom. and Phys. Vol. 2, **2** (1985), pp. 85-116.

[2] ARNAL (D.) et CORTET (J. C.). — *Représentations- * des groupes exponentiels*, J. of Funct. anal. Vol. 92, **1** (1990), pp. 103-135.

[3] ARNAL (D.) et CORTET (J. C.). — *Star représentations of* $E(2)$, L.M.P **20** (1990), pp. 141- 149.

[4] ARNAL (D.), CAHEN (M.) et GUTT (S.) .— *Representation of compact Lie groups and Quantization by deformation*, Acad. Royale de Belg. Bull. de la classe des Sc. 3ième série, t. LXXIV, **45** (1988), pp. 123-141.

[5] BAYEN (F.) *and al.* .— *Deformation theory and quantization I, II* Ann. of Physics **111** (1978), pp. 61-110 et 111-151.

[6] GUTT (S.) .— *Some aspects of deformation theory and quatization*, Actes du colloque "Quantum theory and Geometry" (M. Cahen et M. Flato éditeurs); Math. Phys. studies **10** (1988), pp. 77-102.

[7] FRONSDAL (C.) .— *Remarks on quantization*, Reports on Mathematical Physics **15**, n° 1 (1978), pp. 111-145.

[8] GUTT (S.) .— *An explicit *-product on the cotangent bundle to a Lie group*, Lett. Math. Phy. **7** (1983), pp. 249-258.

[9] HELGASSON (S.) .— *Differential Geometry, Lie groups and symmetric spaces* Academic Press, New-York (1978).

[10] LICHNEROWICZ (A.) .— *Construction of twisted product for cotangent bundles of classical groups and Stiefel manifolds*, L.M.P. **2** (1977), pp. 133-143.

[11] PONTRYAGIN (L. S.) .— *Topological groups*, Edition Gordon and Breach. (1966).

[12] WARNER (G.) .— *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New-York (1972).