ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PIERRE GRISVARD

Problèmes aux limites dans des domaines avec points de rebroussement

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 4, no 3 (1995), p. 561-578

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1995_6_4_3_561_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. IV, n° 3, 1995

Problèmes aux limites dans des domaines avec points de rebroussement

PIERRE GRISVARD[(1)]

Pierre Grisvard est décédé le 22 avril 1994 après acceptation de cet article pour la revue. Le secrétariat de Annales tient à remercier Madame le Professeur M. Dauge pour sa contribution.

Introduction

Les problèmes aux limites elliptiques dans des domaines polygonaux ou polyédraux ont été abondamment étudiés. Les résultats maintenant classiques d'Agmon-Douglis-Nirenberg [1] et Lions-Magenes [7], établis pour des domaines réguliers, ont été adaptés. Ceci répondait à des nécessités pratiques. En effet dans les applications industrielles, les problèmes aux limites qui interviennent sont souvent posés dans des domaines polyédraux.

Cependant, on n'a pas ainsi épuisé tous les types de domaines rencontrés en pratique. Dans les problèmes de lubrification, on rencontre en particulier des domaines avec points de rebroussement. On peut citer par exemple une situation typique dans les roulements à billes, ou plutôt à rouleaux : un cylindre métallique roule sur un plan ou sur l'intérieur d'un autre cylindre. Le tout baigne dans un lubrifiant. L'écoulement du lubrifiant est gouverné par les équations de Navier-Stokes dans un domaine présentant un segment de points de rebroussements constitué par la ligne de contact entre les deux cylindres.

Ce travail est une contribution dans cette direction. On y étudiera le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace et pour le bilaplacien dans un domaine plan modèle présentant un point de rebroussement :

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < a\,,\ 0 < y < \varphi(x)\right\},$$

(1) U.N.S.A.

où $\varphi(x) = x^\alpha$ avec $\alpha > 1$. On cherchera la solution dans les espaces de Sobolev construits sur $L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$.

On démontrera que $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de $\Delta u = f$ avec f donné dans $L^p(\Omega)$, appartient à l'espace $W^{2,p}(\Omega)$. Ce résultat n'est pas nouveau lorsque $p = 2$. Il a été démontré par Ibuki [5] puis généralisé à une fonction φ arbitraire de classe C^2 telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ pour $x \in \,]0\,,a]$, par Khelif [6]. Ce genre de résultat a aussi été établi pour les solutions de problèmes de Dirichlet fortement elliptiques dans des domaines à pointe cuspide par Maz'ya-Plamenevskii [8].

Dans ce travail, on étend ce résultat de régularité dans $W^{2,p}$ à un domaine tridimensionnel modèle $Q = \Omega \times \,]\,0\,,\pi\,[$. Un tel domaine présente une "arête de rebroussement".

La technique de démonstration repose au départ sur le même changement de variables déjà utilisé par Ibuki [5], qui réduit le problème à une perturbation du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace dans une demi-bande infinie

$$\Omega_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\,,\ 0 < y < 1\right\}.$$

Ce problème est analysé dans les espaces de Sobolev relatifs à L^p par des techniques de multiplicateurs de Fourier. L'extension à un domaine tridimensionnel repose sur les techniques de Dore-Venni (1987).

Dans le même esprit, on démontrera que $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de $\Delta^2 u = f$, avec f donné dans $W^{-1,p}(\Omega)$, appartient à l'espace $W^{3,p}$ au voisinage du point de rebroussement. Appliqué à la fonction courant, ce résultat implique la régularité $W^{2,p}$ pour les équations de Navier-Stokes linéarisées près du point de rebroussement (en dimension deux).

Plan

1. Le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace dans le domaine modèle

1.1 Le problème de référence

On démontre ici le problème suivant.

THÉORÈME 1.1.1.— *Pour $f \in L^p(\Omega_0)$ donné, il existe $u \in W^{2,p}(\Omega_0) \cap W_0^{1,p}(\Omega_0)$ unique, solution de $\Delta u = f$, dans Ω_0.*

On utilise une réflexion impaire dans la direction de x. On pose donc

$$U(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & \text{si } x > 0 \\ -u(-x,y) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } x > 0 \\ -f(-x,y) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On vérifie aisément l'équivalence des propriétés suivantes :

(a) $u \in W^{2,p}(\Omega_0) \cap W_0^{1,p}(\Omega_0)$ et $\Delta u = f$;

(b) $U \in W^{2,p}(]0,1[\times \mathbb{R}) \cap W_0^{1,p}(]0,1[\times \mathbb{R})$ et $\Delta U = F$.

Par ailleurs, il est clair que $f \in L^p(\Omega_0)$ si et seulement si $F \in L^p(]0,1[\times \mathbb{R})$.

L'existence et l'unicité de U vérifiant (b) est bien connue (c.f. entre autres Grisvard [4]). L'affirmation du théorème 1.1.1 en résulte immédiatement.

1.2 Le changement de variables

Suivant Ibuki [5], on pose

$$\xi = \frac{1}{\alpha - 1}\, x^{-\alpha+1}\,, \quad \eta = yx^{-\alpha}\,.$$

On étudie l'effet de ce changement de variables sur l'équation $\Delta u = f$ posée dans Ω. L'image de Ω par ce changement de variables est l'ouvert

$$\Omega_a = \left\{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \xi > \frac{1}{\alpha - 1}\, a^{1-\alpha}\,,\ 0 < \eta < 1 \right\}.$$

On pose naturellement $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ et $g(\xi, \eta) = f(x, y)$. On a donc

$$u(x, y) = v\left(\frac{1}{\alpha - 1}\, x^{-\alpha+1}\,,\ yx^{-\alpha} \right).$$

Il vient

$$\mathrm{D}_y u = x^{-\alpha}\, \mathrm{D}_\eta v\,, \quad \mathrm{D}_\eta^2 u = x^{-2\alpha}\, \mathrm{D}_\eta^2 v\ ;$$

donc

$$\mathrm{D}_y u = c\xi^\beta\, \mathrm{D}_\eta v\,, \quad \mathrm{D}_y^2 u = c^2 \xi^{2\beta}\, \mathrm{D}_\eta^2 v\,,$$

où $c = (\alpha - 1)^\beta$ et $\beta = \alpha/(\alpha - 1)$.

Il vient également

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_x u = -x^{-\alpha}\, \mathrm{D}_\xi v \left(\frac{1}{\alpha - 1}\, x^{-\alpha+1}\,,\ yx^{-\alpha} \right) + \\ - \alpha y x^{-\alpha-1}\, \mathrm{D}_\eta v \left(\frac{1}{\alpha - 1}\, x^{-\alpha+1}\,,\ yx^{-\alpha} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_x^2 u &= \alpha x^{-\alpha-1}\, \mathrm{D}_\xi v + x^{-2\alpha}\, \mathrm{D}_\xi^2 v + 2\alpha y x^{-2\alpha-1}\, \mathrm{D}_\xi \mathrm{D}_\eta v + \\ &\quad + \alpha(\alpha+1) y x^{-\alpha-2}\, \mathrm{D}_\eta v + \alpha^2 y^2 x^{-2\alpha-2}\, \mathrm{D}_\eta^2 v \\ &= x^{-2\alpha} \{ \mathrm{D}_\xi^2 v + 2\alpha y x^{-1}\, \mathrm{D}_\xi \mathrm{D}_\eta v + \alpha^2 y^2 x^{-2}\, \mathrm{D}_\eta^2 v + \\ &\quad + \alpha x^{\alpha-1}\, \mathrm{D}_\xi v + \alpha(\alpha+1) y x^{\alpha-2}\, \mathrm{D}_\eta v \} \\ &= x^{-2\alpha} \{ \mathrm{D}_\xi^2 v + 2\alpha \eta x^{\alpha-1}\, \mathrm{D}_\xi \mathrm{D}_\eta v + \alpha^2 \eta^2 x^{2\alpha-2}\, \mathrm{D}_\eta^2 v + \\ &\quad + \alpha x^{\alpha-1}\, \mathrm{D}_\xi v + \alpha(\alpha+1) \eta x^{2\alpha-2}\, \mathrm{D}_\eta v \} \\ &= c^2 \xi^{2\beta} \left\{ \mathrm{D}_\xi^2 v + 2\alpha c^{-\frac{1}{\beta}} \frac{\eta}{\xi}\, \mathrm{D}_\xi \mathrm{D}_\eta v + \alpha^2 c^{-\frac{2}{\beta}} \frac{\eta^2}{\xi^2}\, \mathrm{D}_\eta^2 v + \right. \\ &\quad \left. + \alpha c^{-\frac{1}{\beta}} \frac{1}{\xi}\, \mathrm{D}_\xi v + \alpha(\alpha+1) c^{-\frac{2}{\beta}} \frac{\eta}{\xi^2}\, \mathrm{D}_\eta v \right\}. \end{aligned}$$

Au total l'équation $\Delta u = f$ devient

$$c^2\xi^{2\beta}\left\{\Delta v + 2\alpha c^{-\frac{1}{\beta}}\frac{\eta}{\xi}\,D_\xi D_\eta v + \alpha^2 c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta^2}{\xi^2}\,D_\eta^2 v + \right.$$
$$\left. + \alpha c^{-\frac{1}{\beta}}\frac{1}{\xi}\,D_\xi v + \alpha(\alpha+1)c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta}{\xi^2}\,D_\eta v\right\} = g\,.$$

Il convient également d'étudier l'effet du même changement de variables sur les espaces fonctionnels. Le résultat suivant est évident.

LEMME 1.2.1. — *On a $f \in L^p(\Omega)$ si et seulement si $\xi^{-\frac{2\beta}{p}} g \in L^p(\Omega_a)$.*

En d'autres termes, une fonction est de puissance p sommable en x, y si et seulement si elle est de puissance p sommable en ξ, η après multiplication par $\xi^{-\frac{2\beta}{p}}$.

On devra donc étudier l'équation en v ci-dessus en supposant que $\xi^{-\frac{2\beta}{p}} g \in L^p(\Omega_a)$. Pour éviter de manipuler des espaces avec poids, il sera plus commode de considérer une équation dont le second membre est proportionnel à $\xi^{-\frac{2\beta}{p}} g$. Pour cela on pose

$$w = \xi^\gamma v\,, \quad \gamma = \frac{2\beta}{p}$$

et on cherche l'équation de w. Il vient

$$D_\eta v = \xi^{-\gamma}\,D_\eta w\,, \quad D_\eta^2 v = \xi^{-\gamma}\,D_\eta^2 w\,, \quad D_\xi v = \xi^{-\gamma}\,D_\xi w - \gamma\xi^{-\gamma-1} w\,,$$

$$D_\xi D_\eta v = \xi^{-\gamma}\,D_\xi D_\eta w - \gamma\xi^{-\gamma-1}\,D_\eta w\,,$$

$$D_\xi^2 v = \xi^{-\gamma}\,D_\xi^2 w - 2\gamma\xi^{-\gamma-1}\,D_\xi w + \gamma(\gamma+1)\xi^{-\gamma-2} w\,;$$

d'où

$$c^2\xi^{-\gamma}\left\{\Delta w - \frac{2\gamma}{\xi}\,D_\xi w + \frac{\gamma(\gamma+1)}{\xi^2}\,w + 2\alpha c^{-\frac{1}{\beta}}\left(\frac{\eta}{\xi}\,D_\xi D_\eta w - \gamma\frac{\eta}{\xi^2}\,D_\eta w\right) + \right.$$
$$\left. + \alpha^2 c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta^2}{\xi^2}\,D_\eta^2 w + \alpha c^{-\frac{1}{\beta}}\left(\frac{1}{\xi}\,D_\xi w - \frac{\gamma}{\xi^2}\,w\right) + \alpha(\alpha+1)c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta}{\xi^2}\,D_\eta w\right\}$$
$$= \xi^{-2\beta} g\,.$$

Autrement dit, on a montré l'existence d'un opérateur différentiel linéaire du second ordre L à coefficients bornés (pour $\xi > 1$ pour fixer les idées) tel que

$$c^2 \left\{ \Delta w + \frac{1}{\xi} Lw \right\} = \xi^{\gamma - 2\beta} g = \xi^{-\frac{2\beta}{p}} g \, .$$

Il est naturel à ce point de poser $h = \xi^{-\frac{2\beta}{p}} g$.

En résumé on établit la proposition suivante.

PROPOSITION 1.2.2.— *Il existe un opérateur différentiel linéaire du second ordre à coefficients bornés L tel que l'équation $\Delta u = f$ dans Ω soit équivalente à l'équation $c^2\{\Delta w + (1/\xi)Lw\} = h$ dans Ω_a, où on a posé*

$$h = \xi^{-\frac{2\beta}{p}} f \, , \quad w = \xi^{\frac{2\beta}{p'}} u \, ,$$

avec

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \quad et \quad c = (\alpha - 1)^{\beta} \, .$$

1.3 Résolution du problème transformé

On déduit du théorème 1.1.1 le résultat suivant.

THÉORÈME 1.3.1.— *Pour a assez petit la propriété suivante est vérifiée : l'opérateur $\Delta + (1/\xi)L$ est un isomorphisme de $W^{2,p}(\Omega_a) \cap W_0^{1,p}(\Omega_a)$ sur $L^p(\Omega_a)$.*

Démonstration.— On sait que Δ est un isomorphisme de $W^{2,p}(\Omega_0) \cap W_0^{1,p}(\Omega_0)$ sur $L^p(\Omega_0)$. Par ailleurs, Ω_a est un translaté de Ω_0 (de $(1/(\alpha-1))\, a^{1-\alpha}$ dans la direction de x). Comme Δ et les conditions aux limites de Dirichlet sont invariants par translation, il en résulte que Δ est un isomorphisme de $W^{2,p}(\Omega_a) \cap W_0^{1,p}(\Omega_a)$ sur $L^p(\Omega_a)$ pour tout a, et la norme de Δ^{-1} est indépendante de a.

Pour a assez petit, donc $(1/(\alpha-1))\, a^{1-\alpha}$ assez grand, l'opérateur $(1/\xi)L$ a une norme inférieure à l'inverse de celle de Δ^{-1}. En d'autres termes $(1/\xi)L\Delta^{-1}$ est une contraction stricte. Il en résulte que $\Delta + (1/\xi)L$ est un isomorphisme. □

Ainsi, partant de f dans $L^p(\Omega)$ ou, ce qui revient au même, de h dans $L^p(\Omega_a)$, il existe $w \in W^{2,p}(\Omega_a)$ unique solution de

$$c^2 \left\{ \Delta w + \frac{1}{\xi} Lw \right\} = h \text{ dans } \Omega_a \quad \text{avec } w = 0 \text{ sur } \partial\Omega_a .$$

Il reste à étudier les propriétés de dérivabilité de u correspondant à w.

1.4 Effet du changement de variables inverse

On a par définition $w = \xi^{\frac{2\beta}{p'}} u\big(c^{-\frac{1}{\alpha}}\xi^{-\frac{\beta}{\alpha'}} c^{-1}\eta\xi^{-\beta}\big)$, d'où

$$D_\eta w = c^{-1}\xi^{-\beta}\xi^{\frac{2\beta}{p'}} D_y u(x,y) , \quad D_\eta^2 w = c^{-2}\xi^{-2\beta}\xi^{\frac{2\beta}{p'}} D_y^2 u(x,y) .$$

De manière équivalente

$$\xi^{-2\beta} w = \xi^{-\frac{2\beta}{p}} u , \quad \xi^{-\beta} D_\eta w = c^{-1}\xi^{-\frac{2\beta}{p}} D_y u , \quad D_\eta^2 w = c^{-2}\xi^{-\frac{2\beta}{p}} D_y^2 u ,$$

ou encore

$$w = c^{-2}\xi^{-\frac{2\beta}{p}} x^{-2\alpha} u , \quad D_\eta w = c^{-2}\xi^{-\frac{2\beta}{p}} x^{-\alpha} D_y u , \quad D_\eta^2 w = c^{-2}\xi^{-\frac{2\beta}{p}} D_y^2 u .$$

Du fait que w, $D_\eta w$ et $D_\eta^2 w$ sont de puissances p sommables dans Ω_a, le lemme 1.2.1 implique que $x^{-2\alpha}u$, $x^{-\alpha} D_y u$ et $D_y^2 u$ sont de puissances p sommables dans Ω. Écrivant que $D_x^2 u = f - D_y^2 u$, on voit immédiatement que $D_x^2 u$ est aussi de puissance p sommable. Il reste donc à étudier la sommabilité de $D_x u$ et $D_x D_y u$ à la puissance p.

On a

$$\begin{aligned}
D_\xi w &= \frac{2\beta}{p'} \xi^{\frac{2\beta}{p'}-1} u - \frac{\beta}{\alpha} c^{-\frac{1}{\alpha}} \xi^{\frac{2\beta}{p'}-\frac{\beta}{\alpha}-1} D_x u - \beta c^{-1}\eta\xi^{-\beta-1} \xi^{\frac{2\beta}{p'}-1} D_y u \\
&= \frac{2\beta}{p'} \xi^{2\beta-1} \big(\xi^{-\frac{2\beta}{p}} u\big) - \frac{\beta}{\alpha} c^{-\frac{1}{\alpha}} \xi^{2\beta-1-\frac{\beta}{\alpha}} \big(\xi^{-\frac{2\beta}{p}} D_x u\big) + \\
&\quad - \beta c^{-1}\eta\xi^{\beta-1} \big(\xi^{-\frac{2\beta}{p}} D_y u\big) \\
&= \frac{2\beta}{p'} \xi^{2\beta-1} \big(\xi^{-\frac{2\beta}{p}} u\big) - \frac{\beta}{\alpha} c^{-\frac{1}{\alpha}} \xi^{\beta} \big(\xi^{-\frac{2\beta}{p}} D_x u\big) + \\
&\quad - \beta c^{-1}\eta\xi^{\beta-1} \big(\xi^{-\frac{2\beta}{p}} D_y u\big) .
\end{aligned}$$

C'est encore

$$\mathrm{D}_\xi w = \frac{2\beta}{p'c^2}\,\xi^{-1}\big(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}x^{-2\alpha}u\big) + \\ -\frac{\beta}{\alpha c}\,c^{-\frac{1}{\alpha}}\big(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}x^{-\alpha}\,\mathrm{D}_x u\big) - \frac{\beta}{c^2}\,\eta\xi^{-1}\big(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}x^{-\alpha}\,\mathrm{D}_y u\big)\,.$$

On sait que $\mathrm{D}_\xi w$ est de puissance p sommable. D'après les calculs précédents on sait déjà que

$$\xi^{-\frac{2\beta}{p}}x^{-2\alpha}u \quad \text{et} \quad \xi^{-\frac{2\beta}{p}}x^{-\alpha}\,\mathrm{D}_y u$$

sont de puissance p sommable en ξ, η. Il en résulte à plus forte raison que $\xi^{-\frac{2\beta}{p}}x^{-\alpha}\,\mathrm{D}_x u$ est de puissance p sommable en ξ et η, donc que $x^{-\alpha}\,\mathrm{D}_y u \in L^p(\Omega)$, par application du lemme 1.2.1.

On a enfin

$$\mathrm{D}_\xi \mathrm{D}_\eta w = \frac{2\beta}{cp'}\,\xi^{\beta-1}\big(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}\,\mathrm{D}_y u\big) - \frac{\beta}{\alpha c}\,c^{-\frac{1}{\alpha}}\big(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}\,\mathrm{D}_x\mathrm{D}_y u\big) + \\ -\frac{\beta\eta}{c^2}\,\eta\xi^{-1}\big(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}\,\mathrm{D}_y^2 u\big)\ ;$$

d'où encore

$$\mathrm{D}_\xi \mathrm{D}_\eta w = \frac{2\beta}{c^2p'}\,\xi^{-1}\big(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}x^{-\alpha}\,\mathrm{D}_y u\big) - \frac{\beta}{\alpha c}\,c^{-\frac{1}{\alpha}}\big(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}\,\mathrm{D}_x\mathrm{D}_y u\big) + \\ -\frac{\beta\eta}{c^2}\,\eta\xi^{-1}\big(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}\,\mathrm{D}_y^2 u\big)\,.$$

Comme on sait que $\mathrm{D}_\xi\mathrm{D}_\eta w$, $\xi^{-\frac{2\beta}{p}}x^{-\alpha}\,\mathrm{D}_y u$ et $\xi^{-\frac{2\beta}{p}}\,\mathrm{D}_y^2 u$ sont de puissance p sommable en ξ, η, il en est de même pour $\xi^{-\frac{2\beta}{p}}\,\mathrm{D}_x\mathrm{D}_y u$. Ceci établit que $\mathrm{D}_x\mathrm{D}_y u \in L^p(\Omega)$, par application du lemme 1.2.1.

Au total, on a établit la proposition 1.4.1.

PROPOSITION 1.4.1.— *Le fait que $w \in W^{2,p}(\Omega_a)$ implique que*

$$x^{-2\alpha}u\,,\ x^{-\alpha}\,\mathrm{D}_x u\,,\ x^{-\alpha}\,\mathrm{D}_y u\,,\ \mathrm{D}_x^2 u\,,\ \mathrm{D}_x\mathrm{D}_y u\,,\ \mathrm{D}_y^2 u\,.$$

appartiennent à $L^p(\Omega)$.

1.5 Bilan

On part de $f \in L^p(\Omega)$. On a donc $f \in H^{-1}(\Omega)$ car l'inclusion duale $H_0^1(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$ est valable du fait que les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ sont prolongeables par zéro hors de Ω (bien que Ω n'ait peut-être pas la propriété du prolongement usuelle). On en déduit sans peine l'existence et l'unicité de $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de $\Delta u = f$. Son comportement loin de l'origine est donné par les résultats classiques et son comportement près de l'origine a été étudié dans les paragraphes précédents.

THÉORÈME 1.5.1. — *Δ est un isomorphisme de $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ sur $L^p(\Omega)$.*

Remarque 1.5.2. — La proposition 1.4.1 donne en outre une propriété de décroissance de u et ∇u près de l'origine.

1.6 Un résultat tridimensionnel

On utilise des résultats récents de Dore-Venni [3] et de Coifman-Weiss [2].

On se place dans un espace de Banach E qui a la propriété U.M.D. Sans entrer dans les détails les espaces L^p avec $1 < p < +\infty$ ont cette propriété. On considère deux opérateurs A et B linéaires fermés non bornés de domaines $D(A)$ et $D(B)$ dans E. On suppose que :

(i) $A + tI$ et $B + tI$ sont inversibles pour tout $t \geq 0$ et que $\|(A+tI)^{-1}\|$ et $\|(B+tI)^{-1}\|$ ont un comportement en $O(1/t)$ lorsque $t \to +\infty$;

(ii) $(A+tI)^{-1}$ et $(B+sI)^{-1}$ commutent pour tout t et tout $s \geq 0$;

(iii) il existe $\theta(A)$ et $\theta(B)$ tels que $\theta(A) + \theta(B) < \pi$ et $\|A^{is}\| \leq Ce^{|s|\theta(A)}$ et $\|B^{is}\| \leq Ce^{|s|\theta(B)}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

On remarque que l'hypothèse (i) permet de définir les puissances imaginaires impliquées dans (iii).

Sous les hypothèses (i), (ii) et (iii) l'opérateur

$$L : x \mapsto Ax + Bx$$

défini sur $D(L) = D(A) \cap D(B)$ est inversible. C'est le théorème de Dore-Venni [3].

Les hypothèses (i) et (ii) sont facile à vérifier en pratique. Il n'en va pas de même pour l'hypothèse (iii). Selon un procédé proposé par

Clément (communication personnelle), on peut faire appel au résultat suivant de Coifman-Weiss [2]. On suppose que $-\Lambda$ génère un semi-groupe de contractions qui préservent la positivité dans un espace $X = L^p(M)$ (où M est n'importe quel espace mesuré), alors on a

$$\|\Lambda^{is}\| \leq O\left(|s| e^{|s|\frac{\pi}{2}}\right)$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Ce cadre abstrait va être utilisé avec

$$E = L^p(Q) = L^p\left(]\,0\,,\,\pi\,[\,; L^p(\Omega)\right),$$

où $Q = \Omega \times\ ]\,0\,,\,\pi\,[$ et

$$Au = -\Delta_2 u \quad \text{pour } u \in D(A) = L^p\left(]\,0\,,\,\pi\,[\,; W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)\right)$$

$$Bu = -\mathrm{D}_z^2 u$$

$$\text{pour } u \in D(B) = W^{2,p}\left(]\,0\,,\,\pi\,[\,; L^p(\Omega)\right) \cap W_0^{1,p}\left(]\,0\,,\,\pi\,[\,; L^p(\Omega)\right).$$

On va établir le théorème suivant.

THÉORÈME 1.6.1.— *Δ_3 réalise un isomorphisme de*

$$\left\{u \in W_0^{1,p}(Q) \mid \mathrm{D}_x^2 u\,,\ \mathrm{D}_y^2 u\,,\ \mathrm{D}_z^2 u\,,\ \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y \in L^p(Q)\right\}$$

sur $L^p(Q)$.

On a désigné par Δ_2 et Δ_3 respectivement l'opérateur de Laplace dans les deux variables x, y et dans les trois variables x, y, z.

Démonstration.— Considérons d'abord l'opérateur Λ défini dans $X = L^p(\Omega)$ par

$$\mathrm{D}_\Lambda = \left\{u \in H_0^1(\Omega) \mid \Delta_2 u \in L^p(\Omega)\right\}$$

$$\Lambda u = -\Delta_2 u \quad \text{pour } u \in \mathrm{D}_\Lambda\,.$$

Il est connu que, même sans hypothèse sur Ω, $-\Lambda$ est générateur d'un semi-groupe de contractions qui préservent la positivité dans X. Il en résulte que $\Lambda + tI$ est inversible pour $t < 0$ et que

$$\left\|(\Lambda + tI)^{-1}\right\|_{X \to X} \leq \frac{1}{t}\,.$$

De plus, on a

$$\|\Lambda^{is}\|_{X\to X} = \mathrm{O}\big(|s|e^{|s|\frac{\pi}{2}}\big)\,.$$

Le théorème 1.5.1 ci-dessus permet de préciser que

$$\mathrm{D}_\Lambda(\Omega) = W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Par ailleurs dans le cas $p = 2$, Λ est un opérateur autoadjoint positif; Λ^{is} est alors une contraction. Au total, on a

$$\|\Lambda^{is}\|_{L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)} = \mathrm{O}(1)$$
$$\|\Lambda^{is}\|_{L^q(\Omega)\to L^q(\Omega)} = \mathrm{O}\big(|s|e^{|s|\frac{\pi}{2}}\big)$$

pour tout $q < +\infty$. En interpolant, il en résulte qu'il existe $\theta_\Lambda < \pi/2$ tel que

$$\|\Lambda^{is}\|_{X\to X} = \mathrm{O}\big(e^{|s|\theta_\Lambda}\big)\,.$$

Ces propriétés de l'opérateur Λ impliquent les propriétés concernant A dans (i) et (ii) avec $\theta_A < \pi/2$.

On raisonne de la même manière sur l'opérateur M défini dans $Y = L^p(\,]\,0\,,\,\pi\,[\,)$ par

$$\mathrm{D}_M = W^{2,p}(\,]\,0\,,\,\pi\,[\,) \cap W_0^{1,p}(\,]\,0\,,\,\pi\,[\,)$$

$$Mu = -u'' \quad \text{pour } u \in \mathrm{D}_M\,.$$

On en déduit que $M + tI$ est inversible pour $t > 0$ et que

$$\left\|(M+tI)^{-1}\right\|_{Y\to Y} \le \frac{1}{t}$$
$$\|M^{is}\|_{Y\to Y} = \mathrm{O}\big(e^{|s|\theta_M}\big)$$

avec $\theta_M < \pi/2$.

Ces propriétés impliquent celles concernant B dans (i) et (iii) avec $\theta_B < \pi/2$.

Par ailleurs, la propriété (ii) est évidente. La conclusion est que

$$L = A + B = -\Delta_2 - \mathrm{D}_z^2 = -\Delta_3$$

réalise un isomorphisme de $\mathrm{D}_A \cap \mathrm{D}_B$ sur E. Une fonction $u \in \mathrm{D}_A \cap \mathrm{D}_B$ est une fonction telle que

$$u\,,\ \mathrm{D}_x u\,,\ \mathrm{D}_y u\,,\ \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y u\,,\ \mathrm{D}_x^2 u\,,\ \mathrm{D}_y^2 u\,,\ \mathrm{D}_z u\,,\ \mathrm{D}_z^2 u \in L^p(Q)$$

et $u = 0$ sur ∂Q. □

Remarque 1.6.2.— Il n'est pas évident que les dérivées croisées $\mathrm{D}_x \mathrm{D}_z u$ et $\mathrm{D}_y \mathrm{D}_z u$ sont dans $L^p(Q)$, car on ne dispose pas d'un théorème de prolongement à $\mathbb{R}^3$. Cependant dans le cas $p = 2$, on vérifie facilement par développement en série de Fourier en z que

$$\mathrm{D}_z u \in L^2\big(]\,0\,,\,\pi\,[\,;\,V\big)\,,$$

où $V = H_0^1(\Omega)$.

Remarque 1.6.3.— On aurait pu de la même façon considérer un problème mêlé en conservant la condition de Dirichlet sur la courbe $y = \Omega(x)$.

2. Le problème de Dirichlet pour l'équation biharmonique dans le domaine modèle

2.1 Le problème biharmonique de référence

On établit ici le problème suivant.

THÉORÈME 2.1.1.— *Pour $f \in W^{-1,p}(\Omega_0)$ donné, il existe $u \in W^{3,p}(\Omega_0)$ unique, solution de $\Delta^2 u = f$ dans Ω_0, avec les conditions aux limites*

$$u = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega_0$$

$$\mathrm{D}_y u = 0 \quad \textit{sur } \{y = 0\} \textit{ et sur } \{y = 1\}$$

$$\mathrm{D}_x^2 u = 0 \quad \textit{sur } \{x = 0\}\,.$$

Démonstration.— Les conditions aux limites sur le segment vertical $\{x = 0\}$ sont choisies pour permettre d'effectuer une réflexion impaire par rapport à la variable x. Partant de $F \in W^{-1,p}(]0,1[\times \mathbb{R})$, il revient au même de chercher $U \in W^{3,p}(]0,1[\times \mathbb{R}) \cap W_0^{2,p}(]0,1[\times \mathbb{R})$ solution de $\Delta^2 U = F$ dans $]0,1[\times \mathbb{R}$. L'existence et l'unicité d'une telle U est prouvée dans Grisvard [4]. □

Remarque 2.1.2.— Dans la même référence on trouve que si $F \in L^p(]0,1[\times \mathbb{R})$ alors $U \in W^{4,p}(]0,1[\times \mathbb{R})$, d'où le résultat analogue sur Ω_0 : pour $f \in L^p(\Omega_0)$, il existe $u \in W^{4,p}(\Omega_0)$ unique solution de $\Delta^2 u = f$ dans Ω_0 avec les conditions aux limites ci-dessus.

2.2 Quelques préliminaires

On part de $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ avec $p \geq 2$. L'inclusion de $W^{-1,p}(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ implique l'existence et l'unicité d'une solution variationnelle $u \in H_0^2(\Omega)$ de l'équation $\Delta^2 u = f$. On sait de plus, par des résultats classiques, que $u \in W^{3,p}(\omega)$ pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$ dont la frontière ne contient pas les trois coins de Ω.

Pour étudier le comportement de u près de l'origine (le seul qui nous importe ici) on introduit une fonction de troncature φ qui dépend de la seule variable x et telle que $\varphi(x) = 1$ pour $x \leq a/3$ et $\varphi(x) = 0$ pour $x \geq 2a/3$. D'après ce qui a été rappelé ci-dessus, il est clair que

$$\varphi u \in H_0^2(\Omega), \quad \Delta^2(\varphi u) = f_1 \in W^{-1,p}(\Omega).$$

En outre, l'avantage de φu est d'être identiquement nulle près du segment $\{x = a\}$; elle y vérifie donc n'importe quelle condition au bord. C'est ce qui va permettre par changement de variable de se ramener au problème biharmonique de référence introduit plus haut.

Dans les paragraphes qui suivent on considérera φu au lieu de u, mais on la notera encore u pour ne pas alourdir les notations.

2.3 Changement de variables dans un espace dual

On va étudier l'équation $\Delta^2 u = f$ dans Ω avec f donné dans $W^{-1,p}(\Omega)$. Il faut donc étudier l'image g de f dans le changement de variable de la section 1 (§ 1.2).

LEMME 2.3.1.— *Si* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *alors* $x^{-\alpha} u \in L^p(\Omega)$.

Démonstration. — De l'inégalité

$$\int_0^1 |\psi(y)|^p \, \mathrm{d}y \leq C \int_0^1 |\psi'(y)|^p \, \mathrm{d}y$$

valable pour $\psi \in W_0^{1,p}(\,]\,0\,,\,1\,[\,)$, on en déduit par homothétie l'inégalité

$$L^{-p} \int_0^L |\psi(y)|^p \, \mathrm{d}y \leq C \int_0^L |\psi'(y)|^p \, \mathrm{d}y$$

pour $\psi \in W_0^{1,p}(\,]\,0\,,\,L\,[\,)$.

On en déduit que

$$\int_0^{x^\alpha} \left|x^{-\alpha} u(x,y)\right|^p \mathrm{d}y \leq C \int_0^{x^\alpha} \left|\,\mathrm{D}_y u(x,y)\right|^p \mathrm{d}y$$

pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ d'où le résultat. □

COROLLAIRE 2.3.2. — *Si $f \in W_0^{-1,p}(\Omega)$ on a*

$$f = f_0 + \mathrm{D}_x f_1 + \mathrm{D}_y f_2$$

avec $x^\alpha f_0$, f_1, $f_2 \in L^p(\Omega)$.

Les formules du paragraphe 1.2 montrent alors que si on pose

$$g_i(\xi, \eta) = f_i(x, y)\,, \quad i = 0,\, 1,\, 2\,,$$

on a

$$\xi^{-\beta\left(1+\frac{2}{p}\right)} g_0 \in L^p(\Omega_a)$$

puis

$$\mathrm{D}_y f_2 = c\xi^\beta \, \mathrm{D}_\eta g_2 = \mathrm{D}_\eta h_2\,,$$

où

$$h_2 = c\xi^\beta g_2\;;$$

donc

$$\xi^{-\beta\left(1+\frac{2}{p}\right)} h_2 \in L^p(\Omega_a)\,.$$

Enfin, on obtient

$$\mathrm{D}_x f_1 = \mathrm{D}_\xi\{-c\xi^\beta g_1\} + \mathrm{D}_\eta\{-\alpha c^{\frac{1}{\alpha}}\eta\xi^{\beta-1}g_2\} + \{c\beta + \alpha c^{\frac{1}{\alpha}}\}\xi^{\beta-1}g_2\ ;$$

d'où, dans des notations évidentes,

$$\mathrm{D}_x f_1 = \mathrm{D}_\xi h_1' + \mathrm{D}_\eta h_2' + h_3'$$

où

$$\xi^{-\beta(1+\frac{2}{p})}h_1'\,,\ \xi^{-\beta(1+\frac{2}{p})}h_2'\,,\ \xi^{-\beta(1+\frac{2}{p})}h_3' \in L^p(\Omega_a)$$

car ξ^{-1} est borné sur Ω_a.

Au total on a obtenu le résultat suivant.

LEMME 2.3.3.— *Si $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ alors g défini par $g(\xi,\eta) = f(x,y)$ vérifie*

$$g = k_0 + \mathrm{D}_\xi k_1 + \mathrm{D}_\eta k_2$$

avec $\xi^{-\beta(1+\frac{2}{p})}k_i \in L^p(\Omega_a)$, $i = 0,\ 1,\ 2$.

2.4 Changement de variable dans l'équation biharmonique

On a vu au paragraphe 1.2 que l'équation $\Delta u = f$ équivaut par changement de variable à l'équation

$$c^2\left\{\Delta v + \frac{1}{\xi}\,Lv\right\} = \xi^{-2\beta}g$$

dans Ω_a où L est un opérateur différentiel linéaire du second ordre à coefficients bornés (et à dérivées de tous ordres bornées). Il s'ensuit que l'équation $\Delta^2 u = f$ équivaut à

$$c^4\left\{\Delta^2 v + \frac{1}{\xi}\,\mathcal{M}v\right\} = \xi^{-4\beta}g$$

dans Ω_a, où $\mathcal{M}$ est un opérateur différentiel linéaire du quatrième ordre à coefficients bornés.

D'après le lemme 2.3.3, on sait que

$$\xi^{-\beta(1+\frac{2}{p})}g \in W_p^{-1}(\Omega_a)\,.$$

Il est donc logique de prendre comme nouvelle fonction inconnue une fonction w dont l'équation a un second membre proportionnel à $\xi^{-\beta(1+\frac{2}{p})}g$.

Pour cela, on pose

$$w = \xi^{\delta} v\,, \quad \delta = \beta + \frac{2\beta}{p'}\,.$$

On obtient alors

$$c^4 \left\{ \Delta^2 w + \frac{1}{\xi}\, Mv \right\} = \Phi \in W^{-1,p}(\Omega_a)\,,$$

où M est encore un opérateur différentiel linéaire du quatrième ordre à coefficients bornés (et à dérivées bornées).

D'après le théorème 2.1.1, on sait que Δ^2 est un isomorphisme de

$$\begin{aligned}\big\{u \in W^{3,p}(\Omega_a) \mid u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_a\,,\ \mathrm{D}_y u = 0 \text{ sur } y = 0,\,1\,,&\\ \mathrm{D}_x^2 u = 0 \text{ sur } x = a\big\}&\end{aligned}$$

sur $W^{-1,p}(\Omega_a)$ et que la norme de son inverse ne dépend pas de a. Pour a assez petit, on en déduit que $\Delta^2 + (1/\xi)M$ est aussi un isomorphisme. Ceci nous permet d'affirmer que

$$w \in W^{3,p}(\Omega_a)\,.$$

On a donc $\xi^{-\frac{2\beta}{p}} \xi^{3\beta} v \in L^p(\Omega_a)$ et par le lemme 2.3.1, on a

$$x^{-3\alpha} u \in L^p(\Omega)\,.$$

En raisonnant comme dans le paragraphe 1.4, on voit au total que

$$x^{(j-3)\alpha}\, \mathrm{D}^j u \in L^p(\Omega)$$

pour $j = 1,\,2,\,3$. En particulier, on a $u \in W^{3,p}(\overline{\Omega})$.

2.5 Bilan

L'analyse ci-dessus est valable pour φu définie au paragraphe 2.2 et non pour u. On a donc établit le résultat suivant.

THÉORÈME 2.5.1.— *Soit $u \in H_0^2(\Omega)$ solution de $\Delta^2 u = f$ avec $f \in W_p^{-1}(\Omega)$, alors $u \in W^{3,p}(\omega)$, où $\omega = \Omega \cap \{x < a'\}$ avec $a' < a$ arbitraire.*

Remarque 2.5.2. — On a en plus la précision de décroissance

$$x^{-3\alpha}u\,,\ x^{-2\alpha}\nabla u\,,\ x^{-\alpha}\,\mathrm{D}^2u \in L^p(\Omega)\,.$$

2.6 Application aux équations de Navier-Stokes

Dans le cas des équations linéaires de Navier-Stokes on obtient, en considérant la fonction de courant, le théorème suivant.

THÉORÈME 2.6.1. — *Pour $f \in L^p(\Omega)^2$ donné, il existe $u \in H_0^1(\Omega)^2 \cap W^{2,p}(\omega)^2$ unique solution de*

$$-\Delta u = f - \nabla p \quad \textit{avec}\ \operatorname{div} u = 0$$

dans Ω.

Remarque 2.6.2. — Dans le cas $p = 2$, la régularité H^2 de u est connue au voisinage des deux coins de Ω car ils sont convexes. On en déduit que globalement $u \in H_2(\Omega)^2 \cap H_0^1(\Omega)^2$.

Remarque 2.6.3. — Par transformation de Fourier partielle, ce résultat peut être étendu à un domaine tridimensionnel modèle tel que $\Omega \times \mathbb{T}$ où $\mathbb{T}$ est le tore. On obtient que pour

$$f \in L^2(\Omega \times \mathbb{T})^3$$

il existe

$$u \in H_2(\Omega \times \mathbb{T})^3 \cap H_0^1(\Omega \times \mathbb{T})^3$$

unique solution de $-\Delta u = f - \nabla p$ avec $\operatorname{div} u = 0$.

Références

[1] AGMON (S.), DOUGLIS (A.) et NIRENBERG (L.) . — *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, 1, Communications Pure Appl. Math. **12** (1959), pp. 623-627.

[2] COIFMAN (R.) et WEISS (G.) . — *Transference methods in analysis*, Conference board on Mathematical Sciences, Conference series in Mathematics, AMS, Providence Rhode Island, **31** (1977), pp. 1-59.

[3] DORE (G.) et VENNI (A.) . — *On the closedness on the sum of two closed operators*, Math. Zeitschrift **196** (1987), pp. 189-201.

[4] GRISVARD (P.) .— *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics, Pitman, **24** (1985).

[5] IBUKI (K.) .— *Dirichlet problem for elliptic equations of the second order in a singular domain of* $\mathbb{R}^2$, Journal Math. Kyoto Univ. **14**, n° 1 (1974), pp. 54-71.

[6] KHELIF (A.) .— *Problèmes aux limites pour le laplacien dans un domaine à points cuspides*, CRAS, Paris, **287** (1978), pp. 1113-1116.

[7] LIONS (J.-P.) et MAGENES (E.) .— *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris (1968).

[8] MAZ'YA (V.) et PLAMENEVSKII (B. A.) .— *Estimates in L^p and in Hölder classes and the Miranda-Agmon maximum principle for solutions of elliptic boundary value problems in domains with singular points on the boundary*, Amer. Math. Soc. Transl., Vol. 2, **123** (1984), pp. 1-56.