

JEAN FRESNEL

MARIUS VAN DER PUT

**Uniformisation de variétés de Jacobi et  
déformations de courbes**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 3, n<sup>o</sup> 3  
(1994), p. 363-386

<[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1994\\_6\\_3\\_3\\_363\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1994_6_3_3_363_0)>

© Université Paul Sabatier, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Uniformisation de variétés de Jacobi et déformations de courbes<sup>(\*)</sup>

JEAN FRESNEL<sup>(1)</sup> et MARIUS VAN DER PUT<sup>(2)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — Soit  $Z/K$  une courbe non singulière complète sur un corps valué complet  $K$ . L'uniformisation de la variété de Jacobi de  $Z$  est une extension d'une variété abélienne, principalement polarisée  $A(Z)$ , avec bonne réduction, par un tore. À l'aide de la théorie des déformations de courbes on montre qu'en général  $A(Z)$  n'est pas un produit de variétés de Jacobi.

**ABSTRACT.** — Let  $Z/K$  be a non-singular complete curve over a complete valued field  $K$ . The uniformization of the Jacobi variety of  $Z$  is an extension of a principally polarized abelian variety  $A(Z)$ , with good reduction, by a torus. Using deformation theory of curves, one shows that  $A(Z)$  is in general not a product of Jacobian varieties.

---

### 1. Introduction et esquisse du travail

Soient  $K$  un corps valué complet de corps résiduel  $k$ ,  $Z$  une courbe projective non singulière, connexe sur  $K$  ayant une réduction stable  $X_0$ ,  $\text{Jac}(Z)$  la variété jacobienne de  $Z$ .

On sait que  $\text{Jac}(Z)$  admet un revêtement analytique universel  $G(Z)$  qui est un groupe algébrique ([BL], [FP], [R]). On a donc un morphisme analytique surjectif  $\mu_Z : G(Z) \rightarrow \text{Jac}(Z)$  dont le noyau  $\Lambda(Z)$  est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang  $h$ , discret dans  $G(Z)$ ; en fait,  $h$  est le nombre de Betti du graphe de la réduction stable  $X_0$  de  $Z$ . Le groupe algébrique  $G(Z)$

---

(\*) Reçu le 1 juillet 1993

(1) Centre de recherche en mathématiques de Bordeaux, 351 cours de la Libération, F-33405 Talence (France)

(2) University of Groningen, Department of mathematics, P.O. Box 800, 9700 AV Groningen (The Netherlands)

est extension d'une variété abélienne  $A(Z)$  principalement polarisée, par un tore  $T(Z) \simeq G_{m,K}^h$ . En plus  $A(Z)$  a bonne réduction, c'est  $\text{Jac}(C_1^n) \times \cdots \times \text{Jac}(C_r^n)$  où  $C_1, \dots, C_r$  sont les composantes irréductibles de  $X_0$  et où  $C_i^n$  est la normalisation de  $C_i$ . En plus, on a

$$\dim A(Z) = g = g_1 + \cdots + g_r$$

avec  $g_i = \text{genre}(C_i^n)$ . On a donc le diagramme exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \uparrow & & \\
 & & & & \text{Jac}(Z) & & \\
 & & & & \uparrow & & \\
 1 & \rightarrow & T(Z) & \rightarrow & G(Z) & \rightarrow & A(Z) \rightarrow 1 \quad (1.1) \\
 & & & & \uparrow & & \\
 & & & & \Lambda(Z) & & \\
 & & & & \uparrow & & \\
 & & & & 1 & & 
 \end{array}$$

La motivation de notre travail était de répondre à la question suivante.

*Problème 1.1.* — Est-ce que la variété abélienne  $A(Z)$  est isomorphe (comme variété abélienne principalement polarisée) à un produit de jacobiniennes de courbes?

On peut se borner au cas où  $g = \dim A(Z) \geq 4$ , puisque pour  $g \leq 3$ , chaque variété abélienne principalement polarisée est un produit de jacobiniennes [OU]. Une façon d'aborder ce problème serait de considérer le diviseur positif  $D \subset A(Z)$  associé à la polarisation principale de  $A(Z)$  et de montrer que  $\dim(\text{sing } D) < g - 4$ ; c'est la méthode de [Mu2]. La description explicite de  $A(Z)$  comme classes de faisceaux inversibles spéciaux sur l'uniformisation de  $Z$  (cf. [FP]) ne semble pas donner une description géométrique de  $D \subset A(Z)$ .

Une autre façon d'aborder le problème serait d'utiliser la déformation universelle de la courbe stable  $X_0$  sur  $k$ . Expliquons cela.

Soit  $k$  le corps résiduel de  $K$ . Soit  $W = W(k)$  défini par  $W = k$  si  $\text{car}(k) = 0$ ,  $W$  est un anneau de valuation discrète, complet, d'idéal maximal  $pW$  et de corps résiduel  $k$  si  $\text{car}(k) = p > 0$ . Alors, la déformation

universelle de  $X_0$  est un schéma (formel) propre et plat sur  $\text{Spec } A$ , où  $A = W[[T_1, \dots, T_{3\ell-3}]]$  et où  $\ell = g + h$  est le genre arithmétique de  $X_0$  ([DM], [G]).

Soit  $O_K$  l'anneau de valuation de  $K$ . Comme  $Z$  possède une réduction stable, il existe un schéma  $\mathcal{Z}$  plat et projectif sur  $O_K$  dont la fibre spéciale est  $X_0$  et dont la fibre générique est  $Z$ . La propriété universelle de  $X$  implique l'existence et l'unicité d'un  $W$ -morphisme local  $\varphi : A \rightarrow O_K$  tel que  $\mathcal{Z} \simeq X \otimes_A O_K$ .

Soit  $\widehat{X}$  le complété formel de la courbe stable  $X/A$ . On pose :

$$\text{Jac}(\widehat{X}) = \varinjlim_s \text{Jac}(X \otimes_A A/m_A^s).$$

Alors  $\text{Jac}(\widehat{X})$  est identique au complété  $\text{Jac}(X)^\wedge$  du schéma semi-abélien  $\text{Jac}(X)$  (cf. [DM]) le long de sa fibre spéciale  $\text{Jac}(X)_0 = \text{Jac}(X_0)$ . Comme dans [R, p.473], la suite

$$1 \rightarrow G_{m,k}^h \rightarrow \text{Jac}(X_0) \rightarrow \text{Jac}(X_0^n) \rightarrow 1$$

se relève de façon unique pour chaque  $s$  :

$$1 \rightarrow G_{m,A/m_A^s}^h \rightarrow \text{Jac}(X) \otimes A/m_A^s \rightarrow V_s \rightarrow 1$$

où  $V_s$  est un  $A/m_A^s$ -schéma abélien avec une polarisation principale. La limite conduit à la suite exacte

$$1 \rightarrow \widehat{T} \rightarrow \text{Jac}(\widehat{X}) \rightarrow \widehat{V} \rightarrow 1 \quad (1.2)$$

où  $\widehat{T}$  est un tore formel sur  $A$  et  $\widehat{V} = \varinjlim_s V_s$  en un schéma abélien formel sur  $A$  avec une polarisation principale. Cette polarisation principale et le théorème de GAGA formel montrent l'existence d'une suite exacte de schémas en groupes sur  $A$  :

$$1 \rightarrow T(X) \rightarrow G^0(X) \rightarrow \text{An}(X) \rightarrow 1 \quad (1.3)$$

dont le complété formel est la suite (1.2). Dans cette suite  $T(X) = G_{m,A}^h$  est un tore sur  $A$ ;  $\text{An}(X)$  est un schéma abélien principalement polarisé sur  $A$  de dimension  $g$  et bien entendu  $G^0(X)$  est extension de  $\text{An}(X)$  par  $T(X)$ .

Le changement de base  $\varphi : A \rightarrow O_K \hookrightarrow K$  transforme la suite (1.3) en

$$1 \rightarrow T(Z) \rightarrow G(Z) \rightarrow A(Z) \rightarrow 1$$

de (1.1). En particulier

$$A(Z) \cong \text{An}(X) \otimes_A K.$$

Soit  $\mathcal{A}_{g,1}$  le schéma de module sur  $W$  des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension  $g$ . Le schéma abélien  $\text{An}(X)$  sur  $A$  induit un morphisme  $\rho : \text{Spec}(A) \rightarrow \mathcal{A}_{g,1}$  tel que le point fermé de  $\text{Spec}(A)$  soit envoyé sur  $\xi = \text{Jac}(C_1^n) \times \cdots \times \text{Jac}(C_r^n) \in \mathcal{A}_{g,1}(k)$ . Soit  $\psi : \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{A}_{g,1},\xi} \rightarrow A$  le  $W$ -morphisme local correspondant à  $\rho$ . Soit  $J \subset \mathcal{A}_{g,1}$  la clôture de Zariski de l'application de Torelli  $\mathcal{M}_g \rightarrow \mathcal{A}_{g,1}$ . Alors  $J$  est le "locus" de Jacobi. Soit  $I \subset \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{A}_{g,1},\xi}$  l'idéal induit par  $J$ . Alors le problème 1.1 est équivalent au suivant.

*Problème 1.2.* — Est-ce que

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{A}_{g,1},\xi} \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\varphi} O_K \quad \text{se factorise sur} \quad \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{A}_{g,1},\xi}/I?$$

Cette question dépend de l'application inconnue  $\varphi$ . Les questions suivantes sont plus abordables.

*Problème 1.3*

- a)  $\psi(I) \neq 0$ ?
- b)  $\psi(I) \not\subset pA$ ? (si  $p = \text{car}(k) \neq 0$ ).

**LEMME 1.4.** — *On suppose qu'une des trois assertions suivantes est satisfaite :*

- a)  $\psi(I) \neq 0$  et  $\text{car}(k) = 0$  ;
- b)  $\psi(I) \neq 0$  et  $\text{car}(k) = p \neq \text{car}(K) = 0$  ;
- c)  $\psi(I) \not\subset pA$  et  $\text{car}(k) = \text{car}(K) = p \neq 0$ .

*Alors, il existe une courbe non singulière, projective, connexe  $Z$  sur  $K$  de réduction stable  $X_0$  telle que  $A(Z)$  ne soit pas un produit de variétés de Jacobi.*

*Démonstration.* — Une description plus explicite (§ 2.1) de  $X/A$  montre l'existence d'un élément  $a \in A$ ,  $a \neq 0$  et  $a \notin pA$  si  $\text{car}(k) = p \neq 0$ , tel que

$\varphi(a) \neq 0$  pour un  $W$ -morphisme local  $\varphi : A \rightarrow O_K$  implique que la courbe  $Z = X \otimes_A K$  ne soit pas singulière. On prend un élément  $b \in \psi(I)$ ,  $b \neq 0$  (et  $b \notin pA$  pour le cas c)). Il existe un  $W$ -morphisme local  $\varphi : A \rightarrow O_K$  avec  $\varphi(ab) \neq 0$ . La courbe  $Z = X \otimes_A K$  possède les propriétés du lemme.

*Remarque 1.5.* — Dans la suite on donnera les conditions sur  $X_0$  telles que

$$\dim \left( \frac{\widehat{\mathcal{O}}_{A_{g,1,\xi}}}{(p, \ker \psi)} \right) > 3g - 3.$$

Comme la dimension de  $J/W$  est  $(3g - 3)$ , cela implique

$$\psi(I) \not\subset pA \quad \text{où } p = \text{car}(k) \geq 0.$$

Pour faire le calcul de l'application tangente de  $\psi$  on remplacera l'anneau  $\widehat{\mathcal{O}}_{A_{g,1,\xi}}$  par l'anneau  $\mathcal{O}_\xi =$  l'anneau local de la déformation universelle de la variété abélienne principalement polarisée  $\xi$  (cf. [O]). Comme  $\widehat{\mathcal{O}}_{A_{g,1,\xi}}$  est l'anneau des invariants de  $\mathcal{O}_\xi$  sous l'action d'un groupe fini, ce changement laisse valable le raisonnement (problème 1.2 et 1.3, lemme 1.4).

### 1.1 Première méthode (section 2)

Cette méthode est un calcul de l'application tangente de

$$\psi^* : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_\xi)$$

pour une "courbe stable générale"  $X_0$ . Rappelons les notations. Les composantes irréductibles de  $X_0$  sont  $C_1, \dots, C_r$ ;  $C_1^n, \dots, C_r^n$  sont les normalisées des  $C_i$  et on a  $\text{genre}(C_i^n) = g_i$ . Soit  $D$  l'ensemble des points doubles de  $X_0$ . Un  $d \in D$  est appelé *point double interne* si  $d$  se trouve sur une seule composante  $C_i$  de  $X_0$ . Posons

$$g := \sum g_i \quad \text{et} \quad h = \#D - r + 1.$$

Alors  $g + h$  est le genre arithmétique de  $X_0$ . On dit que la courbe  $X_0$  est une *courbe stable générale* si  $X_0$  vérifie les propriétés suivantes :

- 1)  $g_i \geq 1$  pour tout  $i$ ;
- 2) si  $g_i \geq 3$ , alors  $C_i^n$  n'est pas hyperelliptique;
- 3) pour  $i \neq j$ , on a  $\#(C_i \cap C_j) \leq g_i g_j$ ;

- 4) le nombre des points doubles internes sur  $C_i$  est  $\leq (1/2)(g_i - 2)(g_i - 3)$ ;
- 5) les points doubles de  $X_0$  sont en position générale.

Le résultat principal (théorème 2.2) dit que pour une courbe stable générale  $X_0$ , on a

$$\dim \frac{\mathcal{O}_\xi}{(p, \ker \psi)} \geq 3g - 3 + \#D + 3r - 3 + \#\{i \mid g_i = 1\}.$$

Utilisant la remarque 1.5, une courbe  $X_0$  générale avec  $\#D + 3r - 3 + \#\{i \mid g_i = 1\} > 0$  satisfait  $\psi(I) \not\subseteq pA$ .

## 1.2 Deuxième méthode (section 3)

On suppose  $\text{car}(k) \neq 2$ , et on considère une courbe stable connexe  $X_0/k$  telle que :

- 1) chaque composante irréductible est isomorphe à  $\mathbb{P}_k^1$ ;
- 2) deux composantes irréductibles ont au plus un point en commun;
- 3) le nombre de points doubles sur chaque composante est pair;
- 4) le genre arithmétique de  $X_0$  est  $g + 1$  et  $g \geq 5$ .

Soit  $\pi_0 : Y_0 \rightarrow X_0$  le revêtement unique de degré 2 dont le lieu de ramification est exactement l'ensemble  $D$  des points doubles de  $X_0$ . Soit  $X/A$  la déformation universelle de  $X_0/k$  et soit  $A'$  une extension finie convenable de  $A$  de corps résiduel  $k$ . Alors

$$X' := X \otimes_A A'$$

possède un revêtement de degré 2,  $Y' \rightarrow X'$ , relevant  $\pi_0 : Y_0 \rightarrow X_0$ .

Le schéma abélien  $\text{An}(Y')/A'$  de dimension  $g$  induit un  $W$ -morphisme local  $\mathcal{O}_\xi \xrightarrow{\psi} A'$ , où  $\xi = \text{Jac}(Y_0^n)$ . Le résultat principal est (§ 3.5) :  $\psi$  est surjectif. Comme  $\dim A'/W = 3g$ , cela montre que  $\psi(I) \not\subseteq pA$  avec  $p = \text{car}(k) \geq 0$ .

Utilisant le lemme 1.4 et la remarque 1.5, on montre l'existence d'une courbe non singulière projective  $Z/K$ ,  $K$  un corps valué complet de corps résiduel  $k$  tel que  $Z$  soit un revêtement non ramifié de degré 2 d'une courbe de Mumford (de genre  $g + 1$  avec  $g \geq 5$ ) et tel que  $A(Z)$  ne soit pas un produit de variétés de Jacobi.

Remarquons le lien avec l'application

$$\text{Prym} : \overline{\mathcal{M}}_{g+1,2} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,1}$$

étudiée dans [DS]. On peut montrer que  $\text{Prym}(Y'/X')$  est isogène à  $\text{An}(Y')$  (§ 3.2). Alors, notre étude de  $\text{An}(Y')$  est équivalente à l'étude locale de Prym au voisinage du point  $\{\pi_0 : Y_0 \rightarrow X_0\}$ . L'image du morphisme Prym est de dimension  $3g$ . Le morphisme Prym n'est pas fini; il existe des points  $\mu \in \overline{\mathcal{M}}_{g+1,2}$  avec  $\dim \text{Prym}^{-1}(\text{Prym } \mu) \neq 0$ . Notre théorème 3.5 montre que le point  $\mu = \{\pi_0 : Y_0 \rightarrow X_0\}$  est isolé dans  $\text{Prym}^{-1}(\text{Prym } \mu)$ . Ce dernier résultat ne semble pas être une conséquence du travail de [DS].

## 2. Déformation d'une courbe stable générale

Le but de cette section est de calculer l'application tangente (tan) et l'application cotangente (cotan) de  $\psi^* : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(O_\xi)$  induite par la déformation universelle  $X/A$  d'une courbe stable  $X_0/k$  et par le schéma abélien  $\text{An}(X)$ . Commençons par une description de la déformation universelle de  $X_0/k$  selon [DM].

### 2.1 Déformation universelle de $X_0/k$

Nous utilisons les notations du paragraphe 1.1. Chaque point double  $d \in D$  possède une déformation universelle locale :

$$\text{Spf} \left( \frac{A_d[[x, y]]}{(xy - t_d)} \right) \quad \text{où} \quad A_d = W[[t_d]].$$

On a un  $W$ -morphisme local, canonique, formellement lisse :

$$\widehat{\bigotimes_{d \in D} W A_d} = W[[t_d \mid d \in D]] \rightarrow A.$$

On identifie  $W[[t_d \mid d \in D]]$  avec son image dans  $A$ . Pour l'élément  $a \in A$  dans la démonstration du lemme 1.4, on peut prendre  $a = \prod_{d \in D} t_d$ . Soit  $\bar{A} = A/(t_d \mid d \in D)$  et  $\bar{X} = X \otimes_A \bar{A}$ . Alors  $\bar{X}$  est une déformation de  $X_0$  où tous les points doubles de  $X_0$  "restent" des points doubles. La normalisation  $\bar{X}^n$  de  $\bar{X}$  est une réunion disjointe  $\coprod_i \bar{X}_i^n$  parce que  $\bar{X}^n \otimes_A k$  est une réunion disjointe des  $C_i^n$ .



Pour comprendre  $\tilde{X}_i^n$  on a besoin de la déformation verselle d'une courbe (connexe, projective, non singulière)  $C/k$  de genre  $g \geq 0$ , munie de  $n$  points rationnels distincts  $P_1, \dots, P_n$ . La stabilité de  $(C, P_1, \dots, P_n)$  est définie par

$$\begin{cases} n \geq 3 & \text{si } g = 0, \\ n \geq 1 & \text{si } g = 1, \\ n \geq 0 & \text{si } g \geq 2. \end{cases}$$

Soit  $C/R$  la déformation verselle de  $C/k$ . Les points  $P_i : \text{Spec}(k) \rightarrow C$  se relèvent en des sections  $P_i^+ : \text{Spec}(R) \rightarrow C$ . Soit  $P_i^+$  donné localement par  $\mathcal{O}_{C, P_i} = R[[x_i]] \rightarrow R$  avec  $x_i \mapsto 0$ . On introduit une variable  $\pi_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) pour chaque point  $P_i$  et des sections

$$P_i^{++} : \text{Spec}(R[[\pi_1, \dots, \pi_n]]) \rightarrow C \otimes_R R[[\pi_1, \dots, \pi_n]]$$

données localement par

$$R[[\pi_1, \dots, \pi_n]][[x_i]] \rightarrow R[[\pi_1, \dots, \pi_n]], \quad x_i \mapsto \pi_i.$$

Pour  $g \geq 2$ ,  $(C \otimes_R R[[\pi_1, \dots, \pi_n]], P_1^{++}, \dots, P_n^{++})$  est la déformation verselle de  $(C, P_1, \dots, P_n)$ . Pour  $g = 1$ , on obtient la déformation verselle en mettant  $\pi_1 = 0$ . Pour  $g = 0$ , il faut mettre  $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 0$ .

On applique ce qui est au-dessus à  $(C_i^n, D^n \cap C_i^n)$  où  $D^n \subset X_0^n$  (= la normalisée de  $X_0$ ) est l'image réciproque de  $D \subset X_0$ . Soit  $C_i/A_i$  la déformation verselle de  $C_i^n/k$  et soit  $\pi_d$  une variable pour chaque  $d \in D^n$ . Pour  $g_i = 0$  (resp.  $g_i = 1$ ), il reste sous-entendu que 3 (resp. 1) des  $\pi_d$  est 0. Alors, on voit facilement que

$$\tilde{A} \cong \left( \bigotimes_{1 \leq i \leq r} {}_W A_i \right) [[\pi_d \mid d \in D^n]]$$

et que

$$\tilde{X}_i^n \cong C_i \otimes_{A_i} \tilde{A}.$$

Finalement, on note que l'espace tangent (resp. cotangent) de  $\text{Spec}(A)$  un isomorphe à  $\text{Ext}^1(\Omega_{x_0}, \mathcal{O}_{x_0})$  (resp.  $H^0(\Omega_{x_0} \otimes \omega_{x_0})$ ) ([DS], [DM]).

*Remarque 2.1.* — Le morphisme  $\psi : \mathcal{O}_\xi \rightarrow A$  n'est pas fini en général.

En effet  $\text{An}(\tilde{X}^n) = \text{An}(\tilde{X}) = \text{An}(X) \otimes_A \tilde{A}$  se décompose en

$$\prod_{i=1}^r \text{An}(\tilde{X}_i^n).$$

Soit  $\xi_i = \text{Jac}(C_i^n)$  et soit  $\mathcal{O}_{\xi_i}$  l'anneau local de la déformation universelle de  $\xi_i$ . Alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_{\xi} & \xrightarrow{\quad} & A \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{O}_{\xi} \widehat{\otimes}_W \cdots \widehat{\otimes}_W \mathcal{O}_{\xi_r} & \rightarrow & \widehat{\otimes}_i A_i \rightarrow \widetilde{A}
 \end{array}$$

Si  $\psi$  est fini (i.e.  $A$  est un  $\mathcal{O}_{\xi}$ -modèle de type fini) alors tous les  $\pi_d$  ( $d \in D^n$ ) sont nuls. Pour chaque  $C_i$  on a trois possibilités :

- 1)  $g_i = 1$ ,  $C_i = C_i^n$  et  $\#(D \cap C_i) = 1$



- 2)  $g_i = 0$ ,  $C_i = C_i^n$  et  $\#(D \cap C_i) = 3$



- 3)  $g_i = 0$ ,  $C_i \neq C_i^n$  et  $\#(D \cap C_i) = 2$



Une analyse combinatoire montre que la finitude de  $\psi$  implique alors  $h = 0$ . Cette situation ne nous intéresse pas ici.

## 2.2 Déformation d'une variété abélienne $V/k$

On suit ici l'exposé de [O]. Une variété abélienne  $V/k$ , de dimension  $g$ , possède une déformation universelle  $\mathcal{V}/R'$ . L'anneau local  $R'$  est lisse sur  $W$  et  $\dim(R'/W)$  est  $g^2$ . L'espace tangent de  $\text{Spec}(R')$  peut être identifié à

$$H^1(V, \text{Der}_{V/k}) \cong H^1(V, \mathcal{O}_V) \otimes_k T_{V,0} \cong T_{V^t,0} \otimes_k T_{V,0},$$

où  $V^t$  est la variété abélienne dual et où  $T_{V,0}$  (resp.  $T_{V^t,0}$ ) sont les espaces tangents de  $V$  (resp.  $V^t$ ) en  $0$ .

Soit maintenant  $(V, \lambda)$  une variété abélienne principalement polarisée avec polarisation  $\lambda : V \xrightarrow{\sim} V^t$ . Alors  $(V, \lambda)$  possède également une déformation universelle  $(\mathcal{V}, \Lambda)/R$ . L'anneau  $R$  est lisse sur  $W$ ,

$$\dim_W R = \frac{1}{2}g(g+1).$$

$R$  est un quotient de  $R'$ . L'espace tangent de  $\text{Spec}(R)$  peut être identifié à  $T_{V,0} \bigotimes_s^k T_{V,0}$ . Le morphisme  $R' \rightarrow R$  correspond à l'inclusion

$$T_{V,0} \bigotimes_s^k T_{V,0} \xrightarrow{\lambda \otimes 1} T_{V^t,0} \bigotimes_s^k T_{V,0}$$

(où  $\bigotimes_s$  signifie produit tensoriel symétrique, c'est-à-dire qu'on identifie  $x \otimes y$  et  $y \otimes x$ ). Si  $V$  est la jacobienne d'une courbe, non singulière, projective (non nécessairement connexe)  $C$ , alors, l'espace tangent de  $\text{Spec}(R)$  peut s'écrire

$$\bigotimes_s^2 H^1(C, \mathcal{O}_C).$$

L'espace cotangent de  $\text{Spec}(R)$  est canoniquement isomorphe à

$$\bigotimes_s^2 H^0(C, \omega_C).$$

L'application cotangente de Torelli est l'application canonique

$$\bigotimes_s^2 H^0(C, \omega_C) \rightarrow H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}).$$

**THÉORÈME 2.2.** — Soit  $X_0/k$  une courbe stable générale (§ 1.1) de déformation universelle  $X/A$ . Soit  $\xi$  la variété abélienne principalement polarisée  $\text{Jac}(X_0^n)$ . Alors  $\text{An}(X)/A$  induit un  $W$ -morphisme local  $\psi : \mathcal{O}_\xi \rightarrow A$  tel que

$$\dim \left( \frac{\mathcal{O}_\xi}{(p, \ker \psi)} \right) \geq 3g - 3 + \#D - 3r + 3 + \#\{i \mid g_i = 1\}.$$

**COROLLAIRE 2.3.** — Soit  $X_0/k$  une courbe stable générale telle que

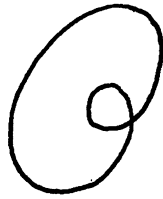
$$\#D - 3r + 3 + \#\{i \mid g_i = 1\} > 0.$$

Soit  $K$  un corps valué complet de corps résiduel  $k$ . Alors il existe une courbe (conexe, non singulière, projective)  $Z/K$  de réduction stable  $X_0$  telle que  $A(Z)$  ne soit pas un produit de variétés de Jacobi.

*Démonstration du corollaire 2.3.* — Appliquer le théorème 2.2, le lemme 1.4 et la remarque 1.5.

*Remarque 2.4.* — Les plus petits exemples de  $X_0$  vérifiant le corollaire 2.3 sont :

a)  $r = 1; g = g_1 = 4$  et  $\#D = 1$ ;



b)  $r = 2; g_1 = g_2 = 2; g = 4$  et  $\#D = 4$ .



*Démonstration du théorème 2.2.* — Il suffit de montrer que l'application cotangente ( $\text{cotan}$ ) de  $\text{Spec}(A) \xrightarrow{\psi^*} \text{Spec}(\mathcal{O}_\xi)$  possède une image de dimension

$$3g - 3 + \#D - 3r + 3 + \#\{i \mid g_i = 1\}.$$

En utilisant les paragraphes 2.1 et 2.2, on voit qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_s^2 H^0(\omega_{X_0^n}) & \xrightarrow{\text{cotan}} & H^0(\Omega_{X_0} \otimes \omega_{X_0}) \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \bigoplus_{i=1}^r \bigotimes_s^2 H^0(\omega_{C_i^n}) & \xrightarrow{\alpha_2} \bigoplus_{i=1}^r H^0(\omega_{C_i^{2n}}) & \xrightarrow{\alpha_3} H_0(\omega_{X_0} \otimes \omega_{X_0}) \end{array}$$

où  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma$  sont les applications canoniques.

L'application  $\alpha_1$  est surjective parce que c'est une projection. L'application  $\alpha_2$  est surjective parce que chaque  $g_i \geq 1$  et si  $g_i \geq 3$ , la courbe  $C_i^n$  n'est pas hyperelliptique. L'application  $\alpha_3$  est injective. Alors

$$\dim(\text{Im}(\gamma \circ \text{cotan})) = \sum_{i=1}^r (3g_i - 3) + \#\{i \mid g_i = 1\}.$$

Il existe une suite de faisceaux  $0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \Omega_{X_0} \rightarrow \omega_{X_0} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$  où  $\mathcal{L}_p = 0$  pour  $p \notin D$  et  $\mathcal{L}_p \cong k$  pour  $p \in D$ , et la même propriété pour  $\mathcal{M}$ . Cela montre que le noyau de  $\gamma$  est  $H^0(\mathcal{L} \otimes \omega_{X_0}) \cong k$ . Si nous produisons pour tout  $d \in D$ , un élément

$$\eta \in \bigotimes_s^2 H_0(\omega_{X_0^n})$$

tel que

$$\text{cotan}(\eta) \in H^0(\mathcal{L} \otimes \omega_{X_0}), \quad \begin{cases} \text{cotan}(\eta)_{d'} = 0 & \text{pour } d' \neq d \\ \text{cotan}(\eta)_{d'} \neq 0 & \text{pour } d' = d \end{cases}$$

alors on aura montré que

$$\dim(\text{Im cotan}) = \#D + \sum_{i=1}^r (3g_i - 3) + \#\{i \mid g_i = 1\}.$$

Cela montre le théorème. Pour l'existence de l'application  $\eta$  ci-dessus, il faut considérer, deux cas :

- a)  $d$  se trouve sur deux composantes de  $X_0$ ;
- b)  $d$  est un point double interne.

*Cas a).* — On peut supposer que  $X_0 = C_1 \cup C_2$  avec  $C_1, C_2$  non singulier et  $\#D = g_1 g_2$ . Alors cotan applique  $H^0(\omega_{C_1}) \otimes H^0(\omega_{C_2})$  dans  $\ker \gamma$ . Soit  $\{(a_i, b_i) \mid i = 1, \dots, g_1 g_2\}$  les points doubles de  $X_0$ . L'application

$$\text{cotan} : H^0(\omega_{C_1}) \otimes H^0(\omega_{C_2}) \rightarrow \ker \gamma \cong k^{g_1 g_2}$$

possède la description explicite :

$$\ell : \omega_1 \otimes \omega_2 \mapsto (\omega_1|_{a_i} \cdot \omega_2|_{b_i})_{1 \leq i \leq g_1 g_2},$$

où  $\omega|_a = (\omega/dt)|_{t=0}$  où  $t$  est un paramètre local en  $a$ . On montre la validité de cette description en utilisant [DS, pp. 71-72].

Pour montrer que  $\ell$  est bijectif pour un choix général de

$$\{(a_i, b_i) \mid 1 \leq i \leq g_1 g_2\},$$

il faut produire un seul choix de  $g_1 g_2$  couples  $\{(a_i, b_i)\}$  avec  $\ell$  bijectif.

Soit  $p_1, \dots, p_{g_1} \in C_1$  des points tels que

$$H^0(\omega_{C_1}(-p_1 \cdots -p_{g_1})) = 0.$$

Alors  $H^0(\omega_{C_1})$  possède une base  $\omega_1, \dots, \omega_{g_1}$  avec  $\omega_i|_{p_j} = \delta_{ij}$ . De même, on choisit  $q_1, \dots, q_{g_2} \in C_2$  et une base  $\eta_1, \dots, \eta_{g_2}$  de  $H^0(\omega_{C_2})$  telle que  $\eta_i|_{q_j} = \delta_{ij}$ . Pour l'ensemble des  $g_1 g_2$  couples, on prend

$$\{(p_i, q_j) \mid 1 \leq i \leq g_1, 1 \leq j \leq g_2\}.$$

Pour ce choix,  $\ell$  est bijectif parce que  $\omega_i|_{p_{i'}} \cdot \eta_j|_{q_{j'}} = \delta_{ii'} \cdot \delta_{jj'}$ . Cela finit la démonstration du cas a).  $\square$

Cas b). — On peut supposer que  $X_0$  est irréductible et que la normalisation  $C$  de  $X_0$  satisfait  $g \geq 3$ ;  $C$  non hyperelliptique;

$$\#D = \frac{1}{2}(g-2)(g-3).$$

On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_s^2 H^0(\omega_C) & \xrightarrow{\text{cotan}} & H^0(\Omega_{X_0} \otimes \omega_{X_0}) \\ \alpha_2 \circ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \gamma \\ H^0(\omega_C^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\alpha_3} & H^0(\omega_{X_0} \otimes \omega_{X_0}) \end{array}$$

Il faut montrer que l'application

$$\ell = \text{cotan}|_{\ker(\alpha_2 \circ \alpha_1)} : \ker(\alpha_2 \circ \alpha_1) \rightarrow \ker(\gamma)$$

est bijective. Soit  $\{(a_i, b_i) \mid 1 \leq i \leq (1/2)(g-2)(g-3)\}$  l'ensemble des couples de points identifiés par le morphisme  $C \rightarrow X_0$ . Alors, comme dans le cas précédent, l'application  $\ell$  possède la forme explicite :

$$\ell \left( \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} \otimes \omega'_{\alpha} \right) = \left( \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}|_{a_i} \cdot \omega'_{\alpha}|_{b_i} \right)_{1 \leq i \leq (1/2)(g-2)(g-3)}.$$

Pour voir que  $\ell$  est en général bijective, il suffit de donner un seul exemple de couples  $\{(a_i, b_i)\}$  où  $\ell$  est bijective.

On suit maintenant la construction de Petri [ACGH, p. 127]. Comme la courbe  $C$  n'est pas hyperelliptique, il existe des points  $p_1, \dots, p_g \in C$  et des formes holomorphes  $\omega_1, \dots, \omega_g \in H^0(\omega_C)$  telles que  $\text{ord}_{p_i}(\omega_j) = 1 - \delta_{ij}$ . Cela implique que  $\{\omega_1^2, \omega_1\omega_2, \omega_2^2, \omega_1\omega_i, \omega_2\omega_i, \omega_i^2 \text{ avec } 3 \leq i \leq g\}$  est une base de  $H^0(\omega_C^{\otimes 2})$ . Les éléments  $\omega_i\omega_j$  avec  $3 \leq i < j \leq g$  s'expriment dans cette base. Cela donne une base explicite de  $\ker(\alpha_2 \circ \alpha_1)$  :

$$\omega(i, j) = \omega_i \otimes \omega_j + \text{une combinaison linéaire de} \\ \{\omega_1 \otimes \omega_1, \omega_1 \otimes \omega_2, \omega_2 \otimes \omega_2, \omega_1 \otimes \omega_\ell, \omega_2 \otimes \omega_\ell, \omega_\ell \otimes \omega_\ell, 3 \leq \ell \leq g\}$$

pour  $3 \leq i < j \leq g$ .

On choisit les  $(1/2)(g-2)(g-3)$  couples  $(a_i, b_i)$  comme il suit :

$$\{(p_i, p_j) \mid 3 \leq i < j \leq g\}.$$

On voit aisément que  $\ell(\omega(i, j))$  possède une seule coordonnée non nulle à la place  $(p_i, p_j)$ . Cela achève la démonstration du cas b) et la démonstration du théorème 2.4.  $\square$

*Remarque 2.5.* — La démonstration du cas b) possède la traduction géométrique suivante. Soit  $C$  une courbe non hyperelliptique de genre  $g \geq 3$  avec son immersion canonique  $C \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ . Soit

$$\left\{ L_i \mid 1 \leq i \leq \frac{1}{2}(g-2)(g-3) \right\}$$

un ensemble des cordes de  $C$  en position générale. Soit  $Q$  un élément de degré 2 dans l'idéal homogène de  $C \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ . Si  $Q$  s'annule sur chaque corde  $L_i$ , alors  $Q = 0$ .

### 3. Revêtements de degré 2 d'une courbe de Mumford

**DÉFINITION 3.1.** — On suppose  $\text{car}(k) \neq 2$ . Soit  $X_0/k$  une courbe stable connexe avec les propriétés suivantes :

- 1) chaque composante irréductible est isomorphe à  $\mathbb{P}_k^1$  ;
- 2) deux composantes irréductibles ont au plus un point commun ;

- 3) le nombre de points doubles sur chaque composante est pair ;  
 4) le genre arithmétique de  $X_0$  est  $g + 1$  et  $g \geq 5$ .

Soit  $\pi_0 : Y_0 \rightarrow X_0$  le revêtement unique de degré 2 dont le lieu de ramification est exactement l'ensemble  $D$  des points doubles de  $X_0$ .

*Remarque 3.2.* — Construisons un exemple explicite de courbe  $X_0$  satisfaisant les propriétés 3.1. Soit  $\mathcal{G}$  le graphe qui admet un seul sommet et deux lacets,  $B$  le revêtement universel de  $\mathcal{G}$ . C'est un arbre dont chaque sommet a la valence 4. Soit  $\Gamma$  le groupe libre à deux générateurs  $\{\gamma_1, \gamma_2\}$  opérant sur  $B$  tel que  $\Gamma \backslash B \cong \mathcal{G}$ .

On considère l'homomorphisme  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$  défini par  $\rho(\gamma_1) = 1$  et  $\rho(\gamma_2) = 2$ . Soit  $\Gamma_g = \ker \rho$ . Alors  $\Gamma_g \backslash \{e\}$  ne possède pas d'éléments de longueur au plus 2 parce que  $g \geq 5$ . Cela montre que le graphe  $B_g := \Gamma_g \backslash B$  est un graphe combinatoire.

Clairement, il existe une courbe stable  $X_0$ , dont les composantes irréductibles  $L_1, \dots, L_g$  sont des droites  $\mathbb{P}_k^1$  et dont le graphe d'intersection est  $B_g$ . Dans cette situation  $Y_0$  aura pour composantes irréductibles  $E_1, \dots, E_g$ . Le graphe d'intersection de  $Y_0$  est aussi  $B_g$  (son nombre de Betti est  $g + 1$ ).

### 3.1 Relèvement du revêtement $\pi_0 : Y_0 \rightarrow X_0$

Soit  $X/A$  la déformation universelle de  $X_0/k$ . C'est une courbe de Mumford sur  $R$ . On voudrait relever le revêtement  $\pi_0 : Y_0 \rightarrow X_0$ . Ceci est possible après une extension finie  $A'$  de  $A$ . Soient  $\{t_d \mid d \in D\}$  les paramètres de  $A$  correspondant aux points doubles de  $X_0$ .

Alors  $A' := A[s_d \mid d \in D]$  où  $s_d^2 = t_d$  pour tout  $d \in D$ . Soit  $X' := X \otimes_A A'$  la courbe de Mumford sur  $A'$ . On a le résultat suivant.

**LEMME 3.3.** — *L'ensemble des relèvements  $\pi : Y' \rightarrow X'$  de  $\pi_0 : Y_0 \rightarrow X_0$  est en bijection avec*

$$H^1(\mathcal{G}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{g+1}$$

où  $\mathcal{G}$  est le graphe d'intersection de  $X_0$ .



*Démonstration.* — Précisons la définition de relèvement  $\pi : Y' \rightarrow X'$  de  $\pi_0 : Y_0 \rightarrow X_0$  :

- 1)  $Y'/A'$  est une courbe stable de fibre spéciale  $Y_0$ ;
- 2)  $Y'/A'$  possède un automorphisme  $\sigma$  d'ordre deux, tel que  $Y'/\{1, \sigma\} \cong X'$  et que la fibre spéciale de  $\sigma$  est l'automorphisme de  $Y_0/X_0$ .

Soit  $Y'$  donné et soit  $d$  un point double de  $Y_0$ . On peut montrer que l'anneau local  $\widehat{\mathcal{O}}_{Y',d}$  est isomorphe à  $A'[[y_1, y_2]]/(y_1 y_2 - s_d)$  et que l'action de  $\sigma$  prend la forme  $\sigma(y_1) = -y_1$  et  $\sigma(y_2) = -y_2$ .

Pour donner la construction d'un relèvement  $Y'$  de  $Y_0 \rightarrow X_0$ , on introduit quelques notations. Soit  $\{L_1, \dots, L_r\}$  l'ensemble des composantes irréductibles de  $X_0$ . On pose

$$L_i^* = X_0 - \bigcup_{m \neq i} L_m \quad \text{et} \quad X_0(d) = X_0 - \bigcup_{m \neq i, j} L_m, \quad \text{où } \{d\} = L_i \cap L_j.$$

Soient  $X'_i$  et  $X'(d)$  les ouverts formels de  $X'$  au-dessus de  $L_i^*$  et  $X_0(d)$ . Alors  $X'$ , vu comme  $A'$ -schéma formel, est donné comme recollement par des isomorphismes :

$$\varphi(i, j) : X'_i \xrightarrow{\sim} \text{ouvert formel de } X'(d), \quad \text{où } \{d\} = L_i \cap L_j.$$

Un calcul explicite montre l'existence et l'unicité d'un  $A'$ -schéma formel et plat,  $Y'(d)$ , avec un automorphisme  $\sigma(d)$  d'ordre 2 tel que :

- a) la fibre spéciale de  $Y'(d)$  est  $Y_0(d) =$  l'image réciproque de  $X_0(d)$ ;
- b)  $Y'(d)/\{1, \sigma(d)\} \cong X'(d)$ .

On a également l'existence et l'unicité d'un couple  $(Y'_i, \sigma_i)$  tel que :

- a) la fibre spéciale de  $Y'_i$  est l'image réciproque de  $L_i^*$  dans  $Y_0$ ;
- b)  $Y'_i/\{1, \sigma_i\} \cong X'_i$ .

Un choix arbitraire d'isomorphisme  $\psi(i, j)$  au-dessus des  $\varphi(i, j)$  :

$$\psi(i, j) : Y'_i \xrightarrow{\sim} \text{ouvert formel de } Y'(d), \quad \text{où } \{d\} = L_i \cap L_j$$

donne par recollement un relèvement  $Y' \rightarrow X'$  de  $Y_0 \rightarrow X_0$ . On peut changer chaque  $\psi(i, j)$  par  $\psi(i, j)\sigma_i^{n(i, j)}$  où  $n(i, j) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . L'ensemble  $\{n(i, j)\}$  s'interprète comme fonction sur l'ensemble des arêtes orientées de  $\mathcal{G}$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Ensuite,  $\{n(i, j)\}$  et  $\{m(i, j)\}$  définissent deux relèvements isomorphes de  $Y_0 \rightarrow X_0$  si et seulement si il existe deux fonctions

$f_1 : \{\text{sommet de } \mathcal{G}\} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $f_2 : \{\text{arêtes non orientées de } \mathcal{G}\} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$   
telles que :

$$n(i, j) + m(i, j) = f_1(i) + f_2(\{i, j\}) \quad \text{pour tout } \{d\} = L_i \cap L_j.$$

Cela montre le lemme.  $\square$

**LEMME 3.4.** — Soient  $Y'_i \rightarrow X'$  ( $i = 1, 2$ ) deux relèvements de  $Y_0 \rightarrow X_0$ . Alors, il existe un isomorphisme  $\gamma : \text{An}(Y'_1) \rightarrow \text{An}(Y'_2)$  des  $A'$ -schémas abéliens.

*Démonstration.* — On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p_2} & Y'_2 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ Y'_1 & \xrightarrow{\pi_1} & X' \end{array}$$

où  $Z$  désigne la normalisation de  $Y'_1 \times_{X'} Y'_2$ . Les deux morphismes canoniques  $p_1, p_2$  sont de degré 2 et sont non ramifiés parce que  $Y'_1$  et  $Y'_2$  sont isomorphes au-dessus de chaque  $X'(d)$ .

On considère le morphisme  $\alpha : \text{Jac}(\widehat{Y}'_1) \rightarrow \text{Jac}(\widehat{Y}'_2)$  défini par  $\alpha = \text{Norm}(p_2) \circ p_1^*$ .

La fibre spéciale  $\alpha_0$  de  $\alpha$  est la multiplication par  $[2] : \text{Jac}(Y_0) \rightarrow \text{Jac}(Y_0)$  suivie par un automorphisme d'ordre deux de  $\text{Jac}(Y_0)$ . Le morphisme  $\alpha$  induit une isogénie

$$\beta : \text{An}(Y'_1) \rightarrow \text{An}(Y'_2)$$

de fibre spéciale  $\beta_0$ . Alors

$$\beta_0 : \text{Jac}(Y_0^n) \rightarrow \text{Jac}(Y_0^n)$$

( $Y_0^n$  est la normalisation de  $Y_0$ ) est aussi la multiplication par  $[2]$  suivie par un automorphisme d'ordre deux de  $\text{Jac}(Y_0^n)$ . Il suit de cela que  $\ker \beta = \text{An}(Y'_1)[2]$ , et que  $\beta$  se factorise en

$$\text{An}(Y'_1) \xrightarrow{2} \text{An}(Y'_1) \xrightarrow{\gamma} \text{An}(Y'_2),$$

où  $\gamma$  est un isomorphisme.

**THÉORÈME 3.5.** — Soit  $Y'/A'$  un relèvement de  $Y_0 \rightarrow X_0$  (définition 3.1 et lemme 3.3), soit  $\xi$  la variété abélienne, principalement polarisée  $\xi = \text{Jac}(Y_0^n)$  et soit  $\mathcal{O}_\xi$  l'anneau local de la déformation universelle de  $\xi$ . Alors le  $W$ -morphisme local  $\psi : \mathcal{O}_\xi \rightarrow A'$  induit par  $\text{An}(Y')/A'$  est surjectif.

**COROLLAIRE 3.6.** — Soit  $K$  un corps valué complet de corps résiduel  $k$ . Alors il existe une courbe non singulière complète  $Z/K$  telle que :

- 1)  $Y_0$  est la réduction stable de  $Z$  ;
- 2)  $Z$  est un relèvement non ramifié de degré 2 d'une courbe de Mumford sur  $K$ , dont la réduction stable est  $X_0$  ;
- 3)  $A(Z)$  (diagramme (1.1)) n'est pas un produit de variétés de Jacobi.

*Démonstration de 3.6.* — Soit  $\text{Spec}(\mathcal{O}_\xi/I)$  le "locus de Jacobi". On sait que  $\dim_W \mathcal{O}_\xi/I = 3g - 3$  et  $\dim_W A' = 3g$ . La surjectivité de  $\mathcal{O}_\xi \rightarrow A'$  et des arguments de la section 1 montrent le corollaire.  $\square$

*Démonstration de théorème 3.5.* — Soient  $\{C_i \mid 1 \leq i \leq r\}$  l'ensemble des composantes irréductibles de  $Y_0$ ,  $\xi_i := \text{Jac}(C_i)$  avec la polarisation principale canonique,  $\mathcal{O}_{\xi_i}$  l'anneau de la déformation universelle de  $\xi_i$ .

Commençons par la description explicite de  $A'$ . Soit  $\{L_i \mid 1 \leq i \leq r\}$  l'ensemble des composantes irréductibles de  $X_0$ . Soit

$$D_i := D \cap L_i \quad \text{et} \quad \sharp D_i = 2g_i + 2,$$

alors,  $C_i \rightarrow L_i$  est la courbe hyperelliptique, ramifiée en  $D_i$  et  $\text{genre}(C_i) = g_i$ .

On peut identifier  $(L_i, D_i)$  avec  $(\mathbb{P}_k^1, \{0, 1, \infty, \alpha_1, \dots, \alpha_{2g_i-1}\})$ . La déformation verselle de  $(L_i, D_i)$  peut s'écrire comme

$$(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_i}^1, \{0, 1, \infty, A_1, \dots, A_{2g_i-1}\}),$$

où  $\mathcal{O}_i = W[[p_1, \dots, p_{2g_i-1}]]$ , et  $A_j : \text{Spec}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{O}_i}^1 \subset \mathbb{P}_{\mathcal{O}_i}^1$  est donnée par  $\mathcal{O}_i[X] \rightarrow \mathcal{O}_i, X \mapsto \tau(a_j) + p_j$  et  $\tau(a_j) \in W$  est un représentant de  $a_j \in k$ .

Au-dessus de  $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_i}^1$ , on considère la courbe hyperelliptique  $\tilde{C}_i$  donnée par l'équation affine

$$y^2 = x(x-1)(x-A_1) \cdots (x-A_{2g_i-1}).$$

Considérons l'anneau  $A'' := A'/(\{s_d \mid d \in D\})$ . Il est clair que  $A'' = \mathcal{O}_1 \widehat{\otimes}_W \cdots \widehat{\otimes}_W \mathcal{O}_r$ . Soit  $Y'' = Y' \otimes_{A'} A''$ . Alors

$$\text{An}(Y') \otimes_{A'} A'' = \text{An}(Y'') = \text{An}((Y'')^n) = \prod_{i=1}^r \left( \text{Jac}(\tilde{C}_i) \bigotimes_{\mathcal{O}_i} A'' \right).$$

Écrivons  $\xi_i$  pour la variété abélienne principalement polarisée  $\text{Jac}(C_i)$  et  $\mathcal{O}_{\xi_i}$  pour l'anneau de la déformation universelle de  $\xi_i$ .

Alors on trouve un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\xi} & \xrightarrow{\psi} & A' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{\xi_1} \widehat{\otimes}_W \cdots \widehat{\otimes}_W \mathcal{O}_{\xi_r} & \longrightarrow & A'' = \mathcal{O}_1 \widehat{\otimes}_W \cdots \widehat{\otimes}_W \mathcal{O}_r \end{array}$$

Le morphisme  $\alpha$  et le morphisme canonique associé à la décomposition  $\xi = \xi_1 \times \cdots \times \xi_r$ . L'application tangente de  $\alpha$  est l'inclusion :

$$\bigoplus_{i=1}^r \bigotimes_s^2 H^1(C_i, \mathcal{O}_{C_i}) \rightarrow \bigotimes_s^2 H^1(Y_0^n, \mathcal{O}_{Y_0^n}).$$

La surjectivité de  $\psi : \mathcal{O}_{\xi} \rightarrow A'$  est alors une conséquence des assertions suivantes :

- a)  $\mathcal{O}_{\xi_i} \rightarrow \mathcal{O}_i$  est surjectif pour tout  $i$ ;
- b) l'image du vecteur tangent  $\partial/\partial s_d$  de  $\text{Spec}(A')$  dans le facteur  $H^1(C_i, \mathcal{O}_{C_i}) \otimes H^1(C_j, \mathcal{O}_{C_j})$  de l'espace tangent de  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\xi})$  est non nul. Ici,  $\{d\} = L_i \cap L_j$  et  $i < j$ .

*Démonstration de a).* — Remarquons que l'assertion a) est proche du résultat principal de [OS].

Dans la démonstration de a), on peut remplacer  $W$  par  $k$ . On considère la courbe hyperelliptique  $C/k[[p_1, \dots, p_{2g-1}]]$  de genre  $g$ , donnée par l'équation affine

$$y^2 = x(x-1)(x-(a_1+p_1)) \cdots (x-(a_{2g-1}+p_{2g-1})).$$

Soient  $C_0$  la fibre spéciale de  $C$ ,  $\mathcal{O}$  l'anneau de la déformation universelle de  $C_0$ ,  $\xi = \text{Jac}(C_0)$  avec sa polarisation principale et  $\mathcal{O}_{\xi}$  l'anneau de la déformation universelle de  $\xi$ . Alors

$$\psi : \text{Spec}(k[[p_1, \dots, p_{2g-2}]]) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{\xi}),$$

l'application induite par le schéma abélien  $\text{Jac}(C)/k[[p_1, \dots, p_{2g-2}]]$ , se décompose en :

$$\text{Spec}(k[[p_1, \dots, p_{2g-1}]]) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_\xi).$$

L'application tangente de  $\psi$  se décompose en :

$$\bigoplus k \frac{\partial}{\partial p_i} \xrightarrow{\alpha} H^1(C_0, \text{Der}_{C_0/k}) \xrightarrow{\beta} \bigotimes_s^2 H^1(C_0, \mathcal{O}_{C_0}),$$

où  $\alpha$  est l'application de Kodaira-Spencer. L'application cotangente de  $\psi$  se décompose en

$$\bigoplus k dp_i \xleftarrow{\alpha^*} H^0(C_0, \omega_{C_0}^{\otimes 2}) \xleftarrow{\beta^*} \bigotimes_s^2 (C_0, \omega_{C_0}),$$

où  $\beta^*$  est l'application canonique.

Pour le calcul de  $\alpha(\partial/\partial p_j)$ , on considère la suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Der}_{C/k[[p_1, \dots, p_{2g-1}]]} \rightarrow \text{Der}_{C/k} \rightarrow \bigoplus \mathcal{O}_C \frac{\partial}{\partial p_i} \rightarrow 0$$

qui induit l'application de Kodaira-Spencer :

$$\bigoplus k \frac{\partial}{\partial p_i} \rightarrow H^1(\text{Der}_{C/k[[p_1, \dots, p_{2g-1}]]}) \rightarrow H^1(\text{Der}_{C_0/k}).$$

Un calcul explicite montre que  $\partial/\partial p_j$  ne se relève pas en section de  $\text{Der}_{C/k}$ . Par contre,  $\partial/\partial p_j$  se relève en une section de  $\text{Der}_{C/k} \otimes \mathcal{O}_C(A_j)$  où  $A_j$  est le diviseur positif de  $C$  donné par  $x = a_j + p_j$  et  $y = 0$ .

Considérons la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \text{Der}_{C_0/k} \rightarrow \text{Der}_{C_0/k}(a_j) \rightarrow "k" \rightarrow 0$$

et la suite de cohomologie

$$0 \rightarrow k \xrightarrow{\gamma} H^1(\text{Der}_{C_0/k}) \rightarrow H^1(\text{Der}_{C_0/k}(a_j)) \rightarrow 0.$$

Ce qui précède montre que  $\alpha(\partial/\partial p_j)$  est un élément non nul dans l'image de  $\gamma$ .

Cela implique une description explicite de  $\alpha^*$ . Soit  $t_i$  un paramètre local convenable pour le point  $(a_i, 0)$  de  $C_0$ . Pour  $\omega \in H^0(C_0, \omega_{C_0}^{\otimes 2})$  qui a une représentation locale  $f(t_i)(dt_i)^2$ , on pose  $\omega|_{a_i} = f(0)$ . Alors

$$\alpha^*(\omega) = \sum_{i=1}^{2g-1} \omega|_{a_i} dp_i.$$

Comme  $H^0(C_0, \omega_{C_0})$  possède pour base  $\{x^\ell(dx/y) \mid 0 \leq \ell \leq g\}$  l'image de  $\beta^*$  possède  $\{x^\ell(dx/y)^2 \mid 0 \leq \ell \leq 2g-2\}$  comme base. Le déterminant de van der Monde implique que  $\alpha^* \circ \beta^*$  est surjectif.

*Démonstration de b).* — Pour le calcul de l'image de  $\partial/\partial s_d$  dans  $H^1(\mathcal{O}_{C_i}) \otimes H^1(\mathcal{O}_{C_j})$  ( $i < j$  et  $\{d\} = L_i \cap L_j$ ), on peut remplacer  $A'$  par  $A''' = A'/(\{s_{d'} \mid d' \in D, d' \neq d\})$ . Ensuite  $Y' \otimes_{A'} A'''$  peut être remplacé par la normalisation.

Cela veut dire qu'on travaille essentiellement avec la situation suivante :

$X_0 = L_1 \cup L_2$ ;  $L_1 \cong L_2 \cong \mathbb{P}_k^1$ ;  $L_1 \cap L_2$  est un seul point double ordinaire identifié à  $0 \in L_1$ , et aussi  $0 \in L_2$ . Sur  $L_1$  se situent d'autres points :

$$0_1, 1_1, \infty_1, a_1, \dots, a_{2g_1-1} \quad (g_1 \geq 1)$$

et sur  $L_2$ , on a

$$0_2, 1_2, \infty_2, b_1, \dots, b_{2g_2-1} \quad (g_2 \geq 1).$$

Alors  $Y_0 \rightarrow X_0$  est le revêtement de degré 2 ramifié exactement en

$$0_1 = 0_2, 1_1, \infty_1, a_1, \dots, a_{2g_1-1}, 1_2, \infty_2, b_1, \dots, b_{2g_2-1}.$$

Les composantes irréductibles  $C_1, C_2$  de  $Y_0$  sont deux courbes hyperelliptiques de genre  $g_1, g_2$  ayant un point en commun.

Soit  $X/R$  la déformation verselle de  $X_0$  avec ses points. Explicitement :

$$R = W[[t, p_1, \dots, p_{2g_1-1}, q_1, \dots, q_{2g_2-1}]]$$

où  $\{p_1, \dots, p_{2g_1-1}, q_1, \dots, q_{2g_2-1}\}$  décrit la variation des points  $\{a_1, \dots, a_{2g_1-1}, b_1, \dots, b_{2g_2-1}\}$  et où  $t$  décrit la déformation locale du point double de  $X_0$ .

Ensuite  $R' := R[s]$  avec  $s^2 = t$  et  $Y' \rightarrow X'$  est la courbe stable sur  $R'$ , relèvement unique de  $Y_0 \rightarrow X_0$ . Soient  $Y/A$  la déformation universelle de  $Y_0/k$ ,  $\xi = \text{Jac}(Y_0^n)$  et  $\mathcal{O}_\xi$  l'anneau de la déformation universelle de  $\xi$ . Alors le morphisme  $\psi : \text{Spec}(R') \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_\xi)$  induit par  $\text{Jac}(Y')/R' = \text{An}(Y')/R'$  se décompose en

$$\text{Spec}(R') \rightarrow \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_\xi).$$

L'application tangente de  $\psi$  se décompose en

$$\left(k \frac{\partial}{\partial s} + \dots\right) \xrightarrow{\alpha} \text{Ext}^1(\Omega_{Y_0}, \mathcal{O}_{Y_0}) \xrightarrow{\beta} \bigotimes_s^2 H^1(\mathcal{O}_{Y_0^n}).$$

Soit  $d$  le point double de  $Y_0$ . Il est clair que l'image de  $\alpha(\partial/\partial s)$  dans  $\text{Ext}^1(\widehat{\Omega}_{Y_0,d}, \widehat{\mathcal{O}}_{Y_0,d}) \cong k$  est non nulle. Il suffit donc de montrer que  $\beta$  induit une application nouvelle de

$$\text{Ext}^1(\widehat{\Omega}_{Y_0,d}, \widehat{\mathcal{O}}_{Y_0,d}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{C_1}) \otimes H^1(\mathcal{O}_{C_2}).$$

Nous avons déjà rencontré cette situation à la section 2. En considérant l'application  $\beta^*$ , cela veut dire que

$$\ell : H^0(C_1, \omega_{C_1}) \otimes H^0(C_2, \omega_{C_2}) \rightarrow k$$

donnée par  $\ell(\omega_1 \otimes \omega_2) = \omega_1|_0 \cdot \omega_2|_0$  (avec les notations ci-dessus) est non triviale. Il est évident que  $\ell \neq 0$  et cela achève la démonstration de théorème 3.5.  $\square$

### 3.2 Variétés de Prym

La suite (1.3) appliquée à  $Y' \rightarrow X'$  (lemme 3.3 et théorème 3.3) est

$$1 \rightarrow T(Y') \rightarrow \text{Jac}(Y')^\wedge \rightarrow \text{An}(Y') \rightarrow 1.$$

Soit  $\sigma$  l'involution de  $Y' \rightarrow X'$ , alors  $\sigma$  opère sur  $\text{Jac}(Y')$  et  $\text{Jac}(Y')^\wedge$ . On définit  $P = \text{Prym}(Y'/X')$  par

$$P = \text{Im}((\sigma - \text{id}) : \text{Jac}(Y') \rightarrow \text{Jac}(Y')).$$

Alors  $P^\wedge$  s'identifie à

$$\text{Im}((\sigma - \text{id}) : \text{Jac}(Y')^\wedge \rightarrow \text{Jac}(Y')^\wedge).$$

Comme l'action de  $\sigma$  sur  $T(Y')$  est (+ id) et sur  $\text{An}(Y')$  est (- id), on trouve une suite exacte :

$$1 \rightarrow N \rightarrow P^\wedge \rightarrow \text{An}(Y') \rightarrow 1,$$

où  $N = T(Y') \cap P^\wedge \subset T(Y')[2]$  est un groupe fini. Une analyse plus fine montre que  $N \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$ . Alors  $N$  est sous-groupe maximale isotrope de  $P^\wedge[2] = P[2]$ . On a donc montré que  $\text{An}(Y') \cong P/N$  où  $N$  est un sous-groupe maximale isotrope de  $P[2]$ .

### Bibliographie

- [ACGH] ARBARELLO (E.), CORNALBA (M.), GRIFFITHS (P.A.) et HARRIS (J.) .— *Geometry of algebraic curves (Volume I)*, Grundle. der Math. Wiss **267**, Springer Verlag 1984.
- [B1] BEAUVILLE (A.) .— *Prym varieties and the Schottky problem*, *Inventiones math.* **41** (1977), pp. 149-196.
- [B2] BEAUVILLE (A.) .— *Variétés de Prym et jacobiniennes généralisées*, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4ème série, **10** (1977), pp. 309-391.
- [BLR] BOSCH (S.), LÜTKEBOHMERT (W.) et RAYNAUD (M.) .— *Néron models*, Springer Verlag 1990.
- [BL] BOSCH (S.) et LÜTKEBOHMERT (W.) .— *Stable reduction and uniformization of Abelian varieties II*, *Inventiones math.* **78** (1984), pp. 258-297.
- [DM] DELIGNE (P.) et MUMFORD (D.) .— *The irreducibility of the space of curves of given genus*, *Publ. math. I.H.E.S.* **36** (1969), pp. 75-110.
- [DS] DONAGI (R.) et SMITH (R.C.) .— *The structure of the Prym map*, *Acta math.* **145** (1981), pp. 24-102.
- [FC] FALTINGS (G.) et CHAI (C.-L.) .— *Degeneration of Abelian varieties*, Springer Verlag (1990).
- [FP] FRESNEL (J.) et VAN DER PUT (M.) .— *Uniformisation des variétés abéliennes*, *Ann. Fac. Scien. Toulouse*, Vol. **97** (1989) pp. 9-42.
- [G] GIESEKER (D.) .— *Lectures on moduli of curves*, Tate Institute of Fundamental Research., Springer Verlag (1982).
- [Mi1] MILNE (J.L.) .— *Abelian varieties*, *Arithmetic Geometry*, Ed. G. Cornell, J. H. Silverman, Springer Verlag (1986).
- [Mi2] MILNE (J.L.) .— *Jacobian varieties*, *Arithmetic Geometry*, Ed. G. Cornell, J. H. Silverman, Springer Verlag (1986).
- [Mu1] MUMFORD (D.) .— *Abelian varieties*, *Tata Inst. of Fund. Research* (1974).
- [MF] MUMFORD (D.) et FOGARTY (J.) .— *Geometric invariant theory*, Springer Verlag (1982).
- [Mu2] MUMFORD (D.) .— *Prym varieties I*, *Contributions to Analysis*, Ed. Ahlfors, Kra, Maskit Niremberg Academic press (1974), pp. 325-350.



- [O] OORT (F.) . — *Finite group schemes, local moduli for Abelian varieties and lifting problems*, *Comp. math.* **23**, n° 3 (1971), pp. 265-296.
- [OS] OORT (F.) et STEENBRINK (J.) . — *The local Torelli problem for algebraic curves*, In *Journ. Géom. Algébrique d'Angers 1979*; *Ed. A. Beauville, Sijthof & Nordhoff* (1980), pp. 157-204.
- [OU] OORT (F.) et UENO (K.) . — *Principally polarized Abelian varieties of dimension two or three are Jacobian varieties*, *J. Fac. Univ. Tokyo, Sect. 1 A* **20** (1973), pp. 377-381.
- [R] RAYNAUD (M.) . — *Variétés abéliennes et géométrie rigide*, *Actes, Congrès Intern. Math.* **1** (1970), pp. 473-477.