

FERNAND PELLETIER

**Quelques propriétés géométriques des variétés
pseudo-riemanniennes singulières**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 4, n^o 1
(1995), p. 87-199

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1995_6_4_1_87_0

© Université Paul Sabatier, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Quelques propriétés géométriques des variétés pseudo-riemanniennes singulières^(*)

FERNAND PELLETIER⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Une pseudo-métrique g sur une variété M est la donnée d'un champ de formes bilinéaires symétriques sur M . Cette situation se présente naturellement pour les immersions de variétés dans une variété pseudo-riemannienne. Le lieu singulier $\Sigma(g)$ de la pseudo-métrique g est l'ensemble des points où g est dégénérée. Dans un contexte générique, on donne d'abord une stratification "naturelle" du lieu singulier. À une pseudo-métrique est canoniquement associée sa connexion duale de Lévi-Civita. Toujours dans un contexte générique, on étudie les notions d'ensembles auto-parallélismes (en particulier pour $\Sigma(g)$), de transport parallèle, et de géodésiques. La notion générale d'indice d'obstruction d'une section d'un fibré, permet de définir un invariant pour les pseudo-métriques g sur M , dans un contexte plus général que le contexte générique. Le théorème de Chern-Gauss-Bonnet se généralise, sous de bonnes hypothèses, aux variétés compactes M munies d'une pseudo-métrique g . Elle fournit une formule intégrale dont la valeur numérique est égale à la différence entre la caractéristique d'Euler-Poincaré de M et l'invariant de g . On termine le travail par une étude géométrique et topologique de certaines variétés admettant une pseudo-métrique générique plate.

ABSTRACT. — A pseudo-metric g on a manifold M is a vectorfield of bilinear symmetric forms on M . Naturally, this situation is obtained for an immersed manifold M in a pseudo-Riemannian manifold. The singular locus $\Sigma(g)$ of the pseudo-metric g is the set of points where g is not regular. In a generic context, we give a "natural" stratification of the singular locus. A notion of Lévi-Civita "dual connection" is canonically associated to a pseudo-metric. Then we give some results about auto-parallel sets (in particular for the singular locus), parallel translation and geodesics. Obstruction's index for a section of a fiber bundle allows us to define a numerical invariant associated to a pseudo-metric. For a compact manifold M with a pseudo-metric g , Chern-Gauss-Bonnet's

(*) Reçu le 3 juin 1993

(1) Laboratoire de Mathématiques, Université de Savoie, Campus Scientifiques, F-73376 Le Bourget-du-Lac Cedex (France)

theorem can be generalised, under adequate hypothesis. Thus we obtain an integral formula whose value is the difference between Euler-Poincaré's characteristic of M and the numerical invariant associated to g . We finally give geometric and topological properties of some manifolds admitting a flat generic pseudo-metric.

Table des matières

Introduction	89
1. Singularités génériques d'une pseudo-métrique	92
1.1 Comportement générique du rang d'une pseudo-métrique	92
1.2 Exemples de situations génériques	95
1.3 Plongements génériques d'une variété dans une variété pseudo-riemannienne	99
1.4 Démonstration du théorème 1.3.7	103
2. Connexions et connexions duales compatibles	
avec une pseudo-métrique générique	107
2.1 L'homomorphisme g^b associé à une pseudo-métrique g	107
2.2 Connexions duales g -méttriques et connexions g -méttriques	108
2.3 Lieu singulier auto-parallèle et fortement auto-parallèle	110
2.4 Transport parallèle pour une connexion duale g -métrique	119
2.5 Géodésiques d'une connexion duale g -métrique	125
3. Un invariant global pour les pseudo-métriques singulières	130
3.1 Indice d'une section sur la frontière d'un compact	130
3.2 Indice de singularité d'une hypersurface compacte d'une variété pseudo-riemannienne	133
3.3 Ensembles localement sous-analytiques	136
3.4 Lieu singulier d'un morphisme de fibré vectoriel	138
3.5 Invariants d'un isomorphisme singulier de fibré vectoriel	140
3.6 Indice de singularité d'une pseudo-métrique dont le lieu singulier est localement analytique	149
3.7 Indice de ramification d'un morphisme de fibré	152
4. Sur le théorème de Gauss-Bonnet pour les pseudo-métriques	155
4.1 Intégrale de la forme pfaffienne d'une connexion métrique	155
4.2 Un théorème de Gauss-Bonnet pour les pseudo-métriques à lieu singulier localement analytique	163
4.3 Théorème de Riemann-Hurwitz pour les morphismes de fibrés vectoriels à lieu singulier localement analytique	166
5. Intégrale de la forme pfaffienne d'une connexion duale g-métrique ..	168
5.1 Problème d'intégrabilité	168
5.2 Cas des pseudo-métriques non dégénérées en restriction au bord d'une variété	169
5.3 Cas des pseudo-métriques génériques dont le lieu singulier est une variété ..	176
6. Les variétés pseudo-riemanniennes génériques plates	184
6.1 Exemples	184
6.2 Modèle local	185
6.3 Description des géodésiques au voisinage d'un point $\Sigma_1(g)$	188

6.4 Caractérisation de certaines variétés pseudo-riemanniennes compactes plates et complètes	190
6.5 Caractérisation de certaines variétés pseudo-riemanniennes génériques compactes plates et complètes	195
Bibliographie	197

Introduction

Une métrique pseudo-riemannienne G sur une variété N n'induit pas, en général, une métrique pseudo-riemannienne sur une sous-variété M de N , mais possède des "singularités". Cette situation se présente, par exemple, sur toute hypersurface compacte H de \mathbb{R}^n muni de la métrique canonique G de Lorentz : le fibré en droites orthogonales à H sera tangent à H sur un sous-ensemble non vide; cet ensemble est le lieu "singulier" de la métrique induite sur H . Plus généralement, soit M une sous-variété d'une variété pseudo-riemannienne (N, G) et notons TM^\perp le fibré orthogonal à TM dans TN relativement à G . L'ensemble des points de M où TM^\perp et TM ne sont pas supplémentaires est le lieu singulier de la métrique induite. Si cet ensemble est vide, la métrique induite est alors pseudo-riemannienne. Si cet ensemble est égal à M et si le rang du fibré $TM^\perp \cap TM$ est constant, M est une variété pseudo-riemannienne dégénérée [15]. De telles sous-variétés ont une importance capitale en *relativité générale*. L'étude des structures géométriques de ces sous-variétés a donné lieu à de nombreuses publications (voir par exemple [15], [16]).

L'étude de quelques propriétés géométriques des sous-variétés pseudo-riemanniennes "singulières" d'une variété pseudo-riemannienne a déjà fait l'objet de plusieurs articles de M. Kossowski ([12], [13], [14]). En fait, cette situation se place dans le cadre plus général des *variétés pseudo-riemanniennes singulières*. Plus précisément, une *pseudo-métrique* g , sur une variété M , est un champ C^∞ de formes bilinéaires symétriques. Le lieu singulier $\Sigma(g)$ est l'ensemble des points x de M , où le rang de g en x n'est pas maximal. Le noyau de g en un point x de $\Sigma(g)$ est le sous-espace $K_g(x)$ de $T_x M$, ensemble de vecteurs u de $T_x M$ pour lesquels $g_x(u, v) = 0$, pour tout v de $T_x M$. Lorsque M est une sous-variété d'une variété pseudo-riemannienne (N, G) , le lieu singulier de la pseudo-métrique g induite par G sur M , est l'ensemble de x de M , pour lesquels $T_x M^\perp \cap T_x M \neq 0$, et le noyau de g est alors $K_g(x) = T_x M^\perp \cap T_x M$. On dira que (M, g) , où g est une pseudo-métrique, est une variété pseudo-riemannienne singulière.

Le premier objectif de ce travail est de généraliser les résultats de [13] et [14] dans le contexte des variétés pseudo-riemanniennes singulières. Le deuxième objectif est de développer les résultats annoncés dans les notes [28], [29], [30] et de les compléter. Enfin, le dernier objectif est l'étude des variétés pseudo-riemanniennes génériques plates.

La première section de ce travail est consacrée à une description générique du lieu singulier $\Sigma(g)$. On y rappelle d'abord la stratification générique du type "Thom-Boardman" $\Sigma(g)$, construite dans [26] pour une variété pseudo-riemannienne singulière (M, g) . Dans le cas particulier où g est la pseudo-métrique induite sur une sous-variété M d'une variété pseudo-riemannienne (N, G) , la construction précédente ne permet pas d'obtenir directement, en général, une stratification générique du type "Thom-Boardman", de $\Sigma(g)$. Dans ce cas, on a seulement des résultats partiels.

À toute métrique pseudo-riemannienne g , est associée une unique connexion compatible avec g et à torsion nulle : c'est la connexion de Lévi-Civita de g . En revanche, lorsque g possède des singularités, ce n'est plus le cas : la connexion de Lévi-Civita ∇ de g est seulement définie sur $M - \Sigma(g)$. De plus, si g est générique, $\Sigma(g)$ contient un ouvert dense $\Sigma_{10}(g)$, sur lequel la pseudo-métrique induite g_0 est pseudo-riemannienne. On peut donc associer à g_0 sa connexion de Lévi-Civita ∇_0 . À quelles conditions les connexions ∇ (sur $M - \Sigma(g)$) et ∇_0 (sur $\Sigma_{10}(g)$) se recollent-elles? Comment se comportent les géodésiques de ∇ au voisinage de $\Sigma(g)$? On trouvera les réponses à ces questions dans la section 2. Les connexions duales métriques compatibles avec g (introduites dans [12]) jouent un rôle fondamental dans cette section. On peut ainsi définir une seconde forme fondamentale Π de $\Sigma(g)$. La nullité de Π est une condition nécessaire et suffisante de recollement de ∇ et ∇_0 ; dans ce cas, on dit que $\Sigma(g)$ est auto-parallèle. La forme Π permet de caractériser les vecteurs tangents à $\Sigma(g)$ qui admettent un transport parallèle le long des courbes transverses à $\Sigma(g)$. Elle permet également de préciser le comportement des géodésiques au voisinage de $\Sigma(g)$.

La notion d'indice d'un champ de vecteurs, sur le bord d'une variété compacte, permet de définir un indice de singularité pour les hypersurfaces compactes d'une variété pseudo-riemannienne et pour une pseudo-métrique, dont le lieu singulier est compact et défini localement par une équation analytique (c'est, par exemple, le cas pour les pseudo-métriques génériques). Ces invariants permettent, en outre, d'étendre la notion d'indice de ramification pour une application entre deux variétés compactes, dont le lieu singulier est défini localement par une équation analytique. C'est l'objet de la section 3 qui développe et généralise les résultats annoncés dans [28]

et [29]. On montre, dans cette section, que tout compact Σ d'une variété M , défini par une équation globale localement analytique, possède un voisinage V , tel que $V - \Sigma(g)$ est feuilleté par des hypersurfaces compactes de codimension 1. L'indice d'un champ de vecteurs sur une variété compacte permet alors de définir des invariants pour un isomorphisme de TM en restriction à $M - \Sigma$, dans un fibré vectoriel E au-dessus de $M - \Sigma$, Σ étant un compact ayant les propriétés précédentes. Les définitions et propriétés des différents indices de singularités sont alors des cas particuliers de cette situation générale. Remarquons que ces résultats sont à rapprocher des travaux beaucoup plus complets de Mme H. Schwarz et J.-P. Brasselet sur les classes caractéristiques de fibrés tangents aux strates d'une stratification analytique complexe ([3], [34], [35]). Une telle construction devrait pouvoir se généraliser à certains fibrés à fibres variables ([36], par exemple). Le théorème de Gauss-Bonnet-Chern affirme que, si Δ est la forme pfaffienne d'une connexion métrique ∇ compatible avec une métrique pseudo-riemannienne g sur une variété compacte M , on a

$$\int_M \Delta = \chi(M)$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de M . Lorsque g est une pseudo-métrique, à toute connexion ∇ sur $M - \Sigma(g)$ compatible avec g en restriction à $M - \Sigma(g)$, est encore associée une forme pfaffienne Δ (sur $M - \Sigma(g)$). On peut se demander à quelles conditions Δ est intégrable sur $M - \Sigma(g)$? Si c'est le cas, quelle est la valeur de cette intégrale et son lien avec $\chi(M)$?

Dans la section 4, on montre que si g possède un lieu singulier défini par une équation localement analytique, il existe une n -forme Δ' sur M cohomologue à Δ sur $M - \Sigma(g)$ et

$$\int_M \Delta' = \chi(M) - i(g)$$

où $i(g)$ est l'indice de singularité de g . Ce résultat permet d'obtenir une généralisation de la formule de Riemann-Hurwitz.

L'objet de la section 5 est l'étude de l'intégrabilité de Δ sur $M - \Sigma(g)$. Lorsque le lieu singulier de g est une hypersurface compacte et que g est non dégénérée en restriction à $\Sigma(g)$, on donne un développement asymptotique de l'intégrale

$$\int_{M_t} \Delta$$

où $M_t = M - V_t$ est le complémentaire d'un voisinage tubulaire V_t de $\Sigma(g)$, dont le bord est à distance t de $\Sigma(g)$. Enfin, lorsque le lieu singulier de g est une hypersurface et s'il est auto-parallèle, alors Δ est intégrable sur $M - \Sigma(g)$ et on a

$$\int_{M - \Sigma(g)} \Delta = \chi(M).$$

Il est bien connu que les seules variétés riemanniennes plates compactes sont les tores (théorème de Bieberbach; [7], [11]). Un théorème de classification analogue existe aussi pour les variétés lorentziennes plates [7]. Dans chacun de ces cas, la compacité entraîne que la variété est géodésiquement complète. Pour les autres variétés pseudo-riemanniennes plates, le problème de la relation entre la compacité de la variété et la propriété d'être géodésiquement complète reste, à ma connaissance, encore ouvert. D'autre part, la classification des variétés pseudo-riemanniennes plates, compactes, complètes reste également un problème ouvert. Dans la section 6, on montre que, si une variété compacte pseudo-riemannienne plate complète contient une hypersurface totalement géodésique, cette variété est fibrée sur S^1 . En utilisant la notion de b -complétude introduite par B. Schmidt [33], on définit la propriété de complétude d'une variété pseudo-riemannienne générique. On démontre que, si (M, g) est une variété pseudo-riemannienne générique, compacte, si le lieu singulier de g est une variété auto-parallèle, alors M est un fibré sur S^1 dont la fibre est l'une des composantes connexes de $\Sigma(g)$. Si, de plus, la restriction de g ou $-g$ à chaque composante de $M - \Sigma(g)$ est riemannienne ou lorentzienne, alors nécessairement M est complète et la fibre est un tore. Dans cette section, on donne également des exemples de variétés pseudo-riemanniennes génériques plates, ainsi qu'un modèle local au voisinage d'un point de $\Sigma(g)$.

1. Singularités génériques d'une pseudo-métrie

1.1 Comportement générique du rang d'une pseudo-métrie

Dans cette section sont rappelés tous les résultats de genericité de [26]. Le cadre générique dans lequel se place tout ce travail repose sur une partie importante de ces résultats.

Soit g une pseudo-métrie sur une variété M de dimension n . Le noyau de g en un point x de M est l'ensemble

$$K_g(x) = \{u \in T_x M \text{ tel que } g(u, v) = 0 \text{ pour tout } v \in T_x M\}.$$

Le lieu singulier $\Sigma(g)$ de g est l'ensemble des points x de M où $K_g(x) \neq 0$. Lorsque $\Sigma(g)$ est non vide, $M' = M - \Sigma(g)$ est une réunion d'ouverts connexes M'_i , $i \in I$, et sur chaque M'_i l'indice de g est constant. Le lieu singulier $\Sigma(g)$ est la réunion des ensembles $\Sigma_c(g) = \{x \in M \mid \dim K_g(x) = c\}$. Si N est une sous-variété de M , et g_1 la pseudo-métrie induite par g sur N , le noyau $K_{g_1}(x)$ de g_1 en x de N contient $K_g(x) \cap T_x N$, mais l'inclusion peut être stricte. Comme pour les formes différentielles [25], la description des singularités "d'ordre supérieur" du rang d'une pseudo-métrie sera caractérisée par l'étude des espaces :

$$K_g(x) \supset K_g(x) \cap T_x N \supset K_{g_1}(x)$$

lorsque $N = \Sigma_c(g)$ est une sous-variété de M . Dans ce cas, on va définir les ensembles :

$$\Sigma_{c, c_1}(g) = \{x \in \Sigma_c(g) \mid \dim(K_g(x) \cap T_x \Sigma_c(g)) = c_1 \text{ et} \\ \dim(K_{g_1}(x)) = c'_1\}.$$

Avant de décrire le comportement générique du rang d'une pseudo-métrie, nous allons introduire quelques notations.

Soient $M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_\ell \supset \dots \supset M_k$ des sous-variétés de codimensions respectives $p_0, p_1, \dots, p_\ell, \dots, p_k$. On note g_ℓ la pseudo-métrie induite par g sur M_ℓ . Pour $R = (r_0, \dots, r_k)$ et $S = (s_0, \dots, s_k)$ appartenant à \mathbb{N}^{k+1} , on définit l'ensemble $\Sigma_{RS}(M_0 \dots M_k)$ des points x de M_k tels que :

- $\dim(K_{g_i}(x) \cap T_x M_k) = r_i$;
- l'indice de g_i est s_i pour tout $0 \leq i \leq k$.

Le symbole de g en x sur $(M_0 \dots M_k)$ est l'élément (R_0, \dots, R_k, S_k) de $\mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}^{k+1} \times \mathbb{N}^{k+1}$ défini par

$$\begin{cases} R_j = (r_0^j, \dots, r_i^j, \dots, r_j^j) & \text{si } r_i^j = \dim(K_{g_i}(x) \cap T_x M_j) \\ S_k = (s_0, \dots, r_k) & \text{si l'indice de } g \text{ en } x \text{ est } s_i. \end{cases}$$

Le symbole de g en x se présente sous la forme d'un tableau

$$\begin{array}{cccccc} r_0^0 & \dots & r_0^i & \dots & r_0^j & \dots & r_0^k & s_0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dim(K_{g_i}(x) \cap T_x M \dots) & \rightarrow & r_i^i & \dots & r_i^j & \dots & r_i^k & s_i \\ & & & & r_j^j & \dots & r_j^k & s_j \\ & & & & \uparrow & & r_k^k & s_k \\ & & & & & & \dim(K_{g_i}(x) \cap T_x M_j) & \end{array}$$

Le symbole de g en x possède les propriétés suivantes :

$$(r_j^j, \dots, r_i^j, \dots, r_0^j), (p_j, r_j^j, r_j^{j+1}, \dots, r_j^k) \text{ et } (s_0, \dots, s_k) \text{ sont des suites décroissantes d'entiers compris entre 0 et } n \quad (1)$$

$$p_{i-1} - p_i \geq \sup \{ r_{i-1}^{i-1} - r_{i-1}^i \}; \quad (2)$$

$$n \geq \sup \left\{ r_i^j - r_{i-1}^{i-1} - r_{i-1}^j + \sum_{\ell=0}^{i-1} r_\ell^\ell - r_\ell^{\ell+1}, \right. \\ \left. p_i + \sum_{\ell=0}^{i-1} r_\ell^\ell - r_\ell^{\ell+1}, r_i^i + p_i + s_i \right\}. \quad (3)$$

L'espace $Q(M)$ des pseudo-métriques sur M est muni de la topologie C^∞ de Whitney. Rappelons qu'une propriété (P) est générique dans $Q(M)$, si l'ensemble des éléments g de $Q(M)$ qui vérifient P , est un ensemble résiduel, c'est-à-dire une intersection d'ouverts denses.

THÉORÈME 1.1.1 ([26],[27])

1) Dans l'espace $Q(M)$, les propriétés suivantes sont génériques : pour tout entier k et tout $(R_0, \dots, R_k, S_k) \in \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}^{k+1} \times \mathbb{N}^{k+1}$, si la dimension n de la variété M est assez grande, les sous-ensembles

$$\Sigma_{R_0, S_0}(g), \dots, \Sigma_{R_0, \dots, R_k, S_k}(g)$$

sont bien des sous-variétés plongées de M , ou bien ces sous-ensembles sont vides

Les ensembles singuliers $\Sigma_{R_0, \dots, R_j, S_j}(g)$ sont définis par récurrence de la manière suivante :

$$\Sigma_{R_0, \dots, R_j, S_j}(g) = \Sigma_{R_j, S_j} [M, \Sigma_{R_0, S_0}(g), \dots, \Sigma_{R_0, \dots, R_{j-1}, S_{j-1}}(g); g],$$

avec $S_j = (s_0, \dots, s_j)$ si $S_k = (s_0, \dots, s_j, \dots, s_k)$.

2) Le symbole d'un élément générique g est (R_0, \dots, R_k, S_k) en tout point de $\Sigma_{R_0, \dots, R_k, S_k}(g)$.

3) Lorsque $\Sigma_{R_0, \dots, R_k, S_k}(g)$ est non vide, sa codimension $\mu_{(R_0, \dots, R_k)}$ ne dépend que de (R_0, \dots, R_k) (pour g générique). La valeur de $\mu_{(R_0, \dots, R_k)}$ est donnée par la formule de récurrence suivante :

$$\mu_{R_0} = \frac{r_0^0(r_0^0 + 1)}{2}$$

$$\begin{aligned} \mu(R_0, \dots, R_k) &= \mu(R_0, \dots, R_{k-1}) + \frac{(r_k^k - r_{k-1}^k)(r_k^k - r_{k-1}^k + 1)}{2} \\ &\quad + r_{k-1}^k (\mu(R_0, \dots, R_{k-1}) - \mu(R_0, \dots, R_{k-2}) - r_{k-1}^{k-1} - r_{k-1}^k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} r_{i-1}^k (r_i^{k-1} - r_i^k - r_{i-1}^{k-1} + r_{i-1}^k), \end{aligned}$$

avec la convention $\mu(R_0, \dots, R_{k-2}) = 0$ pour $k = 1$.

Puisque la codimension de $\Sigma_{R_0, \dots, R_k, S_k}(g)$ ne dépend pas de S_k , on note $\Sigma_{R_0, \dots, R_k}(g)$ la réunion des variétés $\Sigma_{R_0, \dots, R_k, S_k}(g)$ pour $S_k \in \mathbb{N}^{k+1}$.

Comme la théorie classique des singularités d'applications ou de formes différentielles ([2], [20], [22], [25], [38]), la démonstration du théorème 1.1.1 se ramène à la construction de sous-variétés $\Sigma_{R_0, \dots, R_k, S_k}(M)$ dans l'espace $Q_k(M)$ des k -jets d'éléments de $Q(M)$. La démonstration du théorème 1.3.7 à la fin de la section 1 donne une idée précise de la méthode utilisée pour établir ce type de résultat.

THÉORÈME 1.1.2. — *Une pseudo-métrique générique g possède un ensemble singulier $\Sigma_{R_0, \dots, R_k, S_k}(g)$ non vide si, et seulement si, (R_0, \dots, R_k, S_k) vérifie les propriétés (1), (2) et (3) énoncées plus haut, avec*

$$p_i = \mu(R_0, \dots, R_i).$$

1.2 Exemples de situations génériques

Dans les situations suivantes, les ensembles singuliers $\Sigma_{R_0, \dots, R_k}(g)$ cités possèdent génériquement les propriétés décrites ou sont vides.

1.2.1 Comportement générique en dimension 2

- Le lieu singulier de g est une sous-variété plongée de M de dimension 1 et est égal à $\Sigma_1(g)$, c'est-à-dire l'ensemble des points de M où le noyau de g est de dimension 1.

- La variété $\Sigma_1(g)$ est la réunion des deux ensembles suivants :

$\Sigma_{10}(g)$ ensemble des points de $\Sigma_1(g)$ où le noyau est transverse à $\Sigma_1(g)$.

$\Sigma_{11}^1(g)$ ensemble des points isolés de $\Sigma_1(g)$ où le noyau de g est tangent à $\Sigma_1(g)$.

L'ensemble $\Sigma_{10}^0(g)$ est un ouvert de $\Sigma_1(g)$, alors que $\Sigma_{11}^1(g)$ est un ensemble de points isolés.

Nous allons illustrer cette description par un exemple.

Sur \mathbb{R}^2 , on considère la pseudo-métrique

$$g = dx^2 + 2y dx dy + (x^2 - a^2 + y^2) dy^2.$$

Le lieu singulier de g est la réunion des droites D d'équation $x = a$ et D' d'équation $x = -a$. L'ensemble $\Sigma_{10}^0(g)$ est la réunion des demi-droites de D et D' obtenue en retirant les points A et A' de coordonnées $(a, 0)$ et $(-a, 0)$ respectivement. Enfin, $\Sigma_{11}^1(g)$ est formé des points A et A' (fig. 1).

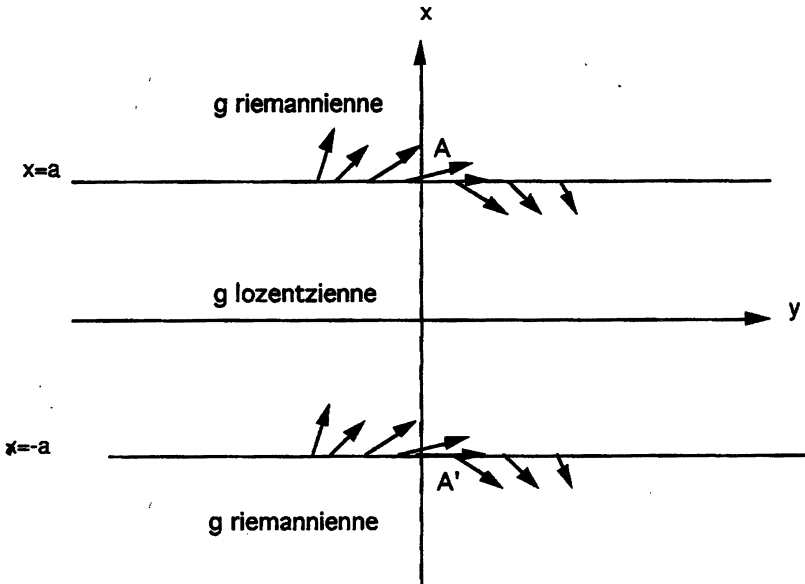


Fig. 1

1.2.2 Singularités Σ_{1_k} et $\Sigma_{1_k 0}$ en dimension quelconque

L'ensemble $\Sigma_1(g)$ est une sous-variété plongée de M de codimension 1. Sur $\Sigma_1(g)$, le noyau de g définit un champ de directions K . Par définition sur l'ouvert $\Sigma_{10}(g)$, le champ K est transverse à $\Sigma_1(g)$ et il lui est tangent aux points du complémentaire, c'est-à-dire :

$$\Sigma_{11}(g).$$

Le lieu singulier de la pseudo-métrique g_1 , induite par g sur $\Sigma_1(g)$, est précisément

$$\Sigma_1(g_1) = \Sigma_{11}(g).$$

Cet ensemble est une sous-variété de $\Sigma_1(g)$ de codimension 1, et K est aussi le noyau de g_1 . Désignons par 1_k le tableau triangulaire à k lignes et k colonnes suivant

$$\begin{array}{cccc} 1 & \dots & & 1 \\ & 1 & \dots & 1 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array}$$

Si g_{k+1} est la pseudo-métrique induite par g sur $\Sigma_{1_k}(g)$, alors $\Sigma_1(g_{k+1})$ est égal à $\Sigma_{1_{k+1}}(g)$ et cet ensemble est une sous-variété plongée de $\Sigma_{1_k}(g)$ de codimension 1. Le noyau de g_{k+1} est égal au noyau de g, g_1, \dots, g_k , en tout point de $\Sigma_{1_{k+1}}(g)$. Enfin la variété $\Sigma_{1_k}(g) - \Sigma(g_{k+1}(g))$ est égale à la variété

$$\Sigma_{\begin{array}{ccc} 11 & \dots & 10 \\ & 1 & \dots & 10 \\ & & \ddots & \\ & & & 10 \end{array}}(g)$$

On note $\Sigma_{1_k 0}(g)$ cette variété.

Illustrons cette description par un exemple.

Sur \mathbb{R}^n , considérons la pseudo-métrique

$$g = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}} dx_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^{k-1} x_{i+1} dx_i dx_k \right) + \left(x_1 + \sum_{i=2}^k x_i^2 \right) dx_k^2.$$

Le lieu singulier de g a pour équation $x_1 = 0$ et il est égal à $\Sigma_1(g)$. Le noyau de g est engendré par

$$K = \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{k-1} x_{i+1} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Pour $1 \leq \ell \leq k-1$, la variété $\Sigma_{1_\ell}(g)$ a pour équation $x_1 = 0 \cdots = x_\ell = 0$ et l'ensemble $\Sigma_{1_\ell 0}(g)$ est l'ouvert des points de $\Sigma_{1_\ell}(g)$ vérifiant $x_{\ell+1} \neq 0, \dots, x_k \neq 0$. Pour $\ell = k$, on a l'égalité $\Sigma_{1_\ell}(g) = \Sigma_{1_\ell 0}(g)$ et ces ensembles ont pour équation $x_1 = \cdots = x_\ell = 0$.

1.2.3 Contact du champ de noyaux avec $\Sigma_1(g)$

Un champ de vecteur K non nul a un contact d'ordre p avec $\Sigma_1(g)$ en un point a de cet ensemble, s'il existe un voisinage U de a et une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} \Sigma_1(g) \cap U &= f^{-1}(0), \\ K(f)(a) &= K^2(f)(a) = \cdots = K^p(f)(a) = 0 \end{aligned}$$

et

$$K^{p+1}(f)(a) \neq 0,$$

où $K^\ell(f) = K(K^\ell(f))$ et $K^0(f) = f$. En fait, cette propriété ne dépend que de la valeur de K en a .

Nous allons montrer qu'en tout point de $\Sigma_{1_k}(g)$, le contact du noyau de g avec $\Sigma_1(g)$ est d'ordre $k-1$.

En effet, soit U un voisinage d'un point a de $\Sigma_{1_k}(g)$ tel que $U \cap \Sigma(g) = \Sigma_1(g)$ et K un champ de vecteurs sur U qui engendre le noyau de g sur $\Sigma_1(g) \cap U$. Par généralité, la fonction $f_1 = g(K, K)$ est une submersion d'un voisinage $U_1 \subset U$ sur \mathbb{R} et $\Sigma_1(g) \cap U_1 = f_1^{-1}(0)$. Par récurrence, on construit un voisinage $U_k \subset U$ contenant a tel que, sur $U_k \cap \Sigma_1(g)$, $U_k \cap \Sigma_{1_\ell}(g), \dots, U_k \cap \Sigma_{1_k}(g)$, K engendre le noyau des restrictions g_1, g_2, \dots, g_k aux variétés $\Sigma_1(g), \Sigma_{1_\ell}(g), \dots, \Sigma_{1_k}(g)$. Par construction, $1 \leq \ell \leq k-1$,

$$\begin{aligned} \Sigma_{1_\ell 0}(g) &= \Sigma_{1_\ell}(g) - \Sigma(g_{1_{\ell+1}}), \\ \Sigma_{1_{\ell+1}}(g) &= \Sigma_1(g_{1_{\ell+1}}). \end{aligned}$$

Il en résulte que $U_k \cap \Sigma_{1_{\ell+1}}(g)$ est l'ensemble des points de $U_k \cap \Sigma_{1_\ell}(g)$ où K est tangent à $\Sigma_{1_\ell}(g)$.

Soit $f_\ell : U_k \rightarrow \mathbb{R}$ une submersion telle que $U_k \cap \Sigma_{1_\ell}(g) = f_\ell^{-1}(0)$. La codimension de $\Sigma_{1_{\ell+1}}(g)$ dans $\Sigma_{1_\ell}(g)$ étant égale à 1, l'ensemble $U_k \cap \Sigma_{1_{\ell+1}}(g)$ est caractérisé par l'équation $K(f_\ell) = 0$ dans $\Sigma_{1_\ell}(g)$.

Par généralité, les fonctions $f_1 = g(K, K)$, $f_2 = K(f_1)$, ..., $f_k = K(f_{k-1})$ sont des submersions sur un ouvert $U'_k \subset U_k$ et $f_\ell = 0$ est une équation de $\Sigma_{1_{\ell+1}}(g)$ dans $\Sigma_{1_\ell}(g)$ sur U'_k pour $1 \leq \ell \leq k-1$. En conséquence, on a

$$K(f_1)(a) = \dots = K^{k-1}(f_1)(a) = 0.$$

D'autre part par définition de $\Sigma_{1_k 0}(g)$, K est transverse à $\Sigma_{1_k}(g)$; on a donc aussi

$$K^k(f_1)(a) = K(f_k)(a) \neq 0. \square$$

Remarque. — L'ensemble singulier $\Sigma_{1_k 0}(g)$, pour

$$g = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}} dx_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^{k-1} x_{i+1} dx_i dx_k \right) + \left(x_1 + \sum_{i=2}^k x_i^2 \right) dx_k^2$$

(cf. § 1.2.2) est égal $\Gamma_{k-1}(\Sigma_1(g))$, ensemble de points de $\Sigma_1(g)$ où le contact du noyau de g avec $\Sigma_1(g)$ est d'ordre $k-1$. En général, l'inclusion de $\Sigma_1(g)$ dans $\Gamma_{k-1}(\Sigma_1(g))$ est stricte.

1.3 Plongements génériques d'une variété dans une variété pseudo-riemannienne

Dans tout ce paragraphe, N est une variété de dimension $n+p$, G est une métrique pseudo-riemannienne (non dégénérée) d'indice ν sur N , et M est une variété de dimension n .

Soit $f : M \rightarrow N$ un plongement de M dans N et $g = f^*G$ la pseudo-métrique induite par le plongement sur M . Notons Tf l'application tangente à f , F le sous-fibré de TN image de Tf et enfin F^\perp le fibré orthogonal à F dans TN relativement à G . Le noyau de g en un point x de M est égal à $Tf^{-1}(F_x) \cap F_x^\perp$ où F_x (resp. F_x^\perp) désigne la fibre de F (resp. F^\perp) au-dessus de $f(x)$.

LEMME 1.3.1. — *La dimension du noyau de g est inférieure ou égale à $\inf(\nu, n+p-\nu, p)$ en tout point de M .*

L'espace $C(M, N)$ des applications C^∞ de M dans N est muni de la topologie C^∞ de Whitney. L'ensemble des plongements $P(M, N)$ de M

dans N est un ouvert de $C(M, N)$. Désignons par $C_{k+1}(M, N)$ le fibré des k -jets d'éléments de $C(M, N)$. On considère le morphisme de fibré sur M :

$$\begin{aligned} I_k : C_{k+1}(M, N) &\rightarrow Q_k(M) \\ j_x^{k+1} f &\rightarrow j_x^{k+1}(f^*G). \end{aligned}$$

LEMME 1.3.2

- 1) I_1 est une submersion en tout point $j_x^2 f$ de l'ensemble $P_2(M, N)$ des 2-jets d'éléments de $P(M, N)$.
- 2) Si $k \geq 2$, pour chaque valeur de l'entier p , il existe un entier $n(p)$ tel que, pour $n \geq n(p)$, il n'existe aucun point de $C_{k+1}(M, N)$ où I_k est une submersion.

Démonstration. — Le problème étant local, on peut supposer que $M = \mathbb{R}^n$, $N = \mathbb{R}^{n+p}$, $x = 0$, $f(x) = 0$. Il existe un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) (resp. (y_1, \dots, y_n)) sur un voisinage U (resp. V) de 0 dans \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{R}^{n+p}) tels que

- $j_0^1 G = \sum_{i=1}^{n+p} \varepsilon_i dy_i^2$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$;
- l'expression locale de f est

$$\begin{cases} y_i = x_i & \text{pour } i = 1, \dots, n \\ y_{n+j} = \phi_j(x_1, \dots, x_n) & \text{pour } j = 1, \dots, p. \end{cases}$$

Soit $C_{k+1}(n, n+p)$, l'espace des $(k+1)$ -jets en 0 d'applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^{n+p} qui fixent l'origine. L'application ℓ_k sera une submersion en $j_0^{k+1} f$ si seulement si l'application encore notée ℓ_k :

$$\begin{aligned} \ell_k : C^{k+1}(n, n+p) &\rightarrow Q_k \\ h &\rightarrow j_0^{k+1}(h^*G) \end{aligned}$$

est une submersion en $j_0^{k+1} f$. Pour $k = 1$, l'application tangente à ℓ_1 en $j_0^2 f$ est

$$T\ell_1(h_1, \dots, h_{n+p}) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i dx_i dh_i + \sum_{j=1}^p \varepsilon_{n+j} d\phi_j dh_{n+j}.$$

Quelques propriétés géométriques des variétés pseudo-riemanniennes singulières

L'ensemble $\{dx_i dx_j, x_\ell dx_i dx_j, \ell = 1, \dots, n, 1 \leq i \leq j \leq n\}$ constitue une base de Q_1 . Pour $(h_1, \dots, h_{n+p}) = (0, \dots, 0, h_i = \varepsilon_i x_j, 0, \dots, 0)$, on a $TI_1(h_1, \dots, h_{n+p}) = dx_i dx_j$. Pour (h_1, \dots, h_{n+p}) défini par

$$h_i = \frac{1}{2} \varepsilon_i x_i x_\ell, \quad h_j = \frac{1}{2} \varepsilon_j x_j x_\ell, \quad h_s = 0 \quad \text{pour } s \neq i, j, \ell$$

on a $TI_1(h_1, \dots, h_{n+p}) = x_\ell dx_i dx_j$ (fin de démonstration du 1)).

On a

$$\dim C_{k+1}(n, n+p) = (n+p)(n + C_{n+1}^2 + C_{n+2}^3 + \dots + C_{n+k}^{k+1})$$

$$\dim Q_k = \frac{n(n+1)}{2} (1 + n + C_{n+1}^2 + C_{n+2}^3 + \dots + C_{n+k-1}^k)$$

$$\dim Q_k - \dim C_{k+1}(n, n+p) =$$

$$= -\frac{n(n+2p-1)}{2} + \sum_{\ell=1}^k C_{n+\ell-1}^\ell \frac{(\ell-1)n^2 - n(2p+\ell-1) - 2\ell p}{2\ell+2}$$

La différence $\dim Q_k - \dim C_{k+1}(n, n+p)$ est un polynôme en n de degré $k+2$ et le coefficient de n^{k+2} est strictement positif pour $k \geq 2$. Par suite, l'application TI_k n'est pas surjective pour n assez grand, p et $k \geq 2$ donnés. \square

Considérons la stratification $\{\Sigma_{R_0 R_1 S_1}(M)\}$ de $Q_1(M)$ (voir le commentaire après le théorème 1.1.1). Comme $I_1 : P_2(M, N) \rightarrow Q_1(M)$ est une submersion, l'ensemble $\Xi_{R_0 R_1 S_1}(M) = I_1^{-1}(\Sigma_{R_0 R_1 S_1}(M))$ est une sous-variété de $P_2(M, N)$ avec conservation de la codimension. En appliquant le théorème de transversalité de Thom à la stratification $\{\Xi_{R_0 R_1 S_1}(M)\}$ de $P_2(M, N)$ ainsi construite, on obtient le théorème 1.3.3.

THÉORÈME 1.3.3. — *Dans $P(M, N)$ la propriété suivante est générique : la pseudo-métrique $g = f^*G$ induite par le plongement $f : M \rightarrow N$ est transverse à la stratification $\{\Xi_{R_0 R_1 S_1}(M)\}$ de $P_2(M, N)$.*

DÉFINITION 1.3.4

- 1) *On dit que le plongement $f : M \rightarrow N$ est générique si le 2-jet de f est transverse à la stratification $\{\Xi_{R_0 R_1 S_1}(M)\}$ de $P_2(M, N)$.*
- 2) *On dit que la sous-variété M de N est générique si l'inclusion $f : M \rightarrow N$ est générique.*

Comme corollaire des théorèmes 1.3.3 et 1.1.2 et du lemme 1.3.1 on a le théorème 1.3.5.

THÉORÈME 1.3.5

- 1) Le plongement $f : M \rightarrow N$ est générique si et seulement si $g = f^*G$ est générique (en temps que pseudo-métrique sur M).
- 2) Si le plongement $f : M \rightarrow N$ est générique, alors $\Sigma_{R_0 R_1 S_1}(g)$ est non vide pour (R_0, R_1, S_1) vérifiant les propriétés (1)-(3) du théorème 1.1.2 et si on a

$$r_0^0 \leq \inf(\nu, n + p - \nu, p), \quad r_1^1 \leq \inf\left(\nu, n + p - \nu, \frac{r_0^0(r_0^0 + 1)}{2}\right).$$

Par exemple, si $k = 1$ ou si $\nu = 1$ ou si $\nu = n + p - 1$, le lieu singulier de g sera (génériquement) une sous-variété plongée de M de codimension 1 ou bien sera vide : c'est la variété $\Sigma_1(g)$. Les seuls ensembles singuliers $\Sigma_{R_0 R_1 S_1}$, éventuellement non vides, sont

$$\Sigma_{11}^1(g) \quad \text{et} \quad \Sigma_{10}^0(g).$$

Supposons que $N = \mathbb{R}^{n+1}$ et que G_ν soit la métrique pseudo-riemannienne canonique d'indice ν sur \mathbb{R}^{n+1} , c'est-à-dire

$$G_\nu = - \sum_{i=1}^{\nu} dx_i^2 + \sum_{j=\nu+1}^{n+1} dx_j^2$$

avec $1 \leq \nu \leq n$. Le lieu singulier de la pseudo-métrique g induite par G_ν sur toute hypersurface compacte M est alors non vide. On en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1.3.6. — Soit M une hypersurface compacte générique de la variété pseudo-riemannienne $(\mathbb{R}^{n+1}, G_\nu)$ avec $1 \leq \nu \leq n$. Le lieu singulier $\Sigma(g)$ de la pseudo-métrique g induite sur M est une sous-variété compacte non vide de M de codimension 1. Le lieu singulier $\Sigma(g_1)$ de la pseudo-métrique g_1 induite sur $\Sigma(g)$, s'il n'est pas vide, est une sous-variété compacte de M de codimension 2.

Pour $k \geq 2$, $I_k : C_{k+1}(M, N) \rightarrow Q_k(M)$ n'étant plus une submersion, en général, pour une pseudo-métrique g induite par un plongement, les

ensembles $\Sigma_{R_0 R_1 S_1}(g)$ n'ont plus, génériquement, les propriétés du théorème 1.1.1. Cependant, certains de ces ensembles gardent de telles propriétés génériques dans des cas particuliers génériques.

THÉORÈME 1.3.7. — *Soit g une métrique pseudo-riemannienne sur N localement conformément plate (c'est-à-dire tout point de N possède un voisinage U et une fonction non nulle ϕ sur U , tels que ϕG soit plate). Dans l'ensemble $P(M, N)$, la propriété suivante est générique :*

*s'il sont non vides, les ensembles $\Sigma_{1_k}(f^*G)$ et $\Sigma_{1_k 0}(f^*G)$ sont des sous-variétés plongées de M de codimension k .*

Ce théorème est démontré à la fin de cette section.

Compte tenu du lemme 1.3.1 lorsque $p = 1$ ou $\nu = 1$ ou $\nu = n + p - 1$, le théorème précédent permet de donner une description générique complète. Plus précisément, on a le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1.3.8. — *Dans $P(M, \mathbb{R}^{n+p})$, les propriétés sont génériques, pour $p = 1$ et ν quelconque, on bien p quelconque et $\nu = 1$ ou $n + p - 1$ (pour tout $0 \leq k \leq n$), s'il ne sont pas vides, les ensembles singuliers $\Sigma_{1_k}(f^*G_\nu)$ et $\Sigma_{1_k 0}(f^*G_\nu)$ sont des sous-variétés plongées de M de codimension k et ce sont les seuls ensembles $\Sigma_{R_0, \dots, R_k, S_k}(f^*G_\nu)$ éventuellement non vides.*

1.4 Démonstration du théorème 1.3.7

Comme pour tous les résultats de ce type, on est ramené à la construction de sous-variétés Ξ_{1_k} et $\Xi_{1_{k-1} 0}$ dans l'espace $P_{k+1}(n, n+p)$ des $(k+1)$ -jets d'immersions de $(\mathbb{R}^n, 0)$ dans $(\mathbb{R}^{n+p}, 0)$, invariantes par l'action des groupes de $(k+1)$ -jets de difféomorphismes préservant l'origine à la source et au but. (De telles variétés sont appelées des singularités.) Compte tenu de cette invariance, on obtient des sous-variétés $\Xi_{1_k}(M, N)$ et $\Xi_{1_{k-1} 0}(M, N)$ dans $P_{k+1}(M, N)$, fibrées sur $M \times N$, de fibre type Ξ_{1_k} et $\Xi_{1_{k-1} 0}$ respectivement. Le théorème 1.3.7 est obtenu en utilisant la transversité à ces sous-variétés. Caractérisons d'abord les plongements f de $M = \mathbb{R}^n$ dans $N = \mathbb{R}^{n+p}$ pour lesquels le k -jet $j^k(f^*G)$ est transverse à $\Sigma_{1_k}(\mathbb{R}^n)$ ou à $\Sigma_{1_{k-1} 0}(\mathbb{R}^n)$ en 0 .

LEMME 1.4.1

- 1) *La pseudo-métrique $g = f^*G$ est de rang $n - 1$ en $0 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe un système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) (resp. (y_1, \dots, y_{n+p})) sur un voisinage U (resp. V) de l'origine dans \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{R}^{n+p}) tel que :*

- a) $Tf(T_0\mathbb{R}^n)$ soit engendré par $\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_n$;
 b) $G = \lambda(dy_1 dy_{n+p} + \sum_{j=2}^{n+p-1} \varepsilon_j dy_j^2)$ avec $\varepsilon_j = \pm 1$ et λ une fonction non nulle ;
 c) le plongement f a une écriture du type :

$$\begin{cases} y_i = x_i & \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ y_{n+j} = \phi_j(x_1, \dots, x_n) & \text{pour } 1 \leq j \leq p, \end{cases}$$

avec $\phi_j(0) = 0$ et $(\partial\phi_j/\partial x_i)(0) = 0, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$.

- 2) Avec les notations de 1), soit $\pi : V \rightarrow U$ définie par $x_i = y_i, 1 \leq i \leq n$. On note x le gradient (relativement à G) de $\Psi = \lambda^{n+p}(y_{n+p} - \Phi_p \circ \pi)$. Le jet $j^k g$ est transverse à $\Sigma_{1,k}(\mathbb{R}^n)$ en 0 si et seulement si :

- a) $X(\Psi)(0) = \dots = X^k(\Psi)(0) = 0$;
 b) $X(\Psi), \dots, X^k(\Psi)$ sont indépendants en 0 ;
 c) $\text{grad } X(\Psi), \dots, \text{grad } X^k(\Psi)$ sont des vecteurs non isotropes en 0.
 Le jet $j^k g$ est transverse à $\Sigma_{1,k-1,0}(\mathbb{R}^n)$ en 0 si et seulement si $j^{k-1} g$ est transverse à $\Sigma_{1,k-1}(\mathbb{R}^n)$ en 0 et si $X^k(\Psi)(0) \neq 0$.

Démonstration du lemme. — La partie 1) est élémentaire.

- 2) Avec les notations du lemme, on a

$$X = \frac{\partial}{\partial y_1} - \sum_{j=2}^n \frac{\partial\phi_p}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{\partial\phi_p}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_{n+p}}.$$

L'orthogonal de $T_0\mathbb{R}^n$ est engendré par $\text{grad}(y_{n+j} - \Phi_j \circ \pi)(0), 0 \leq j \leq p$, et par construction $T_0\mathbb{R}^n \cap (T_0\mathbb{R}^n)^\perp$ est engendré par $X(0) = \partial/\partial y_1$. Par suite, X est isotrope en 0 alors que $\text{grad}(y_{n+j} - \Phi_j \circ \pi)(0)$ n'est pas isotrope en 0 pour $1 \leq j \leq p-1$. On en déduit que, sur un voisinage de 0, $\Sigma_1(g)$ est l'ensemble des points x où $X(x)$ est isotrope. Les équations locales de $\Sigma_1(g)$ sont donc

$$\begin{aligned} y_{n+j} - \Phi_j &= 0, \quad 1 \leq j \leq p \\ G(X, X) &= X(\Phi) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, g est transverse à $\Sigma_1(\mathbb{R}^n)$ en 0 si et seulement si $d(X(\Phi))(0) \neq 0$. Supposons que, lorsque $j^{k-1} g$ est transverse à $\Sigma_{1,k-1}(\mathbb{R}^n)$ en 0, on ait

- i)_k les équations locales de $\Sigma_{1,k-1}(g)$ sont

$$\begin{cases} y_{n+j} - \Phi_j = 0 & 1 \leq j \leq p \\ X_\ell(\Phi) = 0 & 1 \leq \ell \leq k-1; \end{cases}$$

Quelques propriétés géométriques des variétés pseudo-riemanniennes singulières

- ii)_k $\text{grad}(y_{n+j} - \Phi_j(0))$, $1 \leq j \leq p-1$ et $\text{grad}(X^\ell(\Phi))$, $1 \leq \ell \leq k-1$, sont non isotropes en 0;
- iii)_k le symbole de g sur $(\mathbb{R}^n, \Sigma_1(g), \dots, \Sigma_{1_{k-1}}(g))$ en 0 est 1_k (resp. $1_{k-1}0$) si et seulement si $X^k(\Phi)(0) = 0$ (resp. $X^k(\Phi)(0) \neq 0$) et $\text{grad}(X^k(\Phi))$ est non isotrope en 0.

Dans cette hypothèse, sur un voisinage de zéro, $\Sigma_{1_k}(g)$ est l'ensemble des x de $\Sigma_{1_{k-1}}(g)$ qui vérifient $X^k(\Phi)(x) = 0$ et $\text{grad}(X^k(\Phi)(x))$ non isotrope. Par suite, $j^k g$ sera transverse à $\Sigma_{1_{k-1}}(\mathbb{R}^n)$ en zéro si et seulement si les fonctions $X(\Phi), \dots, X^k(\Phi)$ sont indépendantes en zéro. D'autre part, le symbole de g sur $(\mathbb{R}^n, \Sigma_1(g), \dots, \Sigma_{1_k}(g))$ en 0 est 1_{k+1} si et seulement si la dimension de l'espace

$$[Tf(T_0\Sigma_{1_k}(g))] \cap [Tf(T_0\Sigma_{1_k}(g))]^\perp$$

est égale à 1. Or $[Tf(T_0\Sigma_{k-1_k}(g))]^\perp$ est engendrée par les vecteurs

$$\text{grad}(y_{n+j} - \Phi_j(0)), 1 \leq j \leq p-1, \quad \text{grad}(X^\ell(\Phi))(0), 1 \leq \ell \leq k \quad \text{et} \quad X.$$

Ce symbole est 1_{k+1} si et seulement si X est tangent à $\Sigma_{1_k}(g)$ en zéro et $\text{grad}(X^{k+1}(\Phi))$ est non isotrope en zéro. Le raisonnement est analogue pour le symbole $1_k 0$. \square

Nous allons maintenant construire les singularités Ξ_{1_k} et $\Xi_{1_{k-1}}0$ dans $P_{k+1}(n, n+p)$.

Un système de coordonnées (t_1, \dots, t_n) fixé sur \mathbb{R}^n , un élément de Q_k peut être considéré comme une pseudo-métrique sur \mathbb{R}^n à coefficients polynomiaux de degré k . Les singularités (de pseudo-métriques) Σ_{1_k} (resp. $\Sigma_{1_{k-1}}0$) se définissent par récurrence de la manière suivante : Σ_{1_0} est dans Q_0 , l'ensemble des formes bilinéaires symétriques de rang $n-1$.

Pour $k \geq 1$, Σ_{1_k} est l'ensemble des g de Q_k tels que :

- le $(k-1)$ -jet de g est transverse à $\Sigma_{1_{k-1}}(\mathbb{R}^n)$ en zéro,
- le noyau de g est tangent à $\Sigma_{1_{k-1}}(g)$ en zéro,
- le noyau en zéro de la pseudo-métrique induite sur $\Sigma_{1_{k-1}}(g)$ est égal au noyau de g .

Pour $k > 1$, $\Sigma_{1_{k-1}}0(g)$ est l'ensemble des g de Q_k tels que :

- le $(k-1)$ -jet de g est transverse à $\Sigma_{1_{k-1}}(\mathbb{R}^n)$ en zéro,
- le noyau de g est transverse à $\Sigma_{1_{k-1}}(g)$ en zéro,
- la pseudo-métrique induite sur $\Sigma_{1_{k-1}}(g)$ est non dégénérée en zéro.

Rappelons que Σ_{1_k} et $\Sigma_{1_{k-1}}(g)$ sont des sous-variétés de Q_k de codimension respectives k et $k-1$. Considérons l'application $I_k : P_{k+1}(n, n+p) \rightarrow Q_k$ (cf. § 1.3). On pose

$$\Xi_{1_k} = I_k^{-1}(\Sigma_{1_k})$$

et

$$\Xi_{1_{k-1}0} = I_k^{-1}(\Sigma_{1_{k-1}0}).$$

Il reste à montrer que Ξ_{1_k} et $\Xi_{1_{k-1}0}$ sont aussi des sous-variétés de $P_{k+1}(n, n+p)$ de codimensions respectives k et $k-1$.

Nous avons vu (démonstration du lemme 1.3.2) que pour $k \geq 2$, I_k n'est pas une submersion pour n assez grand. En fait, I_k est transverse à Σ_{1_k} et $\Sigma_{1_{k-1}0}$ ce qui entraîne le résultat. Cependant, nous démontrerons directement que Ξ_{1_k} et $\Xi_{1_{k-1}0}$ sont des sous-variétés de $P_{k+1}(n, n+p)$ sans établir la transversalité de I_k .

Soit $f \in P_{k+1}(n, n+p)$ tel que le rang de $f^*G(0)$ soit $n-1$. En appliquant le lemme 1.4.1, on en déduit que $f \in \Xi_{1_k}$ si, et seulement si, on a 2a), 2b), 2c), et on en déduit que $f \in \Xi_{1_{k-1}0}$ si et seulement si $j^{k-1}f \in \Xi_{1_{k-1}0}$ et $X^k(\Phi)(0) \neq 0$. Les conditions 2a) et 2b) sont équivalentes à dire que $X(\Phi)$ présente la singularité S_{1_k} en zéro ([2] par exemple). On a

$$X(\Phi) = 2 \frac{\partial f_{n+p}}{\partial x_1} - \sum_{i=2}^n \varepsilon_i \left(\frac{\partial f_{n+p}}{\partial x_i} \right)^2.$$

Considérons l'application σ de $P_{k+1}(n, n+p)$ dans l'espace $J_k(n)$ des k -jets d'applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définie par

$$\sigma(h) = 2 \frac{\partial h_{n+p}}{\partial x_1} - \sum_{i=2}^n \varepsilon_i \left(\frac{\partial h_{n+p}}{\partial x_i} \right)^2.$$

La différentielle de σ est

$$T\sigma(h) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \sum_{i=2}^n \frac{\partial f_{n+p}}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (h_{n+p}).$$

Il est facile de vérifier que σ est une submersion en f . Les conditions 2c) et $X^k(\Phi)(0) \neq 0$ étant ouvertes, il en résulte que Ξ_{1_k} et $\Xi_{1_{k-1}0}$ sont des sous-variétés de $P_{k+1}(n, n+p)$ de codimensions k et $k-1$ respectivement. \square

2. Connexions duales compatibles avec une pseudo-métrie

2.1 L'homomorphisme g^b associé à une pseudo-métrie g

Soit M une variété de dimension n . Étant donnée une pseudo-métrie g sur M , g est k -générique si le k -jet de g est transverse à la stratification

$$\{\Sigma_{R_0, \dots, R_k, S_k}(M) \mid (R_0, \dots, R_k, S_k) \in \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}^{k+1} \times \mathbb{N}^{k+1}\}$$

de $Q_k(M)$ (cf. § 1.1).

Dans toute cette section, on dira que g est générique si g est 0-générique et si l'ensemble singulier $\Sigma_{10}(g)$ est un ouvert dense de $\Sigma_1(g)$. Dans ce cas (M, g) sera appelée une *variété pseudo-riemannienne générique*.

Toute pseudo-métrie g définit un homomorphisme $g^b : TM \rightarrow T^*M$ par $g_x^b(u)(v) = g_x(u, v)$; g^b est un isomorphisme si et seulement si le lieu singulier de g est vide. Ainsi en général, pour toute 1-forme α sur M , l'équation $g^b(X) = \alpha$ ne possède pas de solutions dans l'espace des champs de vecteurs sur M . Cependant lorsque g est générique, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 2.1.1. — *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne générique et α une 1-forme sur M . Il existe un unique champ de vecteurs sur M tel que*

$$g^b(X) = \alpha$$

si et seulement si α s'annule sur le noyau de g , en tout point d'un ensemble dense de la première strate $\Sigma_1(g)$ de $\Sigma(g)$.

Ce théorème résulte de [21] en utilisant un raisonnement analogue à la démonstration du théorème V de [31].

Pour toute pseudo-métrie g , on note $\Lambda_g^1(M)$ l'ensemble des 1-formes sur M vérifiant les conditions de noyaux énoncées dans le théorème 2.1.1. L'espace $\Lambda_g^1(M)$ s'identifie donc à l'image de l'homomorphisme (noté encore g^b), de l'espace $\Gamma(M)$ des champs de vecteurs dans l'espace $\Lambda^1(M)$ des 1-formes sur M induit par g^b . Si $\alpha \in \Lambda_g^1(M)$, on note α_g l'unique champ de vecteurs défini par

$$g^b(\alpha_g) = \alpha.$$

Soit f une fonction sur M : si $df \in \Lambda_g^1(M)$, le champ de vecteurs $(df)_g$ est appelé le *champ de gradient de f (relativement à g)* et sera noté $\text{grad}_g(f)$ ou $\text{grad } f$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la pseudo-métrique générique.

Soient (N, G) une variété pseudo-riemannienne et f un plongement générique de M dans N (au sens de la définition 1.3.4). Si on note $g = f^*G$ la pseudo-métrique induite, (M, g) est alors une variété pseudo-riemannienne générique.

PROPOSITION 2.1.2. — *Soit α une 1-forme sur N , telle que le champ de vecteurs $\alpha_G = G^{b-1}(\alpha)$ soit tangent à M aux points de $\Sigma(g)$. Alors, la 1-forme $\alpha_1 = f^*\alpha$ induite sur M appartient à $\Lambda_g^1(M)$ et le champ de vecteurs α_g est égal à la projection orthogonale de α_G sur $T_x M$ parallèlement à $T_x M^\perp$ pour tout point x de $M - \Sigma(g)$ et à $\alpha_G(x)$ pour point x de $\Sigma(g)$.*

Si $\dim N = n + 1$, réciproquement, toute 1-forme α , dont la restriction α_1 à M appartient à $\Lambda_g^1(M)$, est telle que α_G est tangent à M sur $\Sigma(g)$.

Démonstration. — D'après le théorème 2.1.1, il suffit d'établir le résultat en tout point de $\Sigma_{10}(g)$. Soit a un point de $\Sigma_{10}(g)$ et X_1, \dots, X_p une base de TM^\perp au-dessus d'un voisinage V de a telle que X_1 engendre $TM \cap TM^\perp$ sur $\Sigma_{10}(g)$ (c'est-à-dire le noyau de g). Les 1-formes $\theta_1 = G^b(X_1), \dots, \theta_p = G^b(X_p)$ sont indépendantes et $TM = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \theta_i$ sur $M \cap V$. Comme $\alpha_G = G^{b-1}(\alpha)$ est tangent à M sur $\Sigma(g)$, on a $\theta_i(\alpha_G) = 0$ pour $1 \leq i \leq p$ sur $\Sigma_{10}(g) \cap V$. Par suite, $\alpha(X_i)$ est nul pour tout i et en particulier

$$\alpha(X_1) = \alpha_1(X_1) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{10}(g) \cap V.$$

Si $\dim N = n + 1$, avec les notations précédentes, α_G sera tangent à M en a si et seulement si $\alpha(X_1) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si α_1 s'annule sur le noyau de g .

2.2 Connexions duales g -métriques

Soit g une métrique pseudo-riemannienne sur M . Rappelons la définition suivante.

DÉFINITION 2.2.1. — *Une connexion compatible avec g ou connexion g -métrique, est une application $\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$, \mathbb{R} -bilinéaire telle que pour toute fonction f sur M et tout champ de vecteurs X, Y, Z , on ait*

$$1) \nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y;$$

$$2) \nabla_f X Y = f \nabla_X Y ;$$

$$3) X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

La connexion de Lévi-Civita de g est l'unique connexion g -métrique à torsion nulle, c'est-à-dire :

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0.$$

Elle est caractérisée par :

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Z)) + \\ + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X).$$

lorsque g est une pseudo-métrique (singulière), il n'existe pas en général de connexion g -métrique associée.

En effet, si g est une pseudo-métrique 1-générique sur M , pour laquelle $\Sigma(g)$ est non vide, l'ensemble $\Sigma_{10}(g)$ est un ouvert dense de $\Sigma(g)$. Étant donné un point a , et $\Sigma_{10}(g)$, et K un champ de vecteurs sur un voisinage U de a qui engendre le noyau de g sur $\Sigma_{10}(g) \cap U$, l'équation $g(K, K) = 0$ définit $\Sigma_{10}(g)$ sur U . De plus, $K(g(K, K))$ est non nul sur $\Sigma_{10}(g) \cap U$. Supposons qu'il existe une connexion g -métrique ∇ , on aura alors $g(\nabla_K K, K) = 0$ sur $\Sigma_{10}(g) \cap U$. Mais comme $K(g(K, K)) = 2g(\nabla_K K, K)$, on ne peut donc pas avoir $K(g(K, K)) \neq 0$ sur $\Sigma_{10}(g) \cap U$.

En revanche pour toute pseudo-métrique g , on peut définir l'application $D : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Lambda^1(M)$ par :

$$2D_X Y(Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Z)) + \\ + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X). \quad (4)$$

pour tout champ de vecteurs X, Y, Z de $\Gamma(M)$. L'application D est \mathbf{R} -bilineaire et possède les propriétés suivantes pour toute fonction f et tout champ de vecteurs X, Y, Z :

$$1') D_X fY = X(f)g^b(Y) + fD_X Y ;$$

$$2') D_f X Y = fD_X Y ;$$

$$3') X(g(Y, Z)) = D_X Y(Z) + D_X Z(Y).$$

On est alors conduit à la définition de connexion duale introduite par M. Kossowski dans [14].

DÉFINITION 2.2.2. — On appelle, connexion duale g -métrique, toute application \mathbf{R} -bilineaire $D : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Lambda^1(M)$ ayant les propriétés 1'), 2'), 3'), énoncées plus haut.

On appelle *torsion* d'une connexion duale g -métrique, le tenseur de type $(0, 3)$ défini par :

$$\text{Tor}(X, Y, Z) = D_X Y(Z) - D_Y X(Z) - g((X, Y), Z).$$

Comme pour la connexion de Lévi-Civita de g , lorsque g est non singulière, on vérifie que la connexion duale définie par (4) est l'unique connexion duale à torsion nulle. Cette connexion sera appelée la *connexion duale de Lévi-Civita* de g .

Les connexions duales g -métrique sont obtenues à partir de la connexion duale de Lévi-Civita de g de la manière suivante.

PROPOSITION 2.2.3. — Soit D la connexion duale de Lévi-Civita de g . Toute application \mathbb{R} -bilinéaire $D' : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Lambda^1(M)$ est une connexion duale g -métrique si et seulement s'il existe un tenseur T , de type $(0, 3)$ sur M antisymétrique par rapport aux deux dernières variables, tel que

$$D'_X Y(Z) - D_X Y(Z) = T(X, Y, Z)$$

pour tout champ de vecteurs X, Y, Z sur M .

Considérons une sous-variété P de M . Étant donnée une connexion duale g -métrique sur M , l'application $\bar{D} : \Gamma(P) \times \Gamma(P) \rightarrow \Lambda^1(P)$, définie par $\bar{D}_X Y(Z) = D_X Y(Z)$ pour tout champ de vecteurs X, Y, Z de P , est une connexion duale \bar{g} -métrique sur P , où \bar{g} est la pseudo-métrique induite par g sur P . Cette connexion s'appelle la *connexion duale g -métrique induite* par D sur P . En particulier, si D est la connexion duale de Lévi-Civita de g , \bar{D} est aussi la connexion duale de Lévi-Civita de \bar{g} .

2.3 Lieu singulier auto-parallèle et fortement auto-parallèle

Soit (N, G) une variété pseudo-riemannienne et ∇ une connexion G -métrique sur N . Étant donnée une sous-variété M de N , on note g la pseudo-métrique induite par g sur M . Supposons que g soit non dégénérée. Désignons par $\Gamma(M)^\perp$ l'ensemble des champs de vecteurs sur N qui sont orthogonaux à TM . Rappelons que la seconde forme fondamentale de M par rapport à ∇ est l'application :

$$\Pi_\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)^\perp,$$

où $\Pi_\nabla(X, Y)$ est la composante de $\nabla_X Y$ sur TM^\perp . La sous-variété M est auto-parallèle si et seulement si $\Pi_\nabla = 0$, c'est-à-dire si et seulement si la restriction de ∇ à $\Gamma(M) \times \Gamma(M)$ est à valeurs dans $\Gamma(M)$.

Nous nous proposons d'étudier ce problème lorsque G est une pseudo-métrique générique. En particulier, on montrera que la notion de "lieu singulier auto-parallèle" permet de définir un prolongement de la connexion métrique ∇ sur $M - \Sigma(g)$ canoniquement associée à une connexion duale g -métrique sur M .

Désormais, g est une *pseudo-métrique* (singulière mais non nécessairement générique) sur la variété M . Pour toute sous-variété P de M , on désigne par $\Gamma(P)^\perp$ l'ensemble des champs de vecteurs X sur M tels que $g_x(X, u) = 0$ pour tout u de $T_x P$ et pour tout x de P . Soit $A(P)$ l'anneau des fonctions sur P . Étant donnée une connexion duale g -métrique D sur M , on associe l'application :

$$\begin{aligned} \Pi_D : \Gamma(P) \times \Gamma(P) &\rightarrow A(P) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow D_X \bar{Y}(Z) \end{aligned}$$

où \bar{Y} est un champ de vecteurs sur M qui prolonge Y .

LEMME 2.3.1

- 1) Π_D est bien définie,
- 2) Π_D est une application $A(P)$ -trilinéaire,
- 3) si D est la connexion de Lévi-Civita de g , Π_D est symétrique par rapport aux deux première variables. Π_D s'appelle la seconde forme fondamentale de la sous-variété P .

LEMME 2.3.2. — Soit D la connexion de Lévi-Civita de g et P une sous-variété de M . Alors, on a :

$$\Pi_D(X, Y, Z) = -\frac{1}{2}(L_Z g)(X, Y)$$

pour tout X, Y de $\Gamma(P)$ et Z de $\Gamma(P)^\perp$, où L_Z est la dérivée de Lie par rapport à Z .

DÉFINITION 2.3.3. — Soit D une connexion duale g -métrique sur M .

- 1) On dit que P est auto-parallèle (relativement à D), si Π_D est identiquement nulle.
- 2) Si la pseudo-métrique g est générique, on dit que le lieu singulier $\Sigma(g)$ est auto-parallèle (relativement à D) si chaque strate $\Sigma_c(g)$ est auto-parallèle (relativement à D).

Lorsque g est non dégénérée, et lorsque P est une variété pseudo-riemannienne de M , P est auto-parallèle au sens classique si, et seulement si, P est auto-parallèle au sens de la définition 2.3.3. D'autre part, P sera auto-parallèle si, et seulement si, $P - \Sigma(g_1)$ est auto-parallèle (au sens classique). g_1 étant la pseudo-métrique induite par g sur P .

PROPOSITION 2.3.4. — Soit D la connexion de Lévi-Civita de g .

- 1) Considérons une hypersurface P de M telle que le fibré TP^\perp soit trivial de dimension 1. Alors, P est auto-parallèle si, et seulement si, $(L_K g)(X, Y) = 0$ pour tout X et Y de $\Gamma(P)$, K étant une section non singulière de TP^\perp .
- 2) Si (M, g) est pseudo-riemannienne, une sous-variété générique P est auto-parallèle si, et seulement si, la pseudo-métrique g_1 est non singulière.

Démonstration. — La partie 1) est une conséquence directe du lemme 2.3.2. La partie 2) s'établit en appliquant le lemme 2.3.2. localement sur $\Sigma_{10}(g_1)$ et en reprenant l'argument déjà utilisé pour la non existence de connexion métrique dans le cas singulier. \square

À chaque connexion duale g -métrique D est associée une unique connexion g -métrique $\nabla : \Gamma(M') \times \Gamma(M') \rightarrow \Gamma(M')$ sur $M' = M - \Sigma(g)$. Comme on l'a vu au début du paragraphe, lorsque g est générique, ∇ ne peut pas, en général, se prolonger en une connexion $\bar{\nabla} : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$. Cependant nous avons la proposition suivante.

PROPOSITION 2.3.5. — Soient g une pseudo-métrique et $\Gamma(g)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M qui sont tangents à $\Sigma(g)$. Pour toute connexion duale g -métrique D , considérons les propriétés suivantes :

- a) la connexion g -métrique $\nabla : \Gamma(M') \times \Gamma(M') \rightarrow \Gamma(M')$ associée à D se prolonge en une application $\bar{\nabla} : \Gamma(g) \times \Gamma(g) \rightarrow \Gamma(g)$ vérifiant les propriétés 1), 2), 3) de la définition 2.2.1, pour tout X, Y, Z de $\Gamma(g)$;
- b) $\Sigma(g)$ est auto-parallèle relativement à D ;
- c) $\Sigma_1(g)$ est auto-parallèle relativement à D ;
- d) la connexion g -métrique $\nabla : \Gamma(M') \times \Gamma(M') \rightarrow \Gamma(M')$ associée à D sur M se prolonge en une application $\bar{\nabla} : \Gamma(M) \times \Gamma(g) \rightarrow \Gamma(g)$ vérifiant les propriétés 1), 2), 3) de la définition 2.2.1., pour tout X de $\Gamma(M)$ et Y, Z de $\Gamma(g)$;
- e) soit la connexion duale de Lévi-Civita de g et T le tenseur de type (3.0) défini par $D - D^0$ (proposition 2.2.3) : alors $T(X, Y, Z) = 0$

Quelques propriétés géométriques des variétés pseudo-riemanniennes singulières

sur $\Sigma_{10}(g)$ pour tout X, Y de $\Gamma(M)$ appartenant au noyau de g sur $\Sigma_{10}(g)$.

On a les equivalences suivantes :

- dans tous les cas : $a) \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow c)$;
- si $D = D^0$: $a) \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow c) \Leftrightarrow d)$;
- dans l'une des hypothèses $a)$ ou $b)$ ou $c)$, et lorsque $D = D^0$: $e) \Leftrightarrow d)$.

Remarques

1) Soit g une pseudo-métrique générique dont le lieu singulier est égal à $\Sigma_1(g)$, pour la connexion duale de Lévi-Civita D^0 de g . La seconde forme fondamentale Π_{D^0} de $\Sigma(g)$ est égale à $(-1/2)L_K g$ (lemme 2.3.2). La connexion de Lévi-Civita de g sur $M' = M - \Sigma(g)$ va donc se prolonger sur $\Sigma(g)$ en une application $\bar{\nabla} : \Gamma(M) \times \Gamma(g) \rightarrow \Gamma(g)$ si, et seulement si, $(L_K g)(X, Y) = 0$ pour tout champ de vecteurs X et Y tangents à $\Sigma(g)$.

2) L'implication $d) \Rightarrow a)$ est évidente pour toute connexion duale g -géométrique D . Par contre la réciproque est fautive, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. — Sur $M = \mathbb{R}^2$, considérons la pseudo-métrique $g = a dx^2 + y dy^2$, où a est une fonction non nulle sur \mathbb{R}^2 . Le lieu singulier de g est $\mathbb{R} \times \{0\}$. Le champ de vecteur $K = \partial/\partial y$ engendre le noyau de g sur $\Sigma(g)$. La seconde forme fondamentale de $\Sigma(g)$, relativement à la connexion de Lévi-Civita D^0 de g , est caractérisée par :

$$\Pi_{D^0} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2} (L_{\partial/\partial y} g) \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial y}$$

Par suite, $\Sigma(g)$ est auto-parallèle si, et seulement si, $\partial a/\partial y = 0$ sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ et dans ce cas, la connexion de Lévi-Civita de g se prolonge sur $\Sigma(g)$ en une application $\bar{\nabla} : \Gamma(M) \times \Gamma(g) \rightarrow \Gamma(g)$.

En revanche, considérons la connexion duale définie par $D = D^0 + T$, où T est le tenseur $dy \otimes (dx \wedge dy)$. L'ensemble $\Sigma(g)$ est auto-parallèle relativement à D si, et seulement si, $\partial a/\partial y = 0$ sur $\mathbb{R} \times \{0\}$. Par ailleurs, comme $T(\partial/\partial x, \partial/\partial x, \partial/\partial y) = 1$, la connexion ∇ associée à D sur $M - \Sigma(g)$ ne se prolongera pas à $\Gamma(M) \times \Gamma(g)$ mais seulement à $\Gamma(g) \times \Gamma(g)$.

La démonstration de la proposition 2.3.5 s'appuie essentiellement sur le lemme suivant.

LEMME 2.3.6. — Soit D une connexion g -métrique sur M et ∇ la connexion g -métrique associée sur $M - \Sigma(g)$. On considère des champs de vecteurs X de $\Gamma(M)$ et Y de $\Gamma(g)$. Le champ de vecteurs $\nabla_X Y$, défini sur $M - \Sigma(g)$, se prolonge en un champ de vecteurs C^∞ si, et seulement si, $D_X Y$ s'annule sur le noyau de g en tout point d'un ouvert dense de $\Sigma_1(g)$.

Démonstration du lemme. — Il suffit de remarquer que $\nabla_X Y$ est solution de l'équation : $g(\nabla_X Y, \cdot) = D_X Y$ et d'appliquer le théorème 2.1.1. \square

Démonstration de la proposition. — Comme $\dim \Sigma_{10}(g) = n - 1$ et g est non dégénérée sur $\Sigma_{10}(g)$, on a, pour tout g de $\Sigma_{10}(g) : [T_x \Sigma_{10}(g)]^\perp = K_g(x)$. Par suite, l'annulation de $D_X Y$ sur le noyau de g est équivalente à l'annulation de la seconde forme fondamentale de $\Sigma_{10}(g)$. Ainsi compte tenu du lemme 2.3.6, $\nabla : \Gamma(M') \times \Gamma(M') \rightarrow \Gamma(M')$ admet un prolongement $\bar{\nabla}$ sur $\Gamma(g) \times \Gamma(g) \rightarrow \Gamma(M)$ si, et seulement si, l'hypothèse b) est vérifiée.

Par construction, si $\bar{\nabla}$ est défini, il vérifie les propriétés 1), 2), et 3) de la définition 2.2.1 pour tout X, Y de $\Gamma(g)$. L'équivalence a) \Leftrightarrow b) sera établie si l'on montre que $\bar{\nabla}_X Y \in \Gamma(g)$. Considérons un point x de $\Sigma(g)$; x appartient alors à une des strates $\Sigma_c(g)$. Soit X_1, \dots, X_c des champs de vecteurs sur un voisinage V de x qui engendrent le noyau de g sur $V \cap \Sigma_c(g)$. Par généralité de g , les équations de $\Sigma_c(g)$ dans V sont alors $g(X_i, X_j) = 0, 1 \leq i \leq j \leq c$. Désignons par φ le déterminant de la $c \times c$ -matrice $(g(X_i, X_j))$. L'ensemble $\Sigma(g)$ est alors défini par l'équation $\varphi = 0$ sur V . Un champ de vecteurs X est donc tangent à $\Sigma(g)$ sur V si, et seulement si, $X(\varphi) = 0$. Par densité de $\Sigma_{10}(g)$, il suffit de démontrer que $\bar{\nabla}_X Y$ est tangent à $\Sigma_{10}(g)$ pour tout X et Y de $\Gamma(g)$.

Soit a un point de $\Sigma_{10}(g)$. Considérons une base (u_1, \dots, u_n) de $T_a M$, telle que u_1 engendre le noyau de g en a et telle que (u_1, \dots, u_n) forme une base de $T_a \Sigma_{10}(g)$. Comme la restriction de g à $\Sigma_{10}(g)$ est non dégénérée si (u_1^*, \dots, u_n^*) est la base duale de (u_1, \dots, u_n) , l'image de $g^b : T_a M \rightarrow T_a^* M$ est engendrée par (u_1^*, \dots, u_n^*) et le noyau de g^b est engendré par u_1 . Par suite, la solution de $g(\bar{\nabla}_X Y, Z) = D_X Y(Z)$ au point g est tangente à $\Sigma_{10}(g)$.

L'implication c) \Rightarrow b) est évidente. Dans l'hypothèse b), le prolongement $\bar{\nabla}$ est défini sur $\Gamma(g) \times \Gamma(g)$. Si X et Y sont deux champs de vecteurs de $\Gamma(\Sigma_c(g))$ et $Z \in \Gamma(\Sigma_c(g))^\perp$. Par cohérence de la stratification $\{\Sigma_c(g)\}$ [22], les champs X, Y et Z se prolongent sur M en des champs de vecteurs $\bar{X},$

$\bar{Y} \in \Gamma(g)$ et $\bar{Z} \in \Gamma(M)$. Si Π_D est la seconde forme fondamentale $\Sigma_c(g)$, on aura :

$$\Pi_D(X, Y, Z) = g(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, \bar{Z}) = 0$$

puisque $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}$ est tangent à $\Sigma_c(g)$.

Lorsque D est la connexion de Lévi-Civita de g , nous allons établir l'équivalence a) \Leftrightarrow d). L'implication d) \Rightarrow a) est triviale. On se place dans l'hypothèse a). D'après le lemme 2.3.6, $\bar{\nabla}$ sera défini sur $\Gamma(M) \times \Gamma(g)$ si, et seulement si, $D_X Y$ s'annule sur le noyau de g en tout point de $\Sigma_{10}(g)$, pour $X \in \Gamma(M)$ et $Y \in \Gamma(g)$. Sur $\Sigma_{10}(g)$ on a $TM = T\Sigma_{10}(g) \oplus T\Sigma_{10}(g)^\perp$. Considérons un voisinage V d'un point a de $\Sigma_{10}(g)$ et K un champ de vecteurs sur V qui engendre $T\Sigma_{10}(g)^\perp$ sur $V \cap \Sigma_{10}(g)$. Tout champ de vecteurs X de $\Gamma(M)$ va s'écrire :

$$X = X_0 + \mu K,$$

où X_0 est tangent à $\Sigma_{10}(g)$. On aura donc :

$$D_X Y = D_{X_0} Y + \mu D_K Y.$$

Dans l'hypothèse a), $D_{X_0} Y$ s'annule sur le noyau de g , $D_X Y$ s'annulera sur le noyau de g sur $V \cap \Sigma_{10}(g)$ si, et seulement si, $D_K Y(K) = 0$ sur $V \cap \Sigma_{10}(g)$. La connexion duale D de Lévi-Civita de g vérifie :

$$D_K Y(K) = D_Y K(K) + g([K, Y], K).$$

D'une part, $g([K, Y], K)$ est nul sur $V \cap \Sigma_{10}(g)$. D'autre part, on a :

$$D_Y K(K) = \frac{1}{2} Y(g(K, K))$$

d'après la propriété 3) de la définition 2.2.2. Par généralité $g(K, K) = 0$ est une équation de $\Sigma_{10}(g)$ sur V . Comme Y est tangent à $\Sigma_{10}(g)$, $Y(g(K, K))$ est nul. Par suite $D_Y K(K) = 0$ sur $\Sigma_{10}(g) \cap V$. Comme pour l'équivalence a) \Leftrightarrow b), on montre que $\bar{\nabla}_X Y$ appartient à $\Gamma(g)$ pour tout X de $\Gamma(M)$ et tout Y de $\Gamma(g)$, ce qui achève la démonstration de l'implication a) \Rightarrow d).

Il reste à montrer que dans l'une des hypothèses a), b), ou c), lorsque D^0 est la connexion duale de Lévi-Civita de g , alors e) est équivalent à d). Soit T le tenseur défini par $D - D^0$. On a alors :

$$D_X Y(Z) = D_X^0 Y(Z) + T(X, Y, Z).$$

Soient $\bar{\nabla}$ et $\bar{\nabla}^0$ les prolongements des connexions g -métriques ∇ et ∇^0 sur $\Gamma(M') \times \Gamma(M')$ associées à D et D^0 respectivement. Il résulte encore du lemme 2.3.6 que le prolongement $\bar{\nabla}$ est défini sur $\Gamma(M) \times \Gamma(g)$ si, et seulement si, $T(X, Y, Z) = 0$ sur $\Sigma_{10}(g)$ puisque $D_X^0 Y(Z)$ est nul sur $\Sigma_{10}(g)$ d'après la démonstration a) \Leftrightarrow d). \square

Comme le montre l'exemple ci-dessus, le prolongement à $\Gamma(g) \times \Gamma(g)$ la connexion associée à une connexion duale g -métrique D est lié à l'annulation de la seconde forme fondamentale Π_D de chaque strate. Mais cette propriété est insuffisante pour assurer le prolongement à $\Gamma(M) \times \Gamma(g)$. On va construire un autre invariant permettant de caractériser les connexions duales ayant une telle propriété.

Pour chaque strate $\Sigma_c(g)$, notons $\widehat{\Gamma}(\Sigma_c(g))$ l'espace des champs de vecteurs le long de $\Sigma_c(g)$. On définit l'application :

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi}_D : \widehat{\Gamma}(\Sigma_c(g)) \times \widehat{\Gamma}(\Sigma_c(g)) \times \mathcal{K}(g) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y, Z) &\longrightarrow D_X \bar{Y}(Z) \end{aligned}$$

X appartenant à l'espace $\widehat{\Gamma}(\Sigma_c(g))$ de $\Sigma_c(g)$, \bar{Y} un prolongement de $Y \in \widehat{\Gamma}(\Sigma_c(g))$ et Z appartenant à l'espace $\mathcal{K}(g)$ des sections du fibré de c -plans défini par le noyau de g sur $\Sigma_c(g)$.

LEMME 2.3.7

- 1) $\widehat{\Pi}_D$ est bien défini.
- 2) $\widehat{\Pi}_D$ est une application $A(\Sigma_c(g))$ -trilinéaire, où $A(\Sigma_c(g))$ est l'anneau des fonctions sur $\Sigma_c(g)$.

$\widehat{\Pi}_D$ s'appelle la *seconde forme fondamentale forte* de $\Sigma_c(g)$. On appelle restriction de $\widehat{\Pi}_D$ à $\Sigma_c(g)$, la restriction de $\widehat{\Pi}_D$ à $\widehat{\Gamma}(\Sigma_c(g)) \times \Gamma(g) \times \mathcal{K}(g)$.

Remarques

- 1) Si $\Sigma_{10}(g)$ est ouvert (dans $\Sigma(g)$), la restriction de $\widehat{\Pi}_D$ à $\Gamma(\Sigma_{10}(g)) \times \Gamma(\Sigma_{10}(g)) \times \mathcal{K}(g)$ est égale à la seconde forme fondamentale de $\Sigma_{10}(g)$.
- 2) Si g est générique, soient X et $Y \in \Gamma(M)$: la dérivée $\nabla_X Y$ est définie si, et seulement si, $\widehat{\Pi}_D(X, Y)$ est nulle sur $\Sigma_{10}(g)$ (lemme 2.3.6).

Il résulte de la proposition 2.3.5 la proposition suivante.

PROPOSITION 2.3.8. — *Soit g une pseudo-métrique générique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- a') *la connexion g -métrique $\nabla : \Gamma(M') \times \Gamma(M') \rightarrow \Gamma(M')$ sur $M' = M - \Sigma(g)$ associée à D , se prolonge en une application $\bar{\nabla} : \Gamma(M) \times \Gamma(g) \rightarrow \Gamma(g)$ vérifiant les propriétés 1), 2), et 3) de la définition 2.2.1 ;*
- b') *la seconde forme fondamentale forte de $\Sigma_1(g)$ est nulle sur $\hat{\Gamma}(\Sigma_1(g)) \times \Gamma(\Sigma_1(g)) \times \mathcal{K}(g)$;*
- c') *la seconde forme fondamentale forte de $\Sigma_c(g)$ est nulle sur chaque ensemble $\hat{\Gamma}(\Sigma_c(g)) \times \Gamma(\Sigma_c(g)) \times \mathcal{K}(g)$ pour tout $1 \leq c \leq n$.*

DÉFINITION 2.3.9. — *Soit g une pseudo-métrique générique. On dira que $\Sigma(g)$ est fortement auto-parallèle relativement à une connexion duale g -métrique D si l'une des propriétés a'), b') ou c'), est vérifiée.*

COROLLAIRE 2.3.10. — *Si $\Sigma(g)$ est fortement auto-parallèle (relativement à D), alors $\Sigma(g)$ est auto-parallèle (relativement à D). De plus si D est la connexion de Lévi-Civita de g , $\Sigma(g)$ est auto-parallèle si et seulement s'il est fortement auto-parallèle.*

Nous terminons ce paragraphe par l'étude de l'existence de connexions duales g -métriques D , pour lesquelles $\Sigma(g)$ est auto-parallèle ou fortement auto-parallèle. Précisément, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 2.3.11

- 1) *Soit g une pseudo-métrique 1-générique (voir le début du paragraphe 2.1). S'il existe une connexion duale g -métrique D , pour laquelle $\Sigma(g)$ est auto-parallèle, la pseudo-métrique induite par g sur chaque strate $\Sigma_c(g)$ est non dégénérée.*
- 2) *Soit g une pseudo-métrique générique telle que la pseudo-métrique induite sur chaque strate $\Sigma_c(g)$ soit non dégénérée. Considérons une connexion duale g -métrique D . Pour tout voisinage V de $\Sigma(g)$, il existe une connexion duale g -métrique D' , pour laquelle $\Sigma(g)$ est fortement auto-parallèle et qui coïncide avec D sur $M - V$.*

COROLLAIRE 2.3.12. — *Soit g une pseudo-métrique 1-générique dont le lieu singulier est auto-parallèle pour sa connexion duale de Lévi-Civita. Alors g induit sur chaque strate $\Sigma_c(g)$ une métrique pseudo-riemannienne g_c (non dégénérée). De plus, la connexion de Lévi-Civita de g définie sur $M - \Sigma(g)$ se prolonge sur $\Sigma(g)$ par la connexion de Lévi-Civita de g_c .*

Démonstration de la proposition 2.3.11

1) Soit g une pseudo-métrique 1-générique et D une connexion duale g -métrique pour laquelle $\Sigma(g)$ est auto-parallèle. Supposons qu'il existe un point a d'une strate $\Sigma_c(g)$ tel que g_c soit dégénérée en a . Par 1-généricité de g , l'ensemble singulier $\Sigma_1(g_c)$ est une sous-variété non vide de $\Sigma_c(g)$ de codimension 1 et l'ensemble $\Sigma_{10}(g_c)$ des points de $\Sigma_1(g_c)$, où le noyau de g_c est transverse à $\Sigma_1(g_c)$, est ouvert dense. Il ne peut donc exister de connexion g_c -métrique sur $\Sigma_c(g)$ (voir le raisonnement tenu au début de paragraphe 2.2). Cependant d'après la proposition 2.3.9, l'application $\bar{\nabla} : \Gamma(g) \times \Gamma(g) \rightarrow \Gamma(g)$ caractérisée par $g(\bar{\nabla}_X Y, Z) = D_X Y(Z)$ est bien définie et, par suite, induit sur $\Sigma_c(g)$ une connexion g_c -métrique. D'où une contradiction.

2) Soit g une pseudo-métrique générique, telle que la pseudo-métrique g_c induite sur chaque strate $\Sigma_c(g)$ soit non dégénérée. On a donc la décomposition suivante :

$$T_x M = T_x \Sigma_c(g) \oplus T_x \Sigma_c(g)^\perp.$$

Cette décomposition donne naissance à un fibré vectoriel au-dessus de $\Sigma_c(g)$, noté $(T\Sigma)^\perp$ de fibre $T_x \Sigma_c(g)^\perp$. Étant donnée une connexion duale g -métrique D sur M , la valeur de $D_X Y(Z)$ en $x \in \Sigma_c(g)$ ne dépend que de la valeur en x de $X \in \Gamma(M)$, de $Y \in \Gamma(\Sigma_c(g))$ et de $Z \in \Gamma(\Sigma_c(g))^\perp$. On peut donc définir un tenseur T de type $(3, 0)$ sur $\Sigma(g)$ par :

$$T(u, v, w) = D_u v_0(w_1) - D_u w_0(v_1),$$

avec $x \in \Sigma_c(g)$, $u, v, w \in T_x M$, v_0, w_0 (resp. v_1, w_1) sont les composantes respectives de v et w sur $T_x \Sigma_c(g)$ (resp. $T_x \Sigma_c(g)^\perp$).

On remarque que $T(u, v, w) = -T(u, w, v)$. On peut donc prolonger T en un tenseur de type $(3, 0)$ sur M , encore noté T , antisymétrique par rapport aux deux dernières variables. L'application $D^1 = D - T : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Lambda_1(M)$ est une connexion duale sur M (proposition 2.2.3). Par construction, $\Sigma(g)$ est fortement auto-parallèle pour D^1 . Fixons un voisinage V de $\Sigma(g)$. On obtient la connexion duale D' annoncée en recollant la restriction à $M - \Sigma(g)$ de D et la restriction à V de D^1 par une partition de l'unité. \square

2.4 Transport parallèle d'une connexion duale g -métrique

Dans la situation (non singulière) d'une variété pseudo-riemannienne (N, G) , rappelons qu'à toute connexion G -métrique ∇ est associée une dérivation le long de tout chemin C^∞ , $\gamma = I \rightarrow N$, où I est un intervalle de \mathbb{R} de manière suivante : si X est un champ de vecteurs C^∞ le long de γ , $\delta X/dt$ est le champ de vecteurs défini par l'équation $\delta X/dt = \nabla_{\dot{\gamma}} X$, où $\dot{\gamma}$ est le champ de vecteurs tangent à γ .

Si $I = [a, b]$, pour tout vecteur u de $T_{\gamma(a)}N$, il existe un unique champ de vecteurs U le long de γ caractérisé par :

$$\frac{\delta U}{dt} \quad \text{et} \quad U(\gamma(a)) = u.$$

L'application $P_\gamma : T_{\gamma(a)}N \rightarrow T_{\gamma(b)}N$ définie par $P_\gamma(a) = U(\gamma(b))$, s'appelle le *transport parallèle* le long de γ .

Initialement introduite dans une situation particulière dans [14], nous allons généraliser ces notions pour les variétés pseudo-riemanniennes génériques (M, g) et compléter les résultats de [14] dans ce contexte. Dans tout le reste du paragraphe, la pseudo-métrique générique g et la connexion g -métrique D sont fixées sur M .

Soit $\gamma : I \rightarrow M$ un chemin C^∞ . On note $\Gamma(\gamma)$, (resp. $\Lambda^1(\gamma)$), l'espace des champs de vecteurs (resp. des 1-formes) le long de γ .

LEMME 2.4.1. — Il existe une unique application $\delta_\gamma : \Gamma(\gamma) \rightarrow \Lambda^1(\gamma)$ appelée *codérivation* le long de γ et caractérisée par :

$$1) \delta_\gamma(fX) = \frac{df}{dt}(g(X, \cdot)) + f\delta_\gamma(X),$$

pour toute fonction f sur $[a, b]$ et tout $X \in \Gamma(\gamma)$;

$$2) \delta_\gamma X = D_{\dot{\gamma}} X \text{ pour tout } X \in \Gamma(M).$$

De plus δ_γ vérifie :

$$\frac{d}{dt}(g(X, Y)) = (\delta_\gamma X)(Y) + (\delta_\gamma Y)(X)$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(\gamma)$.

Si $\gamma(I)$ est contenu dans $M - \Sigma(g)$, le champ de vecteurs $\delta X/dt$ est bien défini et on a évidemment

$$\delta_\gamma X = g\left(\frac{\delta X}{dt}, \cdot\right).$$

Par contre si $\gamma(I) \cap \Sigma(g) \neq \emptyset$, le champ de vecteurs $\delta X/dt$ n'est pas défini sur $\gamma(I) \cap \Sigma(g)$. Il suffit, par exemple, de considérer un chemin $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ tel que :

$$\begin{aligned} \gamma([0, \varepsilon]) &\subset M - \Sigma(g) \\ \gamma(0) &\in \Sigma_1(g) \\ \dot{\gamma}(0) &\in K_g(\gamma(0)). \end{aligned}$$

Dans ces conditions, pour tout champ de vecteurs $X \in \Gamma(\gamma)$ tel que $X(0) \in K_g(\gamma(0))$, la dérivation $\delta X/dt$ n'est pas définie en $\gamma(0)$.

DÉFINITION 2.4.2. — *On dit que $X \in \Gamma(\gamma)$ est parallèle le long de γ si $\delta_\gamma(X)$ est identiquement nulle.*

De manière évidente si $\gamma(I)$ est contenu dans $M - \Sigma(g)$, X est parallèle le long de γ (au sens de la définition 2.4.2) si et seulement s'il est parallèle le long de γ au sens classique. Dans ce cas, X est complètement déterminée par l'équation $\delta_\gamma X = 0$ et la valeur de $X(a) \in T_{\gamma(a)}M$ si $I = [a, b]$.

En revanche, lorsque $\gamma(I) \cap \Sigma(g) = \emptyset$, l'équation $\delta_\gamma X = 0$ et la valeur de X en $\gamma(a)$ ne suffisent plus à déterminer de manière unique un champ X parallèle le long de γ . Remarquons que, pour un tel champ s'il existe, on aura nécessairement $\delta_\gamma X(u) = 0$ sur $\gamma(I) \cap \Sigma(g)$ pour tout u appartenant au noyau de g ou, de manière équivalente, $\widehat{\Pi}_D(\dot{\gamma}, X) = 0$ sur $\gamma(I) \cap \Sigma(g)$, où $\widehat{\Pi}_D$ est la seconde forme fondamentale forte de $\Sigma(g)$ relativement à D .

Désignons par $\pi_{\gamma(t)}$ l'ensemble $\{u \in T_{\gamma(t)}M \mid \widehat{\Pi}_D(\dot{\gamma}, u) = 0\}$ pour $\gamma(t) \in \gamma(I) \cap \Sigma(g)$. Soit π_γ la réunion des espaces $\{\pi_{\gamma(t)} \mid \gamma(t) \in \gamma(I) \cap \Sigma(g)\}$. L'ensemble π_γ possède l'interprétation suivante.

Soit E la restriction de TM à $\gamma(I)$. Si $\Sigma(\gamma) = \gamma(I) \cap \Sigma(g) = \emptyset$, l'équation $\delta_\gamma = 0$ définit un champ de vecteurs C^∞ sur E , dont les courbes intégrales déterminent les champs de vecteurs $X \in \Gamma(\gamma)$ qui sont parallèles le long de γ . Supposons $\Sigma(\gamma) \neq \emptyset$ et notons E_0 la restriction de TM à $\Sigma(\gamma)$. L'équation de $\delta_\gamma = 0$ définit un champ de vecteurs ξ sur $E' = E - E_0$. Si c est une courbe intégrale de ξ , l'intersection $\bar{c} \cap E_0$ est contenue dans π_γ , où \bar{c} désigne l'adhérence de c dans E . Réciproquement, tout point de π_γ appartient à l'adhérence d'au-moins une courbe intégrale de ξ . Si $u \in \pi_\gamma$ est dans l'adhérence de plusieurs courbes, on ne peut pas définir de transport parallèle le long de γ ayant u pour condition initiale.

Quelques propriétés géométriques des variétés pseudo-riemanniennes singulières

Pour pouvoir donner des *conditions d'existence de transport parallèle* le long d'un chemin γ pour lequel $\Sigma(\gamma) \neq \emptyset$, il est nécessaire d'introduire un nouvel invariant. Pour chaque strate $\Sigma_c(g)$, soit :

$$L_g : \widehat{\Gamma}(\Sigma_c(g)) \times \mathcal{K}(g) \times \mathcal{K}(g) \rightarrow \mathbb{R}$$

l'application définie par :

$$L_g(X, Y, Z) = L_{\overline{X}}g(\overline{Y}, \overline{Z})$$

où $L_{\overline{X}}$ est la dérivée de Lie de g par \overline{X} .

\overline{X} , \overline{Y} et \overline{Z} sont des champs de vecteurs sur M qui prolongent X, Y, Z . Comme pour $\widehat{\Pi}_D$, on a le lemme 2.4.3.

LEMME 2.4.3

- 1) L_g est bien définie.
- 2) L_g est une application $A(\Sigma_c(g))$ trilinéaire.
- 3) L_g est symétrique par rapport aux deux dernières variables.

Démonstration

$$L_Xg(Y, Z) = X(g(Y, Z)) + g([Y, X], Z) + g([Z, X], Y).$$

Si Y et Z appartiennent au noyau de g , on aura donc :

$$L_Xg(Y, Z) = X(g(Y, Z)).$$

Les propriétés 1), 2) et 3) sont alors immédiates.

PROPOSITION 2.4.4. — Soit $\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ un chemin vérifiant les hypothèses suivantes :

- a) $\gamma(] - \varepsilon, \varepsilon[) \cap \Sigma(g) = \gamma(0)$;
- b) $L_g(\dot{\gamma}, \cdot, \cdot)$ induit sur le noyau $K_g(\gamma(0))$ de g en $\gamma(0)$, une forme quadratique non dégénérée.

Alors pour tout $u \in \pi_{\gamma(0)}$, il existe un unique champ de vecteurs X de $\Gamma(\gamma)$ parallèle le long de γ avec pour condition initiale : $X(\gamma(0)) = u$.

Remarques

Il résulte de la démonstration du lemme 2.4.3 :

- Si $\gamma(0) \in \Sigma_1(g)$ et si $\gamma(0)$ est transverse à $\Sigma_1(g)$, comme g est générique, la condition b) est automatiquement vérifiée. La proposition 2.4.4 est donc une généralisation du théorème 7 de [14].
- Dans l'ensemble des chemins qui vérifient a), la condition b) est "générique" dans le sens suivant : les vecteurs $u \in T_{\gamma(0)}M$ pour lesquels $L_g(u, \cdot)$ induit une forme quadratique non dégénérée sur $K_g(\gamma(0))$ est ouvert dense de $T_{\gamma(0)}M$.

Démonstration de la proposition 2.4.4. — soit $\Sigma_c(g)$ la strate de $\Sigma(g)$ qui contient $\gamma(0)$. La démonstration nécessite le lemme suivant.

LEMME 2.4.5. — Il existe un nombre réel $0 < \eta < \varepsilon$ et un champ de repères (U_1, \dots, U_n) le long de $\gamma([\cdot - \eta, \eta])$ ayant les propriétés suivantes :

a) la matrice de g sur la base (U_1, \dots, U_n) est du type :

$$G = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $A = (a_{ij})$ est une $c \times c$ -matrice symétrique avec :

$$\begin{cases} a_{ij} = t^2 \hat{a}_{ij} & i \neq j \\ a_{ii} = \varepsilon_i t + o(t^2) & \varepsilon_i = \pm 1, \end{cases}$$

où $B = (b_{ij})$ est une matrice diagonale avec $b_{ii} = \pm 1$;

b) la matrice $(D_{\dot{\gamma}} U_i(U_j))$, $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, est du type :

$$D \begin{pmatrix} C & E \\ F & 0 \end{pmatrix}$$

où $C = (c_{ij})$ est une $c \times c$ -matrice avec $C(\gamma(0))$ vérifiant :

$$\begin{cases} c_{ij} = -c_{ji} & i \neq j \\ c_{ii} = \frac{\varepsilon_i}{2}, \end{cases}$$

où E (resp. F) est une $c \times (n - c)$ -matrice (resp. $(n - c) \times c$ -matrice) qui est nulle en $\gamma(0)$.

Quelques propriétés géométriques des variétés pseudo-riemanniennes singulières

Démonstration du lemme. — Posons $a = \gamma(0)$. Puisque $L_g(\dot{\gamma}, \cdot, \cdot)$ induit une forme quadratique non dégénérée sur $K_g(a)$, il existe une base (u_1, \dots, u_n) de $K_g(a)$ telle que :

$$L_g(\dot{\gamma}, u_i, u_j) = \varepsilon_{ij}, \quad 1 \leq i \leq c, 1 \leq j \leq c$$

avec

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \pm 1 & i = j. \end{cases}$$

On aura donc en a :

$$\varepsilon_{ij} = L_g(\dot{\gamma}, u_i, u_j) = \dot{\gamma}(g(u_i, u_j)) = \widehat{\Pi}_D(\dot{\gamma}, u_i, u_j) + \widehat{\Pi}_D(\dot{\gamma}, u_j, u_i),$$

pour $1 \leq i \leq c$ et $1 \leq j \leq c$.

La matrice $(\widehat{\Pi}_D(\dot{\gamma}, u_i, u_j))$, de terme général notée c_{ij} , vérifie donc :

$$\begin{cases} c_{ij} = -c_{ji} & i \neq j \\ c_{ii} = \frac{\varepsilon_i}{2}. \end{cases}$$

Il résulte des hypothèses que le déterminant de cette matrice est non nul et, par suite, que $\pi_\gamma(a)$ l'orthogonal de $K_g(a)$ relativement à la forme quadratique $\widehat{\Pi}_D(\dot{\gamma}, \cdot)$ est un supplémentaire de $K_g(a)$. Il en résulte que la forme quadratique induite par g sur $\pi_\gamma(a)$ est non dégénérée. Il existe donc un champ de $(n - c)$ -plans π le long de γ tel que $\pi(a) = \pi_\gamma(a)$ et la métrique g_π induite par g sur π est non dégénérée. La connexion duale g -métrique D induit sur π une connexion g_π -métrique ∇_π . Il existe donc, sur un voisinage V de a , des champs de vecteurs U_{c+1}, \dots, U_n de $\Gamma(\gamma)$ tangents à π , orthonormés relativement à g_π et qui sont parallèles le long de γ (relativement à ∇_π).

Soit K un champ de c -plans sur V le long de γ , orthogonal à π relativement à g .

On a évidemment $K_g(a) = K(a)$. Désignons par U_1, \dots, U_c des champs de vecteurs tangents à K tels que $U_i(a) = u_i$. Les vecteurs U_1, \dots, U_n ainsi construits forment une base de TM sur un voisinage de a , ayant les propriétés du lemme.

Revenons à la démonstration de la proposition 2.4.4. Sans perte de généralité, on peut supposer que la base (U_1, \dots, U_n) construite dans le lemme est définie sur tout le chemin $\gamma([-\varepsilon, \varepsilon])$. Ce fibré de repères étant

fixé, le fibré image réciproque $\gamma^{-1}(TM)$ s'identifie à $\mathbb{R}^n \times]-\varepsilon, \varepsilon[$. Les coordonnées d'un champ de $\Gamma(\gamma)$ parallèle le long de γ sont alors solutions du système d'équation différentielles suivant :

$$G \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

(avec les notations du lemme).

Sur $\{\mathbb{R}^n \times]-\varepsilon, 0[\} \cup \{\mathbb{R}^n \times]0, \varepsilon[\}$ les solutions de (*) sont les courbes intégrales du champ de vecteurs :

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i \frac{\partial}{\partial x_j},$$

où (α_{ij}) est la matrice $G^{-1}D$. D'après l'écriture de G , pour $t \neq 0$, G^{-1} sera du type :

$$\begin{pmatrix} (1/t)A^1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $A^1 = (a_{ij}^1)$ est une $c \times c$ -matrice telle que :

$$\begin{cases} a_{ij}^1(0) = 0 & i \neq j \\ a_{ii}^1(t) = \varepsilon_i + O(t) & \varepsilon_i = \pm 1. \end{cases}$$

Le champ de vecteurs $t\xi$ se prolonge alors en un champ de vecteurs C^∞ (encore noté $t\xi$) sur $\mathbb{R}^n \times]-\varepsilon, \varepsilon[$. Il résulte du lemme que le lieu singulier S de $t\xi$ a pour équation $t = x_1 = \dots = x_c = 0$ et, qu'en tout point de S , le 1-jet de $t\xi$ est égal à :

$$t \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij} x_i \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

où (β_{ij}) est la matrice $A^1 C$.

Les valeurs propres de cette matrice sont du type :

$$\frac{1}{2} + i\nu_\ell, \quad \nu_\ell \in \mathbb{R} \text{ avec } i^2 = -1.$$

Ainsi $t\xi$ est normalement hyperbolique le long de S . Comme dans [14], d'après [10], en tout point x de S , il existe une variété stable W_x^{ss} (de dimension c) et une unique variété instable W_x^{uu} (de dimension 1) invariantes par le flot de $t\xi$ et qui se coupent en x transversalement à S . Il existe donc une paramétrisation de W_x^{uu} telle que cette courbe soit solution de (*). □

2.5 Géodésiques d'une connexion duale g -métrique

Dans la situation (non singulière) d'une variété pseudo-riemannienne (N, G) , une géodésique est un chemin $\gamma : I \rightarrow N$ pour lequel le champ de vecteurs tangents $\dot{\gamma}$ est parallèle le long de γ . Considérons maintenant une variété pseudo-riemannienne générique (M, g) et D une connexion duale.

DÉFINITION 2.5.1

- 1) Soit $\gamma : I \rightarrow M$ un chemin. On dit que γ est une géodésique de la connexion duale g -métrique D , si $\dot{\gamma}$ est parallèle le long de γ (au sens de la définition 2.4.2).
- 2) On dit que le chemin $\gamma : J \rightarrow M$ est une pré-géodésique s'il existe un changement de paramétrage $u : I \rightarrow J$, tel que $\gamma \circ u : I \rightarrow M$ soit une géodésique.

Comme pour le transport parallèle, un chemin $\gamma : I \rightarrow M - \Sigma(g)$ est une géodésique de D si, et seulement si, γ est une géodésique pour la connexion ∇ associée à D sur $M - \Sigma(g)$. Par suite, pour tout x de $M - \Sigma(g)$, et tout $u \in T_x M$, il existe une unique géodésique $\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = u$. En revanche, en général, cette propriété n'est plus vraie si $x \in \Sigma(g)$.

En effet considérons une géodésique $\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ telle que $\gamma(0) = a \in \Sigma(g)$. Le champ de vecteurs tangents $\dot{\gamma}$ est alors parallèle le long de γ . Il en résulte que $a = \dot{\gamma}(0)$ vérifie l'équation $\widehat{\Pi}_D(u, u, K) = 0$ pour tout $K \in K_g(x)$.

Soient $x \in \Sigma(g)$ et K un champ de vecteurs non nuls qui appartient à $K_g(x)$. Par conséquent, pour tout $v \in T_x M$ pour lequel on a $\widehat{\Pi}_D(u, u, K) \neq 0$, il n'existe aucune géodésique $\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = v$.

Le comportement des géodésiques contenues dans $M - \Sigma(g)$ au voisinage des points de $\Sigma(g)$ est précisé dans la proposition 2.5.2 qui va suivre, mais il est d'abord nécessaire d'introduire quelques notations.

Soit x un point de $\Sigma(g)$ et U un voisinage de x dans M au-dessus duquel le fibré projectif $\mathbb{P}M$, associé à TM est trivialisable. Le fibré $\mathbb{P}M|_U$ est identifié à $U \times \mathbb{P}^n$.

Pour tout chemin $I \rightarrow U$, on considère l'application $T_\gamma : I \rightarrow \mathbb{P}^n$ définie par $T_\gamma(t)$ est la projection sur \mathbb{P}^n de la direction de la tangente en $\gamma(t)$.

Enfin, on note Γ^G et Γ^I les sous-ensembles dans \mathbb{P}^n (identifié à $\{x\} \times \mathbb{P}^n$) des directions d'équations $\widehat{\Pi}_D(u, u, \cdot) = 0$ et $g(u, u) = 0$ respectivement.

PROPOSITION 2.5.2

- 1) L'ensemble $\Gamma = \Gamma^G \cup \Gamma^I$ est un compact de \mathbf{P}^n d'intérieur vide.
- 2) Soit $\gamma : [a, b[\rightarrow U$ une pré-géodésique telle que $\lim_{t \rightarrow b} \gamma(t) = x$. Si la limite de $T_\gamma(t)$ existe dans \mathbf{P}^n lorsque x tend vers b , alors cette limite appartient à Γ_x .
- 3) Si $x \in \Sigma_1(g)$, pour tout $\ell \in \Gamma^I - \Gamma^G$, il existe une pré-géodésique $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ telle que $\gamma(0) = x$ et telle que la direction définie par $\dot{\gamma}(0)$ soit égale à ℓ .
- 4) Supposons que g soit 1-générique (§ 2.1) et considérons $x \in \Sigma_c(g)$. S'il existe un voisinage V tel que $V \cap \Sigma(g)$ soit auto-parallèle, Γ^G contient l'ensemble des directions tangentes à $\Sigma_c(g)$ en x , et cette inclusion est une égalité si $c = 1$.

Pour tout u de $T_x \Sigma_c(g)$, il existe alors une géodésique $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow V$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = u$. De plus, l'image de γ est contenue dans $\Sigma_c(g)$.

Cette proposition permet de préciser complètement le comportement des géodésiques au voisinage d'un point de $\Sigma_1(g)$, lorsque $\Sigma_1(g)$ est auto-parallèle : les géodésiques qui sont contenues dans $M - \Sigma(g)$ et adhérentes à $\Sigma_1(g)$ ont une direction tangentielle limite tangente à $\Sigma_1(g)$ ou contenues dans le noyau de g ; de plus, les seules géodésiques qui coupent le lieu singulier sont tangentes au noyau de g .

Voici un exemple illustrant cette situation.

Sur \mathbb{R}^2 , considérons la pseudo-métrique $g = x dx^2 + dy^2$. Un chemin $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ sera une géodésique de la connexion duale de Lévi-Civita de g si ses composantes (γ_1, γ_2) sont solution du système d'équations :

$$\begin{cases} \gamma_1 \frac{d\dot{\gamma}_1}{dt} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_1^2 \\ \frac{d\dot{\gamma}_2}{dt} = 0. \end{cases}$$

Les géodésiques sont donc :

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (a_1 t + b_1)^2 \\ \gamma_2(t) &= a_2 t + b_2 \end{aligned} \quad a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Le lieu singulier de g est l'ensemble $\Sigma_1(g) = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ est auto-parallèle. Les géodésiques passant par $(0, 0)$ sont les droites $x = 0, y = 0$, et le faisceau de paraboles $x = \lambda y^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration de la proposition 2.5.2. — La situation étant locale, on peut supposer que $U = \mathbb{R}^n$ et $x = 0 \in \mathbb{R}^n$. On choisit, sur \mathbb{R}^n , un système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) tel que $\Sigma_c(g)$ ait pour équation :

$$x_1 = \dots = x_{c(c+1)/2} = 0.$$

Il existe un champ de repères (X_1, \dots, X_n) dans lequel la matrice de g est du type :

$$\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

où G est une $c \times c$ -matrice et D une $(c - n) \times (n - c)$ -matrice diagonale, avec ± 1 sur cette diagonale.

Les champs de vecteurs X_1, \dots, X_c engendrent le noyau de g sur $\Sigma_c(g)$: par suite, $g(X_i, Y_j) = 0$, pour $1 \leq i \leq c$ et $1 \leq j \leq c$, est un système d'équations de $\Sigma_c(g)$.

Posons enfin $\Gamma_{ijk} = D_{X_i} X_j(X_k)$ ($i, j, k = 1, \dots, n$), et désignons par Γ_k la matrice (Γ_{ijk}) , $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

Modulo le champ de repères (X_1, \dots, X_n) , le fibré tangent à M au-dessus de U s'identifie à \mathbb{R}^{2n} que l'on munit des coordonnées $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. De plus dans ce système de coordonnées $\{u \in T_x M \mid g(u, u) = 0\}$ a pour équation :

$$(y_1, \dots, y_n) \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

L'ensemble $\{u \in T_x M \mid \hat{\Pi}_D(u, u) = 0\}$ a pour équation :

$$(y_1, \dots, y_n)(\Gamma_k) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \quad 1 \leq k \leq c.$$

On a

$$\Gamma_{ikkk} = \frac{1}{2} X_i(g(X_k, X_k)).$$

Comme $g(X_k, X_k) = 0$ est une équation de $\Gamma_c(g)$, et que g est générique, pour chaque valeur de k ($1 \leq k \leq c$), il existe un entier i pour lequel on a $\Gamma_{ikkk} \neq 0$, ce qui achève la démonstration de 1).

Considérons maintenant une pré-géodésique $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ telle que $\lim_{t \rightarrow b} \dot{\gamma}(t) = 0$. Puisque γ est une pré-géodésique, il existe une fonction $\gamma : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\delta_\gamma(X) = \lambda g(\dot{\gamma}, X).$$

Supposons que $\lim_{t \rightarrow b} \dot{\gamma}(t) = \ell \neq 0$. Soit alors $\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow U$ le prolongement de classe C^1 de γ défini par $\bar{\gamma}(b) = 0$ et $\dot{\bar{\gamma}}(b) = \ell$. Si ℓ appartient au noyau de g en 0, alors $\lim_{t \rightarrow b} T_\gamma(t)$ appartient à Γ_0^ℓ . Dans le cas contraire, il existe un champ de vecteurs Z le long de $\bar{\gamma}([b - \varepsilon, b[)$, pour ε assez petit, tel que $g(\dot{\bar{\gamma}}, Z) \neq 0$ sur $\bar{\gamma}([b - \varepsilon, b[)$. On en déduit donc que

$$\lim_{t \rightarrow b} (t) = \frac{\delta_\gamma(Z)}{g(\ell, Z)}.$$

Le prolongement $\bar{\lambda}$ par continuité de λ sur $[a, b]$ vérifie :

$$\delta_{\bar{\gamma}}(X) = \bar{\lambda} g(\dot{\bar{\gamma}}, X).$$

Pour tout champ X le long de $\bar{\gamma}$, on a donc :

$$\widehat{\Pi}_D(\ell, \ell, K) = \delta_{\bar{\gamma}(b)}(X) = \bar{\lambda}(b) g(\dot{\bar{\gamma}}(b), K) = 0$$

pour tout K appartenant au noyau de g en 0. Par suite, $\lim_{t \rightarrow b} T_\gamma(t)$ appartient à Γ_0^G ; ce qui achève la démonstration de 2).

Supposons maintenant que $0 \in \Sigma_1(g)$. Avec les notations introduites précédemment $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une géodésique si, et seulement si, les composantes $(y_1(t), \dots, y_n(t))$ de $\dot{\gamma}(t)$ dans le repère (X_1, \dots, X_n) vérifient le système d'équations :

$$\begin{aligned} x_1 \frac{dy_k}{dt} &= {}^t \mathcal{Y}(\Gamma_1) \mathcal{Y} \\ & \qquad \qquad \qquad k = 2, \dots, n, \\ \varepsilon_k \frac{dy_k}{dt} &= {}^t \mathcal{Y}(\Gamma_k) \mathcal{Y} \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

et ${}^t \mathcal{Y}$ est la transposée de \mathcal{Y} et avec $\varepsilon_k = \pm 1$.

Soit ξ le champ de vecteurs sur \mathbb{R}^{2n} défini par :

$$x_1 \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{k=2}^n \varepsilon_k {}^t \mathcal{Y} \Gamma_k \mathcal{Y} \frac{\partial}{\partial y_k} \right) + {}^t \mathcal{Y} \Gamma_1 \mathcal{Y} \frac{\partial}{\partial y_1},$$

où (a_{ij}) est la matrice de passage de repère (X_1, \dots, X_n) au repère $((\partial/\partial x_1), \dots, (\partial/\partial x_n))$. Un chemin $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n - \Sigma(g)$ est une pré-géodésique si, et seulement si, ξ est tangent au relèvement $\hat{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ défini par $t \rightarrow (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$. Par suite, la projection sur \mathbb{R}^n des courbes intégrales de ξ sont des pré-géodésiques. Considérons un vecteur u de $T_0 \mathbb{R}^n$ définissant une direction de $\Gamma_0^I - \Gamma_0^G$. Les composantes (y_1, \dots, y_n) de u vérifient alors ${}^t \mathcal{Y} \Gamma \mathcal{Y} \neq 0$. Le champ de vecteurs ξ est donc non nul en u . La projection sur \mathbb{R}^n de la courbe intégrale de X passant par u est une pré-géodésique passant par 0 et tangente à u . Mais d'après la démonstration de 2), on aura $g(u, u) = 0$. Ce qui achève la démonstration de 3).

Enfin supposons qu'il existe un voisinage V de x tel que $V \cap \Sigma(g)$ soit auto-parallèle. Sans perte de généralité, on peut encore prendre $U = V = \mathbb{R}^n$ et $x = 0$. D'après la proposition 2.4.11, g induit sur chaque $\Sigma_c(g)$ une métrique pseudo-riemannienne g_c . D'après la proposition 2.4.5, la connexion g -métrique $\nabla : \Gamma(U') \times \Gamma(U') \rightarrow \Gamma(U')$, définie sur $U' = \mathbb{R}^n - \Sigma(g)$, se prolonge en une application $\bar{\nabla} : \Gamma(g) \times \Gamma(g) \rightarrow \Gamma(g)$. $\bar{\nabla}$ induit sur chaque $\Sigma_c(g)$ une connexion g_c -métrique ∇^c . Par suite, si $u \in T_0 \Sigma_c(g)$, il existe alors une géodésique $\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \Sigma_c(g)$ (relativement à ∇^c), telle que $\gamma(0) = 0$ et $\dot{\gamma}(0) = u$. Mais comme on a

$$\delta_\gamma(\dot{\gamma}) = D_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = g(\nabla_{\dot{\gamma}}^c \dot{\gamma}, \cdot),$$

on en déduit que γ est aussi une géodésique pour D et par suite $u \in \Gamma_0^G$. Si $c = 1$, avec les notations introduites plus haut, on peut choisir le repère (X_1, \dots, X_n) de sorte que $X_1 = \partial/\partial x_1$ et (X_2, \dots, X_n) tangents à $\Sigma_1(g)$. On aura alors :

$$D_{X_i} X_j(X_1) = 0 \quad \text{pour } x_1 = 0 \text{ et tout } i, j = 2, \dots, n,$$

et

$$D_{X_1} X_1(X_1) = \frac{1}{2} g(X_1, X_1) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi l'équation de Γ_0^G se réduit à $1/2 y_1^2 = 0$, ce qui achève la démonstration de 4). \square

3. Invariant global pour les pseudo-métriques singulières

3.1 Indice d'une section sur la frontière d'un compact

Soit M une variété orientée de dimension n , $\pi : F \rightarrow M$ un fibré vectoriel orienté de rang n sur M . On considère un compact connexe K d'intérieur non vide, et différent de M . On note ∂K la frontière de K . Si σ est une section non nulle de F au-dessus d'un voisinage de ∂K , il existe un prolongement $\bar{\sigma} : K \rightarrow F$ de σ ayant des singularités isolées a_1, \dots, a_p dans K . L'entier $\sum_{i=1}^p \text{ind}_{a_i} \bar{\sigma}$ ne dépend pas du choix de $\bar{\sigma}$ (cf. [8]) ($\text{ind}_{a_i} \bar{\sigma}$ étant l'indice de $\bar{\sigma}$ en a_i).

DÉFINITION 3.1.1

- 1) L'entier $\sum_{i=1}^p \text{ind}_{a_i} \bar{\sigma}$ s'appelle l'indice de σ sur ∂K et il est noté $\text{ind}_{\partial K} \sigma$.
- 2) Soit τ une autre section non singulière au-dessus d'un voisinage de ∂K . On appelle indice de σ , par rapport à τ , l'entier

$$\text{ind}_{\partial K}(\sigma, \tau) = \text{ind}_{\partial K} \sigma - \text{ind}_{\partial K} \tau.$$

Remarques

- 1) Si f est une fonction sur ∂K strictement positive (resp. négative), on a

$$\text{ind}_{\partial K} f\sigma = \text{ind}_{\partial K} \sigma \quad (\text{resp. } \text{ind}_{\partial K} f\sigma = (-1)^n \text{ind}_{\partial K} \sigma).$$

- 2) Si $F = TM$, ou $F = T^*M$, pour toute section $\sigma : \partial K \rightarrow F$, l'indice de σ sur ∂K ne dépend pas de l'orientation choisie. La section σ possède un prolongement sans singularité sur K si, et seulement si, $\text{ind}_{\partial K} \sigma$ est nul. Dans le cas particulier où K est une variété compacte à bord non vide et où $F = TM$, si σ est un champ de vecteurs transverse sur ∂K , on a $\text{ind}_{\partial K} \sigma = \chi(K)$ ($\chi(K)$ étant la caractéristique d'Euler-Poincaré de K). Dans cette situation, pour tout autre champ de vecteurs τ ne s'annulant pas sur ∂K , on aura :

$$\text{ind}_{\partial K} \tau = \text{ind}_{\partial K}(\tau, \sigma) + \chi(K).$$

Nous allons établir maintenant un résultat permettant de calculer directement l'indice de σ relativement à l'indice de τ . On considère désormais

une sous-variété compacte d'intérieur non vide N de M à bord non vide. Soit τ une section non singulière de F au-dessus de ∂N . On note T le sous-fibré de F engendré par τ . Une métrique riemannienne G sur F étant fixée, on désigne par E le sous-fibré de F au-dessus de ∂N orthogonal de T relativement à G . Le fibré E est orienté de sorte que l'orientation donnée par τ , suivie de l'orientation de E , soit positive. Étant donnée une autre section σ de F au-dessus de ∂N , on désigne par K l'ensemble des points x de ∂N tels que l'on ait $G_x(\sigma, \tau) \leq 0$. Supposons $K \neq \partial N$ et K est réunion finie de compacts connexes K_i , $1 \leq i \leq r$. Sur la frontière ∂K_i de chaque composante K_i , σ induit par projection orthogonale, une section σ_i non singulière de E .

PROPOSITION 3.1.3. — Avec les notations introduites on a :

$$\text{ind}_{\partial N}(\sigma, \tau) = - \sum_{i=1}^r \text{ind}_{\partial K_i} \sigma_i.$$

Démonstration. — Soit $p : F_1 \rightarrow N$ le fibré en sphères des sections de F de norme 1 relativement à la métrique G . On munit F_1 de l'orientation induite par celle de F . On note encore τ la section de F_1 au-dessus de ∂N induite par τ . Choisissons un voisinage collier $\varphi : \partial N \times [0, 1] \rightarrow N$ tel que pour chaque composante connexe de $V = \varphi(\partial N \times [0, 1])$ ne contiennent qu'une seule composante de ∂N . Il existe une section non singulière $\hat{\tau}$ de F_1 au-dessus de $V = \varphi(\partial N \times [0, 1])$ qui prolonge τ . On note encore E le sous-fibré de F orthogonal à $\hat{\tau}$ que l'on munit de l'orientation induite par $\hat{\tau}$. Si $q : E \rightarrow V$ est la projection, pour tout $x \in V$, la fibre $q^{-1}(x)$ partage la sphère $p^{-1}(x)$ en deux hémisphères : on note F_1^+ (resp. F_1^-) l'ensemble des $u \in p^{-1}(x)$ situés dans l'hémisphère contenant $\hat{\tau}(x)$ (resp. $-\hat{\tau}(x)$). En fait, on a :

$$F_1^+ = \left\{ u \in p^{-1}(x) \mid G(u, \hat{\tau}(x)) \geq 0 \right\}$$

$$F_1^- = \left\{ u \in p^{-1}(x) \mid G(u, \hat{\tau}(x)) \leq 0 \right\}.$$

On considère l'application $\Phi : F_1^- \rightarrow E$ qui à $u \in p^{-1}(x)$ associe la projection de u sur $q^{-1}(x)$ parallèlement à la direction définie par τ . Φ est un plongement de F_1^- dans E . L'orientation induite par Φ sur F_1^- est opposée à l'orientation induite par F sur F_1^- . Soit δ une $(n-1)$ -forme sur E représentant la classe de Thom du fibré E et dont le support est contenu dans $\{u \in E \mid G(u, u) < 1/2\}$. Le support de la $(n-1)$ -forme $\omega = \Phi^*(\delta)$

est contenu dans l'intérieur de F_1^- . On note encore ω la $(n-1)$ -forme sur E définie par :

$$\omega = \begin{cases} \Phi^*(\delta) & \text{sur } F_1^- \\ 0 & \text{sur } F_1^+. \end{cases}$$

Cette forme possède les propriétés suivantes :

$$\int_{p^{-1}(x)} \omega = \int_{p^{-1}(x) \cap F_1^-} \Phi^*(\delta) = - \int_{q^{-1}(x)} \delta = -1 \quad \text{pour tout } x \in V,$$

$$\hat{\tau}^* \omega = 0.$$

Considérons une autre section non singulière $\sigma : \partial N \rightarrow F$. On peut encore supposer que $G(\sigma, \sigma = 1)$ et, par suite, σ est aussi une section non singulière de F_1 au-dessus de ∂N . On considère une section $\hat{\sigma}$ ayant les propriétés suivantes :

$$\hat{\sigma} = \begin{cases} \sigma & \text{sur } \partial N = \Phi(\partial N \times \{0\}) \\ \hat{\tau} & \text{sur } \Phi(\partial N \times \{1\}), \end{cases}$$

$\hat{\sigma}$ n'a que des singularités isolées $(a_1, \dots, a_p) \in V$ et $(b_1, \dots, b_q) \in N - V$. On a alors :

$$\text{ind}_{\partial V} \hat{\sigma} = \sum_{i=1}^p \text{ind}_{a_i} \hat{\sigma}$$

$$\text{ind}_{\partial N} \sigma = \sum_{i=1}^p \text{ind}_{a_i} \hat{\sigma} + \sum_{j=1}^q \text{ind}_{b_j} \hat{\sigma}$$

$$\text{ind}_{\partial N} \tau = \sum_{i=1}^q \text{ind}_{b_i} \hat{\sigma}$$

On en déduit :

$$\text{ind}_{\partial N} \hat{\sigma} = \text{ind}_{\partial N} \sigma - \text{ind}_{\partial N} \tau.$$

D'autre part d'après [8], les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\text{ind}_{\partial V} \hat{\sigma} = - \int_{\partial V} \hat{\sigma}^* \omega = - \int_{\partial N} \sigma^* \omega.$$

puisque $\hat{\tau}^* \omega = 0$ sur V .

Comme le support de ω est contenu dans F_1^- , on en déduit :

$$\int_{\partial N} \sigma^* \omega = \int_K \sigma^* \omega, \quad \text{où } K = \{\xi \mid g(\tau(x), \tau(x)) \leq 0\}.$$

Soient K_i ($i = 1, \dots, r$) les composantes connexes de K . Sur la frontière ∂K_i de K_i , σ est une section de E et $\Phi \circ \sigma$ est une section de E au-dessus de K_i qui prolonge la restriction σ_i de σ à ∂K_i . On a donc :

$$\int_K \sigma^* \omega = \sum_{i=1}^r \int_{K_i} (\Phi \circ \sigma)^* \delta = \sum_{i=1}^r \text{ind}_{\partial K_i} \sigma_i. \quad \square$$

COROLLAIRE 3.1.4 ([1]). — Soit 0 un point singulier algébriquement isolé d'un polynôme homogène $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On considère la sphère S_ε de centre 0 et de rayon ε assez petit pour que $f^{-1}(0)$ soit transverse à S_ε et ne contienne que la singularité 0 de f . On note $S_- = \{x \in S_\varepsilon \mid f(x) \leq 0\}$. Alors l'indice en 0 du champ de gradient de f est égal à $1 - \chi(S_-)$.

Démonstration. — Soit $S_+ = \{x \in S_\varepsilon \mid f(x) \geq 0\}$. On a alors $Z = S_- \cap S_+ = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon$. Comme $f^{-1}(0)$ est transverse à S_ε , pour tout $x \in Z$, Z est une sous-variété de S_ε de codimension 1. Si X est le gradient de f , on a $\langle X(x), R(x) \rangle = kf(x)$, k étant le degré de f et R le champ radial. Par suite, Z est l'ensemble des points x de S_ε où X est tangent à S_ε . Considérant Z comme le bord de S_- , X est transverse à ∂S_- et il est sortant. On en déduit :

$$\begin{aligned} \text{ind}_0 &= \text{ind}_{S_\varepsilon} X = \text{ind}_{S_\varepsilon} R + \text{ind}_{S_\varepsilon} (X, R) \\ &= 1 - \text{ind}_{S_-} X \quad (\text{proposition 3.1.3}) \\ &= 1 - \chi(S_-). \quad \square \end{aligned}$$

3.2 Indice de singularité d'une sous-variété compacte d'une variété pseudo-riemannienne

Soit (N, G) une variété pseudo-riemannienne connexe, orientable, de dimension $n + 1$. Considérons une sous-variété compacte orientable M de dimension n de N . Le fibré normal $\nu(M)$ de M , relativement à G est un fibré en droites qui n'est pas toujours transverse à M . On va définir un indice de singularité de M dans N , qui va mesurer en un certain sens la rotation de ce fibré par rapport à un fibré transverse à M .

Une métrique riemannienne G_0 étant choisie sur N , il existe un automorphisme J de TM tel que

$$G(u, v) = G_0(u, J^{-1}v) \quad \text{pour tout } u, v \in T_x N.$$

Si $\nu_0(M)$ est le fibré normal à M , relativement à G_0 , alors $J[\nu_0(M)] = \nu(M)$. Les orientations sur M et N étant fixées, on considère un champ de vecteurs T normal à M (relativement à G_0) et tel que l'orientation donnée par T , suivie de l'orientation de M , soit une orientation positive de N . Soit $S = J(T)$ la section de $\nu(M)$ ainsi définie. On désigne par M_- l'ensemble des points x de M où on a $G_0(T, S) \leq 0$. Le champ de vecteurs S induit, sur la frontière ∂M_- de M_- , une section notée σ de TM au-dessus de ∂M_- .

LEMME 3.2.1. — *L'indice de σ sur ∂M_- ne dépend pas des choix de G_0 et T .*

Démonstration. — Soit $\varphi : M \times [0, 1] \rightarrow N$ un plongement tel que l'orientation induite sur $V = \varphi(M \times [0, 1])$ par $\varphi(\partial/\partial t)$ soit positive. On peut prolonger T en un champ de vecteurs sur V sans singularités (encore noté T). Soit \widehat{S} un champ de vecteurs sur V ayant les propriétés suivantes :

$$\widehat{S} = S \text{ sur } \varphi(M \times \{0\}) = M, \tag{1}$$

$$\widehat{S} = T \text{ sur } \varphi(M \times \{1\}), \tag{2}$$

$$S \text{ n'a que des singularités isolées.} \tag{3}$$

Il résulte de la démonstration 3.1.3, que l'on a :

$$\text{ind}_{\partial V}(S, T) = \text{ind}_{\partial V} \widehat{S} = -\text{ind}_{\partial M_-} \sigma.$$

Soit G_1 une autre métrique riemannienne sur N . On pose $G_s = sG_0 + (1-s)G_1$. On note T_s , un champ de vecteurs normal à M (relativement à G_s), et $S_s = J(T_s)$ la section de $\nu(M)$ comme plus haut. Si \widehat{S}_s est un champ de vecteurs sur V ayant les propriétés ci-dessus, mais relativement à G_s , l'indice de \widehat{S} sur ∂V sera constant. \square

DÉFINITION 3.2.2. — *L'indice de singularité de M dans N est l'indice de σ sur ∂M_- (avec les notations introduites précédemment) si $M_- \neq M$ et si M_- est d'intérieur non vide; sinon l'indice de singularité de M est nul.*

Cet indice dépend évidemment des orientations choisies sur M et sur N . Lorsque M borde une sous-variété compacte V de N , l'indice de singularité de M dans N est égal à $\varepsilon \text{ind}_{\partial V}(S, T)$, avec $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = -1$) si l'orientation induite par celle de N sur $M = \partial V$ est positive (resp. négative).

Par exemple, cette situation se présente lorsque $N = \mathbb{R}^{n+1}$ et lorsque G désigne la métrique pseudo-riemannienne canonique d'indice r . En effet dans ce cas, toute hypersurface compacte orientable M de \mathbb{R}^{n+1} borde une sous-variété compacte V . Munissant \mathbb{R}^{n+1} de son orientation et de sa métrique euclidienne canoniques, orientons M en tant que bord de V . L'indice de singularité de M est alors égal à $\text{ind}_{\partial V} T - \text{ind}_{\partial V} J(T)$, c'est-à-dire :

$$(1 + (-1)^r) \text{deg } \varphi,$$

où $\varphi : M \rightarrow S^n$ est l'application de Gauss de M .

Nous allons terminer ce paragraphe par l'étude de cet indice de singularité lorsque M est une sous-variété pseudo-riemannienne générique et lorsque G est localement conformément plate.

On suppose dans tout le reste de ce paragraphe, que G est localement conformément plate et que M est une sous-variété compacte, connexe, générique et orientée de M . On suppose de plus, que si l'ensemble singulier $\Sigma_{1,k}(g)$ est non vide, le lieu singulier de la pseudo-métrique g_k induite par G sur $\Sigma_{1,k}(g)$ est égal à $\Sigma_{1,k+1}(g)$ pour $0 \leq k \leq n-1$ (cf. § 1.3).

On pose alors :

$$\Sigma_{1,k} 0(g) = \Sigma_{1,k}(g) - \Sigma_{1,k+1}(g).$$

Par construction, $\Sigma_{1,k}(g)$ est une sous-variété de $\Sigma_{1,k+1}(g)$ de codimension 1. On va calculer l'indice de singularité de M en fonction des caractéristiques d'Euler-Poincaré de certaines composantes connexes de $\Sigma_{1,k} 0(g)$ pour $0 \leq k \leq n$.

Avec les notations introduites en début de paragraphe, remarquons que $\Sigma(g) = \Sigma_{1,1}(g)$ est l'ensemble des points de M , où le champ de vecteurs S est tangent à M . Par suite, $G_0(S, T)$ garde un signe constant sur chaque composante connexe de $M - \Sigma(g) = \Sigma_{1,0} 0$. Désignons par $\Sigma_{1,0}^-(g)$ l'ensemble des x de M où l'on a : $G_0(S, T) \leq 0$. L'ensemble $\Sigma_{1,0}^-(g)$ est une sous-variété compacte de M dont le bord est $\Sigma(g) = \Sigma_{1,1}(g)$; c'est la réunion de l'adhérence de certaines composantes connexes de $M - \Sigma(g)$.

D'une manière générale, supposons que l'on ait défini $\Sigma_{1_{k-1}0}^-(g)$ de sorte que :

- $\Sigma_{1_k}(g)$ soit le bord de cette variété compacte;
- $\Sigma_{1_{k+1}}(g)$ soit l'ensemble des points de $\Sigma_{1_k}(g)$, où S est tangent;
- $\Sigma_{1_k0}(g)$, S soit transverse au bord de $\Sigma_{1_{k-1}0}^-(g)$.

On désigne alors par $\Sigma_{1_k0}^-(g)$ l'adhérence de l'ensemble des points du bord de $\Sigma_{1_{k-1}0}^-(g)$, où S est rentrant. Il résulte alors de la proposition suivante.

PROPOSITION 3.2.3. — *Avec les hypothèses et notations précédentes, l'indice de singularité de M dans N est égal à :*

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \chi(\Sigma_{1_k0}^-(g)),$$

où $\chi(\cdot)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré.

Lorsque G est la métrique de Minkowski sur \mathbb{R}^{n+1} pour toute hypersurface M compacte, connexe, orientable, l'ensemble $\Sigma_{1_00}^-(g)$ s'identifie à l'ensemble M_0 des points de M , où la métrique induite par G est riemannienne. Si M est générique et $M_0 \neq M$, l'adhérence $\overline{M_0}$ est une variété compacte à bord non vide. De la proposition 3.2.3, on déduit alors le résultat suivant.

COROLLAIRE 3.2.4. — *Avec les hypothèses précédentes, si G est non dégénérée en restriction à $\partial\overline{M_0}$, les entiers suivants sont égaux :*

- 1) l'indice de singularité de M ;
- 2) $\chi(\overline{M_0})$;
- 3) $2\chi(V)$, où V est la sous-variété compacte de \mathbb{R}^{n+1} bordée par M .

Si de plus n est pair, cet entier est égal à $\chi(M)$.

3.3. Ensembles localement sous-analytiques

Soit Σ un sous-ensemble d'une variété M de dimension n .

DÉFINITION 3.3.1. — *On dit que Σ est localement analytique, s'il existe un voisinage V de Σ dans M , et une fonction $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

$$\varphi^{-1}(0) = \Sigma.$$

Pour tout a de Σ , il existe une carte (U, Φ) contenant a telle que $\Phi(a) = 0$ et telle que $\varphi \circ \Phi^{-1}$ soit analytique.

On dira que φ est une fonction de définition de Σ .

Si Σ est une sous-variété fermée de M de codimension $p > 0$, alors Σ est localement analytique. En effet si d désigne la fonction distance (associée à une métrique riemannienne quelconque sur M), posons $\varphi(x) = [d(x, \Sigma)]^2$. Pour tout a de Σ , il existe un système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) sur un voisinage U de a dans lequel φ s'écrit $x_1^2 + \dots + x_p^2$.

On verra dans le paragraphe 3.4 que :

- le lieu singulier d'une pseudo-métrique générique,
- le lieu singulier d'une 2-forme différentielle générique sur M ,
- le lieu singulier d'une application générique de M dans une variété N ,
- le lieu singulier d'un morphisme générique de fibrés vectoriels, etc.

sont des ensembles localement analytiques.

Dans tout le reste de ce paragraphe, Σ désigne un ensemble analytique et compact de M .

LEMME 3.3.2. — Soit $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de définition de Σ . Il existe un voisinage V de Σ contenu dans W ayant les propriétés suivantes :

- 1) pour tout t ($0 < t < \varepsilon$), V contient un nombre fini de composantes connexes de $\{x \in W \mid \varphi(x) = t\}$;
- 2) chacune de ces composantes connexes est une sous-variété compacte de M (de codimension 1);
- 3) pour tout t ($0 < t < \varepsilon$), $V_t = \{x \in V \mid \varphi(x) \leq t\}$ est une sous-variété compacte de dimension n à bord, dont chaque composante connexe ne contient qu'une seule composante connexe de Σ .

Ce lemme est une conséquence de l'inégalité de Lojasiewicz ([18], par exemple). C'est d'ailleurs dans ce résultat essentiel pour la suite, que l'hypothèse d'analyticité sur la fonction φ est nécessaire.

Dans les hypothèses du lemme 3.3.2, on dira que V est un voisinage de Σ adapté à φ . On notera \mathcal{F}_φ le feuilletage de V défini par les composantes connexes de $\varphi^{-1}(t)$ contenues dans V pour $0 < t < \varepsilon$.

Remarque. — L'hypothèse de compacité sur Σ n'implique pas la compacité de $\{x \in W \mid \varphi(x) \leq t\}$ pour t assez petit. En effet, sur \mathbb{R}^2 considérons $\varphi(x, y) = x^2(xy - 1)^2 + y^2$. On a $\varphi^{-1}(0) = (0, 0)$. Cependant,

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x, y) \leq t\}$ contient $\{(x, 1/x) \mid x^2 > t\}$ qui n'est pas compact!

Étant données deux fonctions de définition de Σ , $\varphi_i : W_i \rightarrow \mathbb{R}^+$ ($i = 1, 2$) d'un voisinage W_i de Σ , on considère un voisinage V_i adapté à φ_i (lemme 3.3.2). Pour $0 < t < \varepsilon_i$, on note :

$$L_i(t) = \{x \in V \mid \varphi_i(x) = t\} \quad \text{et} \quad V_i(t) = \{x \in V \mid \varphi_i(x) \leq t\} \quad (i = 1, 2).$$

Comme dans [23], on démontre la proposition 3.3.3.

PROPOSITION 3.3.3. — *Avec les hypothèses précédentes, pour tout $0 < t_1 < \varepsilon_1$ et $0 < t_2 < \varepsilon_2$, il existe une homotopie h_s de $V_1 - \Sigma$ dans $V_2 - \Sigma$ ($0 \leq s \leq 1$), telle que h_s soit un difféomorphisme,*

$$h_0 = \text{Id} \quad \text{et} \quad h_1[V_1(t_1) - \Sigma] = V_2(t_2) - \Sigma.$$

Remarque. — Il résulte de la proposition 3.3.3 que le type topologique de $L(t) = \varphi^{-1}(t)$ est indépendant du choix de φ , pour t assez petit.

3.4 Lieu singulier d'un morphisme de fibrés vectoriels

Dans tout ce paragraphe, M est une variété de dimension n , E et F sont deux fibrés vectoriels sur M de rang n . Dans tout ce paragraphe, on note E_S (resp. F_S) la restriction à un sous-ensemble S de M du fibré E (resp. F).

DÉFINITION 3.4.1. — *On appelle isomorphisme singulier de E dans F de lieu singulier Σ tout morphisme A de E dans F , dont la restriction à $M - \Sigma$ est un isomorphisme au-dessus de l'identité (Σ étant un sous-ensemble, éventuellement vide, de M). On dit alors que Σ est le lieu singulier de A et on le note $\Sigma(A)$.*

La différentielle Tf d'une fonction $f : M \rightarrow M$ est un morphisme de TM dans TM et on a $\Sigma(Tf) = \Sigma(f)$. Comme on l'a déjà vu, toute pseudo-métrique g sur M induit un morphisme $g^b : TM \rightarrow T^*M$ dont le lieu singulier est $\Sigma(g)$. De manière analogue, une 2-forme ω induit aussi un morphisme $\omega^b : TM \rightarrow T^*M$ dont le lieu singulier est $\Sigma(\omega)$. Nous allons montrer que pour chacun de ces objets, dans la situation générique, le lieu singulier est localement analytique. Aussi il est nécessaire d'introduire d'abord quelques notations.

On désigne par :

- $\mathcal{M}(E, F)$ l'ensemble des morphismes de E dans F ;
- si $F = E^*$, $\mathcal{S}(E)$ (resp. $\mathcal{A}(E)$) l'ensemble des morphismes de E dans E^* qui sont symétriques (resp. antisymétriques) relativement au crochet de dualité entre E et E^* ;
- $\mathcal{X}(M)$ l'un des ensembles précédents ;
- $\Sigma_c(M)$ indifféremment, l'ensemble des morphismes de $\mathcal{X}(M)$ dont le rang est $n - c$;
- $\mathcal{M}(n)$, $\mathcal{S}(n)$, $\mathcal{A}(n)$ l'ensemble des matrices réelles carrées, symétriques, antisymétriques respectivement, d'ordre n et $\mathcal{X}(n)$ l'un de ces ensembles.
- $\Sigma_c(n)$ l'ensemble des matrices de rang $n - c$ appartenant à $\mathcal{X}(n)$.

Rappelons que $\Sigma_c(M)$ est un fibré sur M de fibre type s'identifiant à $\Sigma_c(n)$ et que le morphisme A est générique, s'il est transverse à la stratification de $\mathcal{X}(M)$ ainsi construite. Avec ces notations on a les résultats qui suivent.

PROPOSITION 3.4.2. — *Soit A un morphisme générique de $\mathcal{X}(M)$; alors le lieu singulier de A est localement analytique.*

COROLLAIRE 3.4.3. — *Le Lieu singulier d'une application générique de M dans M , d'une pseudo-métrique générique sur M , d'une 2-forme (éventuellement fermée) générique sur M est localement analytique.*

Démonstration de la proposition 3.4.2. — Soit a un point de $\Sigma(A)$ et $\Sigma_c(A)$ la strate contenant a . On considère un système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) sur un voisinage U de a et on suppose que E et F sont trivialisables au-dessus de U . Des champs de repères (X_1, \dots, X_n) et (Y_1, \dots, Y_n) sur U trivialisant E et F respectivement étant fixés. A s'identifie alors à un champ de matrices de $\mathcal{X}(n)$ sur U que l'on note encore A . Par hypothèse, A est transverse à $\Sigma_c(A)$ en a . On note N_c l'ensemble des couples $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ (resp. avec $1 \leq i < j \leq n$), (resp. avec $1 \leq i < j \leq n$) si $\mathcal{X}(M) = \mathcal{M}(E, F)$, (resp. $\mathcal{S}(E)$), (resp. $\mathcal{A}(E)$). Le cardinal de N est alors égal à la codimension ν_c de $\Sigma_c(n)$. Soit $\tau : N_c \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ une injection. On note B le champ de matrice sur U suivant :

$$B \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

où $T = (t_{ij})$ est une $\nu_c \times \nu_c$ -matrice avec $t_{ij} = x_{\tau(i,j)}$; où I est la $(n - \nu_c) \times (n - \nu_c)$ -matrice identité.

On vérifie que B possède les propriétés suivantes : $B(a)$ appartient à $\Sigma_c(n)$ et lui est transverse en a . Si $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ est le difféomorphisme défini par (x_1, \dots, x_n) alors $P = \det(B \circ \Phi)$ est un polynôme homogène de degré ν_c sur \mathbb{R}^n .

D'après [31] ou [21], il existe un difféomorphisme Ψ d'un voisinage U de a dans V avec $\Psi(a) = a$ et deux champs de matrices inversibles L et R sur V , tels que :

$$A \circ \Psi = L \circ B \circ R.$$

Par suite, on a :

$$\det(A \circ \Psi) = \det L \times \det B \times \det R.$$

D'autre part, soit Ω (resp. Ω') une n -forme qui définit l'orientation sur E (resp. F). Considérons la fonction φ sur M caractérisée par $A^*\Omega' = \varphi\Omega$. On a évidemment $\Sigma(A) = \varphi^{-1}(0)$ et, sur U , φ est égal à :

$$\frac{\Omega'(Y_1, \dots, Y_n)}{\Omega(X_1, \dots, X_n)} \times \det A.$$

Il existe donc une fonction non nulle λ sur \mathbb{R}^n telle que :

$$\varphi \circ \Psi \circ \Phi = \lambda P.$$

D'après [4], on aura un difféomorphisme Θ de \mathbb{R}^n , fixant l'origine, et tel que :

$$\varphi \circ \Psi \circ \Phi \circ \Theta = P.$$

L'application φ^2 vérifie alors les propriétés de la définition 3.3.1. \square

3.5 Invariants d'un isomorphisme singulier de fibré vectoriel

Dans tout ce paragraphe, E et F sont des fibrés vectoriels orientés de rang n sur une variété orientée M de dimension n . Si N est un ouvert de M , on note encore E_N et F_N les restrictions respectives des fibrés E et F à N . On utilisera la convention suivante : si A est un isomorphisme de E_N dans F_N , où N est un ouvert connexe de M , $\varepsilon_N = +1$ (resp. $\varepsilon_N = (-1)^n$) si A conserve (resp. inverse) les orientations au-dessus de N .

À partir de l'indice d'une section sur le bord d'un compact (§ 3.1), nous allons pouvoir attacher des invariants numériques aux isomorphismes singuliers de E dans F , dont le lieu singulier est localement analytique et compact. La proposition suivante va nous permettre de définir les invariants numériques annoncés.

PROPOSITION 3.5.1. — Soit $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de définition de $\Sigma(A)$. Considérons une composante connexe V d'un voisinage de $\Sigma(A)$ adapté à φ , contenant une composante connexe Σ de $\Sigma(A)$. On note $V(t)$ la variété compacte à bord $\varphi^{-1}([0, t])$ pour $0 < t < \varepsilon$. Si X est une section quelconque de E_V , on note $A(X)$ la section F_V image par A .

a) Si $A : E_{V-\Sigma} \rightarrow F_{V-\Sigma}$ préserve ou inverse globalement l'orientation pour toute section non singulière T de $E_{V-\Sigma}$, l'entier :

$$\text{ind}_{\partial V(t)} A(T) - \varepsilon_{(V-\Sigma)} \text{ind}_{\partial V(t)} T$$

est indépendant des choix de T , φ et t .

Étant donnée une autre section non singulière T' de $E_{V-\Sigma}$, on a :

$$\text{ind}_{\partial V(t)} A^{-1} - \varepsilon_{(V-\Sigma)} \text{ind}_{\partial V(t)} T' = -\varepsilon_{(V-\Sigma)} \text{ind}_{\partial V(t)} A(T) + \text{ind}_{\partial V(t)} T.$$

b) Si $E = TM$ et si T est un champ de vecteurs sur V transverse à $\partial V(t)$ et sortant pour tout $0 < t < \varepsilon$, l'entier $\text{ind}_{\partial V(t)} A(T)$ est indépendant des choix de φ , T et t ; par ailleurs, on a $\text{ind}_{\partial V(t)} T = \chi(\Sigma)$ la caractéristique d'Euler de Σ .

c) Si $E = T^*M$, l'entier $\text{ind}_{\partial V(t)} A(d\varphi)$ est indépendant des choix de φ et t , et on a $\text{ind}_{\partial V(t)}(d\varphi) = \chi(\Sigma)$.

DÉFINITION 3.5.2. — Avec les notations introduites précédemment, notons les conditions suivantes.

1) Si $A : E_{V-\Sigma} \rightarrow F_{V-\Sigma}$ conserve ou préserve globalement l'orientation, on appelle indice de singularité sur Σ l'entier $\text{ind}_{\partial V(t)} A(S)$ où S est une section non singulière de E_V et on le note $\text{deg}_{\Sigma} A$. S'il existe un voisinage U de $\Sigma(A)$ tel que sur chaque composante connexe U_i de U :

$$A : E_{(U_i-\Sigma(A))} \rightarrow F_{(U_i-\Sigma(A))}$$

conserve ou inverse globalement l'orientation, on appelle degré (total) de singularité de A la somme des indices de singularité sur chacune des composantes connexes de $\Sigma(A)$.

- 2) Si $E = TM$, on appelle indice de singularité de A sur Σ l'entier $\text{ind}_{\partial V(t)} A(T)$, où T est un champ de vecteurs transverse à $\partial V(t)$ sortant, et on le note $\text{ind}_{\Sigma} A$. On appelle indice total de singularité de A la somme des indices de singularités de A sur toutes les composantes connexes de $\Sigma(A)$.
- 3) Si $E = T^*M$, on appelle indice de singularité de A l'entier $\text{ind}_{\partial V(t)} A(d\varphi)$ et on le note $\text{ind}_{\Sigma} A$. On appelle indice (total) de singularité de A la somme des indices de singularité de A sur toutes les composantes connexes de $\Sigma(A)$.

Exemple 1. — Supposons que $\Sigma(A)$ ait une composante connexe réduite à un point a isolé. Soit U un voisinage de a au-dessus duquel E et F sont trivialisables. Comme $U - \{a\}$ est connexe, $A : E_{U-\{a\}} \rightarrow F_{U-\{a\}}$ conserve ou inverse l'orientation. On identifie E_U à $U \times E_a$ et F_U à $U \times F_a$. Soit S_a le bord d'une boule contenue dans U (relativement à une métrique riemannienne par exemple). On note S_F la sphère unité dans F_a . On considère l'application $\hat{A} : S_a \rightarrow S_F$ définie par

$$\hat{A}(x) = \frac{A(T)}{\|A(T)\|} (x),$$

où T est une section non singulière de E_U . On a alors :

$$\text{deg}_a A = \text{deg } \hat{A}$$

(S_a et S_F étant munies de l'orientation induite par celle de M et F respectivement). Si de plus $E = TM$, il résulte de la proposition 3.5.1 :

$$\text{deg}_a A = \text{ind}_a A - \varepsilon_{(U-\{a\})}.$$

L'exemple type de cette dernière situation est l'application de \mathcal{C}^2 dans $\mathcal{C}^2 : z \rightarrow z^p$. Si A est la différentielle de cette application $\text{ind}_a = p$ et $\text{deg}_a A = p - 1$.

Exemple 2. — Soit D le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 dans \mathbb{R}^2 . On considère le champ radial

$$R = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad X = \frac{\partial}{\partial x}.$$

On définit l'isomorphisme singulier $A_\varepsilon : T\mathbb{R}^2 \rightarrow T\mathbb{R}^2$, $\varepsilon = \pm 1$ par :

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \text{Id} \quad \text{au-dessus de } \mathbb{R}^2 - D, \\ A_\varepsilon(R) &= \varepsilon X \text{ et } A_\varepsilon(R_1) = X_1 \quad \text{au-dessus de } \overset{\circ}{D} - \{0\}, \end{aligned}$$

où R_1 et X_1 sont les champs de vecteurs orthogonaux à R et X respectivement, de sorte que les orientations (R, R_1) et (X, X_1) soient positives. Si Σ désigne le bord de D , le lieu singulier de A est $\Sigma \cup \{0\}$. Considérons la fonction φ définie par $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Le champ de vecteurs $T = d\varphi(R)$ est transverse au bord $\partial V(t)$ de $V(t) = \varphi^{-1}([-t, t])$ pour $0 < t < 1$, et on déduit :

$$A_\varepsilon(T) = \begin{cases} tR & \text{sur } \varphi^{-1}(t), \\ -t\varepsilon X & \text{sur } \varphi^{-1}(-t), \end{cases}$$

$$\text{ind}_\Sigma A = 1 \quad \text{et} \quad \text{ind}_a A = 0.$$

D'autre part, remarquons que R et X sont deux champs de vecteurs sans singularité sur $V(t)$, et on a :

$$A_\varepsilon(X) = \begin{cases} X & \text{au-dessus de } \mathbb{R}^2 - D, \\ \varepsilon x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} & \text{au-dessus de } \overset{\circ}{D} - \{0\}. \end{cases}$$

Il en résulte que :

$$\text{ind}_{\partial V(t)} A_\varepsilon(R) = 1 \quad \text{et} \quad \text{ind}_{\partial V(t)} A_\varepsilon(X) = \varepsilon.$$

Conformément à la proposition 3.5.1 a) :

$$\text{ind}_{\partial V(t)} A_\varepsilon(R) = \text{ind}_{\partial V(t)} A_\varepsilon(X) = \text{deg}_\Sigma A_\varepsilon \quad \text{si } \varepsilon = 1,$$

c'est-à-dire si A_ε conserve l'orientation. Mais

$$\text{ind}_{\partial V(t)} A_\varepsilon(R) \neq \text{ind}_{\partial V(t)} A_\varepsilon(X) \quad \text{si } \varepsilon = -1,$$

c'est-à-dire si A_ε inverse l'orientation.

Pour la démonstration de la proposition 3.5.1, établissons d'abord le lemme suivant.

LEMME 3.5.3. — Soient A un isomorphisme singulier de E dans F , de lieu singulier non vide Σ , et V une variété compacte connexe de dimension n à bord ∂V non vide et disjoint de Σ . Si X est une section non singulière de E au-dessus de ∂V , on note $A(X)$ la section image de F .

- a) Les entiers $\text{ind}_{\partial V(t)} X$ et $\text{ind}_{\partial V(t)} A(X)$ sont indépendants de t et φ .
 b) Si $\Sigma \cap V$ est vide, pour toute section non singulière de E au-dessus de ∂V , on a :

$$\text{ind}_{\partial A} A(X) = \varepsilon_{\partial V} \text{ind}_{\partial V} X .$$

- c) Soient X et X' deux sections non singulières de E au-dessus de ∂V .

Étant donnée une métrique riemannienne g sur E , on désigne par K_i ($i = 1, \dots, p$) les composantes connexes de l'ensemble des x de ∂V vérifiant $g_x(X, X') < 0$ et par ∂K_i l'adhérence de K_i dans ∂V ($i = 1, \dots, p$). Notons E_0 le fibré orthogonal à X' dans $E_{\partial V}$. Sur ∂K_i , la section X induit une section X_i du sous-fibré E_0 . Avec ces notations :

$$\text{ind}_{\partial V} A(X) = \varepsilon_{\partial V} \text{ind}_{\partial V} A(X') - \sum_{i=1}^p \varepsilon_{\partial K_i} \text{ind}_{\partial V} X_i .$$

- d) Si $A : A_{\partial V} \rightarrow F_{\partial V}$ conserve ou inverse globalement l'orientation :

$$\text{ind}_{\partial V} A(X) - \varepsilon_{\partial V} \text{ind}_{\partial V} X = \text{ind}_{\partial V} A(T) - \varepsilon_{\partial V} \text{ind}_{\partial V} T .$$

- e) Si $E = TM$ et T est un champ de vecteurs transverse à ∂V et sortant, l'entier $\text{ind}_{\partial V} A(T)$ ne dépend pas du choix de T .

Démonstration du lemme

- a) Soient $\varphi_i : W_i \rightarrow \mathbb{R}^+$ ($i = 1, 2$) des fonctions de définition de $\Sigma(A)$ et V_i la composante connexe d'un voisinage adapté à φ_i contenant la composante connexe Σ de $\Sigma(A)$. On note $V_i(t)$ la variété compacte à bord $\varphi^{-1}([0, t])$ pour $0 < t < \varepsilon_i$ (lemme 3.3.2), $i = 1, 2$. Les réels $0 < t_i < \varepsilon_i$ étant fixés, il existe une isotopie h_s de $V_1 - \Sigma$ dans $V_2 - \Sigma$, telle que h_s soit un difféomorphisme, avec $h_0 = \text{Id}$ et $h_1 = [M_1(t_1) - \Sigma] = V_2(t_2) - \Sigma$ (proposition 3.3.3). Désignons par N_s la variété compacte à bord définie par l'adhérence de $h_s[V_1(t_1) - \Sigma]$. On $N_0 = V_1(t_1)$ et $N_1 = V_2(t_2)$. Considérons une section non singulière de X de E au-dessus de V_1 .

Quelques propriétés géométriques des variétés pseudo-riemanniennes singulières

Soit $q : F_1 \rightarrow M$ un fibré en sphères associé à F , muni de l'orientation induite par celle de F . On considère une n -forme Ω sur M représentant la classe d'Euler de F . Il existe une $(n-1)$ -forme ω sur F_1 telle que :

$$\int_{q^{-1}(x)} \omega = -1 \quad \text{et} \quad d\omega = q^*\Omega.$$

Soit τ une section non singulière de F au-dessus de $\bigcup_{0 \leq s \leq 1} N_s$. Alors :

$$\text{ind}_{\partial N_s} A(X) = \int_{\partial N_s} \tau^*\omega - \int_{\partial N_s} \sigma^*\omega,$$

où σ est la section de F induite par Y . Par suite

$$\text{ind}_{\partial N_s} Y = \int_{\partial N_0} h_s^*(\tau^*\omega) - \int_{\partial N_0} h_s^*(\sigma^*\Omega).$$

Cet entier est donc constant et on a ainsi :

$$\text{ind}_{\partial N_s} A(X) = \text{ind}_{\partial N_0} A(X).$$

Par raisonnement analogue, on montre un résultat identique pour X .

b) Puisque V est connexe, et $V \cap \Sigma$ est non vide, $A : E_V \rightarrow F_V$ est un isomorphisme qui préserve ou inverse l'orientation. Soit X une section non singulière de E au-dessus de ∂V . Il existe un prolongement \widehat{X} de X à V n'ayant qu'une singularité isolée en $a \in V$. Alors :

$$\text{ind}_{\partial V} X = \text{ind}_{\partial} \widehat{X} = \varepsilon_V \text{ind}_a A(\widehat{X}) = \varepsilon_{\partial V} \text{ind}_{\partial V} A(X).$$

c) Considérons un voisinage collier $\varphi : \partial V \times [0, 1] \rightarrow V$ ayant les propriétés suivantes : chaque composante connexe W_i de $W = \varphi(\partial V \times [0, 1])$ ne contient qu'une seule composante connexe ∂V_i de ∂V ($i = 1, \dots, m$). La restriction de A à $E_W \rightarrow F_W$ est un isomorphisme (non singulier).

Sur chaque composante connexe W_i , $A : E_{W_i} \rightarrow F_{W_i}$ est donc un isomorphisme qui préserve ou inverse l'orientation. Soient X et X' deux sections non singulières de $E_{\partial V}$. On peut prolonger X en une section de E_W , sans singularité, encore notée X . On considère alors une section \widehat{X} de E_V caractérisée par :

$$\widehat{X} = \begin{cases} X' & \text{sur } \partial V = \varphi(\partial v \times \{0\}) \\ X & \text{sur } \varphi(\partial V \times \{1\}). \end{cases}$$

\widehat{X} n'a que des singularités isolées $a_i \in W_i$ ($i = 1, \dots, m$) et $b_j \in V - W$ ($j = 1, \dots, q$). On aura alors :

$$\text{ind}_{\partial V} X' - \text{ind}_{\partial V} X = \sum_{i=1}^m \text{ind}_{\partial W_i} \widehat{X}.$$

D'autre part, A étant un isomorphisme au-dessus de W , on a aussi :

$$\text{ind}_{\partial W_i} A(X') = \varepsilon_{\partial W_i} \text{ind}_{\partial W_i} \widehat{X}.$$

D'après a), on en déduit donc :

$$\text{ind}_{\partial V} X' - \text{ind}_{\partial V} X = \sum_{i=1}^m \text{ind}_{\partial W_i} \widehat{X}.$$

Si $A : E_{\partial W} \rightarrow F_{\partial W}$ conserve ou inverse globalement l'orientation, tous les $\varepsilon_{\partial W_i}$ étant égaux, on obtient :

$$\text{ind}_{\partial V} A(X) - \varepsilon_V \text{ind}_{\partial V} X = \text{ind}_{\partial V} A(X') - \varepsilon_V \text{ind}_{\partial V} X'.$$

Dans le cas général, munissons E_W d'une métrique riemannienne g et notons E_0 le fibré orthogonal à X . On oriente E_0 de sorte que l'orientation de E_W donnée par X suivie de celle de E_0 soit positive. Enfin, soit H_i l'adhérence de l'ensemble des x de ∂W_i pour lesquels on a $g_x(X, \widehat{X}) < 0$. Sur la frontière ∂H_i de H_i , X' induit une section non nulle X'_i de E_0 . Il résulte alors de la démonstration de la proposition 3.1.3 :

$$\text{ind}_{\partial W_i} \widehat{X} = -\text{ind}_{\partial H_i} X'_i;$$

ce qui achève la démonstration de c) et d).

e) Supposons que $E = TM$ et soient T et T' deux champs de vecteurs transverses à ∂V et sortants. Le champ de vecteurs $T_s = sT + (1-s)T'$, pour $0 \leq s \leq 1$, est aussi transverse à ∂V et sortant. $A(T_s)$ est une section de $F_{\partial V}$ non singulière. L'entier $\text{ind}_{\partial V} A(T_s)$ est donc constant (voir démonstration de a)); ce qui achève la démonstration de e). \square

Remarque. — Comme Σ est localement analytique, il existe un ouvert dense Σ_0 dans Σ qui est une sous-variété de M . Si $\text{codim } \Sigma_0 > 1$, alors $V - \Sigma$ est connexe. Il en résulte que $A : E_{V-\Sigma} \rightarrow F_{V-\Sigma}$ est un isomorphisme qui conserve ou inverse globalement l'orientation et l'entier $\text{ind}_{\partial V} A(X) - \varepsilon_V \text{ind}_{\partial V} X$ ne dépend pas du choix de la section non singulière X de E_V .

Démonstration de la proposition 3.5.1

a) Si $A : E_{V-\Sigma} \rightarrow F_{V-\Sigma}$ préserve ou conserve globalement l'orientation, il résulte du lemme 3.4.3, que l'entier :

$$\text{ind}_{\partial V(t)} A(T) - \varepsilon_{(V-\Sigma)} \text{ind}_{\partial V(t)} T$$

est indépendant des choix de φ , t et de la section T . On a un résultat analogue pour :

$$\text{ind}_{\partial V(t)} A^{-1}(T') - \varepsilon_{(V-\Sigma)} \text{ind}_{\partial V(t)} T'.$$

D'autre part, pour toute section T de $E_{V-\Sigma}$:

$$\begin{aligned} \text{ind}_{\partial V(t)} T - \varepsilon_{(V-\Sigma)} \text{ind}_{\partial V(t)} A(T) &= \\ &= \text{ind}_{\partial V(t)} A^{-1} \circ A(T) - \varepsilon_{(V-\Sigma)} \text{ind}_{\partial V(t)} A(T) \\ &= \text{ind}_{\partial V(t)} A^{-1}(T') - \varepsilon_{(V-\Sigma)} \text{ind}_{\partial V(t)} T'; \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de a) puisque $T' = A(T)$ est une section non singulière de $F_{V-\Sigma}$.

b) Supposons que $E = TM$. On remarque d'abord qu'il existe toujours un champ de vecteurs T sur $V - \Sigma$ transverse à $\partial V(t)$ et sortant, pour tout $(0 < t < \varepsilon)$. Si T' est un autre champ de vecteurs transverse à $\partial V(t)$ et sortant en remplaçant X par $X_s = sT + (1-s)T'$ comme dans la démonstration du lemme 3.4.3 a), on montre que l'indice de $A(T)$ sur $\partial V(t)$ ne dépend pas des choix de φ et t pour t assez petit. De plus, on a $\text{ind}_{\partial V(t)} X = \chi(V(t))$.

De plus, comme φ est non dégénérée sur $V - \Sigma$, le gradient de $(-\varphi)$ (relativement à une métrique riemannienne quelconque), permet de définir une déformation par rétraction de $V(t)$ sur Σ . Il en résulte que $\chi(\Sigma) = \chi(V(t))$.

c) Supposons que $E = T^*M$. Choisissons une métrique riemannienne G sur M et on note $G^b : TM \rightarrow T^*M$ l'isomorphisme associé. Le champ de vecteurs $T = (G^b)^{-1}(d\varphi)$ est non nul, transverse à $\partial V(t)$ et sortant; par suite :

$$\text{ind}_{\partial V(t)} d\varphi = \text{ind}_{\partial V(t)} T = \chi(\Sigma)$$

d'après le lemme 3.4.2 b) et le résultat précédent. Par ailleurs :

$$\text{ind}_{\partial V(t)} A(d\varphi) = \text{ind}_{\partial V(t)} A \circ G^b(T)$$

et cet entier est indépendant des choix de φ et t (d'après 3.4.1 b)).

Maintenant, si \widehat{G} est une autre métrique riemannienne, on aura :

$$\begin{aligned} \text{ind}_{\partial V(t)} A \circ \widehat{G}^b(\widehat{T}) &= \text{ind}_{\partial V(t)} A \circ G^b \circ (\widehat{G}^b)^{-1} \circ \widehat{G}^b(\widehat{T}) \\ &= \text{ind}_{\partial V(t)} A \circ G^b(T), \end{aligned}$$

où $\widehat{T} = (\widehat{G}^b)^{-1}(d\varphi)$. \square

Pour terminer ce paragraphe, nous allons établir quelques relations existant entre les invariants définis plus haut.

PROPOSITION 3.5.4

a) Lorsque $E = F = TM$ ou $E = F = T^*M$, on a :

$$\text{ind}_{\Sigma} A - \text{ind}_{\Sigma} A^{-1} = \text{deg}_{\Sigma} A^2 = \text{ind}_{\Sigma} A^2 - \chi(\Sigma).$$

b) Si $A : E_{V-\Sigma} \rightarrow F_{V-\Sigma}$ conserve ou inverse globalement l'orientation, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \text{deg}_{\Sigma} A^{-1} &= -\varepsilon_{(V-\Sigma)} \text{deg}_{\Sigma} A \\ \text{deg}_{\Sigma} A &= \text{ind}_{\Sigma} A - \varepsilon_{(V-\Sigma)} \chi(\Sigma), \end{aligned}$$

si $E = TM$ ou $E = T^*M$. Lorsque $E = F = TM$ ou $E = F = T^*M$, on a :

$$\text{ind}_{\Sigma} A^{-1} = -\varepsilon_{(V-\Sigma)} \text{ind}_{\Sigma} A + (1 + \varepsilon_{(V-\Sigma)} \chi(\Sigma)).$$

Démonstration de la proposition 3.5.4

a) On reprend les notations de la proposition 3.5.1 :

$$\begin{aligned} \text{ind}_{\Sigma} A^{-1} - \text{ind}_{\Sigma} A^{-1} &= \text{ind}_{\partial V(t)} A(T) - \text{ind}_{\partial V(t)} A^{-1}(T) \\ &= \text{ind}_{\partial V(t)} A^2[A^{-1}(T)] - \text{ind}_{\partial V(t)} A^{-1}(T). \end{aligned}$$

Comme $A^2 : E_{V-\Sigma} \rightarrow F_{V-\Sigma}$ conserve toujours l'orientation :

$$\begin{aligned} \text{ind}_{\partial V(t)} A^2[A^{-1}(T)] - \text{ind}_{\partial V(t)} A^{-1}(T) &= \text{deg}_{\Sigma} A^2 \\ &= \text{ind}_{\partial V(t)} A^2(T) - \text{ind}_{\partial V(t)} T \\ &= \text{ind}_{\Sigma} A^2 - \chi(\Sigma). \end{aligned}$$

L'affirmation b) de la proposition 3.5.4 résulte du lemme 3.5.3 et de la démonstration de la partie c) de la proposition 3.5.1. \square

3.6 Indice de singularité d'une pseudo-métrique dont le lieu singulier est localement analytique

Soit g une pseudo-métrique sur une variété M orientable de dimension n . On dit que g possède un *lieu singulier localement analytique*, si $\Sigma(g)$ est localement analytique (définition 3.3.1).

Dans tout ce paragraphe, la pseudo-métrique g est fixée; on suppose que g possède un lieu singulier localement analytique et que $\Sigma(g)$ est compacte. Rappelons que dans ce cas, il existe un voisinage V de $\Sigma(g)$ et une fonction $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $\varepsilon > 0$ ayant les propriétés suivantes (lemme 3.3.2) :

- a) chaque composante connexe de V contient une seule composante connexe de $\Sigma(g)$;
- b) la restriction de F à chaque composante connexe de $V - \Sigma(g)$ est une submersion sur $]0, \varepsilon[$.

On dit alors que V est un *voisinage de $\Sigma(g)$ adapté à φ* . On note alors $V_{1,t}, \dots, V_{p,t}$ les composantes connexes de la variété compacte à bord :

$$V_t = \{x \in V \mid \varphi(x) \leq t\}.$$

L'équation $g(X, Y) = Y(\varphi)$ définit sur $V - \Sigma(g)$ un champ de vecteurs X non singulier. Les entiers $\text{ind}_{\partial V_{i,t}} X$ ($i = 1, \dots, p$) sont indépendants des choix de φ , V , de l'orientation de M et du paramètre t (proposition 3.5.1 c)). Si T est un champ de vecteurs sur $V - \Sigma(g)$ transverse sortant sur le bord ∂V_t de la variété V_t , pour tout $0 < t < \varepsilon$, les entiers $\text{ind}_{\partial V_{i,t}}(X, T)$ ($i = 1, \dots, p$) sont aussi indépendants des choix précédents et du choix de T . Avec ces notations, on a les définitions suivantes.

DÉFINITION 3.6.1

1) On appelle *indice de singularité de g l'entier* :

$$\text{ind}_{\partial V_t} X = \sum_{i=1}^p \text{ind}_{\partial V_{i,t}} X$$

que l'on note $i(g)$.

2) On appelle *indice transverse de singularité de g l'entier* :

$$\text{ind}_{\partial V_t}(X, T) = \sum_{i=1}^p \text{ind}_{\partial V_{i,t}}(X, T)$$

que l'on note $\tau(g)$.

Remarque. — Pour $0 < t < \varepsilon$, le bord ∂V_t de V_t est une hypersurface orientée de M (en tant que bord de V_t). L'indice transverse de singularité de g est en fait l'indice de singularité de ∂V_t dans $M - \Sigma(g)$.

La relation suivante résulte de la proposition 3.5.1.

$$i(g) = \tau(g) + \chi(\Sigma(g)).$$

Lorsque g induit sur $M - \Sigma(g)$ une métrique riemannienne, le champ de vecteurs X (défini plus haut) est transverse sortant sur ∂V_t . Par suite, on a :

$$\tau(g) = 0 \quad \text{et} \quad i(g) = \chi(\Sigma(g)).$$

Nous allons terminer ce paragraphe par l'étude de certaines situations génériques. Soit g une pseudo-métrique générique sur M . Le lieu singulier de g est alors localement analytique. Choisissons une métrique riemannienne G sur M . On lui associe la fonction φ_g définie par

$$\varphi_g = \det [g(u_i, u_j)],$$

où (u_1, \dots, u_n) est une base orthonormée de $T_x M$ relativement à G . La fonction φ_g^2 est alors une fonction de définition de $\Sigma(g)$. Étant donné un voisinage V adapté à φ_g , l'équation $g(X, Y) = Y(\varphi_g^2)$ définit un champ de vecteurs sur V dont le lieu singulier est contenu dans $\Sigma(g)$. Plus précisément, l'ensemble des zéros de X est la réunion des strates $\Sigma_c(g)$, pour $c > 1$, et de l'ensemble $\Sigma_{11}(g)$ (ensemble des points où le noyau de g est tangent à $\Sigma_1(g)$). L'indice de singularité de g est alors égal à l'indice de X sur le bord $\varphi_g^{-1}(t)$ de la variété $\varphi_g^{-1}([0, \varepsilon])$. Si par exemple $\Sigma(g) = \Sigma_1(g)$ et si le noyau de g est transverse à cette variété, alors $i(g) = 0$ et $\tau(g) = -\chi(\Sigma(g))$. Lorsque M est une surface, $\Sigma(g)$ est une réunion finie de cercles disjoints et $\Sigma_{11}(g)$ est un ensemble (éventuellement vide) de points isolés $\{a_1, \dots, a_p\}$. L'indice et l'indice transverse de singularité de g sont alors égaux à :

$$\sum_{i=1}^p \text{ind}_{a_i} X.$$

Nous allons illustrer cette situation par un exemple.

Sur \mathbb{R}^2 , on considère le cercle Σ de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. On note φ la fonction $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Soit g la pseudo-métrique $dx^2 + \varphi dy^2$. Le lieu singulier de g est Σ . Le champ de noyaux de g est engendré par $\partial/\partial y$. Il est transverse à Σ sauf en $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ où il est tangent à Σ . Si on

munit \mathbb{R}^2 de sa métrique euclidienne, la fonction φ_g , définie plus haut, est alors égale à φ et le champ de vecteurs X est égal à :

$$2x\varphi \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y}.$$

X a des singularités isolées en $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ du type col. Par suite, l'indice de singularité de g est 2.

On considère le disque D de \mathbb{R}^2 défini par $\varphi(x, y) < 2$ et on note g_D la restriction de g à D . À l'extérieur de Σ , g_D est riemannienne et, à l'intérieur, elle est lorentzienne. En plongeant, dans toute surface M , k exemplaires de ce disque muni de sa métrique g_D et en recollant par une métrique riemannienne quelconque sur M , on obtient une pseudo-métrique générique sur M dont l'indice de singularité est égal à $2k$. Une telle situation se généralise en dimension $n > 2$.

Remarques

1) À toute pseudo-métrique g est associé un morphisme $g^b : TM \rightarrow T^*M$ de lieu singulier $\Sigma(g)$. L'indice de singularité de g est, en fait, l'indice de singularité de l'isomorphisme singulier $(g^b)^{-1}$ (§ 3.4.7).

2) Soit g une métrique riemannienne sur M et notons g_G^b l'endomorphisme de TM soit par $g_G^b = (G^b)^{-1} \circ g^b$. L'indice de singularité de $(g_G^b)^{-1}$ (au sens du paragraphe 3.4.7) est aussi égal à l'indice de singularité de g .

3) On peut attacher à g d'autres invariants numériques : l'indice de singularité de g_G^b , noté $\text{ind}(g_G^b)$ l'indice de singularité de $(g_G^b)^2 = g_G^b \circ g_G^b$, noté $\text{ind}(g_G^b)^2$. Ces invariants sont liés à $i(g)$ par la relation (proposition 3.5.4) :

$$\text{ind}(g_G^b)^2 - \chi(\Sigma(g)) = \text{ind}(g_G^b) - i(g).$$

4) En général, ces invariants sont indépendants deux à deux; c'est, par exemple, le cas si g est générique et si $\tau(g) = 0$. Dans la situation décrite plus haut, on a $\text{ind}(g_G^b)^2 = -i(g)$ et $\text{ind}(g_G^b) = 0$.

5) Si la parité de la signature de g est la même sur chaque $M - \Sigma(g)$ (situation non générique!), on a la relation suivante :

$$i(g) = -\varepsilon \text{ind}(g_G^b) + (1 + \varepsilon)\chi(\Sigma(g)),$$

où $\varepsilon = 1$ si cette signature est toujours du type $(2r, 2s)$ et $\varepsilon = -1$ si cette signature est toujours du type $(2r + 1, 2s + 1)$. Cette situation se produit

par exemple lorsque $\text{codim}(\Sigma(g)) \geq 2$, ou si g garde une signature constante sur $M - \Sigma(g)$.

6) On peut définir les invariants $i(g)$, $\tau(g)$, $\text{ind}(g_G^\flat)$, $\text{ind}(g_G^\flat)^2$, pour toute métrique pseudo-riemannienne g définie sur $M - \Sigma$, où Σ est localement analytique sans que g soit définie sur Σ .

3.7 Indice de ramification d'un morphisme de fibré

Soient M et N deux variétés orientables de dimension n et F un fibré vectoriel orientable de rang n sur N . On considère un morphisme de fibré $A : TM \rightarrow F$ au-dessus d'une application $\alpha : M \rightarrow N$. On appelle *ensemble singulier* de A , noté $\Sigma(A)$, l'ensemble des x de M pour lesquels, l'application linéaire, $A_x : T_x M \rightarrow F_{\alpha(x)}$, n'est pas un isomorphisme; $F_{\alpha(x)}$ étant la fibre de F au-dessus de $\alpha(x)$. Comme dans le paragraphe précédent, on suppose que $\Sigma(A)$ soit localement analytique et compact. On considère un voisinage V adapté à une fonction de définition $\varphi : V \rightarrow [0, \varepsilon[$ de $\Sigma(A)$ (voir définition 3.3.1). On note E le fibré image réciproque de F par α ; A induit alors un morphisme de fibrés de TM dans E au-dessus de l'identité de M . Considérons un champ de vecteurs T sur $V - \Sigma(A)$ qui est transverse au bord ∂V_t de la variété $V_t = \{x \in V \mid \varphi(x) \leq t\}$ et qui sort sur ce bord pour tout $0 < t < \varepsilon$. Sur le bord de chaque composante connexe $V_{j,t}$ de V_t ($j = 1, \dots, p$), considérons la section $A(T)$ de E ainsi définie. Une orientation sur M et sur F étant choisie, on munit E de l'orientation induite par l'isomorphisme canonique de E dans F au-dessus de α dont la restriction à chaque fibre est l'identité (de $E_x = F_{\alpha(x)}$ dans $F_{\alpha(x)}$). Les entiers $\text{ind}_{\partial V_{j,t}} A(T)$, pour tout $1 \leq j \leq p$, sont indépendants des choix de φ , V , T et du paramètre $0 < t < \varepsilon$ (proposition 3.5.1).

DÉFINITION 3.7.1

- 1) Avec les notations précédentes, on appelle *indice de ramification de A au-dessus de la composante connexe Σ_j , contenue dans $V_{j,t}$* , l'entier $\text{ind}_{\partial V_{j,t}} A(T)$ noté $\text{ind}_{\Sigma_j} A$.
- 2) On appelle *indice de ramification de A* l'entier $A = \sum_{j=1}^p \text{ind}_{\Sigma_j} A$.

Si la composante connexe Σ_j est réduite à un point, le degré local (au sens de [8]), est égal à $\text{ind}_{\Sigma_j} -\varepsilon$ avec $\varepsilon = +1$ (resp. $\varepsilon = -1$), si A conserve (resp. inverse) les orientations au-dessus de V_j (§ 3.5, exemple 1). En particulier, si $\alpha : M \rightarrow N$ est un revêtement ramifié entre deux surfaces

riemanniennes, l'indice de ramification de α (au sens classique) est égal à l'indice de ramification (au sens de la définition 3.4.1) du morphisme $A = T\alpha$.

Plus généralement, si $f : M \rightarrow N$ est une application de classe C^k , $k \geq 1$, le lieu singulier de f est l'ensemble $\Sigma(f)$ des points où $A = Tf$ n'est pas de rang maximum. Si $\Sigma(f)$ est non vide, compact et localement analytique, l'indice de ramification de f sur une composante connexe Σ_j de $\Sigma(f)$ sera, par définition, l'entier $\text{ind}_{\Sigma_j} Tf$ et l'indice (total) de ramification de f sera l'entier $\text{ind } Tf$. On peut en particulier définir un indice de ramification pour les applications génériques f de M dans N dont le lieu singulier est compact, puisque $\Sigma(f)$ est alors localement analytique (§ 3.4).

Lorsque A conserve ou inverse les orientations de TM et F au-dessus de $V_j - \Sigma_j$, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 3.7.2. — *Avec les hypothèses précédentes s'il existe un champ de vecteurs X au-dessus de Σ_j telle que $A(X)$ soit une section non singulière de F au-dessus de Σ_j , alors on a :*

$$\text{ind}_{\Sigma_j} A = \varepsilon \chi(\Sigma_j),$$

avec $\varepsilon = +1$ (resp. $\varepsilon = -1$) si A conserve (resp. inverse) les orientations.

Nous allons terminer ce paragraphe par l'étude de l'indice de ramification d'une application $f : M \rightarrow N$, dont le lieu singulier est localement analytique. Soit Σ une composante connexe de $\Sigma(f)$. Considérons un voisinage V adapté à une fonction de définition $\varphi : V \rightarrow [0, \varepsilon[$ de Σ .

Supposons que $\text{codim } \Sigma \leq 2$.

Dans ce cas, $V - \Sigma$ est connexe; par suite, $V_t = \{x \in V \mid \varphi(x) \leq t\}$ est une sous-variété compacte à bord connexe de V pour tout $0 < t < \varepsilon$. Supposons qu'il existe t avec $0 < t < \varepsilon$ pour lequel $W_t = f(V_t)$ soit aussi une sous-variété compacte à bord connexe de N , et on note W un voisinage de W_t dans N . La restriction de f à ∂V_t est un revêtement de ∂V_t sur ∂W_t . Soit T un champ vecteurs sur ∂W_t qui lui est transverse. Il existe un unique champ \widehat{T} sur ∂V_t , tel que $Tf(\widehat{T}) = T \circ f$. De plus, on peut choisir T pour que \widehat{T} soit sortant sur le bord de V_t . On va montrer que dans ces conditions on a :

$$\text{ind}_{\Sigma} f = \varepsilon \chi(W_t),$$

où d est le degré de $f : \partial V_t \rightarrow \partial W_t$, où $\varepsilon \oplus \otimes = +1$ si $Tf : TM \rightarrow TN$ conserve ou inverse simultanément les orientations au-dessus de ∂V_t et $\varepsilon = (-1)^n$ dans les autres cas ($n = \dim M$).

En effet, on désigne par F le fibré image réciproque de TN par f au-dessus de V , et par $\widehat{f} : F \rightarrow TN$ le morphisme canonique associé. On note $p : T_1M \rightarrow V$, $\pi : F_1 \rightarrow V$ et $q : T_1N \rightarrow W$ des fibrés en sphères associés aux fibrés $TM \rightarrow V$, $F \rightarrow V$ et $TN \rightarrow W$ respectivement. Soit $T_1f : T_1M \rightarrow F_1$, $\widehat{f}_1 : F_1 \rightarrow T_1N$ les morphismes induits par Tf et \widehat{f} respectivement. Enfin, on note encore \widehat{T} (resp. T) la section de T_1M (resp. T_1N) au-dessus de ∂V_t (resp. ∂W_t) induite par \widehat{T} (resp. T). Considérons une n -forme Ω représentant la classe d'Euler de TN au-dessus de V et σ une $(n-1)$ -forme sur T_1N , telle que $q^*\Omega = d\sigma$ et $\int_{q^{-1}(x)} \sigma = -1$ pour tout x de W . La n -forme $f^*\Omega$ représente la classe d'Euler de F au-dessus de V , et on a :

$$q^* \circ f^* \Omega = d\sigma' \quad \text{et} \quad \int_{p^{-1}(x)} \sigma' = -1, \quad \text{où } \sigma' = f_1^* \sigma.$$

Considérons une section S de T_1N au-dessus de W sans singularité. La section $\widehat{S}(x) = \widehat{f}_1^{-1}(S \circ f(x))$ de F_1 au-dessus de V est aussi sans singularité. On a alors :

$$\begin{aligned} \text{ind}_\Sigma f &= \text{ind}_{\partial V_t} df(\widehat{T}) \\ &= \int_{\partial V_t} \widehat{S}^*(\sigma') - \int_{\partial V_t} T_1f(\widehat{T})^*(\sigma') \\ &= \int_{\partial V_t} f^* \circ S^*(\sigma) - \int_{\partial V_t} f^* \circ T^*(\sigma) \\ &= d \left(\int_{\partial W_t} S^*(\sigma) - \int_{\partial W_t} T^*(\sigma) \right) \\ &= d \text{ind}_{\partial W_t} T = d\varepsilon\chi(W_t) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\text{codim } \Sigma = 1$

Soient $\partial_i V_t$ ($i = 1, \dots, r$) les composantes connexes du bord de V_t . Supposons de plus qu'il existe $0 < t < \varepsilon$ tel que $\partial_i W_t = f(\partial_i V_t)$ borde une sous-variété $W_{i,t}$ compacte de N . En appliquant le raisonnement précédent à chaque variété $W_{i,t}$ pour $1 \leq i \leq r$, on obtient :

$$\text{ind}_\Sigma f = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i d_i \chi(W_{i,t}),$$

où d_i est le degré de $f : \partial_i V_t \rightarrow \partial_i W_t$, où $\varepsilon_i = +1$ si $Tf : T\partial_i V_t \rightarrow T\partial_i W_t$ conserve ou inverse simultanément les orientations et où $\varepsilon_i = (-1)^n$ dans les autres cas.

Exemple. — On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{3} x_1^3 + x_1 \left(\sum_{i=2}^n x_i^2 - 1 \right)$$

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = x_j \quad \text{pour } j = 2, \dots, n.$$

Le lieu singulier f est égal à la sphère Σ de centre 0 et de rayon 1 . La fonction $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1)^2$ est une fonction de définition de Σ et $V = \varphi^{-1}([0, 1[)$ est un voisinage adapté à φ . Le bord de $V_t = \varphi^{-1}([0, t[)$ est la réunion de deux sphères Σ_t^+ et Σ_t^- de centre O et de rayon $1+t$ et $1-t$ respectivement. L'image de chacune de ces sphères est une sous-variété compacte S_t^+ et S_t^- de \mathbb{R}^n difféomorphe à des sphères. Comme le degré de $f : \Sigma \rightarrow S_0$ est égal à -1 , il en est de même pour le degré de $\Sigma_t^\pm \rightarrow S_t^\pm$, pour t assez petit; chacune de ces variétés étant munie de l'orientation induite par l'orientation de la boule qu'elle borde. Comme $Tf : T\mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n$ conserve (resp. inverse) les orientations au-dessus de Σ_t^+ (resp. Σ_t^-), on a donc $\text{ind}_\Sigma f = (-1)^n - 1$. Remarquons que $Tf(\partial/\partial x_i)$, pour $i = 2, \dots, n$, n'est pas nul et que $|\text{ind}_\Sigma f| \neq |\chi(\Sigma)|$. L'hypothèse "A conserve ou inverse les orientations" de la proposition 3.4.2 est donc nécessaire en général.

4. Théorème de Gauss-Bonnet pour les pseudo-métriques

4.1 Intégrale de la forme pfaffienne d'une connexion métrique

Dans tout ce paragraphe, M est une variété compacte, connexe, orientée, avec un bord éventuellement non vide et de dimension $n = 2p$. On considère un fibré vectoriel $E \rightarrow M$ orienté, de rang n , et une métrique pseudo-riemannienne g sur E . On note (r, s) la signature de g . Soit ∇ une connexion métrique sur E compatible avec g .

Un champ de repères orthonormés direct (u_1, \dots, u_n) étant donné sur un ouvert U , avec $g(u_i, u_i) = -1$ pour $1 \leq i \leq r$ et $g(u_i, u_i) = 1$ pour $r < i \leq n$, sera appelé un *champ de repères* sur E adapté à g . Pour un tel champ de repères, il existe une matrice de 1-formes (ω_i^j) ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$) sur U , telles que :

$$\nabla_X u_i = \sum_{j=1}^n \omega_i^j(X) u_j.$$

La matrice de courbure (sur U) est la matrice de 2-formes (Ω_i^j) , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, caractérisée par :

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \sum_{k=1}^n \omega_i^k \wedge \omega_k^j.$$

Notons (Ω_{ij}) le produit de la matrice (Ω_i^j) par la matrice :

$$\begin{pmatrix} -I_r & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$$

où I_r (resp. I_s) est la $r \times r$ (resp. $s \times s$) matrice identité. On considère alors la n -forme sur U , définie par :

$$\Delta_U = \frac{(-1)^P}{(2\pi)^P} \frac{1}{2^P p!} \sum \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{2p}} \Omega_{\alpha_1 \alpha_2} \wedge \dots \wedge \Omega_{\alpha_{2p-1} \alpha_{2p}},$$

où $\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{2p}}$ vaut $+1$ ou -1 selon que $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2p})$ est une permutation paire ou impaire de $(1, \dots, 2p)$.

La forme Δ_U ne dépend pas du choix du champ de repères (u_1, \dots, u_n) , et la donnée d'une famille de formes Δ_U , pour U parcourant un recouvrement de M , définit une n -forme fermée Δ sur M que l'on appelle la *forme pfaffienne* de ∇ (voir [6]). La classe de cohomologie dans $H^n(M, \mathbb{R})$ représentée par Δ est la classe d'Euler du fibré E . Ainsi, si ∂M est vide, on a le théorème 4.1.

THÉORÈME DE GAUSS-BONNET 4.1. — *L'intégrale de Δ sur M est égale à la caractéristique d'Euler $\chi(E)$ de E . En particulier si $E = TM$, cette intégrale est égale à $\chi(M)$.*

Ce théorème n'est plus vrai si ∂M est non vide. L'objet de ce paragraphe est d'expliciter la valeur de l'intégrale $\int_M \Delta$ lorsque $\partial M \neq \emptyset$ et pour $E = TM$, en fonction des propriétés géométriques de la connexion induite par ∇ sur le bord de M . Plus précisément si $q_1 : T_1 M \rightarrow M$ est un fibré en sphères associé à TM , puisque Δ représente la classe d'Euler de M , il existe une $(n-1)$ -forme σ sur $T_1 M$ telle que $\int_{q_1^{-1}(x)} \sigma = -1$ pour tout x de M et $q_1^* \Delta = d\sigma$. Maintenant tout champ de vecteurs T normal à ∂M , et sortant, définit une section non singulière τ de $T_1 M$. On aura donc :

$$\int_M \Delta = \text{ind}_{\partial M} T + \int_{\partial M} \tau^* \sigma.$$

Le problème est de donner une interprétation géométrique au terme $\int_{\partial M} \tau^* \sigma$.

Lorsque g est riemannienne, ce terme s'explique de la manière suivante : sur $T_1 M$, il existe des $(n - 1)$ -formes $\sigma_0, \dots, \sigma_{p-1}$ et des constantes a_0, \dots, a_{p-1} ne dépendant que de n ayant les propriétés suivantes :

- a) soit τ un champ de vecteurs normal unitaire sur ∂M et (X_1, \dots, X_n) un champ de repères orthonormés direct sur un ouvert U rencontrant ∂M , tel que $\tau = X_n$ et (X_1, \dots, X_{n-1}) soient tangents à ∂M ; la $(n - 1)$ -forme $\tau^* \sigma_k$ est égale à (avec les notations introduites plus haut) :

$$\Sigma \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_2} \Omega_{\alpha_1 \alpha_2} \wedge \dots \wedge \Omega_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \wedge \omega_n^{\alpha_{2k+1}} \wedge \dots \wedge \omega_n^{\alpha_{n-1}},$$

où $\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}$ vaut $+1$ ou -1 selon que $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ est une permutation paire ou impaire de $(1, \dots, n - 1)$;

- b) la $(n - 1)$ -forme $\sigma = \sum_{k=1}^{p-1} a_k \sigma_k$ vérifie les propriétés déjà énoncées, c'est-à-dire $\int_{q^{-1}(x)} \sigma = -1$ pour tout x de M et $q_1^* \Delta = d\sigma$; on a alors le théorème de Chern ([6], [8]).

THÉORÈME DE CHERN 4.1.2. — Avec les hypothèses et notations précédentes, l'intégrale de Δ sur M est égale à :

$$\chi(M) + \sum_{k=0}^{p-1} \int_{\partial M} \tau^* \sigma_k.$$

En particulier, si ∂M est auto-parallèle, cette intégrale est égale à $\chi(M)$.

Remarque. — Chaque intégrale $\int_{\partial M} \tau^* \sigma_k$ ne dépend que de la seconde forme fondamentale de ∂M et de la connexion induite par ∇ sur ∂M , mais cette décomposition de $\int_{\partial M} \tau^* \sigma$ n'est pas unique.

Lorsque g ou $-g$ n'est pas riemannienne, c'est-à-dire lorsque r et s sont non nuls, on ne pourra plus construire, en général, des $(n - 1)$ -formes $\sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$ ayant les propriétés a) et b) ci-dessus. Cependant, nous allons voir une autre interprétation des $(n - 1)$ -formes $\tau^* \sigma_k$, $k = 0, \dots, p - 1$, permettant une généralisation au cas pseudo-riemannien.

Le groupe structural du fibré $TM \rightarrow M$ est réductible au groupe $SO(r, s)$ des automorphismes de \mathbb{R}^n de déterminant $+1$ qui laissent invariante la métrique canonique de \mathbb{R}^n de signature (r, s) . On note $\pi : SO(M) \rightarrow M$ le

fibré principal (de groupe $SO(r, s)$) associé. À toute connexion métrique ∇ sur M compatible avec g est associée une unique connexion $\widehat{\nabla}$ sur $SO(M)$, et réciproquement. Sur $SO(M)$, on note $\gamma = (\gamma_i^j)$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) la matrice de 1-formes de $\widehat{\nabla}$ et (Γ_i^j) ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) sa matrice de courbure. Désignons par $\Gamma = (\Gamma_{ij})$ le produit de la matrice Γ_i^j , par la matrice

$$\begin{pmatrix} -I_r & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$$

où I_r (resp. I_s) est la $r \times r$ (resp. $s \times s$) matrice identité. Si Δ est la forme pfaffienne de ∇ , on a :

$$\widehat{\Delta} = \pi^* \Delta = \frac{(-1)^p}{(2\pi)^p} \frac{1}{2^p p!} \Sigma \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{2p}} \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2} \wedge \dots \wedge \Gamma_{\alpha_{2p-1} \alpha_{2p}},$$

où $\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{2p}}$ vaut $+1$ ou -1 selon que $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2p})$ est une permutation paire ou impaire de $(1, \dots, 2p)$ (comparer avec l'expression locale Δ_U).

Soit ∇' une autre connexion g -métrique sur M , et $\widehat{\nabla}'$ la connexion sur $SO(M)$ associée. Comme dans [37], on montre qu'il existe des $(n-1)$ -formes $\Phi_0, \dots, \Phi_{p-1}$ sur M et des constantes $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ ne dépendant que de n et de r , telles que :

$$\begin{aligned} \pi^* \Phi_k = \Sigma \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{2n-1}} \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2} \wedge \dots \wedge \Gamma_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \wedge (\Gamma' - \Gamma)_{\alpha_{2k+1} \alpha_{2k+2}} \wedge \dots \\ \dots \wedge (\Gamma' - \Gamma)_{\alpha_{n-3} \alpha_{n-2}} \wedge (\gamma' - \gamma)_{\alpha_{n-1}}, \end{aligned}$$

où γ' et Γ' sont les matrices de 1-formes et 2-formes associées à $\widehat{\nabla}'$ comme plus haut et $\gamma' - \gamma, \Gamma' - \Gamma$ sont les matrices différence.

La $(n-1)$ -forme $\Phi = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \Phi_k$ vérifie :

$$\Delta' - \Delta = d\Phi.$$

Avant de faire un choix particulier pour ∇' , rappelons que le fibré normal $\nu(\partial M)$ (relativement à g) à ∂M ne lui est pas transverse en général (§ 3.2). Ainsi, un champ de vecteurs τ normal à ∂M est sortant en certains points et rentrant en d'autres points d'une même composante connexe de ∂M . De plus, on aura $g(\tau, \tau) = 0$ aux points où τ est tangent à ∂M . Si G est une métrique riemannienne quelconque sur M , il existe un isomorphisme $J : TM \rightarrow TM$ tel que $g(u, v) = G(u, J^{-1}(v))$. Par suite, un champ de vecteurs τ sur ∂M sera normal à ∂M pour g si, et seulement si, $J^{-1}(v)$ est

normal à ∂M pour G . On dira que le champ de vecteurs τ est sortant si $J^{-1}(v)$ est sortant. Cette définition ne dépend pas du choix de G .

Étant donné un tel champ τ normal sortant sur ∂M , τ sera transverse à ∂M si, et seulement si, g est non dégénérée sur $T\partial M$, ou de manière équivalente si $g(\tau, \tau) \neq 0$ sur ∂M . On se place dans l'hypothèse suivante : il existe un champ de vecteurs τ' sur ∂M homotope à τ et pour lequel $g(\tau', \tau') \neq 0$ en tout point de ∂M .

Il existe alors un voisinage collier $\varphi : \partial M \times [0, 1[\rightarrow M$ et une décomposition en somme de Whitney $TM = F \oplus T$ au-dessus de $V = \varphi(\partial M \times [0, 1[)$ ayant les propriétés suivantes :

- Chaque composante connexe de V contient une seule composante de ∂M ;
- F coïncide avec l'orthogonal H de τ' sur ∂M relativement à g ;
- g est non dégénérée en restriction à F ;
- T est l'orthogonal de F relativement à g .

Sur F (resp. T), la connexion ∇ induit une connexion ∇^0 (resp. ∇^1). On note $\bar{\nabla}$ la connexion sur TM au-dessus de V définie par :

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X^0 Y_0 + \nabla_X^1 Y_1,$$

où Y_0 (resp. Y_1) est la composante de T sur F (resp. T). Par construction, le fibré F est auto-parallèle (c'est-à-dire on a $g(\bar{\nabla}_X Y, Z) = 0$ si Y est tangent à F et Z à T). Finalement, soit ∇' la connexion obtenue en recollant ∇ au-dessus de $V' = \varphi(\partial M \times [0, 1/2[)$ et $\bar{\nabla}$ par une partition de l'unité. Avec ces notations, au-dessus de V' , on montre comme dans [37] que, sur chaque composante connexe W de V' , on a pour $0 \leq k \leq p-1$:

$$\pi^* \Phi_k = \begin{cases} \Sigma \varepsilon_{\alpha_2 \dots \alpha_n} \Gamma_{\alpha_2 \alpha_3} \wedge \dots \wedge \Gamma_{\alpha_{2k} \alpha_{2k+1}} \wedge \\ \wedge \gamma_1^{\alpha_{2k+2}} \wedge \dots \wedge \gamma_1^{\alpha_n} & \text{si } g(\tau', \tau') < 0, \\ \Sigma \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}} \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2} \wedge \dots \wedge \Gamma_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \wedge \\ \wedge \gamma_n^{\alpha_{2k+1}} \wedge \dots \wedge \gamma_n^{\alpha_{n-1}} & \text{si } g(\tau', \tau') > 0. \end{cases}$$

Par suite :

$$\int_M \Delta = \int_M \Delta' + \sum_{k=0}^{p-1} a_k \int_{\partial M} \Phi_k. \quad (\text{GB})$$

Lorsque g est riemannienne, lorsque $H = T\partial M$, $\Phi_k = \tau^* \sigma_k$ et comme ∂M est auto-parallèle, l'intégrale de Δ' sur M est égale à $\chi(M)$. Ainsi,

on retrouve la formule de Gauss-Bonnet pour les variétés riemanniennes compactes à bord. Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat suivant.

THÉORÈME 4.1.3. — Soit une variété compacte connexe à bord non vide M de dimension paire $n = 2p$, et g une métrique pseudo-riemannienne. Étant donné un champ de vecteurs τ normal sortant sur ∂M , supposons que sur chaque composante connexe de ∂M , $g(\tau, \tau)$ ne change pas de signe et ne soit pas identiquement nul.

Il existe alors :

- a) un champ τ' homotope à τ sur ∂M et $g(\tau', \tau') > 0$ ou $g(\tau', \tau') < 0$ sur chaque composante connexe de ∂M ;
- b) des $(n-1)$ -formes Φ_k , $0 \leq k \leq p-1$, sur un voisinage de ∂M définie localement par :

$$\Phi_k = \Sigma \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}} \Omega_{\alpha_1 \alpha_2} \wedge \dots \wedge \Omega_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \wedge \omega_n^{\alpha_{2k+1}} \wedge \dots \wedge \omega_n^{\alpha_{n-1}}$$

sur un champ de repère (X_1, \dots, X_n) avec $X_n = \tau' / \sqrt{g(\tau', \tau')}$, si $g(\tau', \tau') > 0$:

$$\Phi_k = \Sigma \varepsilon_{\alpha_2 \dots \alpha_n} \Omega_{\alpha_2 \alpha_3} \wedge \dots \wedge \Omega_{\alpha_{2k} \alpha_{2k+1}} \wedge \omega_1^{\alpha_{2k+2}} \wedge \dots \wedge \omega_1^{\alpha_n} ;$$

sur champ de repère (X_1, \dots, X_n) avec $X_1 = \tau' / \sqrt{|g(\tau', \tau')|}$ si $g(\tau', \tau') < 0$;

- c) des constantes :

$$a_k = \frac{(-1)^{p-1-k}}{\pi^k 2^{p+k}} \frac{1}{1 \cdot 3 \dots (2p-2k-1) \cdot k!}, \quad k = 0, \dots, p-1$$

telles que :

$$\int_M \Delta = \text{ind}_{\partial W} \tau + \sum_{k=0}^{p-1} a_k \int_{\partial M} \Phi_k,$$

où les intégrales $\int_{\partial M} \Phi_k$ ne dépendent que de ∇ .

Si, de plus ∂M est auto-parallèle et si g est non dégénérée sur ∂M alors,

$$\int_M \Delta = \chi(M).$$

Démonstration. — Soit N une composante connexe de ∂M et supposons que $g(\tau, \tau) \geq 0$ sur N . Au-dessus de N , $\tau(N)$ est une sous-variété compacte de la variété $T_+ M = \{u \in T_x M \mid g(u, u) \leq 0, x \in M\}$. Si $\tau(N)$ rencontre le bord $T_0 M = \{u \in T_x M \mid g(u, u) = 0, x \in M\}$ de $T_+ M$, par une homotopie dans $T_+ M$, on peut construire une section τ' de TM , telle que $\tau'(N)$ ne rencontre pas $T_0 M$. Un raisonnement analogue s'applique si $g(\tau, \tau) \leq 0$.

Le champ de vecteurs τ' étant choisi, les $(n-1)$ -formes Φ_k ($1 \leq k \leq p-1$) sont alors celles définies plus haut. Pour la valeur des constantes a_k voir [37].

Remarquons d'abord que si $i : N \rightarrow M$ est l'inclusion, les $(n-1)$ -formes $i^* \Phi_k$ ne dépendent que de τ' . Soient τ' et τ'' deux sections de TM au-dessus du voisinage W de N , homotopes à τ avec $g(\tau', \tau') \neq 0$ et $g(\tau'', \tau'') \neq 0$. De manière évidente, ces quantités ont le même signe, par exemple positif. Il existe alors une section $\tau'_s, s \in [0, 1]$, de TM au-dessus du voisinage W de N , telle que $g(\tau'_s, \tau'_s) > 0$, $\tau'_0 = \tau'$ et $\tau'_1 = \tau''$. Si Φ_k^s sont les $(n-1)$ -formes sur W associées à τ'_s comme précédemment, $i^* \Phi_k^s$ ne dépendent que de τ'_s . Par suite $\int_M \Phi_k = \int_N \Phi_k^s$ pour tout $0 \leq s \leq 1$ et $0 \leq k \leq p-1$.

Comme τ' et τ sont homotopes, $\text{ind}_{\partial W} \tau' = \text{ind}_{\partial W} \tau$ et par conséquent, la relation :

$$\int_M \Delta = \text{ind}_{\partial W} \tau + \sum_{k=0}^{p-1} a_k \int_{\partial M} \Phi_k$$

si, et seulement si, $\int_{\partial M} \Delta' = \text{ind}_{\partial M} \tau'$, d'après (GB). Mais ce résultat est une conséquence du lemme 4.1.4 qui va suivre. Enfin si ∂M est auto-parallèle et g est non dégénérée sur $T\partial M$, on peut prendre $\tau' = \tau$. Si $g(\tau, \tau) > 0$ dans tout champ de repères (X_1, \dots, X_n) tel que $X_n = \tau / \sqrt{|g(\tau, \tau)|}$, on aura $i^* \omega_n^\alpha = 0$ pour tout $\alpha = 1, \dots, n$, et ainsi $i^* \Phi_k = 0$ pour $0 \leq k \leq p-1$ et toute composante connexe de ∂M . Un raisonnement analogue s'applique si $g(\tau, \tau) < 0$. \square

LEMME 4.1.4. — Soit τ une section de TM au-dessus d'un voisinage de V de ∂M non singulière et supposons que $g(\tau, \tau) \neq 0$. Pour toute connexion g -métrique ∇ sur M , telle que le champ d'hyperplan H orthogonal à τ soit auto-parallèle, la forme pfaffienne Δ de ∇ est nulle sur V et :

$$\int_M \Delta = \text{ind}_{\partial M} \tau.$$

Démonstration. — Considérons un champ de repère (X_1, \dots, X_n) orthonormé sur un voisinage $U \subset V$ connexe tel que

$$X_1 = \frac{\tau}{\sqrt{|g(\tau, \tau)|}} \text{ si } g(\tau, \tau) < 0 \quad (\text{resp. } X_n = \tau/\sqrt{|g(\tau, \tau)|} \text{ si } g(\tau, \tau) > 0).$$

Comme l'orthogonal de τ est auto-parallèle, on aura $\omega_1^\alpha = 0$ (resp. $\omega_n^\alpha = 0$) pour $\alpha = 1, \dots, n$. Par suite, on a aussi $\Omega_{1\alpha} = 0$ (resp. $\Omega_{n\alpha} = 0$). On en déduit que Δ est nulle sur V .

Soit ∇' une autre connexion ayant les mêmes propriétés que ∇ sur V . Il va exister une $(n-1)$ -forme Φ sur M vérifiant :

$$\Delta - \Delta' = d\Phi.$$

De plus, compte tenu de l'écriture de Φ sur un champ de repères décrit plus haut, Φ sera nulle sur V , et ainsi :

$$\int_M \Delta = \int_M \Delta'.$$

On peut toujours supposer que chaque composante de V contient une seule composante de ∂M . Il existe alors des sous-fibrés de E_+ et E_- de rang r et s sur V , tels que : $TM = E_+ \oplus E_-$; g est définie positive (resp. définie négative) sur E_+ (resp. E_-); E_+ et E_- sont orthogonaux; τ est une section de E_+ ou E_- sur chaque composante connexe de V , selon que $g(\tau, \tau)$ est positif ou négatif.

Soit g' la métrique riemannienne sur M définie par :

$$g'|_{E_+} = g \quad \text{et} \quad g'|_{E_-} = -g.$$

On note ∇^+ et ∇^- les connexions induites par ∇ sur E_+ et E_- respectivement, et enfin ∇' la connexion définie par :

$$\nabla_X Y = (\nabla^+)_X Y_+ + (\nabla^-)_X Y_-$$

si Y_+ et Y_- sont les composantes respectives de Y sur E_+ et E_- .

Par construction ∇' est une connexion compatible avec g et g' , et H est auto-parallèle pour ∇ et ∇' . On a donc :

$$\int_M \Delta = \int_M \Delta',$$

Maintenant, comme la formule de Gauss-Bonnet dans le cas riemannien, on peut construire sur le fibré en sphères $q : T_1M \rightarrow M$ des vecteurs de normes 1 pour g' , des $(n - 1)$ -formes $\sigma_0, \dots, \sigma_{p-1}$ telles que si $\sigma = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \sigma_k$ on ait :

$$\int_{q^{-1}(x)} \sigma = -1 \quad \text{pour tout } x \text{ de } M \text{ et } q^* \Delta' = d\sigma \text{ et } \tau^* \sigma = 0 \text{ sur } \partial M.$$

On en déduit [8] :

$$\int_M \Delta' = \text{ind}_{\partial M} \tau. \square$$

4.2 Un théorème de Gauss-Bonnet pour les pseudo-métriques à lieu singulier localement analytique

Dans tout ce paragraphe, M est une variété compacte, connexe, orientée, sans bord, de dimension paire $n = 2p$ et g est une pseudo-métrique sur M dont le lieu singulier $\Sigma(g)$ est localement analytique (§ 3.6). On considère sur $M - \Sigma(g)$ une g -connexion ∇ . On va associer à ∇ une classe de cohomologie dans $H^n(M, \Sigma(g))$ qui ne dépend que de g ; cette classe de cohomologie, lorsque g est riemannienne sur $M - \Sigma(g)$, est égale à la classe χ_{10} définie dans [17].

Considérons un voisinage V de $\Sigma(g)$ adapté à une fonction $\varphi : V \rightarrow [0, \varepsilon[$ de définition de $\Sigma(g)$. Rappelons qu'alors, chaque composante connexe V_i de V contient une seule composante de $\Sigma(g)$ et que la restriction de φ à $V_i - \Sigma(g)$ est une submersion sur $]0, \varepsilon[$. Soit X le gradient de φ sur $V - \Sigma(g)$ (relativement à g). On munit $M' = M - \Sigma(g)$ d'une métrique riemannienne g et on note $q : T_1M' \rightarrow M'$ le fibré en sphères des vecteurs de norme 1 pour G . Le champ de vecteurs X étant non singulier, il définit une section de ξ de T_1M' au-dessus de $V' = V - \Sigma(g)$. Soit Δ la forme pfaffienne de ∇ sur M' . Étant donnée une $(n - 1)$ -forme σ sur T_1M' vérifiant $\int_{q^{-1}(x)} \sigma = -1$ et $q^* \Delta = \sigma$ (cf. § 4.1) on a le résultat suivant.

PROPOSITION 4.2.1. — *Soit M_t la variété compacte à bord $M - \varphi^{-1}([0, t[)$, pour $0 < t < \varepsilon$. Alors :*

$$\int_{M_t} \Delta - \int_{\partial M_t} \xi^* \sigma = \chi(M) - i(g),$$

où $i(g)$ est l'indice de singularité de g (définition 3.6.1).

Démonstration. — Soient M_i ($i = 1, \dots, m$) les composantes connexes de $M - \Sigma(g)$ et $M_{it} = M_i \cap M_t$, $i = 1, \dots, m$, $0 < t < \varepsilon$. Chaque M_{it} est une variété compacte à bord non vide, connexe, orientée, munie d'une connexion pseudo-riemannienne g_i (induite par g) et d'une connexion g_i -métrique ∇_i (induite par ∇). Comme la forme pfaffienne Δ_i de ∇_i sur M_i représente la classe d'Euler de TM_i , il résulte du paragraphe 3.1 :

$$\int_{M_{it}} \Delta_i - \int_{\partial M_{it}} \xi^* \sigma = \text{ind}_{\partial M_{it}} X.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_{M_t} \Delta - \int_{\partial M_t} \xi^* \sigma &= \sum_{i=1}^m \int_{M_{it}} \Delta_i - \int_{\partial M_{it}} \xi^* \sigma \\ &= \sum_{i=1}^m \text{ind}_{\partial M_{it}} X. \end{aligned}$$

D'autre part, il existe sur M un champ de vecteurs \bar{X} égal à X sur $\bigcup_{i=1}^m \partial M_{it} = \varphi^{-1}(t)$ et n'ayant que des singularités isolées en $a_i \in M_{it}$ et $b_j \in V_j$ ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, \mu$) où V_1, \dots, V_μ sont les composantes connexes de V . On a alors :

$$\text{ind}_{a_i} \bar{X} = \text{ind}_{\partial M_{it}} X \quad (\S 3.1)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} \text{ind}_{b_j} \bar{X} = i(g) \quad (\text{définition 3.6.1})$$

$$\sum_{i=1}^m \text{ind}_{a_i} \bar{X} + \sum_{j=1}^{\mu} \text{ind}_{b_j} \bar{X} = \chi(M). \quad \square$$

Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f = 1$ sur $\varphi^{-1}([0, \varepsilon/3])$ et $f = 0$ sur $V - \varphi^{-1}([0, 2\varepsilon/3])$. Posons :

$$\delta = \begin{cases} f \xi^* \sigma & \text{sur } V - \Sigma(g) \\ 0 & \text{sur } M - V. \end{cases}$$

À la connexion ∇ , on associe la $(n-1)$ -forme Λ définie par :

$$\Lambda = \begin{cases} \Delta - d\delta & \text{sur } M - \Sigma(g) \\ 0 & \text{sur } \Sigma(g). \end{cases}$$

Il résulte alors de la proposition 4.2.1 le résultat suivant.

COROLLAIRE 4.2.2. — *La classe de cohomologie de Λ dans $H^n(M, \Sigma(g))$ ne dépend que de g . Son image dans $H^n(M)$, par le morphisme canonique $H^n(M, \Sigma(g)) \rightarrow H^n(M)$ est égale à la classe d'Euler de M si, et seulement si, $i(g) = 0$.*

On note $A(g)$ la classe de cohomologie de $H^n(M, \Sigma(g))$ définie dans le corollaire 4.2.2.

Lorsque la pseudo-métrique g est générique, que son lieu singulier est réduit à $\Sigma_1(g)$, et que le noyau de g lui est transverse, alors $\tau(g) = 0$ et $\chi(\Sigma(g)) = 0$; par suite Λ représente la classe d'Euler de M . De manière analogue, lorsque l'indice de g sur $M - \Sigma(g)$ garde une parité constante, par exemple, si la signature de g sur $M - \Sigma(g)$ est constante, ou si $\text{codim } \Sigma(g) \leq 2$, la forme Λ représente la classe d'Euler de M si, et seulement si, $\chi(\Sigma(g)) = 0$, puisque dans ce cas on a $i(g) = \chi(\Sigma(g))$ (voir la fin du paragraphe 4.3).

Nous allons terminer ce paragraphe en montrant que la classe de cohomologie $A(g)$ peut se représenter par la forme pfaffienne d'une connexion g -métrique, lorsque g est riemannienne sur $M - \Sigma(g)$ ou bien lorsque $\Sigma(g)$ est une hypersurface de M et que g est non dégénérée en restriction à $\Sigma(g)$. Plus précisément, nous avons la proposition 4.2.3.

PROPOSITION 4.2.3. — *Avec les notations du début de paragraphe, soit g une pseudo-métrique ayant l'une des propriétés suivantes :*

- *g est riemannienne sur $M - \Sigma(g)$, ou bien $\Sigma(g)$ est une hypersurface de M ,*
- *g est non dégénérée en restriction à $\Sigma(g)$.*

Pour tout voisinage U de $\Sigma(g)$ contenu dans V , il existe une connexion g -métrique ∇' égale à ∇ sur $M - U$, dont la forme pfaffienne Δ' (définie sur $M - \Sigma(g)$) se prolonge en une n -forme $\widehat{\Delta}'$ sur M , nulle sur $\Sigma(g)$, et $\widehat{\Delta}'$ représente la classe de cohomologie $A(g)$.

Démonstration. — Avec les hypothèses sur g , $X = \text{grad } \varphi$ est transverse à l'hypersurface $\varphi^{-1}(t)$ pour $0 < t < \alpha$ avec $\alpha \leq \varepsilon$ assez petit. Il suffit donc de construire une connexion ∇' égale à ∇ sur $M - U$ et rendant les hypersurfaces $\varphi^{-1}(t)$ auto-parallèles pour $0 < t < \alpha$. En effet, dans ce cas, la

forme pfaffienne Δ' de ∇' sera nulle sur l'ouvert $\varphi^{-1}([0, \alpha[)$ et sur chaque variété compacte à bord M_{it} , $i = 1, \dots, m$, $0 < t < \alpha$, on aura :

$$\int_{M_{it}} \Delta' = \text{ind}_{\partial M_{it}} X$$

d'après le lemme 4.1.4. Puisque X est orthogonal à $\varphi^{-1}(t)$ et que cette hypersurface contient ∂M_{it} pour tout $i = 1, \dots, m$, on construit ∇' à partir de ∇ comme dans la situation d'une variété compacte à bord, construction qui a été faite dans le paragraphe 4.1 avant l'énoncé du théorème 4.1.3. \square

Remarque. — S'il existe une connexion g -métrique ∇ rendant les variétés $\varphi^{-1}(t)$ auto-parallèles, pour t assez petit, il résulte de la démonstration de la proposition 4.2.3 que la forme pfaffienne Δ de ∇ représente la classe de cohomologie $A(g)$.

4.3 Théorème de Riemann-Hurwitz pour les morphismes de fibré à lieu singulier localement analytique

Soient M et N deux variétés compactes connexes orientées de dimension paire $n = 2p$, $E \rightarrow N$ un fibré vectoriel orienté de rang n . Considérons un morphisme $A : TM \rightarrow E$ de fibré dont le lieu singulier est localement analytique au-dessus d'une application $\alpha : M \rightarrow N$.

L'objet de ce paragraphe est d'établir le théorème suivant.

THÉORÈME 4.3.1. — *Dans chacune des deux situations suivantes :*

- i) A conserve l'orientation au-dessus de $M - \Sigma(A)$,
- ii) la restriction de α à chaque composante connexe de $\Sigma(A)$ est injective et $\Sigma(\alpha) \subset \Sigma(A)$

on a :

$$\text{deg } \alpha \chi(E) = \chi(M) + \text{ind } A - \chi(\Sigma(A)),$$

où $\text{deg } \alpha$ est le degré de α et $\text{ind } A$ est l'indice de ramification de A .

Soit $A : TM \rightarrow E$ un morphisme dont le lieu singulier est localement analytique. Si $\text{codim } \Sigma(A) \geq 2$, $M - \Sigma(A)$ est connexe, A conserve ou inverse l'orientation au-dessus de $M - \Sigma(A)$. On peut donc toujours orienter M et E pour que A conserve l'orientation. Cette situation se présente, par exemple, lorsque $\Sigma(A)$ est un ensemble de points isolés. Si de plus $n = 2$, le théorème 4.3.1 donne la formule classique de Riemann-Hurwitz.

Si $\text{codim } \Sigma(A) = 1$, en général, $M - \Sigma(A)$ n'est pas connexe et A préserve l'orientation sur certaines composantes connexes et l'inverse sur d'autres. Cette situation se présente, par exemple, pour une application générique $f : M \rightarrow N$ avec $A = Tf$, l'application tangente à f . Si on suppose que la restriction de f à chaque composante connexe de $\Sigma(f)$ est injective, alors nous avons le résultat suivant.

COROLLAIRE 4.3.2. — *Soit $f : M \rightarrow N$ une application générique. Si la restriction de f à chaque composante connexe de $\Sigma(f)$ est injective :*

$$\deg f \chi(N) = \chi(M) + \text{ind } f - \chi(\Sigma(f)).$$

Remarque. — L'ensemble \mathcal{U} des applications f de M dans N , dont la restriction à chaque composante connexe du lieu singulier $\Sigma(f)$ est injective, est un ouvert de l'ensemble des applications C^∞ de M dans N , et les applications génériques constituent un ouvert dense de \mathcal{U} .

Démonstration du théorème 4.3.1. — Soit g une métrique riemannienne sur $E : g' = A^*g$ est alors une pseudo-métrique sur M dont le lieu singulier est égal à $\Sigma(A)$. De plus, g' est riemannienne sur $M' = M - \Sigma(A)$. Étant donnée une connexion g -métrique ∇ sur E , on note ∇' la connexion g' -métrique image réciproque par A sur TM au-dessus de M' . Si Δ est la forme pfaffienne de ∇ , alors, $\Delta' = \alpha^* \Delta$ induit sur M' la forme pfaffienne de ∇' . Considérons les fibrés en sphères $q : E_1 \rightarrow N$ et $q' : T_1 M' \rightarrow M'$ des vecteurs de norme 1 et E et $T_1 M'$ pour g et g' respectivement. Choisissons une $(n-1)$ -forme δ sur E_1 , telle que $\int_{q^{-1}(x)} \delta = -1$ et $q^* \Delta = d\delta$. Puisque A conserve l'orientation au-dessus de M' la $(n-1)$ -forme $\delta' = A^* \delta$ sur $T_1 M'$ possède des propriétés analogues. L'ensemble $\Sigma(A)$ étant localement analytique, soit $\varphi : V \rightarrow [0, \varepsilon[$ une fonction de définition de $\Sigma(A)$ sur un voisinage V adapté à $\Sigma(A)$ (§ 3.4). Désignons respectivement par M_0 et V_0 les variétés compactes à bord

$$M - \varphi^{-1} \left(\left[0, \frac{\varepsilon}{2} \right] \right) \quad \text{et} \quad \varphi^{-1} \left(\left[0, \frac{\varepsilon}{2} \right] \right).$$

Si X est le gradient de φ (relativement g') sur $V - \Sigma(A)$, d'après la proposition 4.2.1. on aura :

$$\int_{M_0} \Delta' - \int_{\partial M_0} \xi^* \delta' = \chi(M) - i(g),$$

où ξ est la section de T_1M' induite par X . Puisque g' est riemannienne sur M' , $i(g) = \chi(\Sigma(A))$. D'autre part, on a aussi :

$$\int_M \Delta' = \deg \alpha \int_N \Delta = \deg \alpha \chi(E).$$

On en déduit :

$$\int_{V_0} \Delta' - \int_{\partial V_0} \xi^* \delta' = \deg \alpha \chi(E) - \chi(M) + \chi(\Sigma(A)).$$

Il reste à montrer que $\int_{V_0} \Delta' - \int_{\partial V_0} \xi^* \delta'$ est égal à $\text{ind } A$.

Soit $\pi : F \rightarrow V$ le fibré image réciproque par $\alpha = V \rightarrow N$ du fibré $E \rightarrow N$. On note $\widehat{\alpha} : F \rightarrow TN$ l'homomorphisme associé et $\widehat{q} : F_1 \rightarrow V$ le fibré en sphères des sections de F de norme 1 pour la métrique $\widehat{g} = \widehat{\alpha}^* g$. Enfin, on désigne par $\widehat{A} : TM \rightarrow F$ le morphisme de fibré induit par A . Avec ces notations, la restriction de Δ' à V représente la classe d'Euler de F , et la $(n-1)$ -forme $\widehat{\delta} = \widehat{A}^* \delta$ sur F_1 vérifie $\int_{\widehat{q}^{-1}(x)} \widehat{\delta} = -1$ pour tout x de V , $\widehat{q}^* \Delta' = d\widehat{\delta}$ et $\widehat{A}^* \widehat{\delta} = \delta'$ au-dessus de $V - \Sigma(A)$. Par suite, on en déduit :

$$\int_{V_0} \Delta' - \int_{\partial V_0} \xi^* \delta' = \int_{V_0} \Delta' - \int_{\partial V_0} \widehat{A}(\xi)^* \widehat{\delta} = \text{ind } A. \quad \square$$

5. Intégrabilité de la forme pfaffienne d'une connexion duale g -métrique

5.1 Problème d'intégrabilité

Le théorème classique de Gauss-Bonnet affirme que l'intégrale sur une variété compacte de la forme pfaffienne d'une connexion compatible avec une métrique pseudo-riemannienne est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré de cette variété. Dans la situation singulière d'une connexion compatible avec une pseudo-métrique, nous avons construit, dans le paragraphe 4.2 (corollaire 4.2.2), une n -forme définie à partir de la forme pfaffienne, et l'intégrale de cette n -forme est liée à la caractéristique d'Euler-Poincaré. Dans une telle situation, on peut se poser le problème de l'intégrabilité de la forme pfaffienne. Plus précisément, considérons une pseudo-métrique dont le lieu singulier est localement analytique. Soit $\varphi : V \rightarrow [0, \varepsilon[$

une fonction de définition de $\Sigma(g)$ adaptée à φ . Étant donnée une connexion g -métrique ∇ sur $M - \Sigma(g)$ et Δ sa forme pfaffienne, l'intégrale $\int_{M_t} \Delta$ est-elle convergente lorsque t tend vers 0, si $M_t = M - \varphi^{-1}([0, t])$?

S'il existe une fonction de définition φ de $\Sigma(g)$ telle que la connexion ∇ rende auto-parallèle toutes les variétés $\varphi^{-1}(t)$ pour t assez petit, alors cette intégrale est convergente; (voir la remarque à section 4). La valeur de cette intégrale est alors $\chi(M)$. Une telle situation se présente, par exemple, lorsque g est riemannienne sur $M - \Sigma(g)$, ou lorsque $\Sigma(g)$ est une hypersurface de M et g est non dégénérée sur cette hypersurface (proposition 4.3.2). Cependant, dans la situation générale, on aura

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \int_{M_t} \Delta \right| = +\infty.$$

On peut, dans ce cas, essayer d'obtenir un développement asymptotique (en fonction de t) de cette intégrale. C'est précisément l'objet de cette section, lorsque g est générique et vérifie quelques autres propriétés qui seront précisées dans la suite.

Soient M_{it} ($i = 1, \dots, m$) les composantes connexes de M_t . On va d'abord chercher un développement asymptotique de $\int_{M_{it}} \Delta$, pour $i = 1, \dots, m$. C'est pourquoi, nous allons commencer par étudier ce problème pour une variété compacte à bord munie d'une pseudo-métrique dont le lieu singulier éventuel est contenu dans le bord.

5.2 Cas des pseudo-métriques non dégénérées en restriction au bord

Dans tout ce paragraphe, M désigne une variété compacte à bord non vide, connexe, orientée et de dimension paire $n = 2p$. On considère une pseudo-métrique g sur M ayant les propriétés suivantes :

- 1) g est non dégénérée sur $M - \partial M$;
- 2) la pseudo-métrique induite par g sur ∂M est non dégénérée.

Soit $\Phi : \partial M \times I \rightarrow M$ un voisinage collier de ∂M , où $I = [0, 1[$, tel que chaque composante connexe de $V = \Phi(\partial M \times I)$ ne contienne qu'une seule composante de ∂M . Notons \mathcal{F}_Φ le feuilletage $\{\varphi^{-1}(t) \mid t \in I\}$ de V , φ étant la submersion de V dans I associée à Φ . Comme g est non dégénérée en restriction au fibré tangent à ∂M , on peut toujours choisir le voisinage collier pour que la restriction de g soit non dégénérée sur le fibré F tangent à \mathcal{F}_Φ . Tout voisinage collier $\Phi : \partial M \times I \rightarrow M$ ayant de telles propriétés sera appelé un *voisinage collier adapté à g* .

Étant donnée une métrique riemannienne G sur M , on pose $\Psi_g(x) = \det(u_i, u_j)$, où (u_1, \dots, u_n) est une base orthonormée de $T_x M$ pour la métrique G . Le lieu singulier (éventuellement vide) de g est égal à $\Psi_g^{-1}(0)$ et il est inclus dans ∂M (contenu des hypothèses faites sur g). On impose à g l'hypothèse supplémentaire suivante.

- 3) Pour chaque composante connexe $\partial_i M$ ($i = 1, \dots, m$) de ∂M , il existe une constante $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ et une fonction non nulle λ_i sur la composante V_i de V contenant $\partial_i M$, telles que $\Psi_g = \lambda_i \varphi^{\alpha_i}$.

Cette hypothèse est indépendante du choix du voisinage collier adapté à g et la métrique riemannienne g sur M .

Il existe un unique champ de vecteurs τ sur V ayant les propriétés suivantes : τ est orthogonal à \mathcal{F}_Φ (relativement à G); $\tau(\varphi) < 0$; $|g(\tau, \tau)| = \varphi^{\alpha_i}$ sur V_i , pour tout $i = 1, \dots, m$.

En effet, si $\alpha_i = 0$, alors g est non dégénérée sur $\partial_i M$ et τ est le champ de vecteurs normal unitaire sortant sur $\partial_i M$. Par contre, si $\alpha_i \neq 0$ est alors contenu dans $\Sigma(g)$. Le gradient de $\varphi^{1+\alpha_i}$ relativement à g est un champ de vecteurs X non nul sur V_i qui engendre le noyau de g sur $\partial_i M$, et on a $X(\varphi) \neq 0$. Tout champ de vecteurs T orthogonal à \mathcal{F}_φ s'écrit de manière unique $T = \nu X$ où ν est une fonction non nulle sur chaque V_i . Posons :

$$\nu = \varepsilon_i \frac{1}{\sqrt{|X(\varphi)|}} \quad \text{avec } \varepsilon_i = +1 \text{ (resp. } \varepsilon_i = -1).$$

si $X(\varphi) < 0$ (resp. $X(\varphi) > 0$) sur V_i . Le champ de vecteur $\tau = \nu X$ possède alors les propriétés annoncées plus haut. On dira que τ est le champ de vecteurs normal adapté à \mathcal{F}_Φ .

Considérons une connexion duale g -métrique D sur M , et ∇ la connexion sur $M - \Sigma(g)$ associée (§ 2.2).

DÉFINITION 5.2.1

- 1) On appelle forme pfaffienne de la connexion duale g -métrique D la n -forme pfaffienne Δ sur $M - \Sigma(g)$ de la connexion ∇ .
- 2) On dit que le bord ∂M est auto-parallèle relativement à D si pour tout champ de vecteurs X et Y tangents à ∂M et Z orthogonal ∂M (relativement à g), on a :

$$D_X Y(Z) = 0 \quad \text{sur } \partial M.$$

Le voisinage collier adapté à g étant fixé, on associe à toute connexion duale g -métrique D sur M les $(n-1)$ -formes θ_k ($k = 0, \dots, p-1$) sur V définies de la manière suivante : soit $\{U_\lambda\}$ un recouvrement de V par des ouverts au-dessus desquels il existe un champ de repères orthonormés (X_1, \dots, X_{n-1}) du fibré F tangent à \mathcal{F}_Φ . On choisit ce repère de sorte que $(\tau, X_1, \dots, X_{n-1})$ (resp. $(X_1, \dots, X_{n-1}, \tau)$) soit direct si $g(\tau, \tau) < 0$ (resp. $g(\tau, \tau) > 0$). On pose alors :

$$\begin{cases} \widehat{\omega}_j(X) = D_X X_j(\tau) & j = 1, \dots, n-1 \\ \widehat{\Omega}_{ij} = g(X_i, X_j) \widehat{\Omega}_i^j & i, j = 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

où $(\widehat{\Omega}_i^j)$ est la matrice courbure de la connexion sur F induite par D . On définit enfin θ_k sur U_λ :

$$\theta_k = \Sigma \varepsilon_{i_1 \dots i_{n-1}} \widehat{\Omega}_{i_1 i_2} \wedge \dots \wedge \widehat{\Omega}_{i_{2k-1} i_{2k}} \wedge \widehat{\omega}_{i_{2k+1}} \wedge \dots \wedge \widehat{\omega}_{i_{n-1}},$$

où $\varepsilon_{i_1 \dots i_{n-1}} = +1$ ou -1 selon que (i_1, \dots, i_{n-1}) est une permutation paire ou impaire de $(1, \dots, n-1)$.

Comme dans [6], on vérifie que θ_k , $k = 1, \dots, p-1$ est bien définie. On pose encore $M_t = M - \varphi^{-1}([0, t])$. À chaque composante connexe V_i , $i = 1, \dots, m$, de V , sont alors associées les fonctions :

$$\Theta_{ik}(t) = \int_{V_i \cap \partial M_t} \theta_k, \quad k = 0, \dots, p-1.$$

Les fonctions Θ_{ik} dépendent du voisinage collier choisi, mais si $\overline{\Phi} : \partial M \times I \rightarrow M$ est un autre voisinage collier adapté à g , et si $\overline{\Theta}_{ik}$ sont les fonctions associées comme précédemment, il existe alors des constantes μ_{ik} non nulles telles que :

$$\overline{\Theta}_{ik}(0) = \mu_{ik} \Theta_{ik}(0)$$

THÉORÈME 5.2.2

1) pour t assez petit, on a :

$$\int_{M_t} \Delta = \chi(M) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{p-1} t^{\alpha_i(\frac{1}{2}-p+k)} a_k \Theta_{ik}(t)$$

avec

$$a_k = \frac{(-1)^{p-1-k}}{\pi^k 2^{p+k} k!} \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p-2k-1)}.$$

De plus $\chi(M) = 0$ si la signature (r, s) de g est telle que r est impaire.

2) Si ∂M est auto-parallèle et si $0 \leq \alpha_i < 2$ ($i = n, \dots, m$), alors pour tous les voisinages colliers adaptés à g , l'intégrale $\int_{M_t} \Delta$ associée est convergente et :

$$\int_M \Delta = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{M_t} \Delta = \chi(M).$$

3) Pour $n = 2$, si la signature de g est $(1, 1)$, alors M est difféomorphe à $S^1 \times [0, 1]$. Soient β_1, \dots, β_q les valeurs prises par la suite $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ et I_ℓ l'ensemble des indices i pour lesquels $\alpha_i = \beta_\ell$. Si $0 \leq \alpha_i < 2$ ($i = 1, \dots, m$) l'intégrale $\int_{M_t} \Delta$ est convergente si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée :

$$\sum_{i \in I_\ell} \Theta_{i0}(0) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, q.$$

Dans ce cas, on a :

$$\int_{M_t} \Delta = \chi(M)$$

Si $\Theta_{i0}(0) = 0$, pour tout $i = 1, \dots, m$, alors pour tout voisinage collier adapté à ∂M , l'intégrale $\int_{M_t} \Delta$ associée est convergente. Par contre si $\Theta_{i0}(0) \neq 0$ pour au moins un indice i compris entre 1 et m , il existe un voisinage collier adapté à ∂M pour lequel l'intégrale $\int_{M_t} \Delta$ associée est divergente.

Lorsque $\Sigma(g)$ est vide, tous les exposants α_i sont nuls, et dans ce cas on retrouve les résultats du théorème 4.1.2 pour $t = 0$. La démonstration de 5.2.2 est d'ailleurs une adaptation au cas singulier de la démonstration de 4.1.2

Remarques

- 1) Si ∂M est auto-parallèle, toutes les fonctions Θ_{ik} sont nulles en $t = 0$. La réciproque est évidemment fausse (voir l'exemple qui suit).
- 2) Pour $n = 2$, il existe des situations où l'intégrale $\int_{M_t} \Delta$ est convergente, mais les fonctions Θ_{i0} ne sont pas toutes nulles en $t = 0$

Exemple. — Sur $M = \mathbf{S}^1 \times [-1, 1]$ considérons la pseudo-métrique :

$$g = a^2 du^2 + (1 - s^2) ds^2,$$

où a est une fonction strictement positive sur M . Soit f_μ un difféomorphisme de I tel que $f_\mu(t) = (1/\mu)t$ pour $0 \leq t \leq 1/2$, où μ est un nombre réel strictement positif. Les applications $\Phi_1(u, t) = (u, -1 + f_\mu(t))$ et $\Phi_2(u, t) = (u, 1 - t)$ de $\mathbf{S}^1 \times I$ dans M définissent un voisinage collier de ∂M adapté à g . Le champ de vecteurs normal au feuilletage \mathcal{F}_Φ associé est alors :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \sqrt{\frac{\mu}{1-s}} \frac{\partial}{\partial s} \quad \text{sur } V_1 = \Phi_1 \left(\mathbf{S}^1 \times \left[0, \frac{1}{2} \right] \right) \\ \tau_2 &= \frac{1}{\sqrt{1-s}} \frac{\partial}{\partial s} \quad \text{sur } V_2 = \Phi_2 \left(\mathbf{S}^1 \times \left[0, \frac{1}{2} \right] \right). \end{aligned}$$

Avec les notations introduites, la 1-forme θ_0 est égale à $2\varepsilon_i \tau_i(a) du$ sur V_i ($i = 1, 2$, $\varepsilon_1 = -1$ et $\varepsilon_2 = +1$). Posons $a = \gamma s + m$ où γ est une fonction sur \mathbf{S}^1 et m est une constante, telle que $|\gamma| < m$. Alors :

$$\Theta_{10}(t) = \frac{-\mu}{\sqrt{\mu-t}} \int_{\mathbf{S}^1} \gamma du, \quad \Theta_{20}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \int_{\mathbf{S}^1} \gamma du.$$

Le bord de M sera auto-parallèle si, et seulement si, $\gamma = 0$ sur \mathbf{S}^1 . Si $\int_{\mathbf{S}^1} \gamma du = 0$, l'intégrale $\int_{M_t} \Delta$ sera convergente pour toute valeur de μ ; de plus, pour tout voisinage collier adapté à g , l'intégrale associée sera convergente. Par contre si $\int_{\mathbf{S}^1} \gamma du \neq 0$, cette intégrale sera convergente si et seulement si $\mu = 1$.

Maintenant, choisissons $a = (2\alpha - 1)\gamma s + m$, où γ est encore une fonction sur \mathbf{S}^1 où $\alpha : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ telle que $\alpha(s) = 0$ pour $-1 \leq s \leq -1/2$ et $\alpha(s) = 1$ pour $1/2 \leq s \leq 1$, et enfin où m est une constante vérifiant $|\gamma| < m$. Dans cette situation :

$$\begin{aligned} \Theta_{10}(t) &= \frac{\mu}{\sqrt{\mu-t}} \int_{\mathbf{S}^1} \gamma du \\ \Theta_{20}(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t}} \int_{\mathbf{S}^1} \gamma du. \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_{M_t} \Delta$ sera convergente si, et seulement si, $\int_{\mathbf{S}^1} \gamma du = 0$ quelle que soit la valeur de μ .

Démonstration du théorème 5.2.2. — Montrons d'abord qu'il existe sur $M' = M - \Sigma(g)$ une connexion ∇' rendant chaque feuille de \mathcal{F}_Φ auto-parallèle et telle que, si Δ' est la forme pfaffienne de ∇' , on ait pour t assez petit,

$$\int_{M_t} \Delta = \int_{M_t} \Delta' + \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{p-1} t^{\alpha_i(\frac{1}{2}-p+k)} \alpha_k \Theta_{ik}(t).$$

Soit ∇^0 la connexion sur le fibré F (tangent à \mathcal{F}_Φ) définie par :

$$g(\nabla_X^0 Y, Z) = D_X Y(Z),$$

où X et Z sont des champs de vecteurs sur V , et Y est tangent à F . Désignons par $\Gamma(V')$ (resp. $\Gamma(F^\perp)$) les champs de vecteurs sur $V' = V - \partial M$ (resp. orthogonaux à F). Considérons la connexion $\nabla^1 : \Gamma(V') \times \Gamma(F^\perp) \rightarrow \Gamma(F^\perp)$ définie par :

$$\nabla_X^1 \tau = \frac{1}{2} \frac{X[g(\tau, \tau)]}{2|g(\tau, \tau)|} \tau = \frac{1}{2} \frac{1}{\varphi^{\alpha_i}} X[g(\tau, \tau)] \tau.$$

En recollant ∇ et la connexion somme de ∇^0 et ∇^1 sur V' , on obtient une connexion ∇' rendant chaque feuille $\varphi^{-1}(t)$ de \mathcal{F}_Φ auto-parallèle pour t assez petit. Il résulte alors de (GB), paragraphe 4.1, la relation :

$$\int_{M_t} \Delta = \int_{M_t} \Delta' + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k \int_{\partial M_t} \Phi_k.$$

Maintenant en comparant l'expression de θ_k et de Φ_k dans un champ de repères (X_1, \dots, X_n) orthonormés direct, avec

$$X_1 = \frac{\tau}{|g(\tau, \tau)|^{1/2}} \quad \text{si } g(\tau, \tau) < 0,$$

$$X_n = \frac{\tau}{|g(\tau, \tau)|^{1/2}} \quad \text{si } g(\tau, \tau) > 0,$$

on obtient :

$$\theta_k = t^{\alpha_i(\frac{1}{2}-p+k)} \Phi_k$$

sur la composante connexe V_i de V .

D'autre part, d'après le lemme 4.1.4 :

$$\int_{M_t} \Delta' = \text{ind}_{\partial M_t} \tau$$

et comme τ est transverse sortant, on en déduit que la valeur de cette intégrale est $\chi(M)$. Si la signature (r, s) de g est telle que r est impair, la classe d'Euler de TM est nulle sur M_t (cf. [8]). Ce dernier résultat achève la démonstration de 1).

Supposons maintenant que ∂M est auto-parallèle. On aura alors

$$D_X Y(\tau) = 0 \quad \text{sur } \partial M$$

et par suite, pour tout X tangent à \mathcal{F}_Φ , les fonctions $\widehat{\omega}_j(X)$ s'annulent sur ∂M , $j = 1, \dots, n-1$ (avec les notations introduites précédemment). Il existe donc une fonction u_{jX} sur V , telle que $\widehat{\omega}_j(X) = u_{jX}\varphi$, pour tout champ de vecteurs X tangent à \mathcal{F}_Φ et $j = 1, \dots, n-1$. Les fonctions Θ_{ik} vont alors s'écrire :

$$\Theta_{ik}(t) = t^{2p-2k-1} \widehat{\theta}_{ik}(t),$$

où $i = 1, \dots, m$, $k = 0, \dots, p-1$, et où les fonctions $\widehat{\theta}_{ik}(t)$ sont C^∞ sur V . La propriété 2) se trouve ainsi établie.

Dans le reste de la démonstration, on se place dans la situation où $n = 2$. Si la signature de g est $(1, 1)$, $\chi(M) = 0$ d'après 1) et, par suite, $M = \mathbf{S}^1 \times [0, 1]$. Soient β_1, \dots, β_q les valeurs prises par la suite $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ et I_ℓ l'ensemble des indices i pour lesquels $\alpha_i = \beta_\ell$. Alors :

$$\int_{M_t} \Delta = \chi(M) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=1}^q t^{-\frac{1}{2}\beta_\ell} \sum_{i \in I_\ell} \Theta_{i0}(0) + O(t^{1-\frac{1}{2}\beta_\ell}).$$

Par suite, si $0 \leq \beta_\ell < 2$, l'intégrale $\int_{M_t} \Delta$ est convergente si, et seulement si, $\sum_{i \in I_\ell} \Theta_{i0}(0) = 0$ pour tout $\ell = 1, \dots, q$ et dans ce cas

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{M_t} \Delta = \chi(M).$$

Supposons que $\Theta_{i0}(0) = 0$ pour $1 \leq i \leq m$, et soit $\overline{\Phi} : \partial M \times I \rightarrow M$ un autre voisinage collier de ∂M adapté à g . Désignons par $\overline{\Theta}_{i0}$ les fonctions associées. Il existera des constantes non nulles μ_i telles que

$\bar{\Theta}_{i_0}(0) = \mu_i \Theta_{i_0}(0)$. Ainsi, l'intégrale $\int_{\bar{M}_t} \Delta$ sera aussi convergente, où $\bar{M}_t = M - \bar{\varphi}^{-1}([0, t[)$.

Supposons maintenant qu'il existe au moins un indice $0 \leq i_0 \leq m$ pour lequel $\Theta_{i_0}(0)$ ne soit pas nul, et considérons $h_\mu : I \rightarrow I$ un difféomorphisme tel que $h_\mu(t) = \mu t$ pour $0 \leq t \leq 1/2$ où μ est un nombre réel strictement positif. Si l'intégrale $\int_{M_t} \Delta$ est convergente, on aura $\sum_{i \in I_\ell} \Theta_{i_0}(0) = 0$ pour $\ell = 1, \dots, q$ (avec les notations introduites). Puisque $\Theta_{i_0}(0) \neq 0$, il existe I_ℓ pour lequel la relation $\sum_{i \in I_\ell} \Theta_{i_0}(0) = 0$ n'est pas vérifiée. On pourra donc prouver des nombres réels $\mu_i, i \in I_\ell$, tels que $\sum_{i \in I_\ell} \Theta_{i_0}(0) \neq 0$. Considérons alors le difféomorphisme H de $\partial M \times I$ défini par :

$$H(x, t) = \begin{cases} (x, t) & \text{pour } x \in \partial_i M \text{ et } i \notin I_\ell, \\ (x, h_{\mu_i}(t)) & \text{pour } x \in \partial_i M \text{ et } i \in I_\ell. \end{cases}$$

Les fonctions $\bar{\Theta}_{i_0}(t)$ associées au voisinage collier $\bar{\Phi} = \Phi \circ H$ vérifient alors les relations :

$$\bar{\Theta}_{i_0}(t) = \begin{cases} \Theta_{i_0}(t) & \text{pour } i \notin I_\ell, \\ \mu_i \Theta_{i_0}(t) & \text{pour } i \in I_\ell \text{ et pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Il en résulte que $\sum_{i \in I_\ell} \bar{\Theta}_{i_0}(0) \neq 0$, et par suite, l'intégrale $\int_{\bar{M}_t} \Delta$ n'est pas convergente. \square

5.3 Cas d'une pseudo-métrique dont le lieu singulier est une variété

Dans tout ce paragraphe, M est une variété compacte sans bord, orientée de dimension $n = 2p$ et g une pseudo-métrique générique sur M dont le lieu singulier se réduit à $\Sigma_{10}(g)$, c'est-à-dire $\Sigma(g)$ est une hypersurface et la pseudo-métrique induite par g sur $\Sigma(g)$ est non dégénérée. Soit $\Phi : \Sigma(g) \times]-1, 1[\rightarrow M$ un voisinage tubulaire de $\Sigma(g)$, tel que chaque composante connexe de $V = \Phi(\Sigma(g) \times]-1, 1[)$ contienne une seule composante connexe de $\Sigma(g)$. On note $\varphi : V \rightarrow]-1, 1[$ la submersion associée. La fonction $\varphi^2 : V \rightarrow [0, 1[$ est alors une fonction de définition de $\Sigma(g)$ (au sens de la définition 3.3.1).

Le noyau de g définit un champ de droites sur $\Sigma(g)$ qui est canoniquement orienté : le champ de gradient X de φ^2 , relativement à g , engendre le noyau de g sur $\Sigma(g)$; X est aussi le champ de gradient de $(-\varphi)^2$ ($-\varphi$ est la submersion de V sur $]-1, 1[$ associée à $\Phi(x, -t)$). Pour tout autre voisinage

Quelques propriétés géométriques des variétés pseudo-riemanniennes singulières

tubulaire $\bar{\Phi} : \Sigma(g) \times]-1, 1[\rightarrow M$, si \bar{X} est le champ de gradient de $\bar{\varphi}^2$, il existe une fonction μ strictement positive sur $\Sigma(g)$ telle que $\bar{X} = \mu X$; ($\bar{\varphi}$ étant la submersion associée à $\bar{\Phi}$).

Quitte à changer t en $-t$, on peut toujours supposer que $X(\varphi) > 0$. Le champ de vecteurs

$$\tau = \frac{-1}{\sqrt{2X(\varphi)}} X$$

est alors orthogonal au feuilletage

$$\mathcal{F}_{\bar{\Phi}} = \{\varphi^{-1}(t) \mid -1 < t < 1\}$$

et on a : $g(\tau, \tau) = \varphi$ ainsi que $\tau(\varphi) < 0$. Avec ces notations, on dira que $\bar{\Phi} : \Sigma(g) \times]-1, 1[\rightarrow M$ est un voisinage de $\Sigma(g)$ adapté à g , et que τ est le champ de vecteurs normal adapté à $\mathcal{F}_{\bar{\Phi}}$.

À toute connexion duale g -métrique D sur M , on peut associer des $(n-1)$ -formes $\theta_0, \dots, \theta_k, \dots, \theta_{p-1}$ sur V , définies localement par :

$$\theta_k = \Sigma \varepsilon_{i_1 \dots i_{n-1}} \widehat{\Omega}_{i_1 i_2} \wedge \dots \wedge \widehat{\Omega}_{i_{2k-1} i_{2k}} \wedge \widehat{\omega}_{i_{2k+1}} \wedge \dots \wedge \widehat{\omega}_{i_{n-1}}$$

où (X_1, \dots, X_{n-1}) est un champ de repères orthonormé sur le fibré F tangent à $\mathcal{F}_{\bar{\Phi}}$ tel que $(\tau, X_1, \dots, X_{n-1})$ soit direct.

$\varepsilon_{i_1 \dots i_{n-1}} = +1$ ou -1 selon que (i_1, \dots, i_{n-1}) est une permutation paire ou impaire de $(1, \dots, n-1)$,

$$\widehat{\omega}_j(X) = D_X X_j(\tau) \quad j = 1, \dots, n-1$$

$$\widehat{\Omega}_{ij} = g(X_i, X_j) \widehat{\Omega}_i^j \quad i, j = 1, \dots, n-1,$$

où $(\widehat{\Omega}_i^j)$ est la matrice courbure de la connexion sur F induite par D .

Chaque feuille étant munie de l'orientation induite par τ , on peut définir sur chaque composante connexe V_i de V la fonction :

$$\widehat{\Theta}_{ik}(t) = \int_{V_i \cap \varphi^{-1}(t)} \theta_k, \quad k = 0, \dots, p-1.$$

Comme dans le cas des variétés à bord, les fonctions $\widehat{\Theta}_{ik}$ dépendent du voisinage tubulaire choisi, mais les valeurs $\widehat{\Theta}_{ik}(0)$ sont des *invariants homothétiques* de la connexion duale D sur le lieu singulier de g .

Considérons maintenant l'adhérence N_ℓ de chaque composante connexe M_ℓ ($\ell = 1, \dots, m$) de $M - \Sigma(g)$. La variété N_ℓ est une variété compacte à bord non vide contenu dans $\Sigma(g)$. Sur N_ℓ , g induit une pseudo-métrique g_ℓ vérifiant les propriétés 1), 2) et 3) du paragraphe précédent avec tous les exposants " α_i " égaux à 1.

À la restriction de Φ à $\partial_i N_\ell \times I$ (avec $I = [0, 1[$ ou $I =]-1, 0]$ et $\partial_i N_\ell$ une composante connexe du bord de N_ℓ) est canoniquement associé un voisinage collier adapté à g_ℓ . Le champ de vecteur normal τ_ℓ associé au feuilletage correspondant est égal à τ (resp. $-\tau$) si $g(\tau, \tau) \geq 0$ (resp. $g(\tau, \tau) \leq 0$). La fonction $\Theta_{ik}(t)$ sur $V_t \cap N_\ell$ correspondante est égale à $\hat{\Theta}_{ik}(t)$ (resp. $\hat{\Theta}_{ik}(-t)$) sur $V_t \cap N_\ell$.

En appliquant le théorème 5.2.2 à chaque variété compacte à bord N_ℓ , on obtient le développement asymptotique suivant.

THÉORÈME 5.3.1

1) Si $M_t = M - \Phi(]-t, t[)$, alors :

$$\int_{M_t} \Delta = \chi(M) + \sum_{k=0}^{p-1} t^{\frac{1}{2}-p+k} \left(\sum_{i=1}^q \sum_{\ell=0}^{[k/2]} a_{i\ell k} \hat{\Theta}_{ik-2\ell}^{(2\ell)}(0) \right) + O(t^{\frac{1}{2}}),$$

avec :

$$\left[\frac{k}{2} \right] \text{ est la partie entière de } \frac{k}{2}$$

$\hat{\Theta}_{ik-2\ell}^{(2\ell)}$ est la dérivée $2\ell^{\text{ième}}$ de $\hat{\Theta}_{ik-2\ell}$

$$a_{i\ell k} = \frac{(-1)^n}{\pi^p 2^{p+k-2\ell-1}} \times \frac{1}{(2\ell!)(k-2\ell)!} \times \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (2p-2k+4\ell-1)}.$$

2) Si la signature de g est $(2r+1, 2p-2r-1)$, sur la composante connexe M_ℓ de $M - \Sigma(g)$, alors $\chi(N_\ell) = 0$ (N_ℓ étant l'adhérence de M_ℓ dans M).

Démonstration

1) Avec les notations précédentes, posons $M_{t\ell} = M_t \cap N_\ell$. Sur chaque variété N_ℓ on applique le théorème 5.2.2. Pour t assez petit :

$$\int_{M_{t\ell}} \Delta = \chi(M_{t\ell}) + \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=1}^{q_\ell} t^{\frac{1}{2}-p+k} a_k \hat{\Theta}_{ik}(\varepsilon_{i\ell} t),$$

avec $\varepsilon_{i\ell} = +1$ (resp. $\varepsilon_{i\ell} = -1$) si $g(\tau, \tau) \geq 0$ (resp. $g(\tau, \tau) \leq 0$) sur la composante $\partial_i N_\ell \subset V_i \cap N_\ell$ de ∂M_ℓ et q_ℓ que q_ℓ est le nombre de composantes connexes du bord de N_ℓ .

Quelques propriétés géométriques des variétés pseudo-riemanniennes singulières

On en déduit, pour t assez petit :

$$\int_{M_t} \Delta = \sum_{\ell=1}^m \left(\chi(N_\ell) + \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=1}^{q_\ell} t^{\frac{1}{2}-p+k} a_k \widehat{\Theta}_{ik}(\varepsilon_{i\ell} t) \right).$$

Remarquons d'abord que l'on a :

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^m \chi(N_\ell) - \sum_{(\ell < h)} \chi(N_\ell \cap N_h)$$

Comme $N_\ell \cap N_h \subset \Sigma(g)$, et que $\dim \Sigma(g) = 2p - 1$:

$$\chi(M) = \sum_{\ell=1}^m \chi(N_\ell).$$

D'autre part, chaque composante $\Sigma_i(g)$ de $\Sigma(g)$ est une composante du bord de deux variétés N_ℓ et N_h distinctes et pour ces variétés :

$$\varepsilon_{i\ell} = -\varepsilon_{ih}.$$

Par suite, si $\Sigma_1(g), \dots, \Sigma_q(g)$ sont les composantes connexes de $\Sigma(g)$, la dernière sommation est égale à :

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k t^{\frac{1}{2}-p+k} \left(\sum_{i=1}^q (\widehat{\Theta}_{ik}(t) + \widehat{\Theta}_{ik}(-t)) \right).$$

En utilisant le développement de Taylor $\widehat{\Theta}_{ik}$ en 0, et la valeur de a_k , on obtient la formule annoncée.

Si la signature de g est $(2r + 1, 2p_2r + 1)$ sur M_ℓ , alors $\chi(N_\ell) = 0$ d'après 5.2.2. \square

Supposons maintenant que g est une pseudo-métrique générique dont le lieu singulier est une hypersurface auto-parallèle. D'après la proposition 2.3.1, g est alors non dégénérée en restriction à $\Sigma(g)$. Ainsi g vérifie les hypothèses énoncées au début de ce paragraphe. En appliquant le théorème 5.2.2 2) à chaque variété N_ℓ , adhérence de la composante connexe M_ℓ de $M - \Sigma(g)$ ($\ell = 1, \dots, m$), on obtient le théorème 5.3.2.

THÉORÈME 5.3.2. — *Avec les hypothèses précédentes, pour tout voisinage $\Phi : \Sigma(g) \times]-1, 1[\rightarrow M$ adapté à g , l'intégrale $\int_{M_t} \Delta$ est convergente et :*

$$\int_M \Delta = \chi(M).$$

Lorsque M est une surface, le lieu singulier d'une pseudo-métrique générique est une réunion de cercles $\Sigma_1(g), \dots, \Sigma_q(g)$. Si, de plus, g est non dégénérée en restriction à $\Sigma(g)$, le théorème 5.2.2 3) permet d'obtenir le résultat suivant.

THÉORÈME 5.3.3

1) *Avec les hypothèses précédentes, l'intégrale $\int_{M-t} \Delta$ est convergente si, et seulement si, $\sum_{i=1}^q \hat{\Theta}_{i0}(0) = 0$ et dans ce cas :*

$$\int_M \Delta = \chi(M).$$

Si tous les $\hat{\Theta}_{i0}(0)$ sont nuls, pour tout voisinage

$$\Phi : \Sigma(g) \times]-1, 1[\rightarrow M$$

adapté à g , l'intégrale associée $\int_{\overline{M}_t} \Delta$ est convergente : de plus sur chaque composante M_t de $M - \Sigma(g)$, l'intégrale $\int_{\overline{M}_{tt}} \Delta$ est convergente ($M_{tt} = M_t \cap \overline{M}_t$). Par contre, si l'un au-moins des $\hat{\Theta}_{i0}(0)$ est non nul, et si $\int_{M_t} \Delta$ est convergente, il existe un voisinage collier $\bar{\Phi} : \Sigma(g) \times]-1, 1[\rightarrow M$ adapté à g , pour lequel l'intégrale $\int_{\overline{M}_{tt}} \Delta$ associée est divergente.

2) *Chaque composante connexe de $M - \Sigma(g)$ sur laquelle g a pour signature $(1, 1)$ est difféomorphe à $\mathbf{S}^1 \times]-1, 1[$.*

Comme pour les variétés compactes à bord, lorsque $\Sigma(g)$ est auto-parallèle, toutes les fonctions $\hat{\Theta}_{i0}$ sont nulles sur $\Sigma(g)$, mais la réciproque est évidemment fautive (voir l'exemple plus loin). Si l'intégrale $\int_{M_{tt}} \Delta$ est convergente sur chaque composante M_t , alors l'intégrale $\int_M \Delta$ est aussi convergente, mais la réciproque est encore fautive dans ce cas (voir l'exemple qui suit). Enfin, sur toute surface compacte, il existe des pseudo-métriques génériques pour lesquelles les fonctions $\hat{\Theta}_{i0}$ ne sont pas identiquement nulles sur $\Sigma(g)$ alors que l'intégrale $\int_M \Delta$ est convergente.

Quelques propriétés géométriques des variétés pseudo-riemanniennes singulières

Exemple. — Sur $C = \mathbf{S}^1 \times]-2, 2[$ on considère la pseudo-métrique :

$$g_a = a du^2 / (1 - s^2) ds^2,$$

où a est une fonction strictement positive sur C .

La pseudo-métrique g_a est générique, et $\Sigma(g_a)$ est la réunion des cercles $\Sigma_1 = \mathbf{S}^1 \times \{-1\}$ et $\Sigma_2 = \mathbf{S}^1 \times \{1\}$; de plus la pseudo-métrique induite par g_a sur $\Sigma(g_a)$ est non dégénérée. Comme dans l'exemple du section 2, considérons les voisinages tubulaires :

$$\Phi_1 : \Sigma_1 \times]-1, 1[\rightarrow C, \quad \Phi_1(u, t) = (u, -1 + f_\mu(t))$$

$$\Phi_2 : \Sigma_2 \times]-1, 1[\rightarrow C, \quad \Phi_2(u, t) = (u, 1 - t),$$

f_μ étant un difféomorphisme de $] - 1, 1[$ tel que $f_\mu(t) = (1/\mu)t$ pour $0 \leq |t| \leq 1/2$ et $\mu > 0$. Le champ normal au feuilletage \mathcal{F}_Φ associé est encore

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{\mu}{1-s}} \frac{\partial}{\partial s} \quad \text{sur} \quad V_1 = \Phi_1 \left(\Sigma_1 \times \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\right)$$

et

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{1}{1-s}} \frac{\partial}{\partial s} \quad \text{sur} \quad V_2 = \Phi_2 \left(\Sigma_2 \times \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\right).$$

Choisissons pour fonction a les fonctions définies de la manière suivante :

$$a_\varepsilon = \begin{cases} \gamma s + m & \text{pour } \varepsilon = -1 \\ (2\alpha - 1)\gamma s + m & \text{pour } \varepsilon = 1, \end{cases}$$

où γ est une fonction sur \mathbf{S}^1 , où m est une constante non nulle telle que $2|\gamma| < m$ et où α est une fonction sur $] - 2, 2[$, telle que $\alpha(s) = 0$ pour $-2 < s \leq -1/2$ et $\alpha(s) = 1$ pour $1/2 \leq s < 2$.

Si D est la connexion de Lévi-Civita de g , les fonctions $\widehat{\Theta}_{i0}$ associées sont alors :

$$\widehat{\Theta}_{10}(t) = \frac{\varepsilon\mu}{\sqrt{\mu-t}} \int_{\mathbf{S}^1} \gamma du \quad \text{sur } V_1$$

$$\widehat{\Theta}_{20}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \int_{\mathbf{S}^1} \gamma du \quad \text{sur } V_2.$$

Considérons maintenant une surface compacte orientée M , et soient $\Psi_\ell : C \rightarrow M$ des plongements conservant l'orientation. On munit $C_\ell = \Psi_\ell(C)$ de la pseudo-métrique g_ℓ image par Ψ_ℓ de métriques g_{a_ℓ} sur C , où $a_1, \dots, a_\ell, \dots, a_q$ sont des fonctions strictement positives sur C . En recollant les pseudo-métriques g_ℓ et une métrique riemannienne quelconque sur M par une partition de l'unité, on obtient une pseudo-métrique générique g sur M dont le lieu singulier est :

$$\bigcup_{\ell=1}^q \Psi_\ell(\Sigma_1 \cup \Sigma_2).$$

De plus, la pseudo-métrique induite par g sur $\Sigma(g)$ est non dégénérée. L'image du voisinage tubulaire $V_1 \cup V_2$ par les plongements Ψ_ℓ est un voisinage de $\Sigma(g)$ adapté à g . Considérons l'intégrale $\int_{M_\ell} \Delta$ de la forme pfaffienne de la connexion duale de Lévi-Civita de g .

Premier cas. — Choisissons des pseudo-métriques g_{a_ℓ} sur C , avec $a_\ell = \gamma_\ell s + m$, comme plus haut, où les fonctions γ_ℓ sont définies sur S^1 . Le lieu singulier de g est auto-parallèle si, et seulement si, $\gamma_\ell = 0$ sur S^1 pour tout $\ell = 1, \dots, q$.

L'intégrale $\int_{M_\ell} \Delta$ sera convergente, si et seulement si,

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) \sum_{i=1}^q \int_{S^1} \gamma_\ell du = 0.$$

Ainsi pour $\mu = 1$, cette intégrale sera convergente quelle que soit les fonctions $\gamma_1, \dots, \gamma_q$. En conséquence, pour $\mu = 1$ et des fonctions γ_ℓ telles que $\int_{S^1} \gamma = 0$, les fonctions $\hat{\Theta}_{i0}$ associées ne seront pas nulles, alors que l'intégrale de Δ sur M sera convergente. On peut aussi choisir les fonctions γ_ℓ pour que $\sum_{\ell=1}^q \int_{S^1} \gamma_\ell \neq 0$. Dans ce cas, l'intégrale de Δ sera convergente pour $\mu = 1$ et divergente dans les autres cas.

Si maintenant $q = 2r$, et si on choisit γ_ℓ de sorte que $\gamma_{2\ell} = -\gamma_{2\ell-1}$ pour $\ell = 1, \dots, r$, l'intégrale de Δ sur M sera convergente pour toute valeur de μ .

Deuxième cas. — Choisissons des pseudo-métriques g_{a_ℓ} sur C , avec $a_\ell = (2s-1)\gamma_\ell + m$. Dans cette situation, on obtient encore une pseudo-métrique g sur M à lieu singulier auto-parallèle si, et seulement si, toutes les fonctions γ_ℓ sont nulles sur S^1 . En revanche, l'intégrale $\int_{M_\ell} \Delta$ sera convergente, si et seulement si, on a $\sum_{\ell=1}^q \int_{S^1} \gamma_\ell = 0$, quelle que soit la valeur de μ .

L'exemple précédent est une bonne illustration d'une méthode de *construction des pseudo-métriques génériques sur une surface compacte* dont la métrique est non dégénérée en restriction à ce lieu singulier. Nous allons terminer ce paragraphe en montrant que toutes les pseudo-métriques sur une surface compacte ayant de telles propriétés sont obtenues de cette manière. En fait, ce sera une conséquence immédiate du théorème 5.3.3 2).

Désignons par $\mathcal{P}(C)$ l'ensemble des pseudo-métriques sur $C = \mathbf{S}^1 \times]-2, 2[$ ayant les propriétés suivantes :

- 1) $\Sigma(g) = \mathbf{S}^1 \times \{-1\} \cup \mathbf{S}^1 \times \{1\}$;
- 2) la signature de g sur $\mathbf{S}^1 \times]-1, 1[$ est $(1, 1)$;
- 3) la pseudo-métrique induite par g sur $\Sigma(g)$ est non dégénérée.

Les pseudo-métriques g_{α_ℓ} construites dans l'exemple précédent appartiennent à $\mathcal{P}(C)$.

Soient M une surface compacte et $\Sigma_1, \dots, \Sigma_q$ des cercles disjoints dans M . Considérons des plongements $\Psi_\ell : C \rightarrow M$ tels que $\Psi_\ell(\mathbf{S}^1 \times \{0\}) = \Sigma_\ell$ pour $\ell = 1, \dots, q$. On note Σ_ℓ^+ (resp. Σ_ℓ^-) l'image par Ψ_ℓ de $\mathbf{S}^1 \times \{1\}$ (resp. $\mathbf{S}^1 \times \{-1\}$). On munit $V_\ell = \Psi_\ell(C)$ d'une pseudo-métrique \widehat{g}_ℓ image par Ψ_ℓ d'une pseudo-métrique de $\mathcal{P}(C)$ et chaque composante connexe M_j de $M - \bigcup_{\ell=1}^q \Psi_\ell(\mathbf{S}^1 \times](-3/2), 3/2[)$, $j = 1, \dots, m$ d'une métrique riemannienne g_j . En recollant, par une partition de l'unité, les pseudo-métriques \widehat{g}_ℓ et g_j ou $-g_j$, on obtient sur M une pseudo-métrique générique g dont le lieu singulier est $\bigcup_{\ell=1}^q (\Sigma_\ell^+ \cup \Sigma_\ell^-)$. Cette pseudo-métrique est non dégénérée en restriction à $\Sigma(g)$.

Réciproquement, soit g une pseudo-métrique générique non dégénérée en restriction à son lieu singulier. $\Sigma(g)$ est alors une réunion de cercles disjoints plongés. De plus, à cause de la généricité, la signature de g change quand on passe d'une composante connexe de $M - \Sigma(g)$ à une autre. L'une au moins de ces composantes est diffeomorphe à $\mathbf{S}^1 \times]-1, 1[$, d'après le théorème 5.3.3 2). Il existe donc des plongements $\Psi_\ell : C \rightarrow M$ ($\ell = 1, \dots, q$) tels que

$$\bigcup_{\ell=1}^q \left(\Psi_\ell(\mathbf{S}^1 \times]-1, 1[) \right)$$

s'identifie à la réunion des composantes connexes de $M - \Sigma(g)$, où la signature de g est $(1, 1)$. Par suite, $g_\ell = \Psi_\ell^* g$ est une pseudo-métrique sur C du type précédent. De plus, sur $M - \bigcup_{\ell=1}^q \Psi_\ell(C)$, la pseudo-métrique g ou $-g$ est riemannienne.

6. Les variétés pseudo-riemanniennes plates

Soit g une pseudo-métrique générique sur une variété M . On dit que g est plate si la connexion de Lévi-Civita de g sur $M - \Sigma(g)$ est de courbure nulle. Dans ce cas on dit que (M, g) est une variété pseudo-riemannienne générique plate. L'objet de ce chapitre est d'étudier quelques propriétés géométriques de ces variétés.

6.1 Exemples

6.1.1 Pseudo-métrique générique plate \hat{g} sur \mathbb{R}^n

Pour $c \geq 1$, posons $\nu_c = c(c+1)/2$. Soit g_c une pseudo-métrique générique plate sur \mathbb{R}^{ν_c} , dont la strate $\Sigma_c(g)$ est réduite à $\{0\}$. Il suffit de considérer, par exemple, la pseudo-métrique suivante :

$$h_c = \sum_{i=1}^c x_i dx_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq \nu_c} d(x_i x_{\sigma(i,j)}) dx_j + \sum_{\ell=c+1}^{\nu_c} \varepsilon_\ell dx_\ell^2$$

où $\sigma : \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq \nu_c\} \rightarrow \{c+1, \dots, \nu_c\}$ est une bijection et $\varepsilon_\ell = \pm 1$.

Si maintenant, on se donne une métrique pseudo-riemannienne plate g_0 sur $\mathbb{R}^{n-\nu_c}$, la pseudo-métrique $\hat{g} = g_c + g_0$ est une pseudo-métrique générique plate sur \mathbb{R}^n , dont le lieu singulier est égal à $\Sigma(g_c) \times \mathbb{R}^{n-\nu_c}$. De plus, $\Sigma(g)$ est auto-parallèle relativement à la connexion duale de Lévi-Civita de g si, et seulement si, $\Sigma(g_c)$ est auto-parallèle (dans \mathbb{R}^{ν_c}) relativement à la connexion duale de Lévi-Civita de g_c . C'est par exemple le cas pour $g_c = h_c$.

On montrera dans le paragraphe suivant, que (\mathbb{R}^n, \hat{g}) est un modèle local au voisinage de chaque point de $\Sigma_c(g)$ pour une variété pseudo-riemannienne générique (M, g) , telle que $\Sigma(g)$ soit auto-parallèle (voir la remarque qui suit le théorème 6.2.1).

Remarque. — Si g_0 est une métrique pseudo-riemannienne plate non dégénérée sur $\mathbb{R}^{n-\nu_c}$, il existe un système de coordonnées $(x_1, \dots, x_{n-\nu_c})$ dans lequel g_0 s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{\nu_c} \pm dx_i^2.$$

En revanche, si g_c est une pseudo-métrique générique plate sur \mathbb{R}^{ν_c} , telle que $\Sigma_c(g) = \{0\}$, existe-t-il un système de coordonnées (x_1, \dots, x_{ν_c}) dans lequel g_c soit égal à h_c ? Lorsque $c = 1$, on démontrera l'existence d'un tel système de coordonnées de classe C^1 (lemme 6.3.2).

6.1.2 Variétés pseudo-riemanniennes génériques plates

Soit (N, g_0) une variété pseudo-riemannienne plate compacte et $p : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ un fibré sur \mathbb{S}^1 de fibré N . Étant donnée une fonction $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ s'annulant en changeant de signe en un nombre fini de points a_1, \dots, a_r de \mathbb{S}^1 sur M , on considère la pseudo-métrique :

$$g = g_0 + p^*(f du^2),$$

où du^2 est la métrique canonique sur \mathbb{S}^1 .

Par construction, la pseudo-métrique g est générique et plate. Le lieu singulier de g est $\Sigma(g) = \bigcup_{i=1}^r p^{-1}(a_i)$, et il est auto-parallèle (pour la connexion duale de Lévi-Civita de g). En fait, chaque fibré $p^{-1}(a)$ est auto-parallèle. Le fibré orthogonal au noyau de p est aussi auto-parallèle.

On montrera, dans le paragraphe 6.4. que toute variété pseudo-riemannienne générique (M, g) plate, compacte, et complète telle que $\Sigma(g)$ soit auto-parallèle est isométrique à une telle variété.

6.1.3 Pseudo-métriques génériques plates sur une surface

Soit M une surface compacte et $(f_1, f_2) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application C^∞ générique dont le lieu singulier $\Sigma(f)$ est non vide. Cet ensemble est alors une réunion de cercles disjoints plongés. Munissons \mathbb{R}^2 de la métrique plate canonique :

$$g_0 = dx^2 - dy^2.$$

Sur M la pseudo-métrique image réciproque $g = f^*g_0$ est générique et plate. Son lieu singulier est égal à $\Sigma(f)$. Son noyau est égal au noyau de l'application Tf tangente à f .

6.2 Modèle local

Soit g_i , une pseudo-métrique sur une variété M_i ($i = 1, 2$) si $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ est la projection canonique le lieu singulier dans $M_1 \times M_2$ de la pseudo-métrique image réciproque $\bar{g} = \pi_1^*g_1 + \pi_2^*g_2$ est égal à $\pi_1^{-1}(\Sigma(g_1) \times M_2 \cup M_1 \times \Sigma(g_2))$. On dit que \bar{g} est la pseudo métrique produit de g_1 et g_2 sur $M_1 \times M_2$.

L'objet de ce paragraphe est d'établir le résultat suivant (généralise le théorème 9 de [14]).

THÉORÈME 6.2.1. — *Soit g une pseudo-métrique 1-générique (§ 2.1) plate dont le lieu singulier est auto-parallèle (relativement à la connexion duale de Lévi-Civita). Pour tout point a de $\Sigma(g)$, il existe un voisinage V_1 dans la strate $\Sigma_c(g)$ contenant a , une sous-variété V_2 transverse et orthogonale à V_1 en a , un difféomorphisme $\Phi : V_1 \times V_2$ sur un voisinage W de a tels que $\Phi^*(g)$ soit égal à la pseudo-métrique produit de $g_1 = g|_{V_1}$ et de $g_2 = g|_{V_2}$. La pseudo-métrique g_2 est générique et plate sur V_2 et la strate $\Sigma_c(g_2)$ est réduite à $\{a\}$. La pseudo-métrique g_1 est, elle aussi, plate mais elle est non dégénérée.*

Remarque. — Dans les hypothèses du théorème 6.2.1, il existe alors un difféomorphisme Ψ de \mathbb{R}^n dans M , tel que $\Psi(0) = a$ et la pseudo-métrique image réciproque Ψ^*g soit une métrique \hat{g} sur \mathbb{R}^n du type de celle construite dans le paragraphe 6.1.1 précédent.

La démonstration de ce théorème s'appuie sur la proposition suivante.

PROPOSITION 6.2.2. — *Soit g une pseudo-métrique générique, a un point de $\Sigma_c(g)$ tel que g soit non dégénérée en restriction à $T_a\Sigma_c(g)$ et D la connexion duale de Lévi-Civita de g . Supposons qu'il existe une distribution Π , de codimension ν_c , invariante par transport parallèle le long de toute courbe transverse à $\Sigma(g)$. Il existe alors un voisinage V_1 de a dans $\Sigma_c(g)$, une variété V_2 transverse à $\Sigma_c(g)$ en a , un difféomorphisme Φ de $V_1 \times V_2$ sur un voisinage W de a dans M tels que la pseudo-métrique image réciproque Φ^*g soit égale à la pseudo-métrique produit de $g_1 = g|_{V_1}$ et de $g_2 = g|_{V_2}$.*

Démonstration de la proposition 6.2.2. — Montrons d'abord que la distribution Π est tangente à $\Sigma(g)$ et que Π et Π^\perp sont supplémentaires sur un voisinage de a dans $\Sigma(g)$.

Comme g est générique, $\Sigma_{10}(g)$ est dense dans $\Sigma(g)$. Soit K un champ de vecteurs sur un voisinage V de a dans M qui engendre le noyau de g sur $V \cap \Sigma_{10}(g)$. L'invariance de Π par transport parallèle, implique que, pour tout champ de vecteurs X tangent à Π , on a $\delta_\gamma X = 0$ le long de tout chemin γ tangent à K issu d'un point de $V \cap \Sigma_{10}(g)$. On en déduit que $D_K X(K) = 0$ sur $\Sigma_{10}(g) \cap V$. Comme

$$D_K X(K) = \frac{1}{2} X(g(K, K)) + g([X, K], K),$$

on a aussi $X(g(K, K)) = 0$ sur $\Sigma_{10}(g) \cap V$. Par genericité, $g(K, K) = 0$ est une équation de $\Sigma_{10}(g)$ sur V . Ainsi, X est tangent à $\Sigma(g)$ dans V . Par un argument de densité, on en déduit que Π est tangent à $\Sigma(g)$ sur V . En particulier, on a $\Pi(a) = T_a \Sigma_c(g)$. Comme g est non dégénérée sur $T_a \Sigma_c(g)$, il existera un voisinage U de a dans V sur lequel Π et Π^\perp sont supplémentaires et orthogonaux. L'invariance de Π par transport parallèle le long de toute courbe transverse à $\Sigma(g)$ implique que la décomposition $TM = \Pi \oplus \Pi^\perp$ possède aussi cette propriété. Il en résulte que Π et Π^\perp sont intégrables sur $V - \Sigma(g)$ et chacune des feuilles des deux feuilletages ainsi définis sont auto-parallèles [11]. Encore par un argument de densité, on en déduit que ce résultat est vrai sur U tout entier. \square

Démonstration du théorème 6.2.1. — Puisque $\Sigma(g)$ est auto-parallèle, la pseudo-métrique g_c induite par g sur chaque strate $\Sigma_c(g)$ est non dégénérée (proposition 2.3.11). Comme g est plate, et que $\Sigma_c(g)$ est auto-parallèle, g_c est aussi plate. Le problème étant local, on peut supposer que $a = 0$ et $M = \mathbb{R}^n$. Il existe un système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) sur un voisinage W de 0 ayant les propriétés suivantes :

- $\Sigma_c(g) \cap W$ a pour équation $x_1 = \dots = x_{\nu_c} = 0$;
- $(\partial/\partial x_{\nu_c+1}, \dots, \partial/\partial x_n)$ est un champ de repères orthonormés pour g_c sur $\Sigma_c(g) \cap W$;
- $L_g(\partial/\partial x_i, \cdot, \cdot)$ induit sur le noyau de g une forme quadratique non dégénérée (proposition 2.2.4) en tout point de $W \cap \Sigma_c(g)$ et pour tout $i = 1, \dots, \nu_c$.

En utilisant la proposition 2.2.4, par transport parallèle le long des courbes intégrales de $\partial/\partial x_1$, on peut construire sur la variété d'équation $x_2 = \dots = x_{\nu_c} = 0$ des champs de vecteurs $X_1, \dots, X_{n-\nu_c}$, tels que

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_{\nu_c+i}} \quad \text{sur } \Sigma_c(g) \cap W$$

et

$$\nabla_{\partial/\partial x_1} X_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n - \nu_c.$$

On peut prolonger ces champs de vecteurs à la variété $x_3 = \dots = x_{\nu_c} = 0$ en des champs de vecteurs encore notés $X_1, \dots, X_{n-\nu_c}$, par transport parallèle le long des courbes intégrales de $\partial/\partial x_2$. Par construction on aura $\nabla_{\partial/\partial x_j} X_i = 0$, pour $i = 1, \dots, n - \nu_c$ et $j = 1, 2$; et comme g est plate, on aura aussi

$$\nabla_{\partial/\partial x_1} \nabla_{\partial/\partial x_2} X_i = \nabla_{\partial/\partial x_2} \nabla_{\partial/\partial x_1} X_i = 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n - \nu_c.$$

Par récurrence, on obtient ainsi des champs de vecteurs $X_1, \dots, X_{n-\nu_c}$ sur W ayant les propriétés suivantes :

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_{\nu_c+i}}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n - \nu_c,$$

$$\nabla_{\partial/\partial x_j} X_i = 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n - \nu_c \text{ et } j = 1, \dots, \nu_c.$$

Un raisonnement analogue au précédent permet d'affirmer que l'on a aussi : $\nabla_{\partial/\partial x_j} X_i = 0$, pour $i = 1, \dots, n - \nu_c$ et $j = \nu_c + 1, \dots, n$.

La distribution S définie par $X_1, \dots, X_{n-\nu_c}$ sur W vérifie alors les hypothèses de la proposition 6.2.2 qu'il suffit de l'appliquer à S pour obtenir le résultat. \square

6.3 Description des géodésiques au voisinage d'un point de $\Sigma_1(g)$

Soit g une pseudo-métrique plate dont le lieu singulier est auto-parallèle. La conséquence suivante du théorème 6.2.1 va nous permettre de ramener l'étude des géodésiques au voisinage d'un point de $\Sigma_1(g)$ à l'étude des géodésiques de $g_0 = x_1 dx_1^2 + \sum_{i=2}^n \pm dx_i^2$ au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$.

LEMME 6.3.1. — Soit a un point de $\Sigma_1(g)$. Il existe un difféomorphisme Φ de classe C^1 de \mathbb{R}^n sur un voisinage U de a , tel que :

- $\Phi(0) = a$ et $\Phi(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) = \Sigma_1(g) \cap U$;
- $\Phi^*g = x_1 dx_1^2 + \sum_{i=2}^n \pm dx_i^2$;
- Φ est C^∞ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{n-1}$ et en restriction à $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Démonstration. — Il résulte de la remarque qui suit le théorème 6.2.1 qu'il existe un difféomorphisme $\widehat{\Phi}$ de classe C^∞ de \mathbb{R}^n sur un voisinage U de a ayant les propriétés suivantes : $\widehat{\Phi}(0) = a$ et $\widehat{\Phi}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) = \Sigma_1(g) \cap U$.

$$\widehat{\Phi}^*g = \lambda x_1 dx_1^2 + \sum_{i=2}^n \pm dx_i^2$$

où $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ telle que $\lambda(0) \neq 0$. Il suffit donc de construire une fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* , de classe C^1 en 0 avec $u(0) = 0$ et $u du^2 = \lambda x_1 dx_1^2$.

À un difféomorphisme près de \mathbb{R} , on peut toujours supposer que λ est strictement positive. Il est alors facile de vérifier que la fonction suivante convient :

$$\begin{cases} u(t) = \frac{3}{2} \frac{t}{|t|} \left\{ \frac{t}{|t|} \int_0^t \sqrt{|s|} \lambda ds \right\}^{\frac{2}{3}} & \text{pour } t \neq 0 \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad \square$$

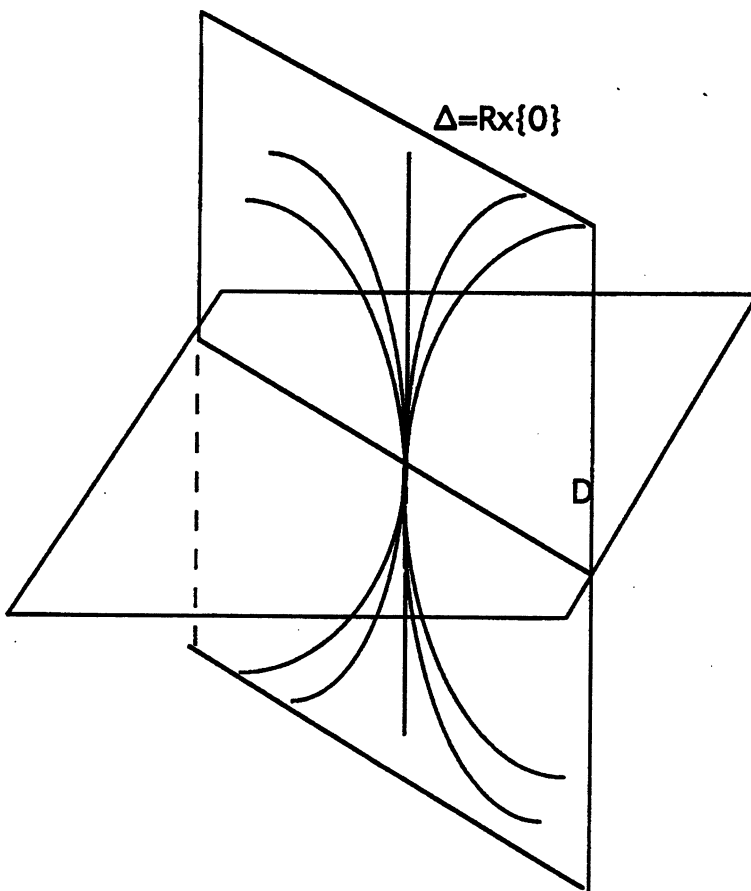


Fig. 2

Un chemin $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ de $[a, b]$ dans \mathbb{R}^n est une géodésique de $g_0 = x_1 dx_1^2 + \sum_{i=2}^n \pm dx_i^2$ si, et seulement si, ses composantes vérifient le système différentiel :

$$\begin{cases} \gamma_1 \frac{d\dot{\gamma}_1}{dt} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_1^2 \\ \frac{d\dot{\gamma}_i}{dt} = 0 \quad i = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Les géodésiques sont donc :

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (a_1 t + b_1)^2, \\ \gamma_i(t) &= a_i t + b_i, \quad i = 2, \dots, n \quad \text{avec } a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Les géodésiques de g_0 tangentes à $\Sigma(g_0) = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ sont les droites D de $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ passant par l'origine. Les géodésiques de g_0 transverses à $\Sigma(g_0)$ en 0 sont :

- la droite $\Delta = \mathbb{R} \times \{0\}$ (direction du noyau de g_0);
- toutes les paraboles tangentes à Δ à l'origine et contenues dans un plan défini par Δ et une des droites D (fig. 2).

Remarque. — Pour les pseudo-métriques plates génériques g dont le lieu singulier est auto-parallèle, le théorème 6.2.1 permet de ramener l'étude des géodésiques au voisinage d'un point de $\Sigma_c(g)$, à la situation où $\dim(\Sigma_c(g)) = 0$. Pour $c > 1$, il serait donc intéressant d'étudier la classification des pseudo-métriques génériques plates sur \mathbb{R}^c dont le lieu singulier est auto-parallèle et pour lesquelles $\Sigma_c(g) = \{0\}$ (voir remarque qui suit le théorème 6.2.1).

6.4 Caractérisation de certaines variétés pseudo-riemanniennes plates, compactes et complètes

Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne générique plate et compacte, telle que le lieu singulier de g soit auto-parallèle. Nous allons établir une caractérisation de ces variétés lorsque $\Sigma(g) = \Sigma_1(g)$ et que M est complète (au sens de la définition 6.5.1). Rappelons d'abord la notion de "b-complétude" introduite par B.G. Schmidt dans [32].

Considérons une connexion affine ∇ (non nécessairement métrique) sur une variété N à bord (éventuellement vide). Étant donné un chemin $\gamma : I \rightarrow N$ de classe C^1 , soit (X_1, \dots, X_n) le transport parallèle le long de γ d'une

base de $T_{\gamma(s_0)}N$, où $s_0 \in I$ est donné. On note $(\dot{\gamma}_1, \dots, \dot{\gamma}_n)$ les composantes de $d\gamma/dt$ sur (X_1, \dots, X_n) . L'application $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\tau(s) = \int_{s_0}^s \left(\sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i^2(s) \right)^{\frac{1}{2}} ds$$

s'appelle la *paramétrisation affine généralisée du chemin* γ . L'application τ dépend du choix de $s_0 \in I$ et de la base de $T_{\gamma(s_0)}N$. La propriété $\tau(I)$ est un intervalle borné et est conservée pour tout autre choix de s_0 et de la base de $T_{\gamma(s_0)}N$.

Remarquons que, si γ est une géodésique de ∇ , τ est alors une application affine et $\gamma \circ \tau^{-1} : \tau^{-1}(I) \rightarrow W$ est encore une géodésique de ∇ . On dira que N est *b-complète* si pour tout chemin $\gamma :]a, b[\rightarrow N$ de classe C^1 possédant une paramétrisation affine généralisée $\tau :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ d'image bornée, on peut prolonger γ en un chemin de classe C^1 $\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow N$ (cf. [32]).

Remarque. — Soit V une sous-variété fermée (à bord éventuellement vide) : si N est *b-complète*, V est aussi *b-complète*.

Soit $L(N) \rightarrow W$ le fibré des repères au-dessus de N . Le fibré $TL(N)$ tangent à $L(W)$ admet une décomposition en somme directe :

$$TL(N) = VL(N) \oplus H,$$

où $VL(N)$ est le fibré tangent aux fibres, et H le fibré horizontal défini par ∇ . Il existe alors une parallélisation (E_{ij}, B_ℓ) ($i, j, \ell = 1, \dots, n$) de $TL(N)$ telle que (E_{ij}) soit une parallélisation de $VL(N)$ et (B_ℓ) une parallélisation de H (cf. [11]). Soit G la métrique riemannienne qui rend le repère global (E_{ij}, B_1) orthonormé. On note $\| \cdot \|$ la norme sur $TL(N)$ associée et d la distance sur $L(N)$ correspondante. Si $\gamma : I \rightarrow W$ est un chemin et $\dot{\gamma} : I \rightarrow L(N)$ un relèvement horizontal, on vérifie aisément que :

$$\tau(s) = \int_{s_0}^s \left\| \frac{d\dot{\gamma}(s)}{dt} \right\| ds$$

est une paramétrisation affine généralisée de γ . Si l'espace topologique $(L(N), d)$ est complet, alors N est *b-complète*. Soit $u_0 \in L(N)$ et $N(u_0)$ l'ensemble des points u de $L(N)$ que l'on peut joindre à u_0 par un chemin horizontal. $N(u_0)$ s'appelle le *fibré d'holonomie* de ∇ en u_0 (cf. [11]). L'espace $(L(N), d)$ est complet si, et seulement si, $(N(u_0), d_0)$ est complet, où d_0 est la distance induite par d sur $N(u_0)$.

Rappelons, d'autre part, que si N est une variété compacte sans bord, N est géodésiquement complète si toute géodésique $\gamma : I \rightarrow N$ se prolonge en une géodésique $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow N$. Il est clair que si N est b -complète, alors N est géodésiquement complète. Mais en général, la réciproque est fautive [32].

Supposons que (N, ∇) soit une variété affine plate sans bord, c'est-à-dire ∇ est plate sans torsion. Si la variété N est géodésiquement complète, alors l'espace $(N(u_0), d_0)$ est complet [11]. Il en résulte que N est b -complète. Dans ce cas, on a équivalence entre b -complet et géodésiquement complet. Avec ces hypothèses, on dira alors que N est complet. Soit maintenant (N, G) une variété pseudo-riemannienne plate dont le bord est auto-parallèle. On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 6.4.2. — *Avec les hypothèses précédentes, si N est b -complète, cette variété est affinement difféomorphe à un produit $P \times [0, 1]$. Plus précisément, il existe un difféomorphisme Φ de $P \times [0, 1]$ dans N , où P est une composante du bord de N , tel que la métrique $\bar{G} = \Phi^*G$ soit la métrique produit de la métrique G_0 induite sur P par G et d'une métrique riemannienne sur $[0, 1]$.*

Démonstration. — Soit T un champ de vecteurs sur ∂N et orthogonal à ∂N et tel que $|G(T, T)| = 1$. Comme ∂N est auto-parallèle, T est invariant par transport parallèle le long de tout chemin contenu dans ∂N . Par transport parallèle le long des géodésiques déterminées par T , on peut construire un voisinage collier $\Psi : \partial N \times [0, \varepsilon[\rightarrow N$ tel que chaque variété $\Psi(\partial N \times \{t\})$ soit auto-parallèle pour $0 \leq t < \varepsilon$ (démonstration du théorème 6.2.1). Désignons par P une composante connexe de $\Psi(\partial N \times \{t_0\})$ pour t_0 fixé, $0 < t_0 < \varepsilon$. Soit $\pi : L(N_0) \rightarrow N_0$ le fibré des repères au-dessus de l'intérieur N_0 de N . Considérons un point x_0 de P et (e_1, \dots, e_n) un repère orthonormé en x_0 avec $e_n = T(x_0)$. On note u_0 le point de $L(N_0)$ ainsi défini. Dans $L(N_0)$, le fibré d'holonomie $N_0(u_0)$ de la connexion de Lévi-Civita de G en u_0 est une sous-variété de dimension n . Comme N est auto-parallèle, la métrique G_0 induite par G sur N est plate. Le fibré d'holonomie $N(u_0)$ de la connexion de Lévi-Civita de G_0 est une sous-variété de $N_0(u_0)$ de codimension 1. Soit (B_1, \dots, B_n) la parallélisation du fibré tangent à $L(N_0)$ caractérisée par $\pi(e_i) = B_i$. Comme ∇ est à courbure et torsion nulles, les champs de vecteurs (B_1, \dots, B_n) sont tangents à $N_0(u_0)$ et commutent. De plus, N étant auto-parallèle, B_1, \dots, B_{n-1} sont tangents à $N(u_0)$ et $\pi^*(B_n) = T$.

Soit $\hat{\gamma} :]a, b[\rightarrow N_0(u_0)$ une courbe intégrale maximale de B_n passant par u_0 et telle que $\pi \circ \hat{\gamma}(t) = \Psi(x_0, t - t_0)$ pour $-t_0 < t < \varepsilon - t_0$. La variété N étant compacte (sans bord) et auto-parallèle, les champs de vecteurs B_1, \dots, B_{n-1} sont complets sur $P(u_0)$. Comme B_1, \dots, B_{n-1}, B_n commutent, les champs de vecteurs B_1, \dots, B_{n-1} sont aussi complets sur toute la variété $N_0(u_0)$ et les courbes intégrales maximales de B_n passant par $N(u_0)$ sont définies sur $I =]a, b[$. On a ainsi une submersion $\hat{\Psi} = P(u_0) \rightarrow N_0(u_0)$, telle que $\pi \circ \hat{\Psi}(u, t) = \Psi(\pi(u), t - t_0)$ pour $-t_0 < t < \varepsilon - t_0$. L'intervalle I n'est pas égal à \mathbb{R} car, sinon $N_0(u_0)$ serait complet pour la distance d associée à la métrique riemannienne rendant B_1, \dots, B_{n-1} orthonormés et, par suite, l'intérieur N_0 de W serait b -complet; ce qui est absurde. Si $\hat{\Psi}$ n'était pas injective $N_0(u_0)$ serait difféomorphe à $P(u_0) \times \mathbb{S}^1$, par suite, serait complet, et encore une fois N_0 serait b -complet.

Par passage au quotient, on construit ainsi une submersion $\bar{\Psi} : P \times I \rightarrow N_0$ qui prolonge $(x, t) \rightarrow \Psi(x, t - t_0)$. Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que $\bar{\Psi}$ est injective.

Munissons $P \times I$ de la métrique image réciproque par $\bar{\Psi}$ de G . Pour tout $t \in I$, les variétés $P \times \{t\}$ sont alors auto-parallèles. Soit J le plus grand intervalle de I tel que la restriction de $\bar{\Psi}$ soit injective. Posons $\alpha = \inf J$ et $\beta = \sup J$. Remarquons que J contient l'intervalle $] -t_0, \varepsilon - t_0[$. Nous allons montrer, par un argument de connexité, que $J = I$.

Supposons d'abord $a < \alpha < \beta < b$ et montrons que $J = [\alpha, \beta]$. Pour cela, établissons d'abord que les restrictions respectives de $\hat{\Psi}$ à $N \times \{\alpha\}$ et $N \times \{\beta\}$ sont des plongements dans N_0 . Dans le cas contraire, il existerait x_1 et x_2 de N , tels que $\bar{\Psi}(x_1, \beta) = \bar{\Psi}(x_2, \beta)$. Les chemins $\gamma_1(t) = \bar{\Psi}(x_1, t)$ et $\gamma_2(t) = \bar{\Psi}(x_2, t)$, pour $t \in [0, \beta]$ étant homotopes, les images par $T\bar{\Psi}$ des espaces tangents à $P \times \{\beta\}$ en (x_1, β) et (x_2, β) sont égaux. Comme $\bar{\Psi}$ est aussi une isométrie locale, les vecteurs $(d\gamma_1/dt)(\beta)$ et $(d\gamma_2/dt)(\beta)$ sont proportionnels. Mais, on a $\gamma_1(\beta) = \gamma_2(\beta)$ et les chemins γ_1 et γ_2 sont des géodésiques. Ils coïncident donc sur un voisinage de $\gamma_1(\beta)$; dans ce cas, $\bar{\Psi}$ n'est plus injective sur $P \times J$. Un raisonnement analogue s'applique à $P \times \{\beta\}$.

Montrons maintenant $\bar{\Psi}$ est injective sur $P \times [\alpha, \beta]$. Si ce n'était pas le cas, il existerait encore x_1 et x_2 de P tels que $\bar{\Psi}(x_1, \beta) = \bar{\Psi}(x_2, \beta)$ alors :

- ou bien, $\bar{\Psi}(P \times \{\alpha\})$ et $\bar{\Psi}(P \times \{\beta\})$ sont transverses en $\bar{\Psi}(x_1, \beta) = \bar{\Psi}(x_2, \beta)$; il existerait alors $\delta > 0$, tel que $\bar{\Psi}(P \times \{s\})$ et $\bar{\Psi}(P \times \{t\})$ soient transverses pour $\beta - \delta < s \leq \beta$ et $\alpha \leq t < \alpha$; par suite,

il existerait (x'_1, t'_1) et (x'_2, t'_2) de $P \times]\alpha, \beta[$ pour lesquels on aurait $\bar{\Psi}(x'_1, t'_1) = \bar{\Psi}(x'_2, t'_2)$; on en conclut que $\bar{\Psi}$ ne serait plus injective sur $N \times J$;

- ou bien $\bar{\Psi}(P \times \{\alpha\})$ et $\bar{\Psi}(P \times \{\beta\})$ sont tangentes en $\bar{\Psi}(x_1, \beta) = \bar{\Psi}(x_2, \beta)$; comme ces variétés sont auto-parallèles, elles coïncident; il en résulte que N_0 serait une variété compacte (sans bord); ce qui est absurde.

On a ainsi prouvé que $J = [\alpha, \beta]$.

Si $\bar{\Psi}$ est injective sur $P \times [\alpha, \beta]$, par transport parallèle le long des géodésiques orthogonales à $\bar{\Psi}(P \times \{\alpha\})$ et à $\bar{\Psi}(P \times \{\beta\})$ nécessairement, $\bar{\Psi}$ est injective sur $P \times]\alpha - \delta, \beta + \delta[$ pour un certain $\delta > 0$. Par argument de connexité, on en déduit que $a = \alpha$ et $b = \beta$. \square

La classification topologique des variétés lorentziennes plates compactes (N, G) montre que si N contient un tore \mathbb{T}^{n-1} auto-parallèle, alors N est fibrée sur S^1 de fibre \mathbb{T}^{n-1} (cf. [7]). Il résulte de la proposition 6.4.2 le résultat suivant.

THÉORÈME 6.4.3. — *Soit (N, G) une variété pseudo-riemannienne plate compacte complète, sans bord. Si N contient une sous-variété P compacte connexe auto-parallèle de codimension 1, N est fibrée sur S^1 de fibre P .*

Démonstration. — Considérons la variété $N' = N - P$. L'adhérence \bar{N}_i de chaque composante connexe N_i de N' est une variété pseudo-riemannienne b -complète dont le bord est auto-parallèle. D'après la proposition 6.4.2. chacune de ces variétés est diffeomorphe $P \times [0, 1]$. Comme N est obtenue en recollant les \bar{N}_i par leur bord, on en déduit que N est fibrée sur S^1 de fibre N .

Remarques

1) Le théorème de Hopf-Rinov permet d'affirmer qu'une variété riemannienne compacte plate est complète; de plus, une telle variété est diffeomorphe à un tore (théorème de Bieberbach). Une variété lorentzienne compacte plate est aussi complète [4]. La classification des variétés lorentziennes compactes plates est faite dans [7]. En général, la compacité ne suffit pas pour entraîner la complétude d'une variété affine plate (voir par exemple [24]). Pour les variétés pseudo-riemanniennes compactes, le problème reste encore ouvert à ma connaissance.

2) Une variété affine plate compacte complète N est le quotient de l'espace affine \mathbb{R}^n par le groupe d'holonomie affine Γ de la connexion plate sur W . Lorsque cette connexion est compatible avec une métrique pseudo-riemannienne, il serait intéressant d'étudier dans quel cas le groupe d'holonomie Γ laisse invariant un hyperplan affine de \mathbb{R}^n . Dans cette situation N sera fibrée sur S^1 , d'après le théorème 6.4.3.

6.5 Caractérisation de certaines variétés pseudo-riemanniennes génériques plates compactes et complètes

Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne générique. Étant donnée une connexion duale g -métrique D sur M , on note ∇ la connexion métrique sur $M' = M - \Sigma(g)$ associée à D . Supposons que $\Sigma(g)$ soit compact. Il existe un voisinage V de $\Sigma(g)$ et une fonction $\varphi : V \rightarrow [0, \varepsilon[$ tels que chaque composante connexe de V ne contienne qu'une seule composante connexe de $\Sigma(g)$. La restriction de φ à chaque composante connexe de $V - \Sigma(g)$ est alors une submersion sur $[0, \varepsilon[$. On note M_t la variété compacte à bord $M - \varphi^{-1}([0, t])$. Avec ces notations, nous formulons la définition 6.5.1.

DÉFINITION 6.5.1. — *La variété pseudo-riemannienne générique (M, g) est dite complète (relativement à D), si pour tout t , la variété M_t est b-complète (relativement à ∇).*

Cette définition ne dépend pas du choix du voisinage V et de la fonction φ .

Pour les variétés pseudo-riemanniennes génériques plates compactes, en utilisant les résultats de [4], on a la proposition qui suit.

PROPOSITION 6.5.2. — *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne générique plate compacte ayant les propriétés suivantes :*

- $\Sigma(g)$ est égal à $\Sigma_1(g)$;
- $\Sigma(g)$ est auto-parallèle ;
- la signature de g sur chaque composante connexe de $M - \Sigma(g)$ a l'une des valeurs suivantes : $(0, n)$, $(n, 0)$, $(1, n - 1)$; $(n - 1, 1)$.

La variété M est alors complète.

Démonstration. — Puisque $\Sigma(g)$ est une variété compacte auto-parallèle de codimension 1, il résulte de la démonstration du théorème 6.2.1, que l'on peut choisir le voisinage V et la fonction φ de sorte que chaque variété $\varphi^{-1}(t)$ soit auto-parallèle, pour $0 < t < \varepsilon$. Considérons une composante

connexe M_{it} de $M_t = M - \varphi^{-1}([0, t[)$, $i = 1, \dots, m$. Chaque variété M_{it} est compacte, à bord auto-parallèle. Si g_i est la pseudo-métrique induite par g sur M_{it} , g_i ou $-g_i$, elle est riemannienne ou lorentzienne.

En recollant deux exemplaires de M_{it} par son bord, on obtient une variété \widehat{M}_{it} munie d'une métrique \widehat{g}_i , telle que \widehat{g}_i ou $-\widehat{g}_i$ soit riemannienne ou lorentzienne. Il résulte du théorème de Hopf-Rinow, d'une part, de [4] d'autre part, que \widehat{M}_{it} est complète. Par suite, M_{it} est b -complète. \square

Pour les variétés pseudo-riemanniennes génériques plates compactes et complètes, on a un théorème de classification analogue au théorème 6.4.3.

THÉORÈME 6.5.3. — *Considérons une variété pseudo-riemannienne générique (M, g) plate compacte et complète, telle que $\Sigma(g)$ soit égal à $\Sigma_1(g)$ et soit auto-parallèle. Il existe alors une fibration $p : M \rightarrow \mathbf{S}^1$, de fibre type une composante connexe de $\Sigma(g)$, et une fonction $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ s'annulant en un nombre fini de points en changeant de signe, telles que $g = g_0 + p^* f du^2$ où du^2 est la métrique canonique sur \mathbf{S}^1 et g_0 est la métrique induite par g sur $\Sigma(g)$.*

Démonstration. — Comme dans la démonstration précédente, on peut choisir le voisinage V et la fonction φ de sorte que les variétés $\varphi^{-1}(t)$, pour $0 < t < \varepsilon$, soient auto-parallèles. Comme $M_t = M - \Sigma(g)$ est b -complète, chaque composante connexe M_{it} de M_t , $i = 1, \dots, m$, vérifie les hypothèses de la proposition 6.4.2. Il existe donc une fibration triviale de M_{it} sur $[0, 1]$ dont la fibre type est une composante connexe du bord et dont chaque fibre est auto-parallèle. Chaque composante connexe de $\varphi^{-1}([0, t])$ possède des propriétés identiques. On en déduit qu'il existe une fibration $p : M \rightarrow \mathbf{S}^1$, de fibre type une composante connexe de $\Sigma(g)$, dont toutes les fibres sont auto-parallèles. La décomposition $TM = \text{Ker } Tp \oplus (\text{Ker } Tp)^\perp$ est invariante par transport parallèle. Le lieu singulier est donc une réunion d'un nombre fini de fibres. Soit $\{a_1, \dots, a_r\}$ la projection de $\Sigma(g)$ sur \mathbf{S}^1 . Sur $\text{Ker } Tp$, g induit une métrique pseudo-riemannienne g_0 qui est invariante par transport parallèle le long des courbes tangentes à $(\text{Ker } Tp)^\perp$. On a un résultat analogue pour la pseudo-métrique g_1 induite par g sur $(\text{Ker } Tp)^\perp$. Notons encore g_0 la pseudo-métrique induite par g sur une fibre N , et du^2 la métrique canonique sur \mathbf{S}^1 . Il existe une fonction $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ qui s'annule en $\{a_1, \dots, a_r\}$ en changeant de signe seulement en ces points, et tel que :

$$g = g_0 + p^* f du^2 . \square$$

Le théorème de classification suivant est une conséquence de la proposition 6.5.2 et du théorème 6.5.3.

THÉORÈME 6.5.4. — Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne générique compacte, plate, dont le lieu singulier est une sous-variété auto-parallèle de M . Si la signature de g sur chaque composante connexe de $M - \Sigma(g)$ est l'un des types suivants : $(n, 0)$, ou $(0, n)$, ou $(1, n)$, ou $(n, 1)$, alors M est fibrée sur S^1 de fibre type \mathbb{T}^{n-1} .

COROLLAIRE 6.5.5. — Les seules variétés pseudo-riemanniennes génériques plates compactes, dont le lieu singulier est une variété auto-parallèle, sont le tore \mathbb{T}^2 , en dimension 2, et les fibrés sur S^1 de fibre \mathbb{T}^2 en dimension 3.

Démonstration du théorème 6.5.4. — Avec les hypothèses du théorème, la variété M est complète (proposition 6.5.2). Le lieu singulier de g est une réunion de fibres et il est auto-parallèle. Comme g est générique, la signature de g change quand on franchit le lieu singulier. Il existe donc une composante connexe $M - \Sigma(g)$ de sur laquelle g , ou bien $-g$, est lorentzienne. Il en résulte que la métrique g_0 induite par g sur la fibre N est riemannienne, ou bien $-g_0$ est riemannienne. Comme chaque fibre est auto-parallèle, (N, g_0) ou bien $(N, -g_0)$, est donc une variété riemannienne compacte plate. Par suite, N est difféomorphe à \mathbb{T}^{n-1} . \square

Bibliographie

- [1] ARNOLD (V. I.) . — *Index of singular point of a vector field, the Petrovski-Oleinik inequality and mixed Hodge structures*, Funct. Anal. and Appl. 2 (1978), pp. 1-11.
- [2] BOADMAN (J.-M.) . — *Singularities of differentiable mappings*, Publications de l'I.H.E.S. 33 (1967), pp. 21-57.
- [3] BRASSELET (J.-P.) et SCHWARTZ (M.-H.) . — *Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe*, Séminaire ENS, Astérisque 82-83 (1978-79), pp. 93-146.
- [4] CARRIÈRE (Y.) . — *Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines*, Inv. Math., 1988.
- [5] CERVEAU (D.) et MATTEI (J.-F.) . — *Formes intégrables holomorphes singulières*, Astérisque 97, 1982.
- [6] CHERN (S.) . — *Pseudo-Riemannian geometry and Gauss-Bonnet formula*, Ann. Acad., Brazil Ci 95 (1963), pp. 17-26.
- [7] GOLDMAN (W.) et KAMISHIMA (Y.) . — *The fundamental group of a compact flat Lorentz space form is virtually polycyclic*. J. Diff. Geom. 13 (1984), pp. 233-240.
- [8] GREUB (B. W.), HALPERIN (S.) et VANSTONE (R.) . — *Connections, curvature and cohomology*, Vol. 1., Academic Press New-York, 1973.

- [9] HAWKING (S. W.) et ELLIS (G. F. R.) . — *The large scale structure of space time*, Prentice-hall – Englewood cliffs – New Jersey, 1974.
- [10] HIRSH (M. W.), PUGH (C.) et SHUB (M.) . — *Invariant manifold*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag Berlin and New-York 583 (1977).
- [11] KOBAYASI (S.) et NOMIZU (K.) . — *Foundations of differential geometry*, Interscience - New-York, Vol. I et II, 1969.
- [12] KOSSOWSKI (M.) . — *Fold singularities in pseudo-Riemannian geodesic tubes*, Proceeding of the AMS 95, n° 1 (1985), pp. 463-469.
- [13] KOSSOWSKI (M.) . — *First order partial differential equations with singular solution*, Indiana Univ. Math. J. 39, n° 1 (1986), pp. 209-223.
- [14] KOSSOWSKI (M.) . — *Pseudo-Riemannian metric singularities and the extendability of parallel transport*, Proc. Ann. Math. Soc. 99, n° 1 (1987), pp. 147-150.
- [15] KUPELI (D. N.) . — *Degenerate submanifolds in semi-Riemannian geometry*, Geom. Dedicata, 24 (1987), pp. 337-361.
- [16] KUPELI (D. N.) . — *On null submanifolds in spacetimes*, Geom. Dedicata 23 (1987), pp. 33-51.
- [17] LEHMANN (D.) . — *Intégration sur les variétés stratifiées et théorème de Gauss-Bonnet*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math. 307 (1988), pp. 603-606 et 671-373.
- [18] MALGRANGE (B.) . — *Ideals of differentiable functions*, Oxford Uni. Press, 1966.
- [19] MILNOR (J.) . — *On singular points of complex hypersurfaces*, Ann. Math. Studies 61, Princeton University Press (1968).
- [20] MATHER (J.) . — *On Thom-Boardman singularities*, Salvador Symposium of dynamical systems I.M.P.A. Rio (1971), pp. 239-248.
- [21] MATHER (J.) . — *Solutions of generic linear equations* Salvador Symposium on dynamical systems I.M.P.A. Rio (1971), pp. 185-193.
- [22] MARTINET (J.) . — *Sur les singularités de formes différentielles*, Thèse Ann. Inst. Fourier 20-1 (1970), pp. 95-178.
- [23] MILNOR (J.) . — *On singular point of complex hypersurfaces*, Ann. Math. Studies 61 Princeton University Press, 1968.
- [24] NELL (B. O.) . — *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press New-York, 1983.
- [25] PELLETIER (F.) . — *Singularités d'ordre supérieur de formes différentielles*, Thèse, Dijon, 1980.
- [26] PELLETIER (F.) . — *Singularités génériques de pseudo-métriques sur une variété*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math. 296 (1983), pp. 219-221.
- [27] PELLETIER (F.) . — *Pseudo-métriques génériques et théorèmes de Gauss-Bonnet en dimension 2*, Singularities and dynamical Systems Crète, Grèce – North Holland (1984), pp. 219-238.
- [28] PELLETIER (F.) . — *Indice de singularité d'une hypersurface générique compacte d'une variété pseudo-riemannienne conformément plate*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math. 306 (1986), pp. 47-50.
- [29] PELLETIER (F.) . — *Indice de singularité, formule de Gauss-Bonnet pour les pseudo-métriques à lieu singulier quasi-homogène et relation de Riemann-Hurwitz pour des applications singulières*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math. 306 (1988), pp. 191-194.

Quelques propriétés géométriques des variétés pseudo-riemanniennes singulières

- [30] PELLETIER (F.) .— *Intégrale de la forme pfaffienne d'une connexion duale g-métrique*, C. R. Acad. Acad. Sci. Sér. I Math. **306** (1988), pp. 269-272.
- [31] PNEVMATIKOS (S.) .— *Étude géométrique des contraintes génériques dans les espaces de phases*, Thèse Amsterdam, 1981.
- [32] SCHMIDT (B.) .— *A new definition of singular points in general relativity*, J. Gen. Rel. and Gravitation **1** (1971), pp. 49-54.
- [33] SCHMIDT (B.) .— *Local completeness of the b-boundary*, Commun Math. Phys. **7** (1972), pp. 494-509.
- [34] SCHWARTZ (M.-H.) .— *Classes caractéristiques d'un sous-ensemble analytique d'une variété analytique*, Pub. IRMA, UFR de Math. Lille I, **11** (1988).
- [35] SCHWARTZ (M.-H.) .— *Espaces à fibre linéaires variables et classes de Chern*, Pub. IRMA UFR de Math. Lille I, **4** Fasc. 4 (1982).
- [36] SCHWARTZ (M.-H.) .— *Champs radiaux sur une stratification analytique*, Travaux en cours, Herman, Paris, 1991.
- [37] SPIVAK (M.) .— *Differential geometry*, Publish or Perish inc. Vol. V, 1979.
- [38] SZAFRANIEC (Z.) .— *On the topology of real algebraic sets*, Preprint (1991).
- [39] THOM (R.) .— *Un lemme sur les applications différentiables*, Bull. Soc. Math. Mexico, 2^{ième} série (1956), p. 59-71.