ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HAMMOUDA ANNABI

Un invariant de conjugaison pour certaines familles à un paramètre de champs de vecteurs ou de difféomorphismes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 2, nº 3 (1993), p. 299-321

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1993_6_2_3_299_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. II, n° 3, 1993

Un invariant de conjugaison pour certaines familles à un paramètre de champs de vecteurs ou de difféomorphismes(*)

HAMMOUDA ANNABI(1)

RÉSUMÉ. — Nous établissons un nouveau phénomène de ridigité pour la conjugaison entre deux familles locales génériques de type selle-nœud. Si l'on considère une bifurcation de selle-nœuds simultanés, cette rigidité implique l'existence d'un invariant topologique pour la conjugaison.

ABSTRACT. — We establish a new rigidity phenomenon for the conjugacy between two generic local families of saddle-node type. If we consider a simultaneous saddle-node bifurcation this rigidity implies the existence of a topological invariant for conjugacies.

0. Introduction

Dans la première partie de ce papier, je m'intéresse à l'étude des (C^0, C^0)-conjugaisons entre les familles génériques de champs de vecteurs réels à un paramètre au voisinage d'une singularité de type selle-nœud, c'est-à-dire des familles du type $X = f(r,\lambda)\partial/\partial r$, où f est de la classe C^∞, vérifiant en un point $(r_0, \lambda_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les propriétés suivantes (fig. 1) :

$$\begin{cases} 1) \quad f(r_0,\lambda_0) = 0 \\ 2) \quad \dfrac{\partial}{\partial r} f(r_0,\lambda_0) = 0 \\ 3) \quad \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} f(r_0,\lambda_0) \neq 0 \\ 4) \quad \dfrac{\partial}{\partial \lambda} f(r_0,\lambda_0) \neq 0 \,. \end{cases} \tag{1}$$

(*) Reçu le 12 novembre 1992

(1) Département de Mathématique, Faculté des Sciences de Tunis, 1060 Tunis (Tunisie)

On supposera sans restreindre la généralité que

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r_0, \lambda_0) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} f(r_0, \lambda_0) > 0 \,.$$

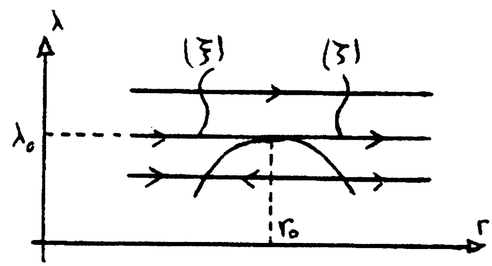

Fig. 1

Soient k et ℓ deux éléments de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$; rappelons qu'un difféomorphisme $\phi(r, \lambda) = \big(u(r, \lambda)\,,\, \varphi(\lambda)\big)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est appelé (C^k, C^ℓ)-conjugaison de la famille $X_\lambda = f(r, \lambda)\partial/\partial r$ vers la famille $Y_\lambda = g(r, \lambda)\partial/\partial r$ si φ est difféomorphisme de $\mathbb{R}$ de la classe C^ℓ, si la fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de la classe C^k et si, de plus, pour λ fixé l'application $r \to u(r, \lambda)$ est une C^k-conjugaison de X_λ vers $Y_{\varphi(\lambda)}$. Dans le cas où $\varphi = \text{id}$ est l'application identité de $\mathbb{R}$, on dit qu'on a une (C^k, id)-conjugaison.

Ces définitions s'étendent aux familles de difféomorphismes de la droite.

Historiquement cette étude a été abordée dans [NPT] aussi bien pour les familles de champs que pour celles des difféomorphismes. D'une façon précise, on trouve dans [NPT] les résultats suivants.

- Deux telles familles sont (C^0, C^0)-conjuguées par une (C^0, C^0)-conjugaison continûment différentialble par rapport à r dans le complémentaire de l'ensemble des singularités.
- Il y a une rigidité dans la direction des r pour le choix des (C^0, C^0)-conjugaison entre les familles de difféomorphismes.

Dans ce travail, je démontre que pour un tel choix il y a une seconde rigidité mais dans la direction des λ. Cela réside dans le fait que le changement des paramètres doit être dérivable en λ_0 et de dérivée σ bien déterminée. Je prouve que cette seconde rigidité est également valable pour les (C^0, C^0)-conjugaisons dans le cas des champs de vecteurs.

D'une façon explicite, j'établis, dans la première et la deuxième section de cet article, que toute (C^0, C^0)-conjugaison

$$\phi(r,\lambda) = \big(u(r,\lambda)\,,\ \varphi(\lambda)\big)$$

d'une famille de champs de vecteurs $X = f(r,\lambda)\partial/\partial r$ (resp. difféomorphismes $f(r,\lambda)$) de type selle-nœud en (r_0,λ_0) vers une famille $Y = g(r,\lambda)\partial/\partial r$ (resp. $g(r,\lambda)$) de type selle-nœud en (r_1,λ_1) est telle que φ s'écrive pour $\lambda > \lambda_0$, voisin de λ_0, sous la forme

$$\varphi(\lambda) = \lambda_1 + \sigma(\lambda-\lambda_0)\big[1 + (\lambda-\lambda_0)^{1/2}\alpha(\lambda)\big]\,,$$

où α est une fonction continue en λ_0 et où $\sigma = c_f q_f / c_g q_g$ avec

$$c_f = c_f(r_0,\lambda_0) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\, f(r_0,\lambda_0)$$

et

$$q_f = q_f(r_0,\lambda_0) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\, f(r_0,\lambda_0)\,.$$

Je prouve, en outre, que dans le cas des champs de vecteurs on a

$$\sigma = \lim_{\lambda\to 0^+}\left[\frac{T_Y(\lambda)}{T_X(\lambda)}\right]^2$$

et que dans le cas des difféomorphismes on a

$$\sigma = \lim_{\lambda\to 0^+}\left[\frac{n_g(\lambda)}{n_f(\lambda)}\right]^2\,.$$

Pour un champ X de type selle-nœud, $T_X(\lambda)$ désigne le temps de transit pour aller par le flot de X et à un niveau λ, d'une ligne (ξ), transverse aux niveaux $\{\lambda\}$ et située dans l'espace (r,λ), $\lambda > \lambda_0$, à gauche du point de bifurcation de X, à une autre ligne (ζ), également transverse aux niveaux $\{\lambda\}$, mais située à droite du point de bifurcation (fig. 1).

De même pour une famille de difféomorphismes $f(r, \lambda)$ de type selle-nœud, $n_f(\lambda)$ désigne le nombre minimal d'itérations nécessaires pour que l'on puisse, en partant de la ligne (ξ) à un niveaux λ, atteindre ou dépasser la ligne (ζ).

Dans la troisième section, je montre que deux familles à un paramètre de champs de vecteurs

$$X = f(r, \lambda)\frac{\partial}{\partial r} \quad \text{avec} \quad f(r_0', \lambda_0) = f(r_0'', \lambda_0) = 0$$

et

$$Y = g(r, \lambda)\frac{\partial}{\partial r} \quad \text{avec} \quad g(r_1', \lambda_1) = g(r_1'', \lambda_1) = 0\,,$$

présentant deux selle-nœuds simultanés en (r_0', λ_0), (r_0'', λ_0) pour X et en (r_1', λ_1), (r_1'', λ_1) pour Y (fig. 2), sont (C^0, C^0)-conjuguées si et seulement si elles ont le même invariant de conjugaison

$$I(f) = I(g)$$

avec

$$I(f) = \frac{c_f(r_0', \lambda_0)q_f(r_0', \lambda_0)}{c_f(r_0'', \lambda_0)q_f(r_0'', \lambda_0)}$$

$$I(g) = \frac{c_f(r_1', \lambda_1)q_f(r_1', \lambda_1)}{c_f(r_1'', \lambda_1)q_f(r_1'', \lambda_1)}$$

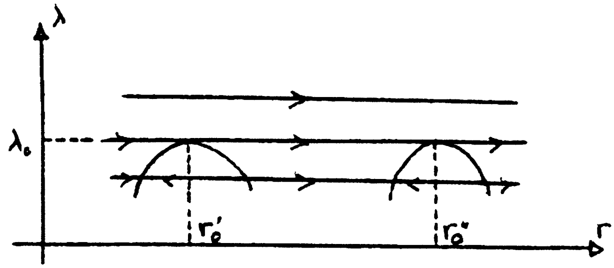

Fig. 2

Cette notion d'invariant de conjugaison existe, également, pour les familles de difféomorphismes présentant des selle-nœuds simultanés.

J'établis, en outre, que pour les champs de vecteurs on peut choisir cette (C^0, C^0)-conjugaison de façon qu'elle satisfasse à certaines conditions supplémentaires qu'on peut imposer et qui vont jouer un rôle dans l'étude des bifurcations locales présentant un tel phénomène de selle-nœud simultané.

Il est à remarquer que les bifurcations selle-nœuds simultanées ne sont pas génériques dans les familles à un paramètre, mais elles apparaissent avec deux paramètres globalement et localement dans les bifurcations selle-nœuds de codimension 3 qui présentent une ligne double selle-nœud dans l'espace des paramètres.

Notons que l'invariant I ci-dessus mentionné induit uniquement une rigidité dans la direction des paramètres et non un invariant pour les familles selle-nœuds de codimension 3 comme cela pourrait paraître. D'une façon précise, on démontre dans [A] que deux telles familles locales génériques de champs de vecteurs sont (C^0, C^0)-conjuguées, et qu'il en est de même pour deux telles familles de difféomorphismes ayant le même invariant de Mather-Roussarie [R].

Il est à noter par ailleurs, que Kostov a démontré dans [K] que toute famille selle-nœud $X = f(r,\lambda)\partial/\partial r$ est (C^∞, C^∞)-conjuguée à une forme normale du type

$$Z = (x^2 + \lambda + \Lambda(\lambda)x^3)\frac{\partial}{\partial r}$$

où $\Lambda(\lambda)$ est une fonction de la classe C^∞ de la variable réelle λ. Toutefois, il n'a pas abordé la question de la rigidité dans la direction des paramètres (ci-dessus mentionnée) qui lors d'un selle-nœud simultané donne lieu à un invariant. Il n'a pas, non plus, caractérisé les changements de paramètres intervenant dans les conjugaisons de ces familles. Ceci étant, notre résultat permet de trouver toutes les (C^0, C^∞)-conjugaisons de X vers un tel Z que nous pouvons choisir avec la fonction $\Lambda(\lambda)$ identiquement nulle, ce qui n'a pas été prévu dans $[K]$.

1. (C^0, C^0)-conjugaison entre deux familles de champs de vecteurs au voisinage d'une singularité selle-nœud

DÉFINITION .— *On dit qu'une famille* $X = f(r,\lambda)\partial/\partial r$, *où* f *est de la classe* C^∞, *est de type selle-nœud en un point* $(r_0, \lambda_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *si et seulement si*

$$\left\{\begin{array}{ll} 1) & f(r_0,\lambda_0) = 0 \\ 2) & \dfrac{\partial}{\partial r} f(r_0,\lambda_0) = 0 \\ 3) & \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} f(r_0,\lambda_0) \neq 0 \\ 4) & \dfrac{\partial}{\partial \lambda} f(r_0,\lambda_0) \neq 0 \,. \end{array}\right. \tag{1}$$

Dans le restant de cet article, on supposera que

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r_0,\lambda_0) > 0 \quad et \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} f(r_0,\lambda_0) > 0 \,.$$

Les autres cas selle-nœuds peuvent se ramener à celui-là sans difficulté.

Notations.— On note :

$$\begin{aligned} c_f &= c_f(r_0,\lambda_0) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r_0,\lambda_0) \\ q_f &= q_f(r_0,\lambda_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda} f(r_0,\lambda_0) \,. \end{aligned} \tag{2}$$

On supposera sans restreindre la généralité que $(r_0, \lambda_0) = (0,0)$.

LEMME 1.— *Soit* $X = f(r,\lambda)\partial/\partial r$ *une famille selle-nœud en* $(0,0)$, *et soit* $r = \varepsilon(\lambda)$ *une ligne continue (resp.* C^∞*) définie pour* $\lambda \geq 0$ *voisin de* 0, *telle que* $\varepsilon(\lambda) > 0$ *soit assez petit. Alors, il existe une* (C^0, id)*-conjugaison (resp.* (C^∞, id)*-conjugaison)* $\phi(r,\lambda) = \big(u(r,\lambda)\,,\,\lambda\big)$ *de* X *vers lui-même vérifiant* $u\big(-\varepsilon(\lambda)\,,\,\lambda\big) = -\varepsilon(0)$.

Démonstration.— La fonction u est définie par

$$u(r,\lambda) = X_{t(\lambda)}(r,\lambda)\,,$$

où $t(\lambda)$ est le temps mis pour atteindre $-\varepsilon(0)$ à partir de $-\varepsilon(\lambda)$ par le flot X_t de X au niveau λ.

LEMME 2.— *Toute famille selle-nœud $X = f(r,\lambda)\partial/\partial r$ en $(0,0)$ est (C^∞, C^∞)-conjuguée dans un voisinage de $(0,0)$ à une famille de la forme*

$$Y = h(r,\lambda)(r^2+\lambda)\frac{\partial}{\partial r}$$

où $h(0,0) = c_f$ (> 0). De plus, cette (C^∞, C^∞)-conjugaison peut être choisie de façon qu'elle envoie une ligne verticale $r(\lambda) = -\varepsilon$, donnée dans le plan des phases de X, sur la verticale $r(\lambda) = -\varepsilon$ du plan des phases de Y, $\varepsilon > 0$ étant assez petit.

Démonstration.— Le théorème de préparation [M] implique qu'il existe des fonctions de la classe C^∞ : h_1, a et b telles que

$$f(r,\lambda) = h_1(r,\lambda)\big[r^2 + a(\lambda)r + b(\lambda)\big]$$

où $a(0) = b(0) = 0$ et $h_1(0,0) \neq 0$. On a donc

$$f(r,\lambda) = h_1(r,\lambda)\left[\left(r+\frac{a(\lambda)}{2}\right)^2 + \left(b(\lambda) - \frac{a^2(\lambda)}{4}\right)\right].$$

Le théorème d'inversion locale implique que l'application φ définie par $\varphi(\lambda) = b(\lambda) - a^2(\lambda)/4$ est un difféomorphisme au voisinage de $\lambda = 0$, puisque par hypothèse on a

$$q_f = \frac{\partial}{\partial\lambda} f(0,0) = h_1(0,0)b'(0) > 0\,. \tag{3}$$

Soient, maintenant, h et ϕ les applications suivantes

$$h(r,\lambda) = h_1\left(r - \frac{a(\varphi^{-1}(\lambda))}{2}\,,\ \varphi^{-1}(\lambda)\right)$$

$$\phi(r,\lambda) = \left(r + \frac{a(\lambda))}{2}\,,\ \varphi(\lambda)\right),$$

et considérons la famille

$$Y = h(r,\lambda)(r^2+\lambda)\frac{\partial}{\partial r}\,.$$

On a ainsi $Y = \phi * X$. Le lemme 1 permet d'achever la démonstration. En particulier, on a

$$c_f = h(0,0) > 0\,. \tag{4}$$

Notation. — Soit $(Z_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ une famille de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}$. Pour tous réels ξ et ζ, on note

$$t_Z(\xi,\zeta,\lambda) \tag{5}$$

le temps qu'on met, lorsque c'est possible, pour atteindre ζ à partir de ξ par le flot du champ Z_λ.

On utilise encore cette notation lorsque ξ prend la valeur $-\infty$ et lorsque ζ prend la valeur $+\infty$.

LEMME 3. — *Soit $X = h(r,\lambda)(r^2+\lambda)\partial/\partial r$ où*

$$h(r,\lambda) = \left[a_0(\lambda) + a_1(\lambda)r + r^2k(r,\lambda)\right]^{-1}$$

est une fonction de la classe C^∞ telle que $c = h(0,0) > 0$ et soit $X^c = c(r^2+\lambda)\partial/\partial r$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ assez proche de zéro, il existe $\eta > 0$ assez loin de zéro tel que, pour tout $\lambda > 0$ voisin de zéro, on ait

$$t_X(-\varepsilon,\varepsilon,\lambda) < t_{X^c}(-\eta\,,\,+\infty\,,\,\lambda)\,.$$

Démonstration. — On prend $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ vérifiants

$$0 < \eta^{-1} < 2\varepsilon^{-1} - c\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} k(r,0)\,\mathrm{d}r\,. \tag{6}$$

Posons

$$F(\varepsilon,\eta,\lambda) = t_X(-\varepsilon,\varepsilon,\lambda) - t_{X^c}(-\eta,0,\lambda)\,.$$

On a

$$t_{X^c}(-\eta,0,\lambda)=\int_{-\eta}^{0}\left[h(0,0)(r^2+\lambda)\right]^{-1}\mathrm{d}r$$
$$=\frac{a_0(0)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\pi}{2}-\mathbf{Arctg}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\eta}\right)\right)$$

$$t_X(-\varepsilon,\varepsilon,\lambda)=\frac{\pi a_0(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}-\frac{2a_0(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\,\mathbf{Arctg}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\varepsilon}\right)+$$
$$+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}r^2k(r,\lambda)(r^2+\lambda)^{-1}\,\mathrm{d}r\,,$$

d'où

$$F(\varepsilon,\eta,\lambda)=\frac{\left(a_0(\lambda)-\dfrac{a_0(0)}{2}\right)\pi}{\sqrt{\lambda}}-\frac{2a_0(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\,\mathbf{Arctg}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\varepsilon}\right)+$$
$$+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}r^2k(r,\lambda)(r^2+\lambda)^{-1}\,\mathrm{d}r+\frac{a_0(0)}{\sqrt{\lambda}}\,\mathbf{Arctg}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\eta}\right)\,.$$

Comme

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\left(a_0(0)\right)^{-1}F(\varepsilon,\eta,\lambda)-\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right)=$$
$$=\left(n^{-1}-2\varepsilon^{-1}+a_0(0)^{-1}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}k(r,0)\,\mathrm{d}r\right)<0$$

alors, il existe $\lambda_1>0$ tel que pour $0<\lambda<\lambda_1$ on a

$$\frac{\pi a_0(0)}{2\sqrt{\lambda}}>F(\varepsilon,\eta,\lambda)>0\,.$$

Le résultat découle alors du fait que

$$t_{X^c}(0,+\infty,\lambda)=\frac{\pi a_0(0)}{2\sqrt{\lambda}}\,.$$

PROPOSITION 4. — *Soient X, X^c, ε et η comme dans le lemme 3.*

Il existe une $(C^0\,,\,\mathrm{id})$-conjugaison $\phi(r,\lambda)=\left(u(r,\lambda)\,,\,\lambda\right)$, définie dans le voisinage de $(0,0)$, de X vers X^c envoyant le segment $r(\lambda)=-\varepsilon$ sur le segment $r(\lambda)=-\eta$.

Démonstration.— Pour $\lambda > 0$, on définit $u(r, \lambda)$ par

$$t_X(-\varepsilon, r, \lambda) = t_{X^c}(-\eta\,,\ u(r, \lambda)\,,\ \lambda)\,.$$

Reprenons la fonction $F(\varepsilon, \eta, \lambda)$ du lemme 3. On a

$$F(\varepsilon, \eta, \lambda) = t_{X^c}\big(0\,,\ u(\varepsilon, \lambda)\,,\ \lambda\big) = \frac{a_0(0)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{u(\varepsilon, \lambda)}\right)\right)$$

et par suite

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\operatorname{Arctg}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{u(\varepsilon, \lambda)}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} - \big[a_0(0)\big]^{-1} F(\varepsilon, \eta, \lambda)\,.$$

On déduit de la démonstration du lemme 3 que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} u(\varepsilon, \lambda) = \left[-\frac{1}{\eta} + \frac{2}{\varepsilon} - c\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} k(r, 0)\, \mathrm{d}r\right]^{-1} > 0\,.$$

Notation.— Soit $X = f(r, \lambda)\partial/\partial r$ une famille selle-nœud en (r_0, λ_0) et soient (ξ) et (ζ) deux segments topologiques transverses aux niveaux $\{\lambda\}$ dans l'espace (r, λ), $\lambda > \lambda_0$, situés respectivement à gauche et à droite du point de bifurcation de X. Pour un niveau λ fixé, on appelle temps de transit relatif à X au voisinage de (r_0, λ_0), ou plus simplement temps de transit, le temps

$$T_X(\lambda, r_0, \lambda_0) = T_X(\lambda) = t_X\big(\xi(\lambda)\,,\ \zeta(\lambda)\,,\ \lambda\big)$$

qu'on met pour aller de (ξ) à (ζ) par le flot de X.

PROPOSITION 5.— *Soit $X = f(r, \lambda)\partial/\partial r$ une famille selle-nœud en $(0, 0)$. Pour un niveau λ fixé, le temps de transit relatif à X au voisinage de $(0, 0)$ s'écrit sous la forme*

$$T_X(\lambda) = \pi\big(c_f\,,\ q_f\,,\ \lambda\big)^{-1/2}\big(1 + \sqrt{\lambda}\,\alpha(\lambda)\big) \tag{7}$$

où α est une fonction continue.

Démonstration.— Soient (ξ) et (ζ) deux segments topologiques transverses aux niveaux $\{\lambda\}$ dans l'espace (r, λ), $\lambda > 0$, situés respectivement à gauche et à droite de $(0, 0)$.

Considérons la (C_0, C^∞)-conjugaison $\phi(r,\lambda) = \big(u(r,\lambda)\,,\,\varphi(\lambda)\big)$ de X vers $X^c = c(r^2+\lambda)\partial/\partial r$ avec $c = c_f$ et $\varphi(\lambda) = b(\lambda) - a^2(\lambda)/4 > 0$ donnée par les lemmes 1, 2 et la proposition 4. On a

$$\varphi(\lambda) = \lambda\left(\frac{q_f}{c_f}\right)\left(1+\sqrt{\lambda}\alpha(\lambda)\right)$$

où α est une fonction continue. Le résultat découle alors de la relation

$$T_X(\lambda) = t_{X^c}\left(u_\lambda\big(\xi(\lambda)\big)\,,\,u_\lambda\big(\zeta(\lambda)\big)\,,\,\varphi(\lambda)\right)\,.$$

THÉORÈME 6.— *Toute (C^0, C^0)-conjugaison*

$$\phi(r,\lambda) = \big(u(r,\lambda)\,,\,\varphi(\lambda)\big)$$

d'une famille selle-nœud $X = f(r,\lambda)\partial/\partial r$ vers une famille selle-nœud $Y = g(r,\lambda)\partial/\partial r$ en $(0,0)$ vérifie pour $\lambda > 0$ assez petit

$$\varphi(\lambda) = \sigma\lambda\big(1+\sqrt{\lambda}\alpha(\lambda)\big) \tag{8}$$

où α est une fonction continue et

$$\sigma = \frac{c_f q_f}{c_g q_g} = \lim_{\lambda\to 0^+}\left[\frac{T_Y(\lambda)}{T_X(\lambda)}\right]^2\,. \tag{9}$$

Démonstration.— Le résultat découle de la relation (7) et de l'identité

$$T_X(\lambda) = T_Y\big(\varphi(\lambda)\big)\,.$$

LEMME 7.— *Soient deux familles de champs de vecteurs $X^a = a(r^2+\lambda)\partial/\partial r$ et $X^b = b(r^2+\lambda)\partial/\partial r$ où $a>0$ et $b>0$ sont deux réels donnés et soit un homéomorphisme φ de $\mathbb{R}$ s'écrivant pour $\lambda>0$ voisin de zéro sous la forme*

$$\varphi(\lambda) = \left(\frac{a}{b}\right)^2\lambda\big(1+\sqrt{\lambda}\alpha(\lambda)\big)$$

où α est une fonction continue, alors pour tous réels $\varepsilon>0$ et $\eta>0$ il existe $\gamma>0$ tel que pour $\lambda>0$ voisin de zéro on ait

$$t_{X^b}\big(-\eta\,,\,0\,,\,\varphi(\lambda)\big) < t_{X^a}(-\varepsilon,\gamma,\lambda) < t_{X^b}\big(-\eta\,,\,+\infty\,,\,\varphi(\lambda)\big)\,.$$

Démonstration.— On prend γ vérifiant

$$\frac{b}{a}\left[\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\varepsilon}-\frac{\alpha(0)\pi}{2}\right]>\frac{1}{\eta}.$$

En effet, posons

$$F(\varepsilon,\gamma,\eta,\lambda)=t_{X^a}(-\varepsilon,\gamma,\lambda)-t_{X^b}(-\eta\,,\,0\,,\,\varphi(\lambda)).$$

On a alors

$$\begin{aligned}&b\sqrt{\varphi(\lambda)}\,F(\varepsilon,\gamma,\eta,\lambda)=\\&\quad=\frac{\pi}{2}+\sqrt{\lambda}\left[-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\alpha(\lambda)\pi}{2}+\frac{a}{b\eta}\right]+\mathrm{o}(\sqrt{\lambda})\,;\end{aligned}$$

comme

$$\left[-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\alpha(0)\pi}{2}+\frac{a}{b\eta}\right]<0\,,$$

alors il existe $\lambda_1>0$ tel que pour $0<\lambda<\lambda_1$ on a

$$0<b\sqrt{q(\lambda)}\,F(\varepsilon,\gamma,\eta,\lambda)<\frac{\pi}{2}.$$

Le résultat découle alors du fait que

$$t_{X^b}(0\,,\,+\infty\,,\,\varphi(\lambda))=\frac{\pi}{2b\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

THÉORÈME 8.— *Soient $X=f(r,\lambda)\partial/\partial r$ et $Y=g(r,\lambda)\partial/\partial r$ deux familles selle-nœuds en $(0,0)$, et soit φ un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ s'écrivant pour $\lambda>0$ sous la forme (8). Si (ξ) et (ζ) sont deux segments topologiques transverses aux niveaux $\{\lambda\}$ de l'espace (r,λ), pour $\lambda>0$, situés à gauche et dans un voisinage assez petit du point de bifurcation $(0,0)$. Alors, il existe une (C^0,C^0)-conjugaison $\phi(r,\lambda)=\big(u(r,\lambda)\,,\,\varphi(\lambda)\big)$ de X vers Y envoyant (ξ) sur (ζ).*

Démonstration.— On peut, d'après les lemmes 1, 2 et la proposition 4, supposer que :

i) $X=X^a=a(r^2+\lambda)\partial/\partial r$ avec $a=c_f$ et
$Y=X^b=b(r^2+\lambda)\partial/\partial r$ avec $b=c_g$;

ii) (ξ) un segment d'équation $r(\lambda)=-\varepsilon$ et (ζ) un segment d'équation $r(\lambda)=-\eta$ avec $\varepsilon>0$ et $\eta>0$;

iii) $\varphi(\lambda)=(a/b)^2\lambda\big(1+\sqrt{\lambda}\alpha(\lambda)\big)$ où α est une fonction continue.

Pour $\lambda > 0$, on définit $u(r, \lambda)$ par

$$t_X(-\varepsilon, r, \lambda) = t_Y(-\eta\,,\ u(r, \lambda)\,,\ \varphi(\lambda))\,.$$

Soit $\gamma > 0$ comme dans le lemme 7, on a alors

$$F(\varepsilon, \gamma, \eta, \lambda) = t_{X^b}(0\,,\ u(\gamma, \lambda)\,,\ \varphi(\lambda))\,.$$

La forme de l'homéomorphisme φ permet d'établir que $u(\gamma, \lambda)$ admet une limite non nulle dans $\mathbb{R}_+$ quand $\lambda \to 0^+$.

2. (C^0, C^0)-conjugaison entre deux familles de difféomorphismes de $\mathbb{R}$ au voisinage d'un point fixé de type selle-nœud

Les résultats obtenus pour les familles de champs de vecteurs s'étendent aux familles de la classe C^∞ de difféomorphismes de la droite réelle qui sont de type selle-nœud en un point $(r_0, \lambda_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

DÉFINITION .— *On dit qu'une famille de difféomorphismes* $\{h_\lambda\}$ *de la droite réelle,* $h_\lambda(r) = h(r, \lambda)$ *de la classe* C^∞ *en* (r, λ)*, est de type selle-nœud en* $(r_0, \lambda_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *si et seulement si,*

$$\begin{cases} 1) \quad h(r_0, \lambda_0) = r_0 \\ 2) \quad \dfrac{\partial}{\partial r}\, h(r_0, \lambda_0) = 1 \\ 3) \quad \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\, h(r_0, \lambda_0) \neq 0 \\ 4) \quad \dfrac{\partial}{\partial \lambda}\, h(r_0, \lambda_0) \neq 0\,. \end{cases} \tag{10}$$

On supposera sans restreindre la généralité que

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\, h(r_0, \lambda_0) > 0 \quad \textit{et} \quad \frac{\partial}{\partial \lambda}\, h(r_0, \lambda_0) > 0\,.$$

Le $n^{\text{ième}}$ *itéré de* h_λ *sera noté* h_λ^n.

Remarque 1.— On supposera que $(r_0, \lambda_0) = (0,0)$.

Remarque 2.— Soit une famille $X(r,\lambda) = f(r,\lambda)\partial/\partial r$, où f est de la classe C^∞, de type selle-nœud en $(0,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On note $P_{X,\lambda}(r) = P_X(r,\lambda) = P(r,\lambda)$ son flot au temps 1 :

- la famille de difféomorphismes $\{P_{X,\lambda}\}_\lambda$ est de type selle-nœud en $(0,0)$;
- en utilisant les notations (2), on a

$$q_P = q_f \quad \text{et} \quad c_P = c_f\,. \tag{11}$$

Remarque 3.— Soient $h_\lambda(r)$ et $k_\lambda(r)$ deux familles C^∞ de difféomorphismes de la droite réelle de type selle-nœud en $(0,0)$. Rappelons les résultats suivants :

- il existe un unique champ X_0 (resp. Y_0) de la classe C^∞ défini au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}$ tel que son flot au temps $t = 1$ coïncide avec h_0 (resp. k_0) [T];
- les famills $h_\lambda(r)$ et $k_\lambda(r)$ sont (C^0, C^0)-conjuguées au voisinage de $(0,0)$ [NPT];
- si $\phi(r,\lambda) = \big(u_\lambda(r)\,,\,\varphi(\lambda)\big)$ est une (C^0, C^0)-conjugaison de $\{h_\lambda\}$ vers $\{k_\lambda\}$ alors $u_- = u_0\restriction_{]-\infty\,,\,0[}$ (resp. $u_+ = u_0\restriction_{]0\,,\,+\infty[}$) est une (C^0)-conjugaison de $X_0\restriction_{]-\infty\,,\,0[}$ (resp. $X_0\restriction_{]0\,,\,+\infty[}$) vers $Y_0\restriction_{]-\infty\,,\,0[}$ (resp. $Y_0\restriction_{]0\,,\,+\infty[}$); cela constitue une rigidité, dans la direction des r, dans le choix de ϕ [NPT].

Remarque 4.— Dans ce qui suit nous rappelons certains passages de la démonstration de la remarque 3 ii). Nous établissons que φ est nécessairement dérivable en zéro, et nous donnons l'expression de cette dérivée. Cela constitue une rigidité, dans la direction des λ, dans le choix de ϕ.

Remarque 5.— On dit qu'une famille de champs $X = f(r,\lambda)\partial/\partial r$ de type selle-nœud en $(0,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est adaptée à la famille de difféomorphismes $\{h_\lambda\}$ de type selle-nœud en $(0,0)$ si la fonction $w(r,\lambda)$ définie par

$$h_\lambda(r) + w(r,\lambda) = P_{X,\lambda}(r)$$

s'annule le long de l'axe des r et a un 4-jet nul en $(0,0)$.

On démontre dans [NPT] les résultats suivants.

i) Pour toute famille de difféomorphismes $\{h_\lambda\}$ de type selle-nœud en $(0,0)$, il existe une famille $X = f(r,\lambda)\partial/\partial r$ de champs adaptée. De plus, il est possible de choisir X de la classe C^∞ en (r,λ).

ii) Soient ε et μ des réels strictement positifs assez petits, posons

$$U = \{(r, \lambda) \mid 0 \leq \lambda \leq \mu\,,\ -\varepsilon \leq r \leq \varepsilon\}\,.$$

Supposons que

$$\forall\ (r,\lambda) \in U \setminus (0,0)\,, \quad X(r,\lambda) > 0\,, \quad h_\lambda(r) > r\,, \quad h_\lambda(-\varepsilon) \in U\,.$$

Soient les domaines fondamentaux :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_h(\varepsilon,\mu) &= \{(r,\lambda) \in U \mid 0 \leq \lambda \leq \mu\,,\ -\varepsilon \leq r \leq h_\lambda(-\varepsilon)\} \\ \mathrm{D}_X(\varepsilon,\mu) &= \{(r,\lambda) \in U \mid 0 \leq \lambda \leq \mu\,,\ -\varepsilon \leq r \leq P_{X,\lambda}(-\varepsilon)\}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Si ϕ est un homéomorphisme préservant l'orientation de $\mathrm{D}_h(\varepsilon,\mu)$ vers $\mathrm{D}_X(\varepsilon,\mu)$ de la forme $\phi(r,\lambda) = \big(u(r,\lambda)\,, \mathrm{id}\big)$ où id désigne l'application identique de l'intervalle $[\,0\,,\,\mu\,]$ et u vérifie :

- $u(-\varepsilon,\lambda) = -\varepsilon$, pour chaque $\lambda \in [\,0\,,\,\mu\,]$;
- $u(r,0) = r$ pour chaque $r \in \big[-\varepsilon\,,\,h_0(-\varepsilon)\big]$;

alors ϕ se prolonge en une (C^0, id)-conjugaison locale de $\{h_\lambda\}$ vers $\{P_{X,\lambda}\}$.

Les familles $\{h_\lambda\}$ et $\{P_{X,\lambda}\}$. sont ainsi (C^0, id)-conjuguées.

PROPOSITION 9.— *Soit $h_\lambda(r)$ une famille C^∞ en (r,λ) en difféomorphismes de la droite de type selle-nœud en $(0,0)$ et soient (ξ) et (ζ) deux segments topologiques transverses aux niveaux $\{\lambda\}$, dans l'espace (r,λ), $\lambda > 0$, situés respectivement à gauche et à droite du point de bifurcation.*

Le nombre minimal $n_h(\lambda)$ d'itérations de h_λ nécessaire pour que l'on puisse, en partant de (ξ) à un niveau λ, atteindre ou dépasser (ζ) s'écrit sous la forme

$$n_h(\lambda) = \pi\big(c_h q_h \lambda\big)^{-1/2}\big(1 + \sqrt{\lambda}\,\mathrm{o}(1)\big)\,.$$

Démonstration.— Soit X un champ adapté à $\{h_\lambda\}$; comme $\{h_\lambda\}$ est (C^0, id)-conjugué à $\{P_{X,\lambda}\}$ alors

$$n_h(\lambda) \leq T_X(\lambda) < 1 + n_h(\lambda)\,.$$

Le résultat est ainsi obtenu à l'aide de la proposition 5.

THÉORÈME 10.— *Soient* $h_\lambda(r) = h(r,\lambda)$ *et* $k_\lambda(r) = k(r,\lambda)$ *deux familles* C^∞ *en* (r,λ) *de difféomorphismes de la droite réelle de type selle-nœud en* $(0,0)$.

Soit $\mathrm{D}_h(\varepsilon,\mu)$ *(resp.* $\mathrm{D}_k(\eta,\nu)$*) un domaine fondamental de la famille* $h_\lambda(r)$ *(resp.* $k_\lambda(r)$*) de la forme (12).*

Soit $\phi(r,\lambda) = \big(u(r,\lambda)\,,\,\varphi(\lambda)\big)$ *un homéomorphisme préservant l'orientation de* $\mathrm{D}_h(\varepsilon,\mu)$ *vers* $\mathrm{D}_k(\eta,\nu)$ *tel que :*

i) $\varphi(0) = 0$ *;*

ii) $u(-\varepsilon,\lambda) = -\eta$ *pour tout* $\lambda \in [\,0\,,\,\mu\,]$ *;*

iii) $u(r,0)$ *définit une* C^0*-conjugaison de* $h_0\restriction_{[-\varepsilon,0]}$ *vers* $k_0\restriction_{[-\eta,0]}$*, alors* ϕ *se prolonge en une* (C^0,C^0)*-conjugaison locale de* $\{h_\lambda\}$ *vers* $\{k_\lambda\}$ *si et seulement si*

$$\forall\, \lambda \in [\,0\,,\,\mu\,], \quad \varphi(\lambda) = \sigma\lambda\big(1+\sqrt{\lambda}\,\alpha(\lambda)\big)$$

où α *est une fonction continue et*

$$\sigma = \frac{c_h q_h}{c_k q_k} = \lim_{\lambda\to 0^+}\left[\frac{n_k(\lambda)}{n_h(\lambda)}\right]^2 . \tag{13}$$

Démonstration.— Notons $a = c_h$ et $b = c_k$. D'après les lemmes 1 et 2, la proposition 4 et les résultats de [NPT] sur les champs adaptés, $\{h_\lambda\}$ (resp. $\{k_\lambda\}$) est (C^0,C^0)-conjuguée à $\{P_{X^a,\lambda}\}$ (resp. $\{P_{X^b,\lambda}\}$). Nous allons donc supposer que $h_\lambda = P_{X^a,\lambda}$ et $k_\lambda = P_{X^b,\lambda}$, et nous allons montrer que ϕ se prolonge en une (C^0,C^0)-conjugaison de $\{h_\lambda\}$ vers $\{k_\lambda\}$ si et seulement si

$$\varphi(\lambda) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \lambda\big(1+\sqrt{\lambda}\,\alpha(\lambda)\big)$$

où α est une fonction continue. Considérons une ligne verticale $r(\lambda) = \gamma$ (>0). Posons

$$t_{X^a}(-\varepsilon,\gamma,\lambda) = n(\lambda)+\theta(\lambda) \quad \text{et} \quad v(\gamma,\lambda) = \big[P_{X^a,\lambda}\big]^{-n(\lambda)}(\gamma,\lambda)$$

où $n(\lambda)$ est un entier naturel et $\theta(\lambda)$ vérifie $0 \le \theta(\lambda) < 1$. On a

$$-\varepsilon \le v(\gamma,\lambda) < P_{X^a,\lambda}(-\varepsilon) < 0$$

et

$$n(\lambda) = t_{X^a}\big(v(\gamma,\lambda)\,,\,\gamma\,,\,\lambda\big) = t_{X^b}\big(u_\lambda\big(v(\gamma,\lambda)\big)\,,\,u_\lambda(\gamma)\,,\,\varphi(\lambda)\big)\,.$$

On en déduit que

$$\pi\left[\left(b\sqrt{\varphi(\lambda)}\right)^{-1}-\left(a\sqrt{\lambda}\right)^{-1}\right]=$$
$$=\frac{1}{b\sqrt{\varphi(\lambda)}}\left\{-\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{\varphi(\lambda)}}{u(v(\gamma,\lambda)\,,\,\lambda)}+\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{\varphi(\lambda)}}{u(\gamma,\lambda)}\right\}+$$
$$+\frac{1}{a\sqrt{\lambda}}\left\{\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{v(\gamma,\lambda)}-\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{\gamma}\right\}.$$

La continuité uniforme de la fonction u sur le compact $\mathrm{D}_h(\varepsilon,\mu)$ et la propriété iii) de u impliquent que la quantité

$$\frac{1}{a\sqrt{\lambda}}\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{v(\gamma,\lambda)}-\frac{1}{b\sqrt{\varphi(\lambda)}}\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{\varphi(\lambda)}}{u(v(\gamma,\lambda)\,,\,\lambda)}$$

admet une limite finie quand $\lambda \longrightarrow 0^+$. Ainsi, $u(\gamma,\lambda)$ admet une limite finie quand $\lambda \longrightarrow 0^+$, si et seulement si $\left(b\sqrt{\varphi(\lambda)}\right)^{-1}-\left(a\sqrt{\lambda}\right)^{-1}$ en admet une. Le résultat en découle.

La relation (13) est une conséquence de la proposition 9.

3. Un invariant de conjugaison

Dans cette troisième partie on s'intéresse à l'étude de conjugaisons existantes entre deux familles à un paramètre de champs de vecteurs réels (resp. de difféomorphismes de la droite réelle) présentant ce qu'on appellera des selles-nœuds simultanés.

Soit $X(r,\lambda)=f(r,\lambda)\partial/\partial r$ (resp. $f_\lambda(r)=f(r,\lambda)$) une famille de champs réels (resp. difféomorphismes de la droite) de la classe C^∞.

On suppose que, pour λ voisin d'un certain λ_0 et r appartenant à un intervalle ouvert I, la famille X (resp. f_λ) a deux singularités (resp. points fixes) selle-nœuds en (r_0',λ_0) et (r_0'',λ_0) telles que dans l'espace (r,λ) on ait la figure 2.

Pour résumer cette propriété, on dira que X (resp. f_λ) est *une famille présentant deux selle-nœuds simultanés* en (r_0',λ_0) et (r_0'',λ_0).

On considère une deuxième famille $Y(r,\lambda)=g(r,\lambda)\partial/\partial r$ (resp. $g_\lambda(r)=g(r,\lambda)$) de champs réels (resp. difféomorphismes de la droite) de la classe C^∞ présentant deux selle-nœuds simultanés en (r_1',λ_1) et (r_1'',λ_1).

THÉORÈME 11.— *S'il existe une (C^0, C^0)-conjugaison locale (c'est-à-dire définie dans un ouvert contenant les deux singularités et la ligne qui les connecte) :*

$$\phi(r, \lambda) = \big(u(r, \lambda)\,,\, \varphi(\lambda)\big)$$

de X (resp. f_λ) vers Y (resp. g_λ) envoyant (r_0', λ_0) en (r_1', λ_1) et (r_0'', λ_0) en (r_1'', λ_1), alors les expressions $I(f)$ et $I(g)$ suivantes sont égales :

$$\begin{aligned} I(f) &= \frac{c_f(r_0', \lambda_0) q_f(r_0', \lambda_0)}{c_f(r_0'', \lambda_0) q_f(r_0'', \lambda_0)} \\ I(g) &= \frac{c_g(r_1', \lambda_1) q_g(r_1', \lambda_1)}{c_g(r_1'', \lambda_1) q_g(r_1'', \lambda_1)}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

De plus, l'application φ s'écrit pour $(\lambda - \lambda_0) > 0$ assez petit sous la forme :

$$\varphi(\lambda) = \lambda_1 + \sigma(\lambda - \lambda_0)\big[1 + (\lambda - \lambda_0)^{1/2}\alpha(\lambda)\big]$$

où

$$\sigma = \frac{c_f(r_0', \lambda_0) q_f(r_0', \lambda_0)}{c_g(r_1', \lambda_1) q_g(r_1', \lambda_1)} = \frac{c_f(r_0'', \lambda_0) q_f(r_0'', \lambda_0)}{c_g(r_1'', \lambda_1) q_g(r_1'', \lambda_1)} \tag{15}$$

et où α est une fonction continue définie au voisinage de λ_0.

Démonstration.— **L'expression de φ est donnée par le théorème 6 pour les champs et par le théorème 10 pour les difféomorphismes. Il s'ensuit l'égalité $I(f) = I(g)$.**

Remarque.— **Dans le théorème 12 suivant, nous utilisons l'invariant de Mather-Roussarie pour la (C^0, C^0)-conjugaison des familles de difféomorphismes de la droite réelle présentant des selle-nœuds simultanés (voir [R]).**

THÉORÈME 12.— *Soit $X(r, \lambda) = f(r, \lambda)\partial/\partial r$ (resp. $f_\lambda(r) = f(r, \lambda)$) une famille de champs de vecteurs réels (resp. de difféomorphismes de la droite) présentant des selle-nœuds simultanés en (r_0', λ_0) et (r_0'', λ_0) et soit $Y(r, \lambda) = g(r, \lambda)\partial/\partial r$ (resp. $g_\lambda(r) = g(r, \lambda)$) une deuxième famille de champs de vecteurs réels (resp. difféomorphismes de la droite ayant même invariant de Mather-Roussarie que la famille f_λ) présentant des selle-nœuds simultanés en (r_1', λ_1) et (r_1'', λ_1) et vérifiant $I(f) = I(g)$ et soit φ un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ s'écrivant pour $(\lambda - \lambda_0) > 0$ assez petit sous la forme :*

$$\varphi(\lambda) = \lambda_1 + \sigma(\lambda - \lambda_0)\big[1 + (\lambda - \lambda_0)^{1/2}\alpha(\lambda)\big]$$

où σ vérifie (15) et α est une fonction continue définie au voisinage de λ_0.

Soit (ξ) *un segment topologique transverse aux niveaux* $\{\lambda\}$ *de l'espace* (r, λ) *pour* $\lambda \geq \lambda_0$*, situé à gauche et dans un voisinage assez petit du point de bifurcation* (r'_0, λ_0) *de* X *(resp.* f_λ*) et soit* (ζ) *un segment défini d'une façon analogue au voisinage du point de bifurcation* (r'_1, λ_1) *de* Y *(resp.* g_λ*). Il existe alors une* (C^0, C^0)*-conjugaison locale* $\phi(r, \lambda) = \big(u(r, \lambda)\,,\ \varphi(\lambda)\big)$ *de* X *vers* Y *envoyant* (ξ) *sur* (ζ)*,* (r'_0, λ_0) *sur* (r'_1, λ_1) *et* (r''_0, λ_0) *sur* (r''_1, λ_1)*.*

Démonstration.— On applique le théorème 8 (resp. le théorème 10) au voisinage de (r'_0, λ_0). On obtient une (C^0, C^0)-conjugaison, $\phi(r, \lambda) = \big(u(r, \lambda)\,,\ \varphi(\lambda)\big)$, définie au voisinage de (r'_0, λ_0) qui se prolonge toujours d'après le théorème 8 (resp. le théorème 10) jusqu'au voisinage de (r''_0, λ_0) (voir fig. 3).

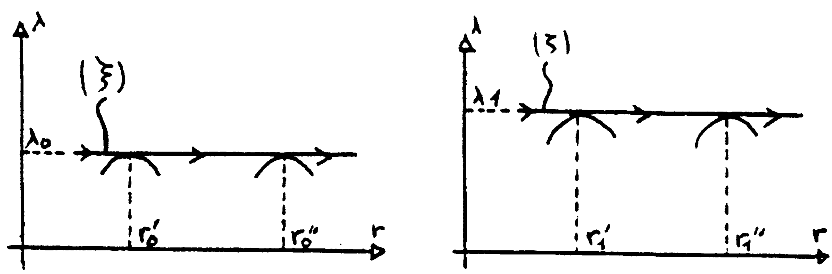

Fig. 3

Remarque.— Le théorème 12 prouve en particulier que les invariants de Mather-Roussarie et $I(f)$ forment un système complet d'invariants pour la (C^0, C^0)-conjugaison des difféomorphismes présentant des selle-nœuds simultanés. Cette propriété a été conjecturée par R. Roussarie dans [R].

PROPOSITION 13.— *Soit* X *(resp.* Y*) une famille de champs de vecteurs réels à un paramètre présentant des selle-nœuds simultanés en* (r'_0, λ_0) *et* (r''_0, λ_0) *(resp.* (r'_1, λ_1) *et* (r''_1, λ_1)*) et vérifiant* $I(f) = I(g)$ *et soient* ε*,* η*,* γ *et* δ *des réels* > 0 *assez petits, alors il existe une* (C^0, C^0)*-conjugaison* $\phi(r, \lambda) = \big(u(r, \lambda)\,,\ \varphi(\lambda)\big)$ *de* X *vers* Y *telle que*

$$u(r'_0 - \varepsilon\,,\ \lambda) = r'_1 - \eta$$
$$u(r'_0 + \gamma\,,\ \lambda) = r'_1 + \delta$$
$$u(r'_0, \lambda) = r'_1$$
$$u(r''_0, \lambda) = r''_1\,,$$

pour $(\lambda - \lambda_0) \geq 0$ *et définie pour* λ *voisin de* λ_0 *et* r *appartenant à un intervalle ouvert* I *contenant* r_0' *et* r_0''.

Démonstration.— D'après [NPT], il existe une (C^0, C^0)-conjugaison locale $\phi(r, \lambda) = \big(u(r, \lambda)\,,\ \varphi(\lambda)\big)$ de X vers Y telle que

$$
\begin{aligned}
u(r_0' - \varepsilon\,,\ \lambda) &= r_1' - \eta \\
u(r_0' + \gamma\,,\ \lambda) &= r_1' + \delta \\
u(r_0', \lambda) &= r_1'\,.
\end{aligned}
$$

Cette (C^0, C^0)-conjugaison se prolonge d'après le théorème 8 jusqu'à un voisinage de (r_0'', λ_0) (voir fig. 4).

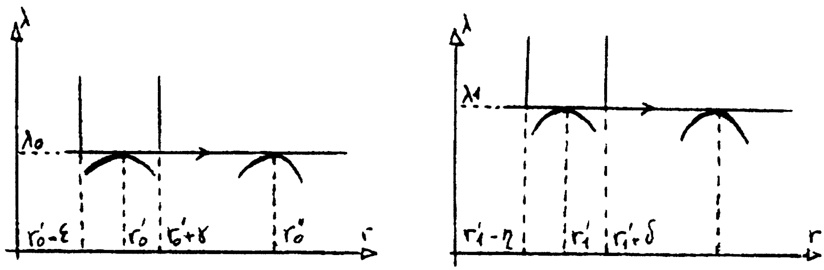

Fig. 4

PROPOSITION 14.— *Soit* X *(resp.* Y*) une famille de champs de vecteurs réels à un paramètre présentant des selle-nœuds simultanés en* (r_0', λ_0) *et* (r_0'', λ_0) *(resp. en* (r_1', λ_1) *et* (r_1'', λ_1)*) et vérifiant* $I(f) = I(g)$ *et soient* ε, η, γ *et* δ *des réels* > 0 *assez petits, alors il existe une* (C^0, C^0)*-conjugaison* $\phi(r, \lambda) = \big(u(r, \lambda)\,,\ \varphi(\lambda)\big)$ *de* X *vers* Y *telle que pour* $\lambda - \lambda_0 \geq 0$ *on ait*

$$
\begin{aligned}
u(r_0' - \varepsilon\,,\ \lambda) &= r_1' - \eta \\
u(r_0'' + \gamma\,,\ \lambda) &= r_1'' + \delta \\
u(r_0', \lambda_0) &= r_1' \\
u(r_0'', \lambda_0) &= r_1''\,.
\end{aligned}
$$

De plus, ϕ est définie pour λ voisin de λ_0 et r appartenant à un intervalle ouvert I contenant r_0' et r_0'' (voir fig. 5).

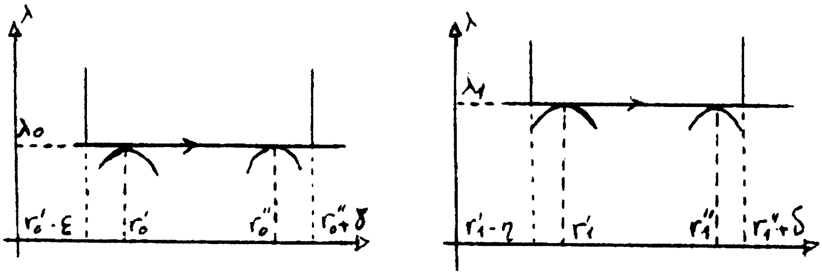

Fig. 5

Démonstration. — Posons

$$\sigma = \frac{c_f(r_0', \lambda_0) q_f(r_0', \lambda_0)}{c_g(r_1', \lambda_1) q_g(r_0', \lambda_0)} = \frac{c_f(r_0'', \lambda_0) q_f(r_0'', \lambda_0)}{c_g(r_1'', \lambda_1) q_g(r_1'', \lambda_1)},$$

et considérons le modèle

$$X^m = (r^2 + \lambda)\big((r-1)^2 + \sigma\lambda\big)\frac{\partial}{\partial r}.$$

Soient a, b, c et d des réels > 0, d'après le théorème 12, il existe une (C^0, C^0)-conjugaison $\phi_1(r,\lambda) = \big(u_1(r,\lambda), \varphi_1(\lambda)\big)$ (resp. $\phi_2(r,\lambda) = \big(u_2(r,\lambda), \varphi_2(\lambda)\big)$) de X (resp. Y) vers X^m, envoyant :

i) la ligne $r(\lambda) = r_0' - \varepsilon$, $\lambda \geq \lambda_0$ (resp. $r(\lambda) = r_1' - \eta$, $\lambda \geq \lambda_1$) sur la ligne $r(\lambda) = -a$ (resp. $r(\lambda) = -b$), $\lambda \geq 0$;

ii) la ligne $r(\lambda) = r_0'' + \gamma$, $\lambda \geq \lambda_0$ (resp. $r(\lambda) = r_1'' - \delta$, $\lambda \geq \lambda_1$) sur une ligne (ξ) (resp. ζ) transverse aux niveaux $\{\lambda\}$ de l'espace (r,λ), $\lambda \geq 0$, et située à droite du point de bifurcation $(1,0)$ de X^m;

iii) le point (r_0', λ_0) (resp. (r_1', λ_1)) sur $(0,0)$ et le point (r_0'', λ_0) (resp. (r_1'', λ_1)) sur $(1,0)$.

Le temps $t_1(\lambda)$ (resp. $t_2(\lambda)$), $\lambda > 0$, mis pour aller de $(-a)$ à $u_1(r_0''+\gamma\,,\,\lambda)$ (resp. de $(-b)$ à $u_2(r_1''+\delta\,,\,\lambda)$) par X^m au niveau λ étant, par construction même, croissant strictement vers $+\infty$ quand λ décroît vers 0^+, il existe donc un unique homéomorphisme $\varphi_3(\lambda)$ tel que :

$$t_1(\lambda) = t_2\big(\varphi_3(\lambda)\big)\,, \quad \lambda > 0\,.$$

Un calcul de chacune des expressions $t_1(\lambda)$ et $t_2(\varphi_3(\lambda))$ montre que φ_3 se prolonge, par 0 en 0, en une fonction s'écrivant pour $\lambda > 0$ assez petit sous la forme

$$\varphi_3(\lambda) = \lambda\left[1 + \sqrt{\lambda}\,\alpha(\lambda)\right]$$

où α est une fonction continue, définie au voisinage de zéro.

Cela permet, d'après le théorème 12, d'affirmer qu'il existe une (C^0, C^0)-conjugaison $\phi_3(r,\lambda) = \big(u_3(r,\lambda)\,,\ \varphi_3(\lambda)\big)$, de X^m vers X^m, envoyant la ligne $r(\lambda) = -a$ sur la ligne $r(\lambda) = -b$ et la ligne (ξ) sur la ligne (ζ).

La fonction composée $\phi = \phi_2^{-1} \circ \phi_3 \circ \phi_1$ est une (C^0, C^0)-conjugaison répondant à la question.

PROPOSITION 15.— *Soit $X(r,\lambda) = f(r,\lambda)\partial/\partial r$ une famille présentant des selle-nœuds simultanés en $(r_0', 0)$ et $(r_0'', 0)$.*

Le rapport $\left[T_X(\lambda\,;\,r_0'', 0)/T_X(\lambda\,;\,r_0', 0)\right]$ des temps de transit relatifs à X, aux voisinages de $(r_0', 0)$ et $(r_0'', 0)$ respectivement, admet une limite finie quand λ tend vers 0^+. De plus, on a

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \left[\frac{T_X(\lambda\,;\,r_0'', 0)}{T_X(\lambda\,;\,r_0', 0)}\right]^2 = I(f)$$

où $I(f)$ est l'invariant défini par (14).

Démonstration.— C'est une conséquence de la relation (9). Il suffit d'assimiler la famille présentant des selle-nœuds simultanés à deux familles selle-nœuds, l'une en $(r_0', 0)$ et l'autre en $(r_0'', 0)$.

Remerciements

Je remercie vivement F. Dumortier pour m'avoir proposé ce travail et pour avoir assuré mon encadrement.

Je remercie également la F.N.R.S.T., la F.S.T., l'A.M. et le L.U.C. pour leurs soutiens.

Références

[A] ANNABI (H.). — *Ridigité et invariant pour la* (C^0, C^0)*-conjugaison*, Thèse, Faculté des Sciences de Tunis (à paraître).

[K] KOSTOV (V.P.). — *Versal deformation of differential forms of real degree on the real line*, Math. U.S.S.R., Izvestiya **37**, n° 5 (1991), pp. 525-537.

[NPT] NEWHOUSE (S.), PALIS (N.) et TAKENS (F.). — *Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms*, Publ. Math. I.H.E.S. **57**, pp. 5-72.

[R] ROUSSARIE (R.). — *Weak and continuous equivalences for families on line diffeomorphisms*, In M. I. Camacho, M. J. Pacifico & F. Takens, Dynamical systems and bifurcation theory, Pitman Research Notes in Mathematics Series **160** (1987), pp. 377-385.