ABDERAOUF MOURTADA

Bifurcation de cycles limites au voisinage de polycycles hyperboliques et génériques à trois sommets

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 3, nº 2 (1994), p. 259-292

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1994_6_3_2_259_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. III, n° 2, 1994

Bifurcation de cycles limites au voisinage de polycycles hyperboliques et génériques à trois sommets(*)

ABDERAOUF MOURTADA(1)

RÉSUMÉ. — Utilisant les techniques générales développées dans [M1] et [M2], on montre que les polycycles hyperboliques et génériques à trois sommets sont de cyclicité inférieure ou égale à trois dans les familles C^∞ de champs de vecteurs du plan. On établit ensuite une classification topologique complète de tels polycycles. De plus, on exhibe une certaine classe de polycycles hyperboliques dégénérés qui sont de cyclicité supérieure ou égale à quatre. Des résultats similaires concernant les polycycles hyperboliques et génériques à quatre sommets sont décrits dans [M3].

ABSTRACT. — As a first application of general technics described in [M1] and [M2], we show that generic hyperbolic polycycles with three vertices are of cyclicity at most three in C^∞ families of vector fields on the plane. We give then a complete topological classification of such polycycles. Furthermore, we exhibit a class of degenerate hyperbolic polycycles which are of cyclicity at least four. Similar results about generic hyperbolic polycycles with four vertices can be found in [M3].

0. Introduction

Le 16$^{\text{ième}}$ problème de Hilbert peut s'énoncer ainsi :

(H) "Existe-t'il une borne $N(n)$ pour le nombre de cycles limites de tout champ polynomial du plan de degré $\leq n$?"

Un cycle d'un champ de vecteurs est une orbite périodique de ce champ. Un cycle limite est un cycle isolé dans l'ensemble des cycles.

(*) Reçu le 13 juin 1993

(1) Université de Bourgogne, Laboratoire de Topologie, C.N.R.S. DO 755, B.P. 138, F-21004 Dijon Cedex (France)

Un premier pas dans la résolution de ce problème a été fait grâce à Ecalle, Martinet, Moussu et Ramis [EMMR] et Il'yashenko [I]. Ils ont résolu la conjecture de finitude suivante connue sous le nom de *problème de Dulac* : "Tout champ polynomial du plan a un nombre fini de cycles limites". Leurs preuves étant d'ailleurs valables pour des champs analytiques sur S^2.

Dans [R1], Roussarie a montré qu'une réponse positive à la conjecture suivante résoudrait le $16^{\text{ième}}$ problème de Hilbert.

CONJECTURE [R1]. — *Tout ensemble limite périodique sur la sphère S^2 a une cyclicité finie dans les déformations analytiques.*

La notion d'ensemble limite périodique est due à Françoise et Pugh [FP].

DÉFINITION [FP]. — *Soit Γ une partie compacte de la sphère S^2 tangente à un champ analytique X_0 sur S^2. On dit que Γ est un ensemble limite périodique s'il existe une déformation analytique (X_λ) du champ X_0 ($\lambda \in \mathcal{V}$ voisinage de zéro dans $\mathbb{R}^\Lambda$) et une suite (λ_i) dans $\mathcal{V}$ tendant vers zéro telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, le champ X_{λ_i} admet un cycle c_i qui vérifie $d_H(c_i, \Gamma) \to 0$ quand $i \to +\infty$.*

La notation d_H désigne la distance de Hausdorff entre parties compactes de S^2.

La notion de cyclicité est due a Baudin [B].

DÉFINITION [B]. — *Soit Γ une partie compacte de S^2 tangente à un champ analytique X_0 sur S^2. Soit (X_λ) une déformation analytique de X_0 ($\lambda \in \mathcal{V}$ voisinage de zéro dans $\mathbb{R}^\Lambda$).*

i) On dit que Γ est de cyclicité finie dans la famille (X_λ) s'il existe un entier N, $\varepsilon > 0$ et $\mathcal{W}$ voisinage de zéro dans $\mathcal{V}$ tels que, pour tout $\lambda \in \mathcal{W}$, le nombre $n(\varepsilon, \lambda)$ de cycles limites c du champ X_λ qui vérifient $d_H(c, \Gamma) \leq \varepsilon$ est inférieur ou égal à N.

ii) Si Γ est de cyclicité finie dans la famille (X_λ), désignons par

$$n(\varepsilon, \mathcal{W}) = \sup\{n(\varepsilon, \lambda) \mid \lambda \in \mathcal{W}\} ;$$

la cyclicité de Γ dans la famille (X_λ) est alors le minimum de $n(\varepsilon, \mathcal{W})$ quand ε et le diamètre de $\mathcal{W}$ tendent vers zéro.

Soit Γ comme dans la définition ci-dessu. Si Γ n'est pas un ensemble limite périodique, alors Γ est de cyclicité finie et égale à zéro dans toute déformation (X_λ).

D'après la théorie de Poincaré-Bendixon, un ensemble limite périodique a singularités isolées est soit un cycle, soit un point singulier isolé, soit un *graphique.*

Un graphique est une image continue du cercle constituée d'une réunion d'un nombre fini et non vide de points singuliers isolés (appelés sommets du graphique) et d'une réunion d'orbites régulières qui relient ces points et dont l'ensemble ω-limite (resp. α-limite) est l'un des sommets du graphique.

Un graphique Γ d'un champ X_0 sur S^2 est dit *monodromique* si :

- il existe une transversale τ au champ définie par une application analytique

$$f :]-\varepsilon\,,\varepsilon[\ \to \mathbb{R}^2$$

  qui est un difféomorphisme sur son image et telle, que le point $f(0)$ soit sur l'une des orbites régulières du graphique;

- il existe $\varepsilon_1 \in\ ]0\,,\varepsilon]$ tel qu'une application premier retour p relativement à τ soit définie pour tout $u \in\ ]0\,,\varepsilon_1[$;

- si on désigne par c_u le morceau compact de l'orbite du point $f(u)$ dont les extrémités sont les points $f(u)$ et $f\big(p(u)\big)$, alors $d_H(c_u,\Gamma) \to 0$ quand $u \to 0$.

Un *polycycle* est un graphique contenant un nombre fini d'orbites régulières. Un polycycle, dont les sommets sont des points de selle hyperboliques, est dit *polycycle hyperbolique.*

On note (Γ_k) un polycycle hyperbolique à k sommets, P_i les sommets du polycycle et r_i le *rapport d'hyperbolicité* du sommet P_i qu'on définit par :

$$r_i = \left|\frac{\mu_1}{\mu_2}\right|$$

$\mu_1 < 0 < \mu_2$ étant les valeurs propres de la partie linéaire du champ en P_i.

Comme dans [M1] et [M2], on considère une famille (X_λ) de champs de vecteurs du plan, C^∞ en $(m,\lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\Lambda$, et on suppose que, pour $\lambda = 0$, X_0 possède un polycycle hyperbolique et monodromique (Γ_k) (fig. 0.1).

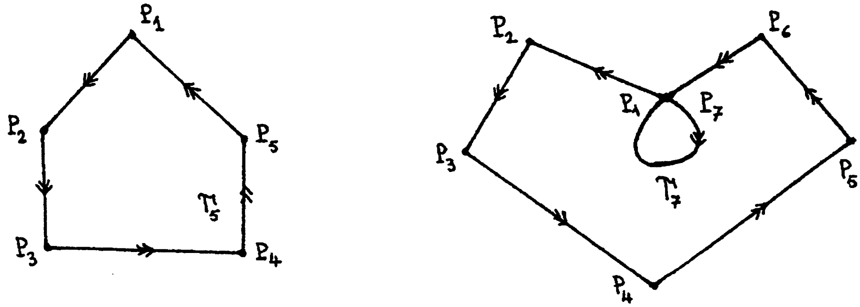

Fig. 0.1

On appelle "condition de type C.H." (condition hyperbolique) toute condition de la forme :

$$\prod_{j\in I} r_j(0) \neq 1 \quad \text{où } I \in \{1, \ldots, k\}. \tag{0.1}$$

Dans la section 2 de cet article, on démontre que pour certaine classe de fonctions un résultat de finitude plus fin que celui de [M2]. Ce résultat nous servira aussi dans [M3]. Dans la section 3, on montre que les polycycles à trois sommets sont de cyclicité ≤ 3 et que, dans ce cas, les conditions génériques du théorème 0.2 ci-après sont de types C.H. Dans la section 4, on donne un exemple de polycycle à trois sommets qui ne vérifie pas les conditions C.H. et qui est de cyclicité supérieure ou égale à quatre dans les familles génériques. On montre à l'occasion de cet exemple, que la fonction reste f de l'application déplacement $\Delta(\cdot,\lambda)$ ne vérifie pas les propriétés $(I^K_{\lambda,0})$ par multiplication par x sur le domaine de définition de Δ (déf. 0.1 ci-dessous). Dans la section 5, on établit la versalité de toute déformation générique à trois paramètres d'un polycycle à trois sommets vérifiant les conditions C.H., et on donne une classification complète de polycycles à trois sommets vérifiant les conditions C.H. d'après leur cyclicité maximale dans les familles génériques et la topologie du diagramme de bifurcation des cycles de ces familles au voisinage du polycycle.

Dans [M1], on a mis sous une forme normale adéquate au cas hyperbolique (et générique), l'application de déplacement associée à l'application de retour relative au polycycle perturbé. Avant d'énoncer ce résultat, rappelons une définition importante pour la suite.

DÉFINITION 0.1.— *Soient $K \in \mathbb{N}$, L une fonction de la variable (x, λ), O une partie de $\mathbb{R}^\Lambda$ telle que $0 \in \overline{O}$ et α une fonction de classe C^K en λ sur O de signe constant et telle que*

$$\lim_{\lambda \to 0,\, \lambda \in O} \alpha(\lambda) = 0 \quad et \quad |\alpha(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad pour\ tout\ \lambda \in O.$$

Posons

$$W = \bigcup_{\lambda \in O} \,]\alpha(\lambda), \varepsilon[\times \{\lambda\}$$

et soit ρ une fonction positive, de classe C^K en (x, λ) sur W et telle que

$$\lim_{\substack{(x,\lambda) \to (0,0) \\ (s,\lambda) \in W}} \rho(x, \lambda) = 0 \,;$$

alors on dit que L vérifie les propriétés $(I^K_{\lambda,0})$ par multiplication par ρ sur W si L est de classe C^K en (x, L) sur W et si, $\forall\, n \leq K$, L vérifie la propriété $(I^K_{\lambda,0})$:

$$\lim_{\substack{(x,\lambda) \to (0,0) \\ (s,\lambda) \in W}} \rho^n \frac{\partial^n L}{\partial x^n}(x, \lambda) = 0\,.$$

Notons $(P_i)_{i=1,\dots,k}$ les sommets du polycycle (Γ_k) et $(r_i)_{i=1,\dots,k}$ leurs rapports d'hyperbolicité. Si p désigne l'application de retour relative à une transversale donnée paramétrée par x, l'application déplacement associée est donnée par $\Delta(x) = p(x) - x$. Le théorème de normalisation démontré dans [M1] est le suivant.

THÉORÈME 0.1 [M1].— *Soit $K \in \mathbb{N}$, alors il existe $\varepsilon > 0$, $\mathcal{V}$ voisinage de zéro dans $\mathbb{R}^\Lambda$, deux fonctions continues et positives sur $\mathcal{V}$: $\rho(\lambda)$ et $\eta(\lambda)$ et des transversales au champ X_λ : $\sigma_i(\lambda)$, $\tau_i(\lambda)$ (fig. 0.2) de classe C^K tels que si on pose :*

$$\mathcal{U}_\lambda = \,]\,\rho(\lambda), \varepsilon\,[, \quad \mathcal{U} = \bigcup_{\lambda \in \mathcal{V}} \mathcal{U}_\lambda \times \{\lambda\} \quad et \quad V = \bigcup_{\lambda \in \mathcal{V}} \,]\,\eta(\lambda), \varepsilon\,[\, \times \{\lambda\},$$

l'application déplacement (associée à l'application de retour du polycycle perturbé) soit définie sur $\mathcal{U}_\lambda$, pour tout $\lambda \in \mathcal{V}$, et soit donnée par $\forall\, (x_1, \lambda) \in \mathcal{U}$:

$$\Delta(x_1, \lambda) =$$
$$= \Big[\dots\big[x_1^{r_1(\lambda)} + b_1(\lambda)\big]^{r_2(\lambda)} + \dots + b_{k-1}(\lambda)\Big]^{r_k(\lambda)} + b_k(\lambda) - \varphi(x_1, \lambda) \tag{0.2}$$

avec

$$\varphi(x_1,\lambda) = x_1\left[\overline{\alpha}_1(\lambda) + f(x_1,\lambda)\right].$$

x_1 est un paramètre de classe C^K sur $\sigma_1(\lambda)$, Δ (mesurée sur la transversale $\tau_k(\lambda)$) est de classe C^K en x_1 sur $\mathcal{U}_\lambda$ et toutes ses dérivées sont continues en $(x_1,\lambda) \in \mathcal{U}$. La translation $b_i(\lambda)$ mesure sur la transversale d'entrée du sommet P_{i+1} (avec la convention $k+1 \equiv 1$) la déformation de la connexion entre les sommets P_i et P_{i+1}. La fonction $\overline{\alpha}_1$ vérifie

$$\forall\, \lambda \in \mathcal{V}, \quad \overline{\alpha}_1(\lambda) > 0\,.$$

La fonction f est continue sur $]-\varepsilon\,,\varepsilon\,[\,\times \mathcal{V}$, de classe C^K en x_1 sur $]\,\eta(\lambda)\,,\varepsilon\,[$ pour tout $\lambda \in \mathcal{V}$, et vérifie les propriétés $\left(I^K_{\lambda,0}\right)$ par multiplication par $\left(x_1 - \eta(\lambda)\right)$ sur V (déf. 0.1).

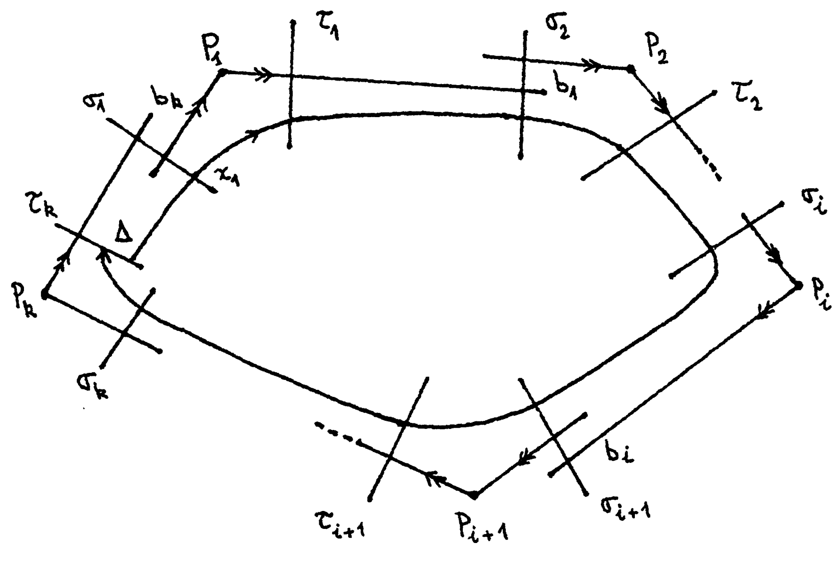

Fig. 0.2

L'équation aux cycles est $\Delta(x_1,\lambda) = 0$ et tout cycle du champ X_λ convergeant vers le polycycle (Γ_k) passe par $\mathcal{U}_\lambda$ domaine de définition de $\Delta(\,\cdot\,,\lambda)$. Cette forme normale nous a permis d'établir dans [M2] le théorème de finitude suivant.

THÉORÈME 0.2 [M2]. — *Sous des conditions génériques portant sur les rapports d'hyperbolicité des sommets P_i, le polycycle (Γ_k) est de cyclicité finie dans la famille (X_λ).*

Comme dans [M2], on suppose que tous les polycycles traités ici vérifient la condition :

$$\prod_{i=1}^{k} r_i(0) \neq 1\,. \tag{0.3}$$

Cette condition est suffisante pour assurer la non trivialité du polycycle. Elle permet aussi (par changement (4.2) de [M2]) de remplacer le facteur $\overline{\alpha}_1$ de l'expression (0.2) par 1.

Rappelons ici quelques notations et résultats de [M1] et [M2] utiles pour la suite.

1. Notations et définitions

a) Notations

Grâce à l'écriture de l'application déplacement Δ (cf. (0.2)) définissons par récurrence les fonctions :

$$\forall\,(x,\lambda)\in\mathcal{U}\,,\quad \begin{cases} h_0(x,\lambda)=x\;; \\ \forall\, j\in\{1,\,\ldots,\,k\}\,, \\ \qquad h_j(x,\lambda)=\big[h_{j-1}(x,\lambda)\big]^{r_j(\lambda)}+b_j(\lambda) \end{cases} \tag{1.1}$$

(l'ensemble $\mathcal{U}$ est décrit par le théorème 0.1). Pour la clarté de ce qui suit, introduisons les notations [M2].

- Soient $j\in\mathbb{N}^*$ et $t_1,\,t_2,\,\ldots,\,t_j\in\mathbb{R}$. On désignera par $\big(t\big)_j$ le j-uplet :

$$\big(t\big)_j=(t_j,\,t_{j-1},\,\ldots,\,t_1)\quad\text{et on convient que}\,\big(t\big)_0=0\,. \tag{1.2}$$

- Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\mathbb{R}$. On désignera par t^n le réel :

$$t^n=t-n\,. \tag{1.3}$$

Les indices seront inférieurs : t_n, et les puissances seront signalées par des crochets : $[t]^n$.

- Soient $\big(t\big)_j$ et $\big(t'\big)_j$ deux j-uplets et $u,\,v\in\mathbb{R}$. On posera :

$$\big(u\cdot t+v\cdot t'\big)_j=u\cdot\big(t\big)_j+v\cdot\big(t'\big)_j\,. \tag{1.4}$$

• Soient $j,\, n \in \mathbb{N}^*$ et $t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_j \in \mathbb{R}$. On désignera par $\left(t^n\right)_j$ le j-uplet (cf. (1.3)) :

$$\left(t^n\right)_j = \left(t_j^n,\, t_{j-1}^n,\, \ldots,\, t_1^n\right). \tag{1.5}$$

• Soient maintemant $t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_k \in \mathbb{R}$. On définit par récurrence et à l'aide des fonctions $\left(h_j\right)_{j=0,\ldots,k-1}$ (cf. (1.1)) les fonctions :

$$\forall\, (x,\lambda) \in \mathcal{U}\,, \quad \begin{cases} S_0^{(t)_0}(x,\lambda) = 1\,; \\ \forall\, j \in \{1,\, \ldots,\, k\}\,, \\ \qquad S_j^{(t)_j}(x,\lambda) = \left[h_{j-1}(x,\lambda)\right]^{t_j} \cdot S_{j-1}^{(t)_{j-1}}(x,\lambda)\,. \end{cases} \tag{1.6}$$

• Dans la suite, il arrivera que le j-uplet $\left(t\right)_j$ soit fonction du paramètre λ. Définissons ensuite et pour $j \geq 1$ les fonctions :

$$\begin{aligned} &\forall\, j \in \{1,\, \ldots,\, k\}\,,\ \forall\, (x,\lambda) \in \mathcal{U}\,, \\ &\qquad \widehat{S}_j^{(t)_j}(x,\lambda) = S_j^{(t)_j}(x,\lambda)\left[h_0(x,\lambda)\right]^{-t_1} \\ &\qquad \Sigma_j^{(t)_j}(x,\lambda) = \frac{\partial}{\partial x}\, S_j^{(t)_j}(x,\lambda)\left[S_j^{(t)_j}(x,\lambda)\right]^{-1} \\ &\qquad \overline{\Sigma}_j^{(t)_j}(x,\lambda) = S_j^{(1)_j}(x,\lambda)\Sigma_j^{(t)_j}(x,\lambda)\,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

où $\left(1\right)_j$ désigne le j-uplet : $\left(1\right)_j = (1,\, 1\,, \ldots,\, 1)$. On posera aussi :

$$\forall\, \lambda \in \mathcal{V}\,, \quad \begin{cases} R_0(\lambda) = 1\,; \\ \forall\, j \in \{1,\, \ldots,\, k\}\,, \quad R_j(\lambda) = r_{j-1} \cdot r_j(\lambda) \end{cases} \tag{1.8}$$

et

$$\forall\, \lambda \in \mathcal{V}\,,\ \forall\, j \in \{1,\, \ldots,\, k\}\,,\ s_j(\lambda) = \left[r_j(\lambda)\right]^{-1}. \tag{1.8'}$$

(L'ensemble $\mathcal{V}$ est décrit dans le théorème 0.1.)

b) Les espaces des fonctions $Q^{m,j}$ et $P_n^{m,j}$ et définitions correspondantes

On définit les fonctions $Q^{m,j}$ par récurrence sur $m,\, j \in \mathbb{N}$ et à l'aide des fonctions $\left(h_i\right)_{i=1,\ldots,k}$ (cf. (1.1)) et des fonctions $\left(S_i^{(r)_i}\right)_{i=1,\ldots,k}$ (cf. (1.6)), où $\left(r_i\right)_i$ désigne le i-uplet des rapports d'hyperbolicité $\left(r_\ell\right)_{\ell=1,\ldots,i}$ des sommets $\left(P_\ell\right)_{\ell=1,\ldots,i}$ du polycycle (Γ_k).

DÉFINITIONS 1.1

• *Pour $m = 0$ ou $j = 0$, les fonctions $Q^{0,j}$ (ou $Q^{m,0}$) sont de la forme*

$$\forall\ (x,\lambda) \in \mathcal{U}\,, \quad Q^{0,j}(x,\lambda)\ (ou\ Q^{m,0}(x,\lambda)) = C(\lambda) + f(x,\lambda)\,, \tag{1.9}$$

où f est une fonction qui vérifie les propriétés $\left(I^K_{\lambda,0}\right)$ par multiplication par x sur $\mathcal{U}$ (déf. 0.1) et C est une fonction continue en le paramètre λ sur $\mathcal{V}$.

• *Pour $m \geq 1$ et $j \in \{1, \ldots, k\}$, la fonction $Q^{m,j}$ est un polynôme homogène de degré m en les deux variables (h_j, $S_j^{(r)_j}$), dont les coeffients sont des fonctions $Q^{\ell,j-1}$ avec $\ell \in \{0, \ldots, m\}$. Plus précisément, supposons définies sur $\mathcal{U}$ les fonctions $Q^{\ell,j-1}$, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, alors $\forall\ (x,\lambda) \in \mathcal{U}$:*

$$Q^{m,j}(x,\lambda) = \sum_{\ell=0}^{m} \left[h_j(x,\lambda)\right]^{m-\ell} \left[S_j^{(r)_j}(x,\lambda)\right]^{\ell} Q^{m-\ell,j-1}(x,\lambda)\,. \tag{1.10}$$

On définit les fonctions $P_n^{m,j}$ à l'aide des fonctions $Q^{\ell,j-1}$ et les fonctions h_j, $S_j^{(r)_j}$ comme suit :

• *Pour $j = 0$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$ ($m \geq n$), $P_n^{m,0}$ est du type d'une fonction $Q^{m,0}$ (ou $Q^{0,j}$) :*

$$\forall\ (x,\lambda) \in \mathcal{U}\,, \quad P_n^{m,0}(x,\lambda) = C(\lambda) + f(x,\lambda)\,, \tag{1.11}$$

où les fonctions f et C ont les mêmes propriétés que dans la relation (1.9).

• *Pour $j \in \{1, \ldots, k\}$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$ ($m \geq n$), la fonction $P_n^{m,j}$ est un polynôme homogène de degré n en les deux variables (h_j, $S_j^{(r)_j}$) dont les coefficients sont des fonctions $Q^{\ell,j-1}$ (cf. (1.10)) avec $\ell \in \{m-n, \ldots, m\}$. Soit*

$$P_n^{m,j}(x,\lambda) = \sum_{\ell=0}^{n} \left[h_j(x,\lambda)\right]^{n-\ell} \left[S_j^{(r)_j}(x,\lambda)\right]^{\ell} Q^{m-\ell,j-1}(x,\lambda)\,. \tag{1.12}$$

Remarquons que

$$\forall\ j \in \{1, \ldots, k\}\,,\ \forall\ n \geq 1\,, \quad P_n^{n,j} = Q^{n,j}\,, \tag{1.13}$$

c'est-à-dire $P_n^{n,j}$ est une fonction de type $Q^{n,j}$, et que (1.12) :

$$\forall\ j \in \{1, \ldots, k\}\,,\ \forall\ m \geq 1\,, \quad P_0^{m,j} = Q^{m,j-1}\,. \tag{1.14}$$

Désignons par $\mathcal{B}^{m,j}$ (resp. $\mathcal{A}_n^{m,j}$) l'ensemble des fonctions de type $Q^{m,j}$ (resp. $P_n^{m,j}$) et notons pour $j \geq 1$,

$$\mathcal{A}_j = \bigcup_{m \geq n \geq 1} \mathcal{A}_n^{m,j} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_j = \bigcup_{m \geq 1} \mathcal{B}^{m,j}$$

Désignons aussi par $\mathcal{C}$ l'ensemble $\mathcal{B}^{0,j} = \mathcal{B}^{m,0} = \mathcal{A}_n^{m,0}$ (cf. (1.9) et (1.11)). Notons enfin

$$\mathcal{A} = \mathcal{C} \cup \left(\bigcup_{k \geq j \leq 1} \mathcal{A}_j \right) . \tag{1.15}$$

c) L'opérateur $\mathcal{L}$ et le lemme de finitude

Rappelons la définition de l'opérateur de division-dérivation $\mathcal{L}$ et le lemme de finitude énoncés dans [M2].

DÉFINITION 1.2.— *On définit sur les ensembles $\mathcal{A}_j$ un opérateur de division-dérivation noté $\mathcal{L}$ comme suit : si $\mathcal{P}_n^{m,j}$ est un élément de l'ensemble $\mathcal{A}_j$ ($j \in \{1, \ldots, k\}$) et $m \geq n \geq 1$ (cf. (1.15)) donné par la relation (1.12) et si son premier coefficient $Q^{m,j-1}$ n'est pas identiquement nul pour tout $\lambda \in \mathcal{V}$ (quitte à restreindre $\mathcal{V}$) alors, l'action de $\mathcal{L}$ sur $P_n^{m,j}$ est la fonction $\forall\ (x,\lambda) \in \mathcal{U}$:*

$$\mathcal{L}(P_n^{m,j})(x,\lambda) = S_j^{(-r^1)_j}(x,\lambda)\left[Q^{m,j-1}(x,\lambda)\right]^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\left[Q^{m,j-1}\right]^{-1} P_n^{m,j}\right) . \tag{1.16}$$

Remarquons que cette fonction est naturellement prolongeable en une fonction de classe C^K (K étant la classe de différentiabilité des propriétés $(I_{\lambda,0}^K)$. On supposera donc dans la suite que l'action de l'opérateur $\mathcal{L}$ est partout définie.

LEMME 1.1 (lemme de finitude).— *Soit $P_n^{m,j}$ un élément de l'ensemble $\mathcal{A}$ (cf. (1.15)) :*

i) il existe un entier $N(j,n,m)$ ne dépendant que des entiers $j \in \{0, \ldots, k\}$ ($n \in \mathbb{N}$ et $m \geq n$) et un ensemble fini de "conditions" $G(j,n,m)$ qui dépendent des $\left(R_i(0)\right)_{i=1,\ldots,j}$ (cf. (1.8)) tels que sous les conditions $G(j,n,m)$ et quitte à réduire ε et $\mathcal{V}$ (théorème 0.1), la fonction $P_n^{m,j}$ admet, pour tout $\lambda \in \mathcal{V}$, au plus $N(j,n,m)$ racines en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ (théorème 0.1) (comptées avec leurs ordres de multiplicité) ;

ii) l'entier $N(j,n,m)$ satisfait aux relations de récurrence :

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, m \geq n\,, \quad N(0,n,m) = 0\,; \\ \forall\, j \in \{1,\,\dots,\,k\}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, m \geq n\,, \\ \qquad N(j,n,m) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} N(j-1,\, 2^{\ell}m,\, 2^{\ell}m) + n; \end{cases} \tag{1.17}$$

iii) les ensembles $G(j,n,m)$ satisfont les relations de récurrence :

$$\begin{cases} \textit{pour } j = 0 \textit{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, m \geq n : \\ \textit{si la fonction } P_n^{m,0} \textit{ s'écrit (cf. (1.11))} \\ \forall\, (x,\lambda) \in \mathcal{U}\,, \quad P_n^{m,0}(x,\lambda) = c(\lambda) + f(x,\lambda) \\ \textit{alors} \quad G(0,n,m) = \{c(\lambda) \neq 0\}\,; \\ \textit{pour } j \in \{1,\,\dots,\,k\} \textit{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, m \geq n : \\ \qquad G(j,n,m) = \displaystyle\bigcup_{\ell=0}^{n} G(j-1,\, 2^{\ell}m,\, 2^{\ell}m) \end{cases} \tag{1.18}$$

2. Élimination de conditions de finitude "parasites"

On montre ici la propriété de finitude pour les fonctions de type $Q^{m,1}$ (cf. (1.10)) sous des conditions beaucoup plus faibles que celle du lemme 1.1. Soit $Q^{m,1}$ la fonction

$$\forall\, (x,\lambda) \in \mathcal{U}\,, \quad Q^{m,1}(x,\lambda) = \sum_{\ell=0}^{m} [h_1(x,\lambda)]^{\ell} [S_1^{(r)_1}(x,\lambda)]^{m-\ell} Q^{\ell,0}(x,\lambda) \tag{2.1}$$

avec

$$\forall\, \ell \in \{0,\,\dots,\,m\}\,,\ \forall\, (x,\lambda) \in \mathcal{U}\,, \quad Q^{\ell,0}(x,\lambda) = c_\ell + f_\ell(x,\lambda)\,. \tag{2.2}$$

Les c_ℓ sont des constantes, et les fonctions qui vérifient les propriétés $(I_{\lambda,0}^{K})$ par multiplication par x sur $\mathcal{U}$ (déf. 0.1). $\mathcal{U}$ est le domaine de définition de l'application déplacement Δ (théorème 0.1), K est assez grand devant m et les fonctions h_1, $S_1^{(r)_1}$ sont données par :

$$\forall\, (x,\lambda) \in \mathcal{U}\,, \quad S_1^{(r)_1}(x,\lambda) = [x]^{r_1(\lambda)} \quad \text{et} \quad h_1(x,\lambda) = [x]^{r_1(\lambda)} + b_1(\lambda) \tag{2.3}$$

(voir (1.1) et (1.6)).

Lemme 2.1. — *Si les conditions (2.2) :*

$$c_m \neq 0 \quad et \quad \sum_{\ell=0}^{m} c_\ell \neq 0 \tag{2.4}$$

sont vérifiées, alors quitte à restreindre ε et $\mathcal{V}$, la fonction $Q^{m,1}$ (cf. (2.1)) admet au plus m racines (comptées avec multiplicité) en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathcal{V}$.

Preuve. — On supposera

$$\sum_{\ell=0}^{m} c_\ell > 0 \,.$$

Pour $\lambda \in V_1 = \{\lambda \in \mathcal{V} \mid b_1(\lambda) = 0\}$, $Q^{m,1}$ s'écrit

$$Q^{m,1}(x,\lambda) = \left[S_1^{(r)_1}(x,\lambda)\right]^m \left(\sum_{\ell=0}^{m} c_\ell + \sum_{\ell=0}^{m} f_\ell(x,\lambda)\right).$$

Or, on a

$$\lim_{\substack{(x,\lambda)\to(0,0)\\ (x,\lambda)\in\mathcal{U}}} \sum_{\ell=0}^{m} f_\ell(x,\lambda) = 0\,.$$

Et donc, d'après la deuxième condition de (2.4), $Q^{m,1}$ n'aurait pas de racine en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ pour $\lambda \in V_1$. Pour $\lambda \in V_2 = \mathcal{V} \setminus V_1$, faisons le changement de variable :

$$t = h_1(x,\lambda)\left[S_1^{(r)_1}(x,\lambda)\right]^{-1}. \tag{2.5}$$

On a, en notant $s_1(\lambda) = \left[r_1(\lambda)\right]^{-1}$,

$$x = \left|b_1(\lambda)\right|^{s_1(\lambda)}\left|t-1\right|^{-s_1(\lambda)} \tag{2.6}$$

et $\forall\, j \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\partial^j x}{\partial t^j} = * \left|t-1\right|^{-j} x\,, \tag{2.7}$$

$*$ désigne une fonction de λ bornée sur $\mathcal{V}$. Posons pour tout $\ell \in \{0, \ldots, m\}$

$$\widetilde{f}_\ell(t,\lambda) = f_\ell(x,\lambda)\,, \quad q_m(t) = \sum_{\ell=0}^{m} c_\ell t^\ell$$

et

$$\widetilde{Q}^{m,1}(t,\lambda) = Q^{m,1}(x,\lambda)\left[S_1^{(r)_1}(x,\lambda)\right]^{-m} = q_m(t) + \sum_{\ell=0}^{m} t^\ell \widetilde{f}_\ell(t,\lambda)\,. \qquad (2.8)$$

Pour $t \to +\infty$ (ce qui est possible si $b_1(\lambda) > 0$, voir (2.5)), on a $x \to 0$ et donc :

$$\forall\, \ell \in \{0, \ldots, m\}, \qquad \lim_{t\to+\infty,\, \lambda\to 0} \widetilde{f}_\ell(t,\lambda) = 0\,.$$

On en déduit, d'après la première condition de (2.4), que $\exists\, t_0 > 1$ tel que pour $\|\lambda\|$ assez petit, $\widetilde{Q}^{m,1}$ n'ait pas de racines en t sur $]\,t_0\,, +\infty\,[$. Maintenant quitte à réduire ε et V_2, on peut supposer que

$$\forall\, \lambda \in V_2\,,\ \forall\, x \in \mathcal{U}_\lambda\,, \quad \sum_{\ell=0}^{m} \left|f_\ell(x,\lambda)\right| < \frac{1}{4} \sum_{\ell=0}^{m} c_\ell$$

(cf. (2.4)). D'autre part, comme on a $q_m(1) = \sum_{\ell=0}^{m} c_\ell$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que $\left|q_m(t)\right| > \left(\sum_{\ell=0}^{m} c_\ell\right)/2$ pour $t \in\,]\,1-\eta\,,\, 1+\eta\,[$. Or

$$x < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |t-1| > \left|b_1(\lambda)\right| \left[\varepsilon\right]^{-r_1(\lambda)}.$$

Donc quitte à restreindre V_2 et η, on peut supposer que

$$\forall\, \lambda \in V_2\,, \quad \left|b_1(\lambda)\right| \left[\varepsilon\right]^{-r_1(\lambda)} < \eta\,,$$

et que, $\forall\, \lambda \in V_2$, $\forall\, t$:

$$\left|b_1(\lambda)\right| \left[\varepsilon\right]^{-r_1(\lambda)} < |t-1| < \eta \quad \Rightarrow \quad \sum_{\ell=0}^{m} t^\ell \left|\widetilde{f}_\ell(t,\lambda)\right| < \frac{1}{4} \sum_{\ell=0}^{m} c_\ell\,.$$

Ce qui montre que $\widetilde{Q}^{m,1}$ n'aurait pas de racine en t sur $]\,1-\eta\,,\, 1+\eta\,[$ pour tout $\lambda \in V_2$.

D'après (2.7), on vérifie que $\forall\, \ell \in \{0, \ldots, m\}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $(n \le K)$:

$$\frac{\partial^n \widehat{f}_\ell}{\partial t^n} = |t-1|^{-n} \sum_{j=1}^{n} * \frac{\partial^j f_\ell}{\partial x^j}\, x^j \qquad (2.9)$$

($*$ désigne des fonctions de λ bornées sur $\mathcal{V}$). Les fonctions f_ℓ vérifiant les propriétés $(I^K_{\lambda,0})$ par multiplication par x sur $\mathcal{U}$, on a

$$\lim_{\lambda\to 0,\, \lambda\in V_2} \frac{\partial^n \widetilde{f}_\ell}{\partial t^n} = 0$$

uniformément en $t \in [\,0\,,\,1-\eta\,] \cup [\,1+\eta\,,\,t_0\,]$. D'autre part, on a

$$\frac{\mathrm{d}^m q_m(t)}{\mathrm{d}t^m} = m!\, c_m \neq 0$$

d'après (2.4). Ce qui prouve que, quitte à restreindre V_2, la fonction

$$\frac{\partial^m \widetilde{Q}^{m,1}}{\partial t^m}$$

n'aurait pas de racines en t sur $[\,0\,,\,1-\eta\,] \cup [\,1+\eta\,,\,t_0\,]$ pour tout $\lambda \in V_2$. Ce qui finit la preuve du lemme □

Remarque 2.1.— Les deux conditions (2.4) appartiennent à l'ensemble $G(1,n,m)$ (cf. (1.18)) des conditions de finitude qui portent sur une fonction de type $P_n^{m,1}$. On supposera désormais que cet ensemble est réduit aux deux conditions (2.4), et on considérera la dernière ligne de (1.18) pour $j \in \{2, \ldots, k\}$ seulement. Les deux conditions (2.4) ont chacune une signification géométrique dans le cas général d'une fonction de type $P_n^{m,j}$. Remarquons que ces nouvelles conditions $G(1,n,m)$ sont compatibles avec le produit de fonctions de type $P_n^{m,j}$: si deux telles fonctions vérifient les conditions (2.4), alors le produit de ces deux fonctions vérifient aussi les conditions (2.4). Ceci n'est pas trivial pour les conditions $G(j,n,m)$ pour $j \geq 2$.

3. Polycycles à trois sommets de Cyclicité ≤ 3

Le théorème 0.2 appliqué aux polycycles à trois sommets donne une cyclicité maximale égale à 5 sous des conditions plus fortes que les conditions C.H. (lemme 1.1). Ceci étant dû à la généralité de l'algorithme. Grâce au lemme 2.1 et à la convention de la remarque 2.1, les nouvelles conditions génériques du théorème 0.2 appliqué aux polycycles à trois sommets sont réduites aux seules conditions C.H. Plus précisément, on va montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 3.1.— *Soit* (Γ_3) *un polycycle à trois sommets d'un champ de vecteurs* X_0 *du plan et soit* (X_λ) *une déformation du germe de* X_0 *le long de* (Γ_3). *Alors, si les conditions suivantes :*

i) $\forall\, j \in \{1,\,2,\,3\}$, $r_j(0) \neq 1$, *ii)* $\forall\, j_1,\, j_2 \in \{1,\, 2,\, 3\},\, j_1 \neq j_2 \Rightarrow r_{j_1} r_{j_2}(0) \neq 1,$

iii) $r_1 r_2 r_3(0) \neq 1,$

sont vérifiées, le polycycle (Γ_3) *est de cyclicité* ≤ 3 *dans la famille* (X_λ). *De plus, il existe un polycycle* (Γ_3) *vérifiant les conditions ci-dessus et une famille* (X_λ) *dans laquelle* (Γ_3) *est de cyclicité égale à* 3.

Avant d'entamer la preuve de ce théorème, faisons une remarque générale qui nous permettra de limiter le domaine de recherche de cycles limites.

Remarque 3.1.— Reprenons les notations de [M1] (aussi section 1) et considérons un polycycle (Γ_k) à k sommets et l'application déplacement $\Delta(x, \lambda)$ relative au polycycle perturbé. Fixons $a \in \,]0\,,1[$ et posons pour $x > 0$:

$$\forall\, j \in \{1,\, \ldots,\, k\}, \quad \eta_j = b_j\, [x]^{-r_1 r_2 \cdots r_j}\,.$$

Alors pour x tel que

$$\forall\, j \in \{1,\, \ldots,\, k\}, \quad [x]^{r_1 \cdots r_j} \geq [|b_j|]^{1-a}\,.$$

On peut écrire

$$\Delta(x, \lambda) = x\Big([x]^{r_1 \cdots r_k - 1}\left(\left[\cdots\left[[1+\eta_1]^{r_2} + \eta_2\right]^{r_3} + \cdots + \eta_k\right]\right) - [1+f]\Big)\,,$$

et grâce à la condition (0.3), on peut trouver $\varepsilon > 0$ assez petit tel que, pour $||\lambda||$ assez petit, Δ a un signe constant pour

$$x \in \left[\sup_{j \in \{1, \ldots, k\}} \left\{[|b_j|]^{s_1 \cdots s_j (1-a)}\right\}\,,\, \varepsilon\right[\quad (s_j = [r_j]^{-1})\,.$$

On cherchera donc d'éventuelles racines de Δ uniquement sur un domaine tendant vers zéro avec le paramètre.

Preuve du théorème 3.1

Écrivons pour $k = 3$ la fonction obtenue dans l'algorithme de [M2] d'après la troisième dérivation :

$$\psi_{3,3} = [c_2 + f_{31}]\,[h_1]^2 + [c_1 + f_{32}](h_1 S_1) + c_0 [S_1]^2 \tag{3.1}$$

avec

$$c_2 = y_1 z_1\,,$$
$$c_1 = R_1 z_1 \overline{z}_2 = R_1 z_1 (z_2 + y_2 + 1)\,,$$
$$c_0 = [R_1]^2 y_2 z_2\,.$$

Je rappelle qu'on note $r_j : r_j^1/(-r_k^1)$, $y_j = z_j - r_j$, $r_j^1 = r_j - 1$ et $R_j = \prod_{i=1}^{j} r_i$.

D'après le lemme 2.1, la fonction $\psi_{3,3}$ aurait au plus 2 racines en x si les deux conditions

$$c_2 \neq 0 \quad \text{et} \quad c_2 + c_1 + c_0 \neq 0$$

étaient vérifiées. Or

$$c_2 + c_1 + c_0 = (z_1 + R_1 z_2)(z_1 + R_1 y_2)\,.$$

Ces deux conditions sont donc équivalentes à

$$r_1 \neq 1\,, \quad r_1 r_3 \neq 1\,, \quad r_1 r_2 \neq 1 \quad \text{et} \quad r_1 r_2 r_3 \neq 1\,. \tag{3.2}$$

Montrons maintenant que sous les conditions i), ii) et iii) du théorème 3.1, le nombre de racines de l'équation

$$\Delta(x, \lambda) = 0$$

est ≤ 3. Écrivons les fonctions $\psi_{1,3}$ et $\psi_{2,3}$ obtenues dans l'algorithme de [M2] respectivement après la première et la deuxième dérivation :

$$\psi_{1,3} = A_1(\lambda)[1 + f_1][h_1]^{z_2}[h_0]^{z_1} - h_2 \tag{3.3}$$

$$\psi_{2,3} = A_2(\lambda)[1 + f_{21}][h_1]^{y_2}[h_0]^{y_1}\big([z_1 + f_{22}]h_1 + R_1 z_2 S_1\big) - 1 \tag{3.4}$$

avec $A_1(0) > 0$ et les fonctions f_1, f_{21} et f_{22} tendent vers 0 quand $(x, \lambda) \to (0, 0)$.

Sur l'ensemble $\{b_1(\lambda) = 0\}$, on sait que l'équation $\Delta = 0$ a au plus deux racines. Sur l'ensemble $\{b_1(\lambda) \neq 0\}$, faisons le changement de variable :

$$S_1 = T|b_1| \tag{3.4'}$$

(on a noté S_1 au lieu de $S_1^{(r)_1}$).

La variable $T \in \,]\,0\,, +\infty\,[$ pour $b_1 > 0$ et $T \in \,]\,1\,, +\infty\,[$ pour $b_1 < 0$. La condition $c_2 \neq 0$ (resp. $c_0 \neq 0$) montre que, pour $b_1 > 0$ (resp. $b_1 < 0$), la fonction $\psi_{3,3}$ (cf. (3.1)) n'a pas de racines sur $]\,0\,, T_0\,[$ (resp. $]\,1\,, T_0\,[$) pour $||\lambda||$ petit et T_0 voisin de 0 (resp. de 1) (dans le deuxième cas, le coin P_2 intervient effectivement dans la naissance et la disparition de cycles). La condition $c_2 + c_1 + c_0 \neq 0$ montre que $\psi_{3,3}$ a au plus deux racines qui ne tendent pas vers l'infini quand $\lambda \to 0$.

Limitons-nous pour la suite au cas $b_1 > 0$ (le cas $b_1 < 0$ se traite par le même type d'arguments que ci-après). Écrivons la fonction $\psi_{2,3}$ (cf. (3.4)) dans la variable T :

$$\begin{aligned}\psi_{2,3} = A_2[1+f_{21}]\,[b_1]^{s_1(z_1+R_1y_2)}[T+1]^{y_2} \times \\ \times\, T^{s_1y_1}\big([z_1+R_1z_2+f_{22}]T+[z_1+f_{22}]\big)-1\,,\end{aligned} \tag{3.5}$$

et posons

$$H(T,\lambda) = [z_1+R_1z_2+f_{22}]T+[z_1+f_{22}]\,.$$

Si $z_1 + R_1y_2 > 0$, l'expression (3.5) et la remarque 3.1 montrent que, pour $||\lambda||$ assez petit et $\psi_{2,3} < 0$ pour tout $T \geq T_0$, $\psi_{2,3}$ admettrait alors au plus une racine ($\in\ ]\,0\,,\,T_0\,[\,$).

Supposons donc $z_1 + R_1y_2 < 0$. La même expression (3.5) montre alors qu'il existe T_1 assez grand tel que, pour $||\lambda||$ assez petit, $\psi_{2,3}$ est du signe de $z_1 + R_1z_2$ pour tout $T \geq T_1$. Pour $T \in [\,T_0\,,\,T_1\,]$, remplaçons l'équation $\psi_{2,3} = 0$ par

$$H(T,\lambda) - [A_2]^{-1}[1+\tilde{f}_{21}]\,[b_1]^{-s_1(z_1+R_1y_2)}[T+1]^{-y_2}T^{-s_1y_1} = 0\,. \tag{3.6}$$

La dérivée de cette expression par rapport à T n'a pas de racines sur $[\,T_0\,,\,T_1\,]$ pour $||\lambda||$ assez petit. Et il est clair que $\psi_{2,3}$ admet une racine sur $[\,T_0\,,\,T_1\,]$ si et seulement si H admet une racine sur $[\,T_0\,,\,T_1\,]$. Supposons que ce soit le cas, ce qui exige que $z_1(z_1 + R_1z_2) < 0$ (on prendra $T_0 < -z_1/(z_1 + R_1z_2)$). Si $z_1 < 0$, alors $H_2 < 0$ sur $]\,0\,,T_0\,[$ et $\psi_{2,3}$ admettrait une seule racine. Supposons donc $z_1 > 0$, ce qui implique que $z_1 + R_1z_2 < 0$. Dans ce cas l'écriture de $\psi_{1,3}$ (cf. (3.3)) dans la variable T et la remarque 3.1 montrent que, pour $||\lambda||$ assez petit, $\psi_{1,3} > 0$ pour tout $T > T_0$ et $\psi_{1,3}$ admettrait au plus deux racines ($\in\ ]\,0\,,\,T_0\,[\,$). Ceci prouve la première assertion du théorème 3.1, la deuxième sera démontrée dans la section 4.

Remarque 3.2.— D'après la preuve ci-dessus, je pense que si on remplace la méthode de reduction de [M1] par une méthode plus directe qui éviterait l'utilisation du théorème de réduction de Sternberg, le théorème 3.1 serait vrai pour toute famille (X_λ) de classe C^ℓ avec $\ell \geq 5$.

4. Polycycle à trois sommets de cyclicité ≥ 4

On se propose deux objectifs dans cette section : d'une part, montrer que la restriction faite dans le théorème de normalisation 0.1 sur la fonction "reste" f n'est pas superflue (l'exemple ci-dessus prouvera que la fonction η du théorème 0.1 n'est pas identiquement nulle), et, d'autre part, montrer que les conditions C.H. (ou au moins une quand toutes les autres sont fixées) sont des conditions nécessaires et suffisantes dans le théorème 0.1.

Une preuve du premier objectif ci-dessus basée sur une structure explicite de la fonction f étant difficile à établir, on construit un polycycle à trois sommets et une perturbation de ce polycycle tels que, sous une certaine hypothèse sur la fonction "reste" f, deux mises en équation différentes (par le choix du point de départ) conduisent à des nombres différents de cycles convergeant vers ce polycycle. Pour une raison, qu'on expliquera dans la section 5, abourtir à une telle contradiction n'est possible que si l'on fausse une des conditions génériques de type C.H.

Soient X_0 et (Γ_3) comme dans l'introduction avec

$$r_1(0) < 1\,, \quad r_2(0) = 1\,, \quad r_3(0) > 1 \quad \text{et} \quad r_1 r_3(0) > 1 \tag{4.1}$$

(on précisera plus loin le germe de X_0 au voisinage du coin P_2) et soit (X_λ) une déformation générique (et C^∞) de X_0 le long de (Γ_3) (générique au sens de [M1]). Étudions le polycycle perturbé donné par la figure 1. Et supposons que, pour de telles configurations, la condition

$$r_2(\lambda) < 1\,. \tag{4.1'}$$

est partout satisfaite.

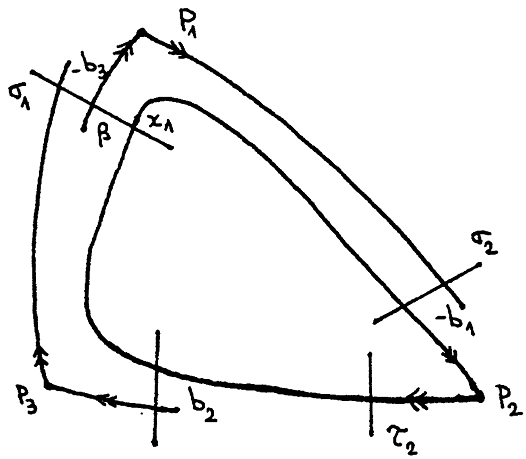

Fig. 4.1

L'application déplacement Δ relative à la transversale σ_1 (fig. 4.1) s'écrit :

$$\Delta(x,\lambda) = \left[\left[x_1^{r_1} - b_1(\lambda)\right]^{r_2} + b_2(\lambda)\right]^{r_3} - b_3(\lambda) - x_1\left[1 + f(x_1,\lambda)\right]. \quad (4.2)$$

Le théorème 0.1 dit que f vérifie les propriétés $(I^K_{\lambda,0})$ $(K \geq 5)$ par multiplication par $(x_1 - \beta(\lambda))$ (fig. 4.1) sur le domaine de définition de Δ. Supposons maintenant que f vérifie les propriétés $(I^K_{\lambda,0})$ par multiplication par x_1 sur le domaine de définition de Δ et appliquons l'algorithme de [M2]. Les conditions (4.1) impliquent les conditions (3.2), et la dérivée troisième $\psi_{3,3}$ (cf. (3.1)) est < 0 pour $||\lambda||$ assez petit (un calcul simple montre que la fonction f_{32} de l'expression (3.1) est, comme $\overline{z}_2$, divisible par z_2 et que le discriminant de cette expression est < 0 pour x_1 et $||\lambda||$ petits). L'étude du signe de la dérivée seconde (3.4) écrite dans la variable $T \in \,]1, +\infty[$ (cf. (3.4')) montre que la fonction $\psi_{1,3}$ (cf. (3.3)) est strictement croissante pour x_1 et $||\lambda||$ petits, et qu'elle admet exactement une racine pour $b_2(\lambda)$ petit. Les conditions $r_3(\lambda) > 1$ et $r_2(\lambda) < 1$ permettent de donner le graphe de Δ dans la figure 4.2.

On a

$$\left[\beta(\lambda)\right]^{r_1(\lambda)} \simeq b_1(\lambda) \quad \text{(on notera } \overline{\beta}(\lambda) = \left[\beta(\lambda)\right]^{r_1(\lambda)}\text{)}. \quad (4.3)$$

Posons maintenant

$$\alpha(\lambda) = b_2(\lambda) \quad \text{et} \quad \overline{\alpha}(\lambda) = \left[\alpha(\lambda)\right]^{r_3(\lambda)}. \quad (4.4)$$

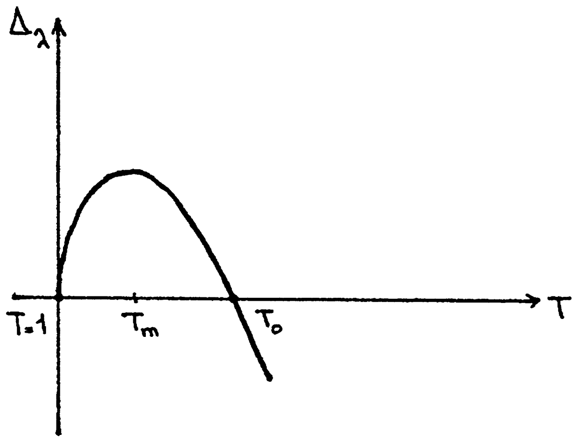

Fig. 4.2

D'après le théorème de normalisation de [M1], la fonction f (cf. (4.2)) vérifie les propriétés $(I^K_{\lambda,0})$ par multiplication par x_1 pour $x_1 \geq \theta\beta(\lambda)$ où θ est un réel > 1 fixé. Par conséquent, le graphe de Δ pour $T > T_0$ (et T ne tendant pas vers 1 quand $||\lambda|| \to 0$) est effectivement celui donné par la figure 4.2. Par contre, on va montrer maintenant, par une autre mise en équation, que ce n'est pas le cas pour le morceau correspondant à $T \in \,]\,1\,, T_m\,[$ si certaines conditions sur α, β et r_2 (cf. (4.3) et (4.4)) sont vérifiées. Ce qui contredirait l'hypothèse faite sur la fonction f. Posons

$$s_2(\lambda) = \big[r_2(\lambda)\big]^{-1} \quad \text{et} \quad \alpha_1(\lambda) = 1 - s_2(\lambda)\,. \tag{4.5}$$

Rappelons qu'on travaille dans la région de l'espace des paramètres, où on a $r_2(\lambda) < 1$ (cf. (4.1')). K étant fixé, les résultats de [R2] permettent d'affirmer que : il existe $N \in \mathbb{N}$ (qu'on choisit $> K$), des paramètres C^K, a_2 sur σ_2 et y_2 sur τ_2 (fig. 4.1), et des fonctions $\big(\alpha_i(\lambda)\big)_{i=2,\,\ldots,\,N}$ continues sur un voisinage de $\lambda = 0$ tels que si l'on pose

$$\omega = \frac{[y_2]^{-\alpha_1(\lambda)} - 1}{\alpha_1(\lambda)} \tag{4.6}$$

la transition le long du coin P_2 s'écrive :

$$\begin{aligned} x_2 = D_{2,\lambda}(y_2) = y_2 + \alpha_1(\lambda)[y_2\omega + \ldots] + \alpha_2(\lambda)[y_2^2\omega + \ldots] + \\ + \cdots + \alpha_K(\lambda)[y_2^K\omega + \ldots] + \varphi_K \end{aligned} \tag{4.7}$$

l'ensemble des monômes $(y_2^i\omega^j)$ étant muni de l'ordre total

$$y_2^i\omega^j \prec y_2^{i'}\omega^{j'} \quad \Leftrightarrow \quad (i < i') \text{ ou } (i = i' \text{ et } j' < j)\,.$$

Le symbole $+\dots$ dans le crochet, $[y_2^i\omega+\dots]$, représente une combinaison finie de monômes $y_2^n\omega^m$ tel que $y_2^i\omega \prec y_2^n\omega^m$ et dont les coefficients sont des fonctions de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ continues et nulles pour $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_N=0$. La fonction φ_K est de classe C^K et K-plate en y_2 pour $y_2=0$. Grâce à la condition $r_1r_2r_3(0)\neq 1$ (cf. (4.1) et (0.3)) et, quitte à pendre $r_1(0)$ et $r_3(0)$ irrationnels et à négliger les termes provenants des trois correspondances régulières devant le reste φ_K (cf. (4.7)), on peut supposer que la correspondance "positive" entre τ_2 et σ_2 s'écrit :

$$x_2 = T_{2,\lambda}(y_2) = \big[[y_2+\alpha(\lambda)]^{r_3} - \overline{\alpha}(\lambda) + \beta(\lambda)\big]^{r_1} - \overline{\beta}(\lambda) \tag{4.8}$$

(cf. fig. 4.1 et (4.3), (4.4)) sans modification dans la formule (4.7). Maintenant, faisons le changement de variable sur la transversale τ_2 :

$$y_2 = \alpha(\lambda)\beta(\lambda)u \quad \text{et posons } A(\lambda)=\alpha(\lambda)\beta(\lambda)\,. \tag{4.9}$$

Un calcul simple montre, que la relation (4.8) s'écrit dans les variables (u, x_2) :

$$x_2 = r_1r_3\overline{\alpha}\overline{\beta}u + \big(t_1\overline{\alpha}\overline{\beta}\beta + t_2[\overline{\alpha}]^2\overline{\beta}\big)u^2 + [\overline{\alpha}]^3\overline{\beta}u^2O(u) \tag{4.10}$$

avec

$$t_1 = r_1r_3\frac{r_3-1}{2} \quad \text{et} \quad t_2 = r_1[r_3]^2\frac{r_1-1}{2}\,. \tag{4.11}$$

Posons ensuite comme dans (4.6) :

$$\omega_u = \frac{[u]^{-\alpha_1(\lambda)}-1}{\alpha_1(\lambda)} \quad \text{et} \quad \omega_A = \frac{[A]^{-\alpha_1(\lambda)}-1}{\alpha_1(\lambda)}\,. \tag{4.12}$$

De (4.6) et (4.9), on déduit

$$\omega = (1+\alpha_1\omega_A)\,\omega_u + \omega_A\,, \tag{4.13}$$

et la relation (4.7) s'écrit dans les variables (u, x_2) :

$$\begin{aligned} x_2 = {} & A(1+\alpha_1\omega_A)u + \alpha_1A\big[(1+\alpha_1\omega_A)u\omega_u + \dots\big] + \\ & + \alpha_2A^2\omega_Au^2 + \alpha_2A^2\big[u^2\omega_u+\dots\big] + \\ & + \alpha_KA^K\omega_Au^K + \alpha_KA^K\big[u^K\omega_u+\dots\big] + \\ & + A^K\widetilde{\varphi}_K(u,\lambda)\,. \end{aligned} \tag{4.14}$$

La signification du symbole $+\ldots$ à l'intérieur des crochets est la même que dans (4.7); $\widetilde{\varphi}_K$ est K-plate en u pour $u = 0$. Imposons enfin les conditions suivantes :

$$r_1 r_3 \overline{\alpha}\overline{\beta} = \theta(\lambda)\, A\,, \tag{4.15}$$

$$1 - \theta(\lambda) = A\,[\overline{\beta}]^{-1}\widetilde{\theta}(\lambda) \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda\to 0} \widetilde{\theta}(\lambda) = 0\,, \tag{4.16}$$

$$\alpha_1(\lambda) = -A\,[\overline{\beta}]^{-1}\widetilde{\alpha}_1(\lambda) \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda\to 0} \widetilde{\alpha}_1(\lambda) = 0\,. \tag{4.17}$$

$r_1(0)$ étant < 1, la relation (4.16) montre que :

$$\lim_{\lambda\to 0} \theta(\lambda) = 1\,,$$

et la relation (4.15) est possible du fait que $r_3(0) > 1$ (cf. (4.1)). Les relations (4.17) et (4.15) montrent que

$$\lim_{\lambda\to 0} \alpha_1(\lambda)\omega_A = 0\,,$$

ce qui permet d'écrire le terme $\alpha_1 A\big[(1+\alpha_1\omega_A)u\omega_u + \ldots\big]$ de l'égalité (4.14) sous la forme $\alpha_1 A(1+\alpha_1\omega_A)[u\omega_u + \ldots]$, le symbole $+\ldots$ ayant la même signification que dans (4.7). L'équation aux orbites fermées $\Delta(u,\lambda) = 0$ s'obtient en éliminant x_2 entre (4.10) et (4.14), Δ étant l'application déplacement relative à la transversale :

$$\begin{aligned} \Delta(u,\lambda) = {} & A(1-\theta+\alpha_1\omega_A)u + \alpha_1 A(1+\alpha_1\omega_A)\big[u\omega_u + \ldots\big] + \\ & + \big(-t_1\overline{\alpha}\overline{\beta}\beta - t_2[\overline{\alpha}]^2\overline{\beta} + \alpha_2 A^2\omega_A\big)u^2 + \\ & + \alpha_2 A^2\big[u^2\omega_u + \ldots\big] + A^2\widetilde{\varphi}_2(u,\lambda)\,, \end{aligned} \tag{4.18}$$

$\widetilde{\varphi}_2$ étant 2-plate en u pour $u = 0$. Maintenant, posons $B = A^2/\overline{\beta}$, alors (4.18) s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta(u,\lambda) = B\Bigg[& (\widetilde{\theta} - \widetilde{\alpha}_1\omega_A)u - \widetilde{\alpha}_1(1+\alpha_1\omega_A)\big[u\omega_u + \ldots\big] + \\ & + \left(-\theta^2\frac{r_1-1}{2}r_1 + \widetilde{\alpha}_2(\lambda)\right)u^2 + \\ & + \overline{\beta}\alpha_2\big[u^2\omega_u + \ldots\big] + \overline{\beta}\widetilde{\varphi}_2(u,\lambda)\Bigg]\,, \end{aligned} \tag{4.19}$$

avec $\widetilde{\alpha}_2(\lambda) = O(\lambda)$ grâce à (4.1) et (4.15). Les résultats de [R2] montrent que l'équation $\Delta(u,\lambda)/B = 0$ a au plus quatre racines. Et on peut construire exactement quatre racines à cette équation (parmi lesquelles $u = 0$), si on prend $\widetilde{\theta}(\lambda) > 0$ et $\alpha_2 < 0$ et si on impose

$$\widetilde{\alpha}_1\omega_A \ll \widetilde{\theta} \ll -\overline{\beta}\alpha_2 \,.$$

Cette technique a aussi été utilisée dans [J].

5. Versalité et classification

Reprenons la preuve du théorème 3.1. Il est clair d'après la structure de nos fonctions (et ceci est d'ailleurs valable dans le cas général de k sommets) que les fonctions f_{ij} provenant du reste f ne peuvent intervenir devant les paramètres de translation b_1, b_2, b_3 que dans la fonction $\psi_{3,3}$ (cf. (3.1)). En effet dans les fonctions homogènes $Q^{m,j}$ et $P_n^{m,j}$ qui interviennent dans l'algorithme général de [M2], les conditions de finitude de cet algorithme (lemme 1.1) ne permettent pas d'affirmer que les fonctions restes f_{ij} n'interviennent pas dans la bifurcation des racines. En effet, les fonctions de type $Q^{m,1}$, qui découlent par cet algorithme de ces fonctions $Q^{m,j}$ ou $P^{m,j}$, ne contiennent qu'un seul paramètre de translation b_1 qui, à cause de l'homogénéité (2.8), ne joue aucun rôle dans la bifurcation des racines. D'après l'étude de la section 2, les fonctions restes f_{ij} (ou f_ℓ) peuvent engendrer des phénomènes de bifurcation (inaccessibles par variation des paramètres de translation b_i) en cas d'existence de racines d'ordre ≥ 2 pour la fonction q_m (cf. (2.8)). Dans (3.1), faisons donc le changement de variable

$$h_1 = tS_1 \,. \tag{5.1}$$

Écrivons la fonction $\psi_{3,3}/[S_1]^2$ dans la variable t et sans les restes f_{31}, f_{32} :

$$q_2(t) = c_2t^2 + c_1t + c_0 \,. \tag{5.2}$$

Le discriminant de l'équation $q_2(t) = 0$ est donné par

$$d = [R_1]^2\,[r_3^1]^{-1} z_1 z_2 \delta \quad \text{avec } \delta = r_1^1 r_2^1 r_3^1 - 4(r_1r_2r_3 - 1)\,. \tag{5.3}$$

Les conditions C.H. montrent que la condition d'existence d'une racine double à cette équation est $\delta = 0$. Or d'après les résultats de la preuve du théorème 3.1, les conditions C.H. assurent que cette éventuelle racine double ne tend vers aucune des extrémités de l'intervalle d'étude en t quand $\lambda \to 0$ (précisons que t et T (cf. (3.4')) sont liées par la relation $T = \operatorname{sgn}(b_1)\left[t-1\right]^{-1}$). L'étude faite sur l'expression (3.6) montre qu'une bifurcation des racines de la dérivée troisième $\psi_{3,3}$, créée à partir de cette racine double par adjoinction des restes f_{31} et f_{32}, n'a aucun effet de bifurcation sur les racines de la dérivée deuxième $\psi_{2,3}$, et donc sur les racines de l'équation aux cycles $\Delta = 0$. On peut donc affirmer que, si (X_λ) est une déformation générique (au sens de [M1]) du germe X_0 le long de (Γ_3) avec $\lambda = (b_1, b_2, b_3)$ et si $\lambda_0 \in \mathcal{V}$ est fixé alors, le diagramme de bifurcation des racines de l'équation aux cycles écrite dans le cône $C^-(P_1,+) \subset \mathcal{V}$ [M2] est le même (à un homéomorphisme près défini sur $C^-(P_1,+)$) que le diagramme de bifurcation des racines de l'équation :

$$\widetilde{\Delta}(x,\lambda) = \left[\left[x^{r_1(\lambda_0)} + b_1\right]^{r_2(\lambda_0)} + b_2\right]^{r_3(\lambda_0)} + b_3 - x = 0 \qquad (5.4)_0$$

sur le même cône. Grâce à [M2, lemme 1], cet homéomorphisme se prolonge à tout le voisinage $\mathcal{V}$. Plus généralement, soit (Γ_3) un polycycle à trois sommets (d'un champ X_0 du plan) et soit $\mathcal{H}$ l'ouvert de $\mathbb{R}^2_{+*}$ (espace des points $m = (r_1, r_2, r_3)$) où sont vérifiées toutes les conditions C.H. On dira que le polycycle (Γ_3) est dans une partie A de $\mathcal{H}$ si le point $m = (r_1, r_2, r_3)$ correspondant est dans A (les conventions sur le point de départ et le sens seront précisées plus bas). Les composantes connexes de $\mathcal{H}$ sont ouvertes et en nombre fini. Appelons "composante de stabilité" d'un polycycle (Γ_3) le plus grand ouvert Ω de $\mathcal{H}$ tel que, les familles déformant un polycycle dans Ω soient "topologiquement équivalentes" aux familles génériques (ou à des familles induites par les familles génériques) déformant le polycycle (Γ_3). Cette équivalence topologique doit être entendue au sens de la conjugaison homéomorphe des diagrammes de bifurcation des cycles au voisinage des polycycles. Le théorème ci-dessous dit que la composante de stabilité d'un polycycle (Γ_3) coïncide avec sa composante connexe ou est une réunion de composantes connexes et donne un représentant dans cette composante de stabilité. Dans la suite, on donne un exemple d'une composante de stabilité qui n'est pas connexe.

THÉORÈME 5.1.— *Soit Ω une composante connexe de $\mathcal{H}$. Soient $m = (r_1, r_2, r_3)$ un point quelconque de l'ouvert Ω et (Γ_3) un polycycle dans Ω. Soit (X_λ) une déformation générique (au sens de [M1]) du germe de X_0*

le long de (Γ_3). *On suppose que* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathcal{V}$ *voisinage de zéro dans* $\mathbf{R}^3$. *Alors, le diagramme de bifurcation des cycles de la famille* (X_λ) *au voisinage du polycycle* (Γ_3) *est le même (à un homéomorphisme près défini sur le voisinage* $\mathcal{V}$*) que le diagramme de bifurcation des racines de l'équation :*

$$\widetilde{\Delta}(x, \lambda) = \left[\left[x^{r_1} + \lambda_1\right]^{r_2} + \lambda_2\right]^{r_3} + \lambda_3 - x = 0 \tag{5.4}$$

sur son domaine de définition inclus dans $[\,0\,, \varepsilon\,[$ *pour* ε *assez petit.*

Grâce au théorème 5.1, on va donner une première classification des polycycles de type (Γ_3) d'après leur cyclicité maximale dans les familles génériques. Signalons d'abord que les lacets de type (Γ_1) (vérifiant la condition C.H.!) sont de cyclicité $= 1$ dans les familles génériques, et que, par conséquent, tout polycycle (Γ_k) est de cyclicité ≥ 1 dans les familles génériques. Ceci étant, grâce au théorème 5.1, choisissons pour sens de parcours du polycycle (Γ_3) celui pour lequel il y a plus de $r_i < 1$ que de $r_i > 1$. Deux cas se présentent.

Cas 1 : tous les r_i *sont* < 1.— **Un résultat de [M2] montre que (Γ_3) est de cyclicité ≥ 1, et donc qu'il est de cyclicité $= 1$ d'après ce qui est dit ci-dessus. Le sens de parcours ci-dessus étant fixé, désignons par Ω_1 la composante connexe de $\mathcal{H}$ dans laquelle toutes les quantités**

$$\prod_{j \in I} r_j - 1\,, \quad (\text{où } I \text{ est une partie de } \{1,\, 2,\, 3\})$$

sont < 0. Cet ensemble est stable sous les permutations circulaires des coordonnées.

Cas 2 : deux seulement des r_i *sont* < 1.— **Toujours d'après le théorème 5.1 et (5.4), on peut, quitte à renommer les r_i, supposer que**

$$r_1 < 1\,, \quad r_2 < 1 \quad \text{et} \quad r_3 > 1\,. \tag{5.5}$$

Reprenons les notations de l'algorithme de [M2] :

$$z_j = -\frac{r_j^1}{r_3^1}\,, \quad y_j = z_j - r_j$$

pour $j \in \{1,\, 2\}$ et appliquons à l'équation (5.4) l'algorithme de [M2]. Les résultats de [M2, théorème 2] montrent que si

$$y_1 > 0 \quad \text{et} \quad y_2 > 0 \tag{5.6}$$

alors, le polycycle (Γ_3) est de cyclicité ≤ 2. Maintenant, sachant que $z_1 > 0$ et $z_2 > 0$ (cf. (5.5)), une étude semblable à celle de la preuve du théorème 3.1 (dans la variable T, voir (3.4')) montre que, si

$$y_1 < 0\,, \quad y_2 < 0 \quad \text{et} \quad z_1 + R_1 y_2 < 0 \tag{5.7}$$

alors (Γ_3) est de cyclicité ≤ 2 et que, dans les autres cas qui restent,

$$y_1 < 0\,, \quad y_2 < 0 \quad \text{et} \quad z_1 + R_1 y_2 > 0 \tag*{$(5.8)_1$}$$

$$y_1 y_2 < 0 \quad \text{auquel cas} \quad z_1 + R_1 y_2 > 0\,. \tag*{$(5.8)_2$}$$

$$(\Gamma_3) \text{ est de cyclicité } = 3.$$

Désignons par Ω_{31} (resp. Ω_{32}) l'ouvert de $\mathcal{H}$ dans lequel les inégalités (5.5) et $(5.8)_1$ (resp. (5.5) et $(5.8)_2$) sont vérifiées. Si on remarque enfin qu'un polycycle de type (Γ_2) (vérifiant les conditions C.H.) est de cyclicité 2 dans les familles génériques si et seulement si $r_1^1 r_2^1 < 0$, on peut alors conclure par le lemme suivant.

LEMME 5.1.— *Le sens de parcours et le point de départ étant fixés comme ci-dessus, désignons par $\Omega_3 = \Omega_{31} \cup \Omega_{32}$ et $\Omega_2 = \mathcal{H} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_3)$. Alors :*

1) *un polycycle (Γ_3) est de cyclicité $= 1$ dans les familles génériques si et seulement si le point $m = (r_1, r_2, r_3)$ correspondant est dans Ω_1 ;*
2) *un polycycle (Γ_3) est de cyclicité $= 3$ dans les familles génériques si et seulement si le point $m = (r_1, r_2, r_3)$ correspondant est dans Ω_3.*

Précisons que le choix (5.5) étant fixé, les deux ouverts Ω_{31} et Ω_{32} sont donnés respectivement par les deux relations ci-dessous :

$$r_1 r_3 > 1\,, \quad r_2 r_3 > 1 \quad \text{et} \quad r_1 r_2 r_3 < 1\,, \tag*{$(5.9)_1$}$$

$$(r_1 r_3 - 1)(r_2 r_3 - 1) < 0\,, \tag*{$(5.9)_2$}$$

qui montrent que Ω_{31} est connexe et que Ω_{32} admet deux composantes connexes. Remarquons que les familles génériques déformant les polycycles dans l'ouvert Ω_1 sont des familles à un paramètre. Montrons maintenant que les deux types de polycycles (Γ_3) de cyclicité $= 3$ (cf. $(5.9)_1$ et $(5.9)_2$) n'ont pas le même diagramme de bifucation dans les familles génériques à trois paramètres et que le deuxième type $(5.9)_2$ est “plus générique” que le

premier type au sens qu'il a exactement le même diagramme de bifurcation que la déformation générique (et "non différentiable") à trois paramètres de la singularité x^3.

THÉORÈME 5.2.— *Soit X_0^1 (resp. X_0^2) un champ de vecteurs du plan ayant un polycycle (Γ_3^1) (resp. (Γ_3^2)) appartenant à Ω_{31} (resp. Ω_{32}), et soit X_λ^1 (resp. X_λ^2) une déformation générique du germe de X_0^1 (resp. X_0^2) le long de (Γ_3^1) (resp. (Γ_3^2)) avec $\lambda = (b_1, b_2, b_3) \in V_1$ (resp. V_2) voisinage de zéro dans $\mathbb{R}^3$. Soit P_μ la déformation universelle de la singularité x^3 sur $[0, \varepsilon[$:*

$$P_\mu(x) = x^3 + ax^2 + bx + c\,, \tag{5.10}$$

avec $\mu = (a, b, c) \in W$ voisinage de zéro dans $\mathbb{R}^3$. Posons

$$\begin{aligned} W^- &= \{\mu \in W \mid a \leq 0\}\,,\\ V_1^+ &= \{\lambda \in V_1 \mid b_1 \geq 0\}\,,\\ V_1^- &= \{\lambda \in V_1 \mid b_1 \leq 0\}\,. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Alors (quitte à réduire ε, V_1, V_2 et W) :

i) le diagramme de bifurcation des cycles de la famille (X_λ^2) sur un voisinage d'ordre ε de (Γ_3^2) est le même (à un homéomorphisme près envoyant V_2 sur W) que le diagramme de bifurcation des racines de la déformation P_μ sur $[0, \varepsilon[$;

ii) le diagramme de bifurcation des cycles de la famille (X_λ^1) sur un voisinage d'ordre ε de (Γ_3^1) et pour $\lambda \in V_1^+$ (resp. $\lambda \in V_1^-$) est le même (à un homéomorphisme près envoyant V_1^+ (resp. V_1^-) sur W^-) que le diagramme de bifurcation des racines de la déformation $P_\mu(x) = 0$ sur $[0, \varepsilon[$ pour $\mu \in W^-$.

Remarque 5.1.— **Considérons le cas général de k sommets et l'équation aux cycles correspondante $\Delta(x, \lambda) = 0$ (Δ contenant le reste f). Alors, si le produit $R_k = r_1 \cdots r_k$ est < 1 (resp. $R_k > 1$), l'équation ci-dessus n'a pas de racines autre que l'origine pour x et $\|\lambda\|$ petits sur la portion d'espace $\{b_1(\lambda) \geq 0, \ldots, b_k(\lambda) \geq 0\}$ (resp. $\{b_1(\lambda) \leq 0, \ldots, b_k(\lambda) \leq 0\}$).**

Cette remarque sera utile, pour les cas $k = 3$, quand il s'agira de donner des dessins en perspective ou compactifiés du diagramme de bifurcation.

Preuve du théorème 5.2.— D'après le théorème 5.1, il s'agit donc d'étudier le diagramme de bifurcation de l'équation (5.4) écrite pour un point quelconque de l'ouvert Ω_{31} puis pour un point quelconque de l'ouvert Ω_{32}. Fixons d'abord quelques notations :

$$\begin{aligned}&\text{0 signifie : pas de racines,}\\ &\text{ns signifie : } n \text{ racines simples,}\\ &\text{nd signifie : } n \text{ racines doubles,}\\ &\text{nt signifie : } n \text{ racines triples,}\\ &\text{etc.}\end{aligned} \qquad (5.12)_1$$

$$\begin{aligned}&\overline{P_i} \text{ signifie : lacet } P_i,\\ &\overline{P_iP_j} \text{ signifie : connexions } P_i - P_j \text{ et } P_j - P_i,\\ &\overline{P_iP_jP_\ell} \text{ signifie : connexions } P_i - P_j,\ P_j - P_\ell \text{ et } P_\ell - P_i\\ &\text{etc.}\end{aligned} \qquad (5.12)_2$$

les P_i désignant les sommets du polycycle. Désignons par $\widetilde{\Delta}_1$ (resp. $\widetilde{\Delta}_2$) l'application déplacement factorisée (5.4) relative au polycycle (Γ_3^1) (resp. (Γ_3^2)) et étudions les diagrammes de bifurcations des trois familles $\big(\widetilde{\Delta}_1(\cdot\,,\lambda)\big)$, $\big(\widetilde{\Delta}_2(\cdot\,,\lambda)\big)$ et (P_μ).

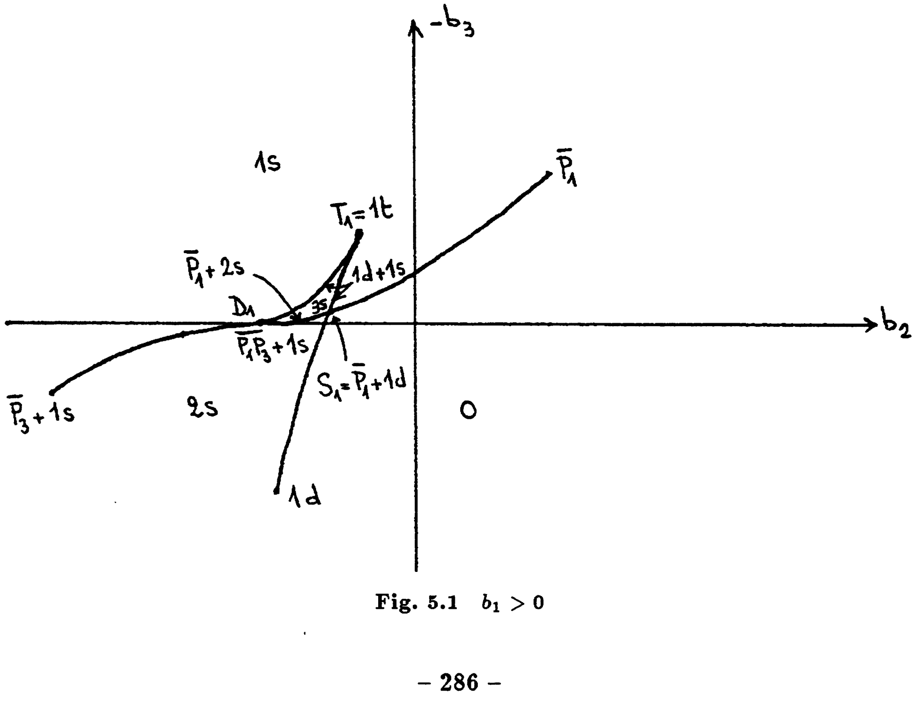

Fig. 5.1 $b_1 > 0$

i) Diagramme de bifurcation pour l'équation $\left(\widetilde{\Delta}_1(x,\lambda)\right) = 0$

Reprenons les notations de la preuve du théorème 3.1. Les conditions $(5.9)_2$ montrent que

$$z_1 > 0\,,\; z_2 > 0\,, \quad y_1 < 0\,,\; y_2 < 0 \quad \text{et} \quad z_1 + R_1 y_2 > 0\,. \tag{5.13}$$

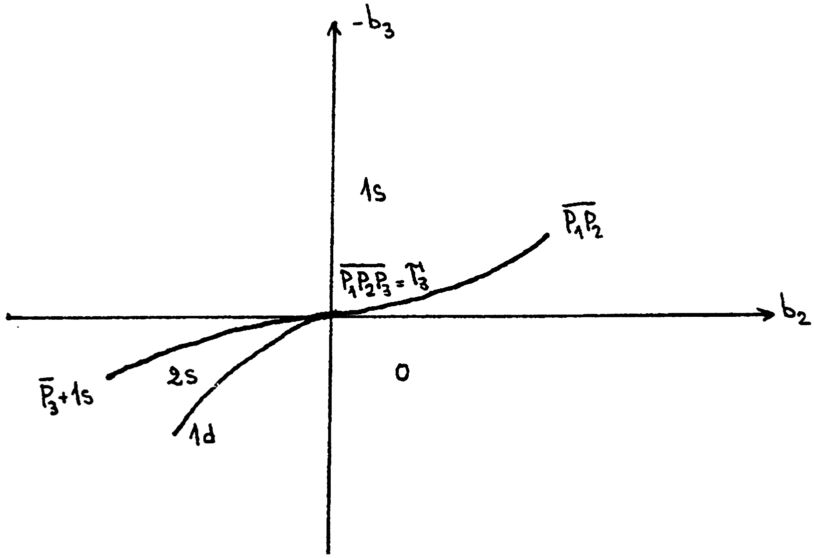

Fig. 5.2 $b_1 = 0$

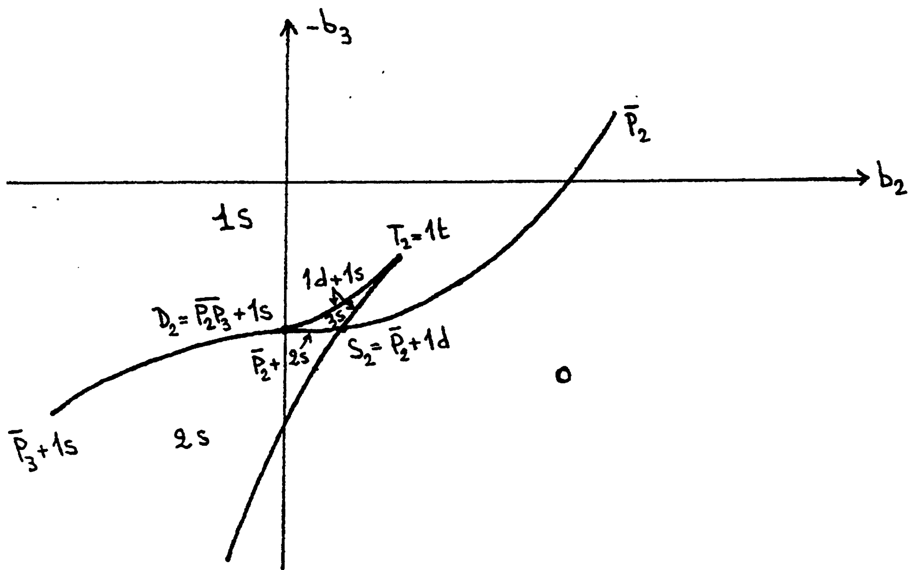

Fig. 5.3 $b_1 < 0$

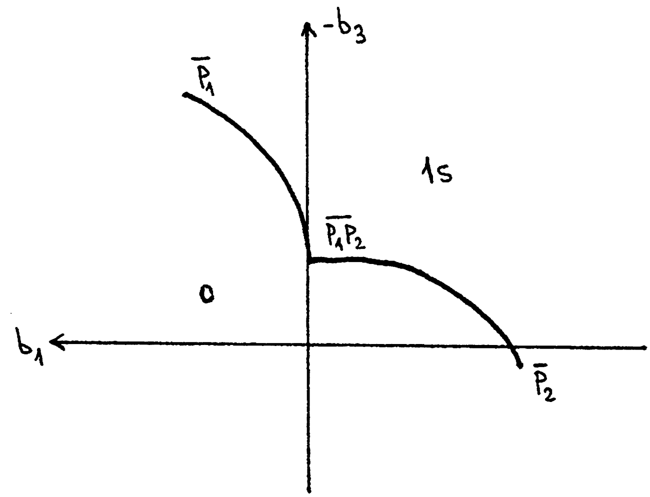

Fig. 5.4 $b_2 > 0$ petit

Une étude simple (qu'on ne détaillera pas de crainte d'alourdir le texte) des dérivées $\psi_{2,3}$ et $\psi_{1,3}$ sans "restes" (cf. (3.4) et (3.3)) dans la variable T (cf. (3.4')) montre qu'il existe trois sections fondamentales du diagramme de bifurcation suivant le paramètre b_1 : deux sections difféomorphes, l'une pour $b_1 > 0$ (fig. 5.1) et l'autre pour $b_1 < 0$ (fig. 5.3), et la section pour $b_1 = 0$ (fig. 5.2). Cette dernière section n'est autre que le diagramme de bifurcation (à un homéomorphisme près) d'un polycycle à deux sommets de cyclicité 2 dans les familles génériques. Le recollement de ces trois sections n'est pas différentiable le long de la ligne $\overline{P_1P_2}$ (fig. 5.2). En effet, une section du diagramme de bifurcation suivant le paramètre b_2, pour $b_2 > 0$ et b_1 dans un petit voisinage de zéro, donne la figure 5.4. Cette section n'est autre que le diagramme de bifurcation (à un homéomorphisme près) d'un polycycle à deux sommets de cyclicité 1 dans les familles génériques. De plus, la ligne des points D_1 (fig. 5.1) qu'on note $\widehat{D}_1$ aboutit à l'origine tangentiellement à l'axe b_2 (fig. 5.5), alors que la ligne $\widehat{D}_2$ des points D_2 aboutit tangentiellement à l'axe b_1. Cependant, les trois lignes $\widehat{D}_1$, $\widehat{T}_1$ et $\widehat{S}_1$ (fig. 5.1) (resp. $\widehat{D}_2$, $\widehat{T}_2$ et $\widehat{S}_2$ (fig. 5.3)) aboutissent à l'origine suivant une même direction comme dans le diagramme de bifurcation de la famille (P_μ) qu'on verra en iii). Donnons maitenant une section compacte de ce diagramme par une sphère S^2 de rayon assez petit (on enlève un point de la sphère appartenant à la portion d'espace $\{b_1 \geq 0,\ b_2 \geq 0,\ b_3 \geq 0\}$, et on étale la sphère sur un disque de $\mathbb{R}^2$ (fig. 5.6)).

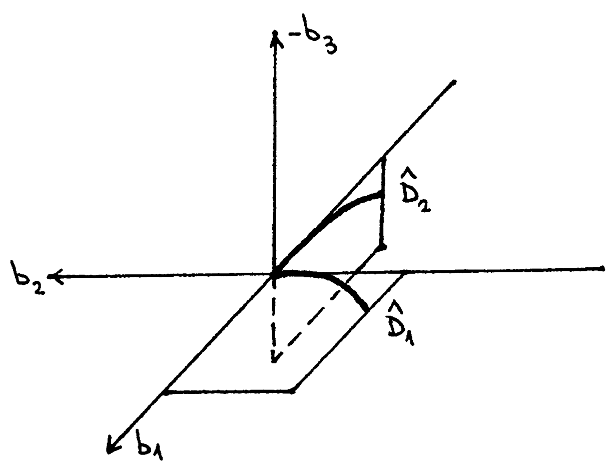

Fig. 5.5

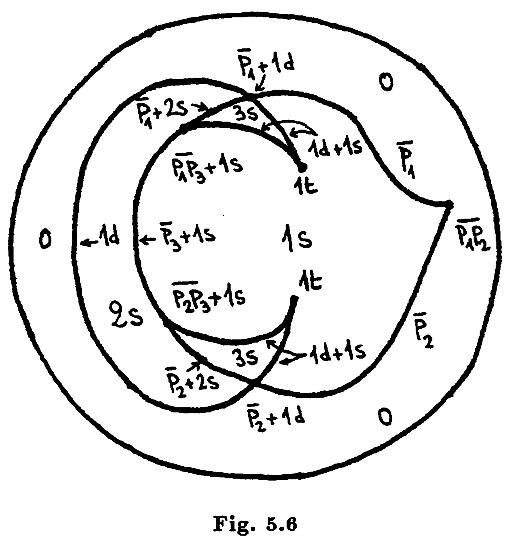

Fig. 5.6

ii) Diagramme de bifurcation pour l'équation $\left(\tilde{\Delta}_2(x,\lambda)\right) = 0$

On suppose le choix (5.5) fait et les conditions $(5.9)_2$ remplies. Plus précisément, on étudie le cas $y_1 < 0$ et $y_2 > 0$ (cf. $(5.8)_2$); l'autre cas s'en déduit en remplaçant b_1 par $-b_1$. Les sections du diagramme par $b_1 > 0$ et $b_1 = 0$ sont les mêmes que pour i) (fig. 5.1 et 5.2). La section par $b_1 < 0$ est donnée par la figure 5.7 et les mêmes remarques de non différentiabilité du diagramme faites dans le cas i) et illustrées dans les figures 5.4 et 5.5 sont valables ici. Ce qui prouve la non-existence d'une conjugaison différentiable entre ce diagramme et celui de la famille polynomiale (P_μ) étudiée en iii). La figure 5.8 représente une section compacte de ce diagramme par une sphère S^2 de rayon petit.

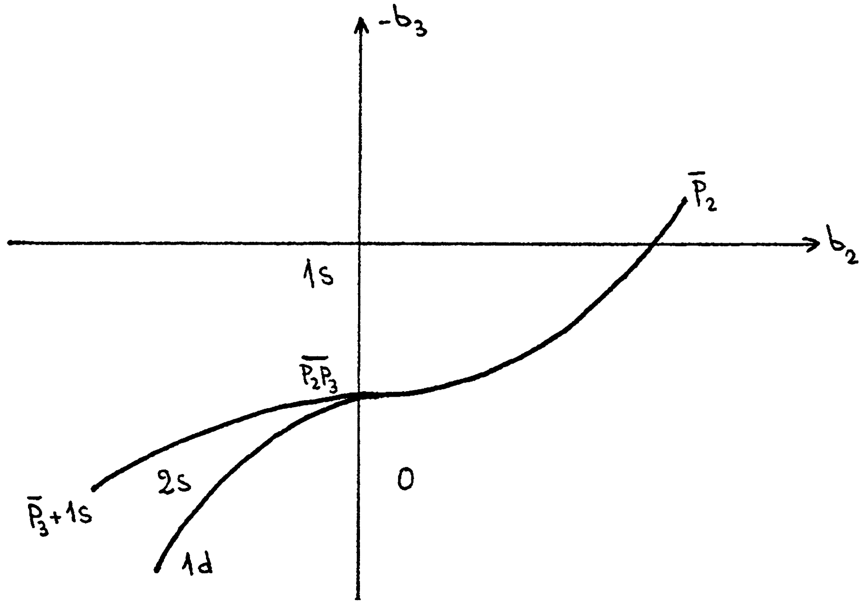

Fig. 5.7

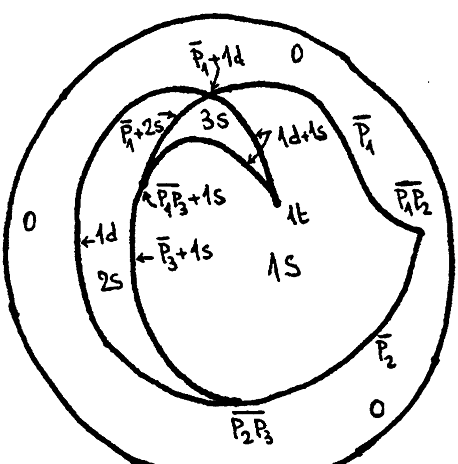

Fig. 5.8

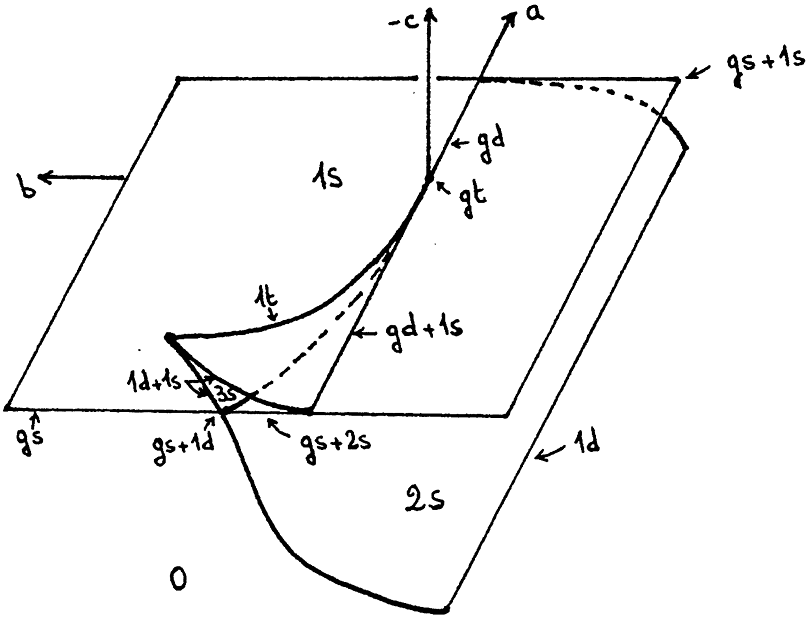

Fig. 5.9

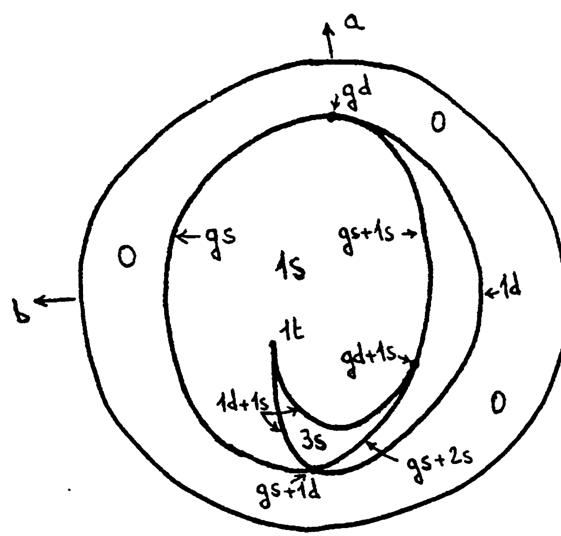

Fig. 5.10

iii) Diagramme de bifurcation $P_\mu(x) = 0$

Grâce aux sections fondamentales de ce diagramme suivant le paramètre a **(respectivement pour** $a < 0$, $a = 0$ **et** $a > 0$**), on donne dans la figure 5.9**

le dessin global de ce diagramme dans $\mathbf{R}^3$ (plus facile à dessiner que ceux des cas précédents!). La figure 5.10 montre une section compacte comme pour les figures 5.6 et 5.8. La notation g sur ces figures désigne : l'origine $x = 0$.

Références

[B] BAUTIN (N.) .— *On the number of limit cycles appearing with variations of the coefficients from an equilibrium state of the type of a focus or a center*, Mat. Sb. (N.S.) **30**, n° 72 (1952), pp. 181-196.

[EMMR] ECALLE (J.), MARTINET (J.), MOUSSU (R.) et RAMIS (J.-P.) .— *Non-accumulation de cycles limites*, C.R.A.S., t. 304, Série I, **14** (1987), (I) pp. 375-378 et (II) pp. 431-434.

[FP] FRANÇOISE (J.-P.) et PUGH (C.C.) .— *Keeping track of limit cycles*, Journal of Diff. Eq. **65** (1986), pp. 139-157.

[I] IL'YASHENKO (YU) .— *Усп*, Man. Hayk. **42**, n° 3 (1987), pp. 223.

[J] JOYAL (P.) .— *Generalized Hopf bifurcation and its dual : generalized homoclinic bifurcation*, S.I.A.M. J. of Applied Mathematics (1988).

[M1] MOURTADA (A.) .— *Cyclicité finie des polycycles hyperboliques de champs de vecteurs du plan. Mise sous forme normale*, L.N.M., Proceeding Luminy (Bifurcations of planar vector fields), Éd. J.-P. Françoise et R. Roussarie **1455** (1989), pp. 272-314.

[M2] MOURTADA (A.) .— *Cyclicité finie des polycycles des hyperboliques de champs de vecteurs du plan. Algorithme de finitide*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **43**, n° 3 (1991), pp. 719-753.

[M3] MOURTADA (A.) .— *Bifurcations de cycles limites au voisinage de polycycles hyperboliques et génériques à quatre sommets*, Preprint Dijon (1992).

[R1] ROUSSARIE (R.) .— *A note on finite cyclicity property and Hilbet's 16th problem*, Dynamical System (Proc. Chilean Symp. Valparaiso 1986), L.N.M. **1331**, R. Barmon, R. Labarca and J. Palis Jr (*ed.*), Berlin, Springer (1988), pp. 161-168.

[R2] ROUSSARIE (R.) .— *On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields*, Bol. Soc. Bras. Mat. **17**, n° 2 (1986), pp. 67-101.