LOUIS NIGLIO

Classes isotropes et classes de Maslov

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 4, nº 3 (1995), p. 633-654

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1995_6_4_3_633_0>

Classes isotropes et classes de Maslov(*)

LOUIS NIGLIO(1)

RÉSUMÉ. — Soit $E \to M$ un fibré vectoriel symplectique de classe C^∞, de rang $2m$. Pour tout couple (I_1, I_2) de sous-fibrés vectoriels orientés isotropes de $E \to M$ (pour la forme symplectique), de rangs respectifs n_1, n_2 $(n_1 \leq n_2 \leq m)$, nous définissons des classes caractéristiques isotropes. Si $n_1 < n_2$ de telles classes ne se déduisent pas d'une grassmannienne et utilisent un modèle algébrique dont nous donnons la description. Un des éléments nouveaux dans ce travail est qu'aucune hypothèse de platitude sur les fibrés n'est nécessaire. Ces classes sont notamment des obstructions à la transversalité de I_1 avec $I_2^\perp$ (ou I_2 si I_2 est lagrangien). Si I_1 et I_2 sont contenus dans des lagrangiens L_1 et L_2, nous donnons l'expression des classes isotropes de (I_1, I_2) en fonction des classes de Maslov de (L_1, L_2) et des classes de Pontrjaguine de I_1. En particulier, si $n_1 = m - 1$, les classes isotropes du couple (I_1, I_2) sont exactement les classes de Maslov du couple (L_1, L_2) de degré supérieur à 1.

ABSTRACT. — Let $E \to M$ be a symplectic vector bundle of class C^∞, of rank $2m$. For any pair (I_1, I_2) of oriented isotropic vector subbundles of $E \to M$ (for the symplectic form), respectively of ranks n_1, n_2 $(n_1 \leq n_2 \leq m)$, we define isotropic characteristic classes. If $n_1 < n_2$ such classes can not be constructed from a grassmannian and need an algebric model described below. One of the new elements in this work is that we does not need flatness hypothesis on the bundles. These classes are in particular obstructions to the transversality of I_1 with $I_2^\perp$ (or I_2 if I_2 is lagrangian). If I_1 and I_2 are contained in two lagrangian L_1 and L_2, we give the relations between isotropic classes of (I_1, I_2) and Maslov classes of (L_1, L_2). In particular, if $n_1 = m - 1$, the isotropic classes of the pair (I_1, I_2) are exactly the Maslov classes of the pair (L_1, L_2) of degree more than 1.

MOTS-CLÉS : Sympectique, lagrangien, isotrope, classes caractéristiques isotropes, classes de Maslov.

(*) Reçu le 25 novembre 93

(1) Université d'Avignon, 33 rue Louis-Pasteur, F-84000 Avignon (France)

Introduction

On sait l'importance que revêt l'étude de la première classe de Maslov d'une sous-variété lagrangienne Λ d'un fibré cotangent T^*N, obstruction à la transversalité de Λ avec le champ de sous-espaces lagrangiens canonique. D'autres invariants cohomologiques, les classes de Maslov d'ordre supérieur, obstructions à la transversalité, ont été ensuites définis.

L'existence de ces invariants, dans certaines théories, provient de l'évaluation des classes de Chern d'ordre impair de la variété symplectique ambiante en termes de courbure. En effet si on procède au calcul des formes différentielles qui définissent ces classes sur des repères "adaptés", ces formes sont, non seulement exactes, mais identiquement nulles. Comme ces formes différentielles ont des primitives naturelles, ces primitives deviennent à leur tour fermées et définissent des invariants cohomologiques qualifiés de secondaires. De fait, tout se ramène à une constatation algébrique déjà ancienne : une matrice réelle symétrique d'ordre impair a un déterminant nul. Cette propriété joue par ailleurs un rôle déterminant dans le calcul de la cohomologie de la grassmannienne lagrangienne $\mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n)$. De là provient l'idée de préciser les relations entre le modèle algébrique de $H^*(\mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n), \mathbb{R})$, et ces invariants, autrement que par l'utilisation d'une fonction de Gauss, pour l'appliquer à des situations moins évidentes.

La généralisation naturelle des classes de Maslov conduit aux classes isotropes, associées à un couple de sous-fibrés isotropes de rang n (pour la forme symplectique) d'un fibré symplectique de rang $2(n+k)$. Différentes approches ont vu le jour [La], [Mo3], [Ni1], [MN3]. Toutes s'appuyent sur la connaissance de la cohomologie réelle de la grassmannienne isotrope, qui n'est finalement pas le bon modèle car son utilisation nécessite, soit des recours à des trivialisations en augmentant les fibrés, soit une hypothèse d'existence de connexion sans courbure. Une telle hypothèse reste de nature surprenante, car elle n'intervient pas dans le cas d'un espace homogène symétrique [Ni2].

Le présent travail, s'appuyant cette fois sur un modèle algébrique adapté, définit pour tout couple de sous-fibrés isotropes (éventuellement de rangs différents) des classes caractéristiques isotropes, sans aucune hypothèse restrictive.

Dans une première section, nous étudions avec quelques détails le modèle algébrique utilisé. Il s'agit d'une algèbre différentielle graduée, dont nous décrivons complètement la cohomologie en nous intéressant plus spécialement aux générateurs de degré impair. Ce sont eux qui contiennent les informations non intrinsèques sur les fibrés.

Dans une seconde section, nous développons d'abord un certain nombre de constructions sur les sous-fibrés isotropes. Nous prenons systématiquement des fibrés orientés, car les résultats de la première section proviennent de théories nécessitant des groupes de Lie compacts connexes. En fait, si les fibrés ne sont pas orientés, les formules que nous utilisons restent valables et définissent encore des classes de cohomologie non triviales. Pour tout couple (I_1, I_2) de sous-fibrés vectoriels isotropes orientés d'un fibré symplectique (avec $\mathrm{rang}(I_1) \leq \mathrm{rang}(I_2)$), nous définissons des classes caractéristiques isotropes qui sont notamment des obstructions à la transversalité de I_1 avec $I_2^{\perp}$ (§ 2.7). En particulier si I est un sous-fibré isotrope d'un fibré cotangent et si L est le champ de sous-espaces lagrangiens canonique, les classes caractéristiques du couple (I, L) sont des obstructions à la transversalité de I et de L.

Dans la troisième section, nous examinons quelques cas particuliers. Nous expliquons pourquoi une hypothèse de connexion sans courbure permettait d'utiliser un modèle algébrique plus simple. Nous donnons aussi des formules explicites de cocycles pour des cas particuliers importants.

La quatrième section fait le lien avec les classes de Maslov, citons le théorème 4.2. :

Soient I_1 et I_2 deux sous-fibrés isotropes orientés d'un fibré symplectique $E \to M$ de rang $2m$, tels que $\mathrm{rang}(I_1) \leq \mathrm{rang}(I_2)$. Si I_1 et I_2 sont respectivement contenus dans deux sous-fibrés lagrangiens orientés L_1 et L_2 de $E \to M$, alors les classes caractéristiques isotropes du couple (I_1, I_2) ne dépendent que des classes de Maslov du couple (L_1, L_2) et de classes de Pontrjaguine de I_1.

Nous donnons aussi l'expression des classes isotropes de (I_1, I_2) en fonction des classes de Maslov de (L_1, L_2) et des classes de Pontrjaguine de I_1. Les classes isotropes de (I_1, I_2) sont exactement les classes de Maslov de (L_1, L_2) si $\mathrm{rang}(I_1) = \mathrm{rang}(L_1) - 1$.

La cinquième section met en évidence le rôle particulier de la classe isotrope de degré maximal lorsque le fibré le plus petit est de rang impair.

La sixième section est consacrée à l'examen de quelques exemples.

1. Préliminaires algébriques

1.1 Le modèle de Cartan

Soit $I\big(\mathrm{U}(m)\big)$ l'algèbre des polynômes invariants du groupe unitaire $\mathrm{U}(m)$. $I\big(\mathrm{U}(m)\big)$ est engendrée par les polynômes de Chern (c_i) définis pour $1 \le i \le m$ par la relation :

$$\det\big(\lambda I_m + \sqrt{-1}\,X\big) = \lambda^m - c_1(X)\lambda^{m-1} + \cdots + (-1)^i c_i(X)\lambda^{m-i} + \cdots \\ + (-1)^m c_m\,, \quad \text{où } X \in \mathrm{u}(m).$$

Pour chaque i compris entre 1 et m, on note x_{2i-1} la forme différentielle bi-invariante sur $\mathrm{U}(m)$, de degré $2i-1$, image de c_i par l'application de Cartan. Les (x_i) constituent une base de l'espace de Samelson $P\big(\mathrm{U}(m)\big)$ de $\mathrm{U}(m)$. On choisit la transgression $\tau : P\big(\mathrm{U}(m)\big) \to I\big(\mathrm{U}(m)\big)$ définie par $\tau(x_{2i-1}) = c_i$ pour tout i.

Soient n et k deux entiers positifs ou nuls, tels que $n + k = m$. On considère $\mathrm{SO}(n) \times \mathrm{U}(k)$ comme sous-groupe de Lie de $\mathrm{U}(m)$. L'algèbre $I\big(\mathrm{SO}(n) \times \mathrm{U}(k)\big)$ des polynômes invariants de ce sous-groupe est une algèbre symétrique $\vee Q$ sur l'espace vectoriel Q engendré par les $\tilde{c}_i p_j$, pour $1 \le i \le k$ et $1 \le j \le [n/2]$, où $\tilde{c}_i$ est le polynôme de Chern numéro i dans $I\big(\mathrm{U}(k)\big)$ et p_j le polynôme de Pontrjaguine numéro j dans $I\big(\mathrm{SO}(n)\big)$.

Le modèle de Cartan est l'algèbre différentielle graduée :

$$W_1 = I\big(\mathrm{SO}(n) \times \mathrm{U}(k)\big) \otimes \wedge P\big(\mathrm{U}(n+k)\big)\,,$$

où $\tilde{c}_i p_j$ est de degré $2i + 4j$ muni de la différentielle δ_1 définie par :

$$\delta_1(z \otimes 1) = 0 \quad \text{pour } z \in I\big(\mathrm{SO}(n) \times \mathrm{U}(k)\big)$$

et

$$\delta_1(1 \otimes x) = \tau(x)\big|_{\mathrm{so}(n)\oplus\mathrm{u}(k)} \quad \text{pour } x \in P\big(\mathrm{U}(m)\big)\,.$$

L'algèbre W_1 est un modèle pour la cohomologie réelle de $\mathrm{U}(n + k)/\,\mathrm{SO}(n) \times \mathrm{U}(k)$, permettant de définir des classes de cohomologie associées à tout couple de sous-fibrés isotropes orientés de même dimension d'un fibré vectoriel symplectique, avec une hypothèse restrictive d'existence d'une connexion sans courbure ([MN3], [N1]).

Nous allons, au moyen d'un modèle algébrique plus élaboré, nous affranchir d'une telle hypothèse, expliquer pourquoi elle est inutile pour $k = 0$, et généraliser aussi le champ d'application.

1.2 Différence tensorielle de deux algèbres du type précédent [GHV]

DÉFINITION 1.2.1.— *Soient n_1, k_1, n_2, k_2 tels que $n_1 + k_1 = n_2 + k_2 = m$. Soit W_i ($i = 1, 2$), l'algèbre $I(\mathrm{SO}(n_i) \times \mathrm{U}(k_i)) \otimes \wedge P(\mathrm{U}(m))$ munie de la différentielle δ_i correspondante.*

On appelle différence tensorielle de W_1 et W_2, et on note $W_1 \ominus W_2$ l'algèbre différentielle graduée :

$$W = I(\mathrm{SO}(n_1) \times \mathrm{U}(k_1)) \otimes I(\mathrm{SO}(n_2) \times \mathrm{U}(k_2)) \otimes \wedge P(\mathrm{U}(m))$$

munie de la différentielle δ définie par

$$\begin{aligned} &\delta(p \otimes q \otimes 1) = 0 \quad \text{pour } p \in I(\mathrm{SO}(n_1) \times \mathrm{U}(k_1)),\ q \in I(\mathrm{SO}(n_2) \times \mathrm{U}(k_2)) \\ &\delta(1 \otimes 1 \otimes x) = \tau(x)\big|_{\mathrm{so}(n_1)\oplus \mathrm{u}(k)} \otimes 1 \otimes 1 + \\ &\qquad\qquad - 1 \otimes \tau(x)\big|_{\mathrm{so}(n_2)\oplus \mathrm{u}(k_2)} \otimes 1 \quad \text{pour } x \in P(\mathrm{U}(m)). \end{aligned}$$

1.2.2 Espace de Samelson de W

Soit $\rho : W \to \wedge P(\mathrm{U}(m))$ l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} &\rho(1 \otimes 1 \otimes x) = x\ ; \quad \rho(p \otimes q \otimes x) = 0\ ; \\ &x \in \wedge P(\mathrm{U}(m))\ ; \quad \deg(p) + \deg(q) > 0. \end{aligned}$$

Cette application induit un homomorphisme d'algèbres :

$$\rho^\sharp : H^*(W) \to \wedge P(\mathrm{U}(m))$$

appelé projection de Samelson.

DÉFINITIONS

1) On appelle espace de Samelson de W le sous-espace vectoriel $\widehat{P}(W)$ de $P(\mathrm{U}(m))$ défini par

$$\widehat{P}(W) = \mathrm{Im}\, \rho^\sharp \cap P(\mathrm{U}(m)).$$

2) On appelle complément de Samelson tout sous-espace vectoriel $\widetilde{P}(W)$ de $P(\mathrm{U}(m))$ tel que :

$$P(\mathrm{U}(m)) = \widehat{P}(W) \oplus \widetilde{P}(W).$$

On définit de manière analogue pour W_i une projection de Samelson, un sous-espace de Samelson $\widehat{P}(W_i)$ et des compléments de Samelson.

PROPOSITION 1.2.3 [GHV]. — *Choisissons un complément de Samelson $\widetilde{P}(W)$. Un élément $x \in P(\mathrm{U}(m))$ appartient à $\widehat{P}(W)$ si et seulement s'il existe $p_1, \ldots, p_k$ dans $I(\mathrm{SO}(n_1) \times \mathrm{U}(k_1))$, $q_1, q_2, \ldots, q_k$ dans $I(\mathrm{SO}(n_2) \times \mathrm{U}(k_2))$, $y_1, y_2, \ldots, y_k$ dans $\widetilde{P}(W)$, tels que :*

$$\delta(x) = \sum_{i=1}^{k} (p_i \otimes q_i \otimes 1)\, \delta(y_i), \quad \deg p_i + \deg q_i > 0.$$

On remarque en particulier que $c = 1 \otimes 1 \otimes x - \sum_{i=1}^{k} p_i \otimes q_i \otimes y_i$ est un cocycle de W.

PROPOSITION 1.2.4 [GHV]. — *On a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
 & I(SO(n_1) \times U(k_1)) \arrow[d, "m_1^\sharp"'] \arrow[dr, "\ell_1^\sharp"] & \\
I(SO(n_2) \times U(k_2)) \arrow[r, "m_2^\sharp"] \arrow[dr, "\ell_2^\sharp"'] & H^*(W) \arrow[r, "\pi_1^\sharp"] \arrow[d, "\pi_2^\sharp"'] & H^*(W_1) \arrow[d, "\rho_1^\sharp"] \\
 & H^*(W_2) \arrow[r, "\rho_2^\sharp"] & \wedge(P(U_m))
\end{tikzcd}$$

où $m_1^\sharp$ est induite par $m_1(p) = p \otimes 1 \otimes 1$, $\ell_1^\sharp$ induite par ℓ_1 définie par $\ell_1(p) = p \otimes 1$, $\pi_1^\sharp$ induite par la projection π_1 définie par $\pi_1(p \otimes q \otimes x) = q(\circ) p \otimes x$ (projection sur $\mathbb{R}$ dans $I(\mathrm{SO}(n_2) \times \mathrm{U}(k_2))$. Les applications $m_2^\sharp$, $\ell_2^\sharp$ et $\pi_2^\sharp$ étant définies de manière analogue.

1.3 Cohomologie de W_1

THÉORÈME .— *Il existe un isomorphisme d'algèbres $f : H^*(W_1) \to \operatorname{Im} \ell_1^\sharp \otimes \wedge \widehat{P}(M_1)$ rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd} & I(SO(n_1) \times U(k_1)) \arrow[dr, "\rho_1^\sharp"] & \\ I(SO(n_1) \times U(k_1)) \arrow[ur, "\ell_1^\sharp"] \arrow[r] & H^*(W) \arrow[u, "f"] \arrow[r] & H^*(W_1) \end{tikzcd}$$

Ce théorème résulte du calcul de $\widehat{P}(W_1)$, voir [MN3] et [Ni1] ou paragraphe 1.4.3 ci-dessous, et de l'application de résultats généraux à la paire $\big(\mathrm{U}(m)\,,\, \mathrm{SO}(n_1) \times \mathrm{U}(k_1)\big)$ qui est une paire de Cartan.

1.4 Cohomologie de W

Le but de ce paragraphe est d'établir le résultat suivant.

THÉORÈME 1.4.1.— *Supposons $n_1 \leq n_2$ (donc $k_1 \geq k_2$), alors $H^*(W)$ s'identifie naturellement à :*

$$I\big(\mathrm{SO}(n_2) \times \mathrm{U}(k_2)\big) \otimes H^*(W_1) \simeq I\big(\mathrm{SO}(n_2) \times \mathrm{U}(k_2)\big) \otimes \operatorname{Im} \ell_1^\sharp \otimes \wedge \widehat{P}(W_1)\,.$$

Auparavant nous étudierons $\widehat{P}(W)$.

PROPOSITION 1.4.2

$$\dim \widehat{P}(W) \leq \dim\big(\widehat{P}(W_1) \cap \widehat{P}(W_2)\big)\,.$$

Démonstration.— Soit Z l'ensemble des cocycles de W, et $\alpha : Z \to H^*\big(W, \mathbb{R}\big)$ l'application qui, à un cocycle, associe sa classe de cohomologie. Choisissons une section linéaire $\beta : \widehat{P}(W) \to Z$ de $\rho^\sharp \circ \alpha$. Choisissons un complément de Samelson $\widetilde{P}(W)$. Pour $x \in \widehat{P}(W)$, $x \neq 0$, $\beta(x)$ est de la forme :

$$\beta(x) = 1 \otimes 1 \otimes x - \sum p_i \otimes q_i \otimes y_i\,, \quad y_i \in \widetilde{P}(W)\,.$$

Alors

$$\rho_1\left(\pi_1\left(\beta(x)\right)\right) = x - \sum p_i(\circ)q_i(\circ)y_i$$

n'est pas nul (la somme $\widehat{P}(W) + \widetilde{P}(W)$ est directe). Ainsi l'application linéaire

$$\rho_1 \circ \pi_1 \circ \beta : \widehat{P}(W) \to \widehat{P}(W_1)$$

est injective, et est à valeurs dans $\widehat{P}(W_1) \cap \widehat{P}(W_2)$, d'où la proposition.

PROPOSITION 1.4.3.— *Supposons $n_1 \leq n_2$ (donc $k_1 \geq k_2$), $\widehat{P}(W)$ est engendré par les générateurs $x_{4\ell+1}$, pour $k_1 < 2\ell+1 \leq m$, correspondant aux polynômes de Chern de degré impair $c_{2\ell+1}$ ($k_1 < 2\ell+1 \leq m$), plus x_{2m-1} si n_1 est impair et m pair.*

En particulier $\widehat{P}(W) = \widehat{P}(W_1)$.

Démonstration.— Nous utiliserons la notion de P-algèbre essentielle associée à une P-algèbre symétrique [GHV] . Tout d'abord, s'agissant de $\widehat{P}(W_1)$, si on note $\sigma : P\big(\mathrm{U}(m)\big) \to I\big(\mathrm{SO}(n_1) \times \mathrm{U}(k_1)\big) = \vee Q$ (§ 1.1) la composée de la transgression τ définie en 1.1 et de la restriction à $\mathfrak{so}(n_1) \oplus \mathfrak{u}(k_1)$, on introduit $P_1 = \sigma^{-1}\big(\vee^+Q \cdot \vee^+Q\big)$ et un supplémentaire P_2 de P_1 dans $P\big(\mathrm{U}(m)\big)$. Alors on peut trouver un sous-espace vectoriel Q_1 de Q et une application linéaire $\sigma_1 : P_1 \to \vee Q_1$ définissant une différentielle sur $\overline{W_1} = \vee Q_1 \otimes \vee P_1$, qui est la P-algèbre essentielle associée à W, de sorte que $H^*(W_1)$ s'identifie naturellement à $H^*(\overline{W_1})$.

L'étude de la restriction de $I\big(\mathrm{U}(m)\big)$ à $I\big(\mathrm{SO}(n_1) \times \mathrm{U}(k_1)\big)$ montre que P_1 est engendré pour les $x_{4\ell+1}$ pour $k_1 < 2\ell+1 \leq m$ et les $x_{4\ell-1}$ pour $n < 2\ell \leq m$. On peut alors prendre pour Q_1 le sous-espace vectoriel de Q engendré par les $\widetilde{c}_{2\ell}$ ($2\ell \leq k$). Le calcul montre que $\sigma_1(x_{4\ell+1}) = 0$ pour $k_1 < 2\ell+1 \leq m$. On retrouve ainsi le résultat de [MN3] et [N1]. $\widehat{P}(W_1)$ est engendré par les $x_{4\ell+1}$, pour $k_1 < 2\ell+1 \leq m$, plus x_{2m-1} si n_1 est impair et m pair.

En ce qui concerne W, $H^*(W, \mathbb{R})$ s'identifie naturellement à la cohomologie de $\overline{W} = \vee Q \otimes \vee Q_1 \otimes \wedge P_1$ munie d'une différentielle ∇_1 dont la description [GHV] dépasse le cadre de cet article. Le calcul n'est pas très compliqué et montre que tous les générateurs de $\widehat{P}(W_1)$ vérifient $\nabla_1 = 0$, donc sont dans $\widehat{P}(W)$. Ainsi $\widehat{P}(W) = \widehat{P}(W_1) \subset \widehat{P}(W_2)$.

COROLLAIRE 1.4.4.— *L'injection $\rho_1 \circ \pi_1 \circ \beta : \widehat{P}(W) \to \widehat{P}(W_1)$ utilisée en 1.3.1 est l'identité.*

Démonstration.— Choisissons un complément de Samelson $\widetilde{P}(W)$ de $\widehat{P}(W_1)$. Comme $\widehat{P}(W_1) = \widehat{P}(W)$, $\widetilde{P}(W_1)$ est aussi un complément de Samelson pour l'algèbre W et, pour tout ℓ tel que $k_1 < 2\ell + 1 \leq m$, on a :

$$\rho_1 \left(\pi_1 \left(\beta(x_{4\ell+1})\right)\right) = x_{4\ell+1} - \sum p_i(\circ) q_i(\circ) y_i \in \widehat{P}(W_1)\,.$$

$x_{4\ell+1}$ étant dans $\widehat{P}(W_1)$ et $\sum p_i(\circ)\ q_i(\circ) y_i$ dans $\widetilde{P}(W_1)$, on obtient $\sum p_i(\circ) q_i(\circ) y_i = 0$.

1.4.5 Démonstration du théorème 1.4.1

Considérons le diagramme de la section 1.2.4. D'après un résultat général [GHV], la surjectivité de $\pi_1^\sharp$ entraîne l'existence d'un homomorphisme d'algèbres $g : H^*(W) \to I(\mathrm{SO}(n_2) \otimes \mathrm{U}(k_2)) \otimes H^*(W_1)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& H^*(W) \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "\pi_1^\sharp"] & \\
I(SO(n_2) \times U(k_2)) \arrow[r] & I(SO(n_2) \times U(k_2)) \otimes H^*(W_1) \arrow[r] & H^*(W_1)
\end{tikzcd}$$

Il nous suffit donc de vérifier la surjectivité de $\pi_1^\sharp$. Nous venons de voir que toutes les classes impaires se relèvent. Soit maintenant θ une classe paire, comme $\left(\mathrm{U}(n_1 + k_1)\,,\ \mathrm{SO}(n_1) \times \mathrm{U}(k_1)\right)$ est une paire de Cartan, et que $\rho_1^\sharp(\theta) = 0$, alors $\theta \in \mathrm{Im}\,\ell_1^\sharp$. La commutativité du diagramme 1.2.4 montre que θ se relève en une classe de cohomologie dans $H^*\left(W, \mathbb{R}\right)$.

Nous allons maintenant établir un résultat essentiel pour la suite.

PROPOSITION 1.4.6.— *Soit $x \in \widehat{P}(W)$. Soient*

$$\beta(x) = 1 \otimes 1 \otimes x - \sum_{i=1}^{k} p_i \otimes q_i \otimes y_i$$

et

$$\beta'(x) = 1 \otimes 1 \otimes x - \sum_{j=1}^{k'} p'_j \otimes q'_j \otimes y'_j$$

deux cocycles de W construits à partir de x.

Alors $u = \beta(x) - \beta'(x)$ est un cobord.

Démonstration. — Soit $[\beta(x)]$ (resp. $[\beta'(x)]$) la classe de comologie de $\beta(x)$ (resp. $\beta'(x)$). Comme

$$\rho_1^\sharp\left(\pi_1^\sharp[\beta(x)]\right) = \rho_1^\sharp\left(\pi_1^\sharp[\beta'(x)]\right) = x\,,$$

$\pi_1^\sharp\left([\beta(x)] - [\beta'(x)]\right)$ est dans le noyau de $\rho_1^\sharp$, qui s'identifie à $\mathrm{Im}(\ell_1^\sharp)$. La commutativité du diagramme du paragraphe 1.4.5 entraîne que $g\left([\beta(x)] - [\beta'(x)]\right)$ est dans $I\big(\mathrm{SO}(n_1)\times \mathrm{U}(k_1)\big)\otimes \mathrm{Im}(\ell_1^\sharp)$, c'est une classe de cohomologie de degré pair.

Ainsi, dans W, il existe un cocycle de degré pair φ et un élément ψ tels que :

$$\beta(x) - \beta'(x) = \varphi + \mathrm{d}\psi$$

Comme $\beta(x) - \beta'(x)$ est un cocycle de degré impair, on a :

$$\beta(x) - \beta'(x) = \mathrm{d}(\psi_{\mathrm{pair}})\,,$$

où ψ_{pair} est la partie paire de ψ.

2. Classes caractéristiques associées à un couple de sous-fibrés isotropes d'un fibré symplectique

2.1 Sous-fibrés isotropes d'un fibré symplectique

2.1.1 Généralités

Soit $E \to M$ un fibré vectoriel de classe C^∞, de rang $2m$, que l'on supposera muni d'une structure hermitienne adaptée à la forme symplectique. Soit I_1 un sous-fibré vectoriel orienté isotrope de $E \to M$ (pour la forme symplectique), de rang n_1. On pose $m = n_1 + k_1$. Soit $P \to M$ le $\mathrm{U}(m)$-fibré principal des repères orthonormés de $E \to M$. Les repères orthonormés de $E \to M$ de la forme $e_1, \ldots, e_{n_1}, e_{n_1+1}, \ldots, e_m$, où $e_1, \ldots, e_{n_1}$ est une $\mathbb{R}$-base orthonormée directe de I_1, constituent un fibré principal de groupe structural $\mathrm{SO}(n_1)\times \mathrm{U}(k_1)$ que nous noterons $Q_1 \to M$. $Q_1 \to M$ est obtenu à partir de $P \to M$ par réduction de groupe structural de $\mathrm{U}(m)$ à $\mathrm{SO}(n_1)\times \mathrm{U}(k_1)$.

Si I_2 est un autre sous-fibré isotrope orienté de rang n_2 de E, la construction précédente définit une autre réduction de $P \to M$ à $\mathrm{SO}(n_2) \times \mathrm{U}(k_2)$, notée $Q_2 \to M$. Nous obtenons ainsi un couple de réductions de $P \to M$. Donnons-nous une connexion $\overline{\omega}_i$ sur $Q_i \to M$ $(i = 1, 2)$ et étendons $\overline{\omega}_1$ et $\overline{\omega}_2$ en deux connexions ω_1 et ω_2 sur $P \to M$, que nous utiliserons pour appliquer la théorie de Chern-Weil. Nous supposerons que $n_1 \leq n_2$. Auparavant nous établirons le résultat suivant.

LEMME 2.1.2. — *Si I_1 est un sous-fibré vectoriel orienté du fibré isotrope orienté I_2, alors il existe une connexion $\overline{\omega}_1$ sur $Q_1 \to M$ et une connexion $\overline{\omega}_2$ sur $Q_2 \to M$ induisant la même connexion $\omega_1 = \omega_2$ sur $P \to M$.*

Démonstration. — Supposons d'abord que I_2 est lagrangien ($n_2 = m$, $k_2 = 0$). Les repères orthonormés directs $e_1, \dots, e_m$ de I_2 tels que $e_1, \dots, e_{n_1}$ soit un repère orthonormé direct de I_1 constituent un fibré principal $Q \to M$ de groupe $\mathrm{SO}(n_1) \times \mathrm{SO}(k_1)$, obtenu à partir de $Q_2 \to M$ par réduction de groupe structural de $\mathrm{SO}(m)$ à $\mathrm{SO}(n_1) \times \mathrm{SO}(k_1)$. Ce fibré $Q \to M$ est aussi obtenu à partir de $Q_1 \to M$ par réduction de groupe structural de $\mathrm{SO}(n_1) \times \mathrm{U}(k_1)$ à $\mathrm{SO}(n_1) \times \mathrm{SO}(k_1)$. Le choix d'une connexion sur $Q \to M$ permet de construire par extension les connexions $\overline{\omega}_1$ et $\overline{\omega}_2$ cherchées.

Si I_2 n'est par lagrangien, on considère $I_2 \oplus JI_2$ qui est un sous-fibré complexe de $E \to M$. On peut alors raisonner avec le $\mathrm{U}(n_2)$-fibré principal des repères orthonormés de $I_2 \oplus JI_2$, réduction de $P \to M$, et procéder ensuite à une extension suivant les mêmes techniques.

Remarque 2.1.3. — Dans le lemme précédent, si I_2 est lagrangien, on a une décomposition :

$$I_1 \oplus JI_2 \oplus N = I_2 \oplus JI_2 = E \to M\,,$$

où *N est un sous-fibré complexe de $E \to M$ admettant un sous-fibré lagrangien* (l'orthogonal de I_1 dans I_2).

2.2 La théorie de Chern-Weil [CS]

Soit $P \xrightarrow{\pi} M$ un G fibré principal. Si on se donne une connexion ω sur ce fibré, de courbure Ω, on peut associer à $f \in I(G)$ de degré ℓ la 2ℓ-forme différentielle sur M, $\Delta_\omega(f)$ définie par sa relevée à P par $\pi^*\Delta_\omega(f) = f(\Omega, \dots, \Omega)$.

Si on considère deux connexions ω_1 et ω_2 sur $P \to M$, de courbures Ω_1 et Ω_2, on a, avec les formes $\Delta_{\omega_1}(f)$ et $\Delta_{\omega_2}(f)$ la $(2\ell-1)$-forme différentielle définie sur P, projetable sur M, notée $\pi^*\Delta_{\omega_1\omega_2}(f)$ et définie par la formule :

$$\pi^*\Delta_{\omega_1\omega_2}(f) = \ell \int_0^1 f\big(\omega_1 - \omega_2, t\Omega_1 + (1-t)\Omega_2, \ldots, t\Omega_1 + (1-t)\Omega_2\big)\, dt .$$

2.3 L'homomorphisme fondamental

Soit u l'homomorphisme d'algèbres de W dans l'algèbre $\Omega^*(M)$ des formes différentielles sur M, défini sur les générateurs de W par les formules :

$$\begin{aligned} u(p \otimes q \otimes 1) &= \Delta_{\overline{\omega}_1}(p) \wedge \Delta_{\overline{\omega}_1}(q) \\ u(1 \otimes 1 \otimes x) &= \Delta_{\omega_1\omega_2}\big(\tau(x)\big) . \end{aligned}$$

On vérifie sans difficulté le lemme suivant.

LEMME 2.4. — *u commute aux différentielles.*

PROPOSITION 2.5. — *Soit ℓ un entier tel que $n_1 < 2\ell + 1 \leq m$ et*

$$\beta(x_{4\ell+1}) = 1 \otimes 1 \otimes x_{4\ell+1} - \sum_{\alpha=1}^{k} p_\alpha \otimes q_\alpha \otimes y_\alpha$$

un cocycle construit à partir de $x_{4\ell+1} \in \widehat{P}(W)$.

1) La forme différentielle de degré $4\ell+1$ sur M définie par :

$$\phi_{4\ell+1}(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2) = \\ = \Delta_{\omega_1\omega_2}\big(\tau(x_{4\ell+1})\big) - \sum_\alpha \Delta_{\overline{\omega}_1}(p_\alpha) \wedge \Delta_{\overline{\omega}_2}(q_\alpha) \wedge \Delta_{\omega_1\omega_2}\big(\tau(y_\alpha)\big)$$

est une forme fermée.

2) Sa classe de cohomologie ne dépend que de $x_{4\ell+1}$.

3) Sa classe de cohomologie de dépend pas de la structure hermitienne considérée, adaptée à la forme symplectique de $E \to M$.

4) Sa classe de cohomologie ne dépend pas des connexions $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$.

5) Sa classe de cohomologie ne dépend pas des déformations de $I_1 \to M$ (resp. $I_2 \to M$) à travers les sous-fibrés isotropes orientés de $E \to M$ de rang n_1 (resp. n_2).

Démonstration

1) $\phi_{4\ell+1}(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2)$ est l'image par u du cocycle $\beta(x_{4\ell+1})$ de W.

2) Si $\beta'(x_{4\ell+1})$ est un autre cocycle, la forme différentielle $\phi'_{4\ell+1}(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2)$ correspondante est telle que :

$$\begin{aligned}\phi'_{4\ell+1}(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2) - \phi_{4\ell+1}(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2) &= u\big(\beta'(x_{4\ell+1}) - \beta'(x_{4\ell+1})\big) \\ &= u(\text{cobord}) = \text{cobord} .\end{aligned}$$

3) Il est bien connu que deux métriques hermitiennes adaptées à une forme symplectique sont homotopes.

4) et **5)** Se démontrent en utilisant la technique d'intégration le long des fibrés ([Le], [Va]).

Soit $\big(Q_1^s\big)_{0 \leq s \leq 1}$ une famille différentiable de $\big(\mathrm{SO}(n_1) \times \mathrm{U}(k_1)\big)$-réduction de $P \to M$, c'est-à-dire une $\big(\mathrm{SO}(n_1) \times \mathrm{U}(k_1)\big)$-réduction $\widehat{Q}_1 \to M \times I$ de $P \times I \to M \times I$, où $I = [\,0\,,1\,]$, telle que $Q^s = \widehat{Q}\big|_{s=\mathrm{Cte}}$.

Supposons que chaque Q_1^s soit muni d'une connexion $\overline{\omega}_1^s$ variant différentiablement avec s, chaque $\overline{\omega}_1^s$ s'étend en ω_1^s à P. La collection des $\overline{\omega}_1^s$ définit une connexion $\overline{\gamma}_1$ sur $\widehat{Q}_1$, et la collection des ω_1^s définit une connexion γ_1 sur $P \times I$ qui est l'extension de $\overline{\gamma}_1$. Soit $\widehat{Q} = Q_2 \times I$ muni de la connexion $\overline{\gamma}_2$ construite à partir de $\overline{\omega}_2$ par le procédé précédent. Soient i_0 et i_1 les injections canoniques de M dans $M \times I$. Nous appliquons la méthode d'intégration le long des fibrés pour la forme $\phi_{4\ell+1}(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2)$. On obtient l'égalité :

$$\begin{gathered} i_1^*\big(\phi_{4\ell+1}(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2)\big) - i_0^*\big(\phi_{4\ell+1}(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2)\big) = \\ \int_I \mathrm{d}\big(\phi_{4\ell+1}(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2)\big) - \mathrm{d}\int_I \big(\phi_{4\ell+1}(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2)\big) . \end{gathered}$$

Comme $\phi_{4\ell+1}(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2)$ est fermée (d'après 2.5 1)), on en déduit :

$$\phi_{4\ell+1}(\overline{\omega}_1^1, \overline{\omega}_2) - \phi_{4\ell+1}(\overline{\omega}_1^0, \overline{\omega}_2) = \text{forme exacte sur } M .$$

On procéderait de même pour une variation sur $Q_2 \to M$.

2.6 Système de classes caractéristiques associé à un couple de sous-fibrés isotropes orientés

DÉFINITION .— *Soient I_1 et I_2 deux sous-fibrés isotropes orientés d'un fibré symplectique tels que* $\mathrm{rang}(I_1) \leq \mathrm{rang}(I_2)$. *On appelle système de* *classes caractéristiques isotropes associé au couple* (I_1, I_2)*, les classes de cohomologie des formes différentielles* $\phi_{4\ell+1}$ *ainsi que celle de* $\phi_{2m-1} = \Delta_{\omega_1\omega_2}(c_m)$ *si* m *est pair et* n_1 *impair.*

On note ces classes $\iota_{4\ell+1}(I_1, I_2)$ *pour* $k_1 < 2\ell + 1 \leq m$ *et* $\iota_{2m-1}(I_1, I_2)$ *si* m *est pair et* n_1 *impair.*

PROPOSITION 2.7

1) Les classes caractéristiques isotropes d'un couple de sous-fibrés isotropes orientés d'un fibré symplectique sont des obstructions à l'existence sur ces sous-fibrés de connexions compatibles.

2) Les classes caractéristiques isotropes d'un couple de sous-fibrés isotropes orientés d'un fibré symplectique sont des obstructions à la déformation de I_1*, à travers les sous-fibrés isotropes orientés de rang* n_1*, en un sous-fibré de* I_2*.*

3) Les classes caractéristiques isotropes d'un couple de sous-fibrés isotropes orientés d'un fibré symplectique sont des obstructions à la déformation de I_1*, à travers les sous-fibrés isotropes orientés de rang* n_1*, en un sous-fibré isotrope transverse à* $I_2^\perp$ *(ainsi qu'à* I_2 *si* I_2 *est lagrangien).*

Démonstration

1) **Si** $\overline{\omega}_1$ **et** $\overline{\omega}_2$ **induisent la même connexion sur** $P \to M$ **les classes isotropes sont nulles.**

2) **Cette propriété résulte du lemme 2.1.2.**

3) **On peut se ramener au cas où** I_1 **est transverse à** $I_2^\perp$**, alors si** V **est la projection de** I_1 **sur** I_2 **parallèlement à** $I_2^\perp$**,** I_1 **est un graphe dans** $V \oplus I_2^\perp$**, et l'élégante démonstration de [La] s'applique.**

3. Examen de quelques cas particuliers

3.1 L'un des sous-fibrés porte une connexion sans courbure

Si, par exemple I_2 **porte une telle connexion, alors l'homorphisme** u **de la section 2.3 se factorise à travers** W_1 **(voir diagramme 1.2.4). On retrouve la situation étudiée antérieurement [MN3] et [Ni1], dans un contexte plus général puisque les fibrés considérés sont de rang différents.**

3.2 L'un des sous-fibrés est lagrangien

C'est une situation intéressante, que l'on retrouve naturellement si la variété symplectique M est un fibré cotangent. Avec nos conventions précédentes sur les rangs des sous-fibrés, le lagrangien sera I_2. On peut alors faire tous les calculs à l'aide du modèle de Cartan. En effet au moyen des restrictions à $\mathfrak{so}(n_1) \oplus \mathfrak{u}(k_1)$ des polynômes de Chern de degrés impairs, on obtient des polynômes $\varphi_{i\ell}$ dans $I(\mathrm{SO}(n_1) \times \mathrm{U}(k_1))$ qui s'identifient à des produits de polynômes de Pontrjaguine, et qui sont tels que :

$$c_{2\ell+1}|_{\mathfrak{so}(n_1)\oplus\mathfrak{u}(k_1)} = \sum_{2i+1 \leq k} c_{2i+1}|_{\mathfrak{so}(n_1)\oplus\mathfrak{u}(k_1)} \varphi_{i\ell} \quad \text{où } k_1 < 2\ell + 1 \leq m\,.$$

On vérifie alors facilement que l'on peut prendre pour $\beta(x_{4\ell+1})$ le cocycle :

$$\beta(x_{4\ell+1}) = 1 \otimes 1 \otimes x_{4\ell+1} - \sum_{2i+1 \leq k_1} \varphi_{i\ell} \otimes 1 \otimes x_{4i+1}\,.$$

En effet, les restrictions à $\mathfrak{so}(n_2) = \mathfrak{so}(m)$ des polynômes de Chern de degré impair sont nulles.

3.3 Le cocycle $\beta(x_{4\ell+1})$ dans le cas général

L'auteur ne dispose pas d'algorithme permettant, comme dans les cas précédents, de calculer explicitement un cocycle de W. La situation semble un peu plus compliquée en ce sens que les polynômes de Chern d'ordre impair ne sont plus les seuls à intervenir comme le montrent les exemples suivants :

3.3.1 Exemple $m = 3$; $n_1 = n_2 = 2$

L'espace de Samelson a alors un seul générateur, x_5, et on peut prendre pour cocycle :

$$\beta(x_5) = 1 \otimes 1 \otimes x_5 + p_1 \otimes 1 \otimes x_1 - 1 \otimes \tilde{c}_1 \otimes x_3\,.$$

3.3.2 Exemple m arbitraire ; $k_1 = k_2 = 1$

L'étude de la restriction de $I(\mathrm{U}(n+1))$ à $I(\mathrm{SO}(n) \times \mathrm{U}(1))$ montre que pour tout $\ell > 0$ on a :

$$c_{2\ell}|_{\mathfrak{so}(n)\oplus\mathfrak{u}(1)} p_\ell = (-1)^\ell p_\ell\,, \quad c_{2\ell+1}|_{\mathfrak{so}(n)\oplus\mathfrak{u}(1)} = (-1)^\ell p_\ell \tilde{c}_1\,.$$

On obtient ainsi explicitement tous les cocycles pour $1 < 2\ell + 1 \leq n + 1$:

$$1 \otimes 1 \otimes x_{4\ell+1} + (-1)^{\ell+1} p_\ell \otimes 1 \otimes x_1 - 1 \otimes \widetilde{c}_1 \otimes x_{4\ell-1} \cdot$$

4. Classes isotropes et classes de Maslov

LEMME 4.1.— *Soient I_1 et I_2 deux sous-fibrés isotropes orientés d'un fibré symplectique $E \to M$ de* rang $2m$, *tels que* $\operatorname{rang}(I_1) \leq \operatorname{rang}(I_2)$. *Si I_2 est isotrope comme sous-fibré vectoriel d'un sous-fibré lagrangien orienté L_2 de $E \to M$, les classes isotropes du couple (I_1, I_2) et du couple (I_1, L_2) sont les mêmes.*

Démonstration.— La définition 2.6 montre que pour chaque couple ce sont les mêmes éléments de $\widehat{P}(W_1)$ qui sont utilisés; on peut prendre dans chaque cas le même cocycle pour appliquer 2.5. Si on prend pour I_2 et L_2 des connexions induisant la même connexion sur $P \to M$ (lemme 2.1.2), on obtient les mêmes formes $\varphi_{4\ell+1}$ pour chaque couple.

Ce point étant acquis, on peut maintenant utiliser les cocycles explicités en 3.2 qui ont pour expression :

$$\beta(x_{4\ell+1}) = 1 \otimes 1 \otimes x_{4\ell+1} - \sum_{2i+1 \leq k_1} \varphi_{i\ell} \otimes 1 \otimes x_{4i+1} ,$$

les classes isotropes du couple (I_1, I_2) sont alors les classes de cohomologie des formes $\phi_{4\ell+1}$:

$$\phi_{4\ell+1}(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2) = \Delta_{\omega_1\omega_2}(c_{2\ell+1}) - \sum_{2i+1 \leq k_1} \Delta_{\overline{\omega}_1} \varphi_{i\ell} \wedge \Delta_{\omega_1\omega_2}(c_{2i+1}) \cdot$$

Supposons de plus que I_1 est contenu dans un lagrangien L_1. En utilisant le lemme 2.1.2, on peut prendre une connexion $\overline{\omega}_1$ sur $Q_1 \to M$ et une connexion sur le fibré des repères orthonormés directs de L_1 induisant la même connexion ω_1 sur $P \to M$. Avec ce choix de connexions, chaque $\Delta_{\omega_1\omega_2}(c_{2i+1})$ est une forme fermée qui définit une classe de Maslov du couple (L_1, L_2). Ainsi, non seulement $\phi_{4\ell+1}(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2)$ est fermée, mais c'est *une somme de formes différentielles fermées.*

Si on désigne par $[\varphi_{i\ell}]$ la classe de cohomologie de $\varphi_{i\ell}$, qui est un produit de classes de Pontrjaguine de I_1, et par $\mathfrak{m}_{4i+1}(L_1, L_2)$ la classe de Maslov de degré $4_i + 1$ du couple (L_1, L_2) on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 4.2. — *Soient I_1 et I_2 deux sous-fibrés isotropes orientés d'un fibré symplectique $E \to M$ de* rang $2m$, *tels que* $\operatorname{rang}(I_1) \leq \operatorname{rang}(I_2)$. *Si I_1 et I_2 sont respectivement contenus dans deux sous-fibrés lagrangiens orientés L_1 et L_2 de $E \to M$, alors :*

1) *les classes caractéristiques isotropes du couple (I_1, I_2) ne dépendent que des classes de Maslov du couple (L_1, L_2) et des classes de Pontrjaguine de I_1 ;*

2) *leur expression est donnée par la formule :*

$$\iota_{4\ell+1}(I_1, I_2) = \mathfrak{m}_{4\ell+1}(L_1, L_2) - \sum_{2i+1 \leq k_1} [\varphi_{i\ell}] \wedge \mathfrak{m}_{4\ell+1}(L_1, L_2).$$

En d'autres termes, les informations sur les propriétés non intrinsèques de I_1 dans $E \to M$ relativement à I_2 sont contenues dans la manière dont sont immergés L_1 et L_2 dans $E \to M$ et I_1 dans L_1.

Remarque 4.3. — Prenons le cas de deux sous-fibrés isotropes orientés I_1 et I_2 de rang 2 dans un fibré symplectique de rang 6. On considère alors le cocycle $\beta(x_5) = 1 \otimes 1 \otimes x_5 + p_1 \otimes 1 \otimes x_1 - 1 \otimes \widetilde{c}_1 \otimes x_3$. Si maintenant on suppose que I_2 est contenu dans un lagrangien L_2, on peut aussi bien, comme nous venons de le faire, utiliser le cocycle obtenu directement de l'étude de la restriction de $I(\mathrm{U}(3))$ à $I(\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{U}(1))$. On a alors un autre cocycle qui ressemble au précédent, et qui est $1 \otimes 1 \otimes x_5 + p_1 \otimes 1 \otimes x_1$. On obtient une différence entre les deux qui peut paraître troublante. Sur les formes φ_5 correspondantes, cette différence se traduit par la forme différentielle $\Delta_{\overline{\omega}_2}(\widetilde{c}_1) \wedge \Delta_{\omega_1 \omega_2}(c_2)$. La forme différentielle $\Delta_{\overline{\omega}_2}(\widetilde{c}_1)$ représente la première (et seule) classe de Chern du fibré normal N à $I_2 \oplus JI_2$. Comme N contient un sous-fibré lagrangien (§ 2.1.3), cette forme est identiquement nulle si on prend une connexion du type décrit en 2.1.2. Il n'y a donc aucune contradiction.

L'observation précédente conduit au résultat suivant :

THÉORÈME 4.4. — *Soient I_1 et I_2 deux sous-fibrés isotropes orientés d'un fibré symplectique $E \to M$ de* rang $2m$, *tels que* $\operatorname{rang}(I_1) = \operatorname{rang}(I_2) = m - 1$. *Si I_1 et I_2 sont respectivement contenus dans deux lagrangiens L_1 et L_2, alors les classes isotropes du couple (I_1, I_2) sont égales aux classes de Maslov du couple (L_1, L_2) de degré strictement supérieur à* 1.

Démonstration.— Reprenons la démonstration du théorème 4.2 dans cette situation particulière. La forme différentielle $\phi_{4\ell+1}(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2)$ a pour expression (§ 3.3.2) :

$$\phi_{4\ell+1}(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2) = \\ = \Delta_{\omega_1\omega_2}(c_{2\ell+1}) + (-1)^{\ell+1}\Delta_{\overline{\omega}_1}p_\ell \wedge \Delta_{\omega_1\omega_2}(c_1) - \Delta_{\overline{\omega}_2}(\widetilde{c}_1) \wedge \Delta_{\omega_1\omega_2}(c_{2\ell}).$$

Dans une telle expression $\Delta_{\overline{\omega}_2}\widetilde{c}_1$ est nulle pour la connexion choisie, comme nous venons de le voir dans le paragraphe 4.3.

Par ailleurs, dans l'algèbre différentielle $W_1, p_\ell \otimes 1$ est le bord de $(-1)^\ell 1 \otimes x_{2\ell-1}$, ainsi $\Delta_{\overline{\omega}_1}p_\ell \wedge \Delta_{\omega_1\omega_2}(c_1)$ est le produit extérieur d'une forme exacte par une forme fermée, c'est donc une forme exacte, et $\phi_{4\ell+1}(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2)$ est cohomologue à $\Delta_{\omega_1\omega_2}(c_{2\ell+1})$.

Remarquons en passant que dans notre situation les classes de Pontrjaguine du fibré I_1 (et I_2) sont nulles.

5. Le rôle particulier de la classe de Maslov de degré maximal lorsque n_1 est impair

Nous avons vu que si n_1 est impair, $\Delta_{\omega_1\omega_2}(c_m)$ est une forme fermée (si m est lui-même impair, c'est φ_{2m-1}). On obtient alors le résultat suivant.

THÉORÈME 5.1.— *Soient I_1 et I_2 deux sous-fibrés isotropes orientés d'un fibré symplectique $E \to M$ de* rang $2m$, *tels que* $\text{rang}(I_1) \leq \text{rang}(I_2)$ *et* $\text{rang}(I_1)$ *impair. Alors la classe isotrope de degré maximzl $\iota_{2m-1}(I_1, I_2)$ est une obstruction à la déformation de I_1 et I_2, à travers les sous-fibrés orientés de $E \to M$ non-nécessairement isotropes, en deux sous-fibrés isotropes I'_1 et I'_2 tels que I'_1 soit transverse à ${I'_2}^{\perp}$.*

Ce théorème résulte du lemme suivant.

LEMME 5.2.— *Considérons l'inclusion j :* $\mathrm{U}(m) \to \mathrm{SO}(2(m))$ *correspondant à l'application de C dans* $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ *donnée par :*

$$a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Soit pf le plaffien dans $I\Big(\mathrm{SO}\big(2(m)\big)\Big)$ *défini par* $pf(X) = \sqrt{\det X}$ *pour* $X \in \mathfrak{so}(2m)$.

Alors la restriction à $\mathrm{U}(m)$ *du pfaffien est le polynôme de Chern de degré* m *dans* $I(\mathrm{U}(m))$.

Démonstration. — On peut se ramener à vérifier cette proposition sur les tores maximaux de chaque groupe [KN], j est alors l'application qui, à la matrice antihermitienne :

$$M = \operatorname{diag}(i\lambda_1, \ldots, i\lambda_m)$$

associe la matrice antisymétrique :

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_m \\ \lambda_m & 0 \end{pmatrix}\right)$$

dont le déterminant est $\lambda_1^2 \cdots \lambda_m^2$. Comme $(-1)^m c_m(iM) = \det(iM) = (-1)^m \lambda_1 \cdots \lambda_m$, on obtient le résultat annoncé.

5.3 Démonstration du théorème

Considérons I_2 et I_2 simplement comme des sous-fibrés réels du fibré réel $E \xrightarrow{\pi} M$ de rang $2m$. Du point de vue des fibrés des repères orthonormés que nous avons utilisés, cela revient à étendre le $\mathrm{U}(m)$ fibré principal $P \to M$ des repères orthonormés de $E \to M$ en un $\mathrm{SO}(2m)$ fibré principal, que nous noterons $P' \xrightarrow{\pi'} M$. La théorie développée dans [N2] s'applique, permettant de définir à partir du pfaffien une classe de cohomologie θ_{2m-1} de degré $2m-1$ invariante par déformation à travers les sous-fibrés de même rang, non-nécessairement isotropes. Étendons les connexions ω_1 et ω_2 en ω_1' et ω_2' à $P' \xrightarrow{\pi'} M$. On a alors avec des notations évidentes, compte tenu du lemme :

$$\Delta_{\omega_1' \omega_2'}(Pf) = \Delta_{\omega_1 \omega_2}(c_{n+k})$$

ou encore :

$$\theta_{2m-1} = \iota_{2m-1}\,,$$

d'où le théorème.

6. Exemples

Exemple 6.1

Si on veut construire, pour fixer les idées, des exemples de calcul de classes isotropes de sous-variétés isotropes, il faut déjà se placer en dimension 5 au-moins. Ceci étant, le choix semble à priori plus vaste que celui des sous-variétés lagrangiennes, car n'importe quelle sous-variété M d'une sous-variété lagrangienne Λ d'une variété symplectique V est une sous-variété isotrope de V. Mais les choses deviennent moins évidentes si on veut des classes isotropes non nulles.

Par exemple si L_2 est un champ de sous-espaces lagrangiens de V, pour avoir des classes isotropes $\iota\left(TM\,,\,L_2|_M\right)$ non nulles, il faut que les classes de Maslov $\mathfrak{m}\left(T\Lambda\,,\,L_2|_\Lambda\right)$ ne soient pas nulles.

Exemple 6.2

Prenons pour variété symplectique V le fibré cotangent T^*N d'une variété N. On dispose alors d'un champ L_2 de sous-espaces lagrangiens canonique. Soit Λ une sous-variété lagrangienne de V et S une sphère immergée dans Λ. On peut espérer avoir une classe isotrope relativement à $L_2|_S$ non nulle dans les cas suivants :

- la dimension de S est $4k+1$ et alors

$$\iota_{4k+1}\left(TS\,,\,L_2|_S\right) = \mathfrak{m}_{4k+1}\left(T\Lambda|_S\,,\,L_2|_S\right)\ ;$$

- la dimension de S est $4k-1$ mais avec N de dimension k.

6.3 Classes isotropes de l'immersion standard de $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$

Considérons l'immersion lagrangienne standard $j : \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n) \to \mathrm{S}(n,\mathbb{C})$ de la grassmannienne-lagrangienne dans l'espace $\mathrm{S}(n,\mathbb{C})$ des matrices complexes symétriques, induite par l'application $A \mapsto A^tA$ de $\mathrm{U}(n)$ dans $\mathrm{S}(n,\mathbb{C})$. $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$ est alors une sous-variété isotrope de $\mathrm{S}(n,\mathbb{C})$. Pour tout champ de sous-espaces lagrangiens L_2 de $\mathrm{S}(n,c)$ les classes isotropes de $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$ relativement à L_2 sont les restrictions des classes de Maslov de $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$ relativement à L_2, d'ordre supérieur à 1.

Si L_2 est un champ constant, le calcul montre que ces classes ne sont pas nulles.

6.4 Immersion isotrope standard de la grassmannienne usuelle

Désignons par $G(p,q)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension p de $\mathbb{R}^{p+q}$. Dans [BN] les auteurs définissent une immersion de $G(p,q)$ dans la grassmannienne-lagrangienne $\mathcal{L}(n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$, où $n = p+q$. Au moyen de l'immersion j du paragraphe précédent, on obtient ainsi $G(p,q)$ comme sous-variété isotrope de $\mathrm{S}(n,\mathbb{C})$. Soit L_2 un champ de sous-espaces lagrangiens de $\mathrm{S}(n,\mathbb{C})$ et intéressons-nous aux classes isotropes relativement à L_2. La cohomologie impaire de $G(p,q)$ est non nulle seulement si $p+q$ est pair et p impair. Dans ce cas, elle a un seul générateur en dimension $p+q-1$. Si $p+q$ est de la forme $p+q=4k+2$, alors la classe isotrope $\iota_{4k+1}\big(Tj\big(G(p,q)\big)\ ,\ L_2\big)$ est égale à la restriction de $\mathfrak{m}_{4k+1}\ \big(Tj\big(\mathcal{L}(p+q)\big)\ ,\ L_2\big)$, les autres étant nulles.

Si L_2 est un champ constant, le calcul montre que cette classe est nulle.

Pour $p=1$, on obtient comme cas particulier une immersion isotrope des projectifs réels.

Remerciements

L'auteur tient à remercier Claude Brada, Daniel Lehmann et Jean-Marie Morvan pour les fructueuses discussions qui ont permis ce travail.

Bibliographie

[BN] Brada (Cl.) et Niglio (L.) .— *Connected compact minimal Chen-type 1 submanifolds of the grassmannian manifolds*, Bul. Soc. Math. Belg. **44**, n° 3, Sér. B (1992), pp. 299-310.

[CS] Chern (S. S.) et Simons (J.) .— *Characteristic forms and geometric invariants*, Ann. of Math. **99** (1974), pp. 48-69,

[Fu] Fucks (D. R.) .— *Maslov Arnold characteristic classes*, Soviet. Math. Dokl. **9**, n° 1 (1968).

[GHV] Greub (W.), Halperin (S.) et Vanstone (R.) .— *Connection, curvature and cohomology*, Academic Press 1972.

[KT] Kamber (F. W.) et Tondeur (P.) .— *Foliated bundles and characteristic classes*, Lecture Notes in Mathematics Springer-Verlag 1975.

[KN] Kobayashi (S.) et Nomizu (N.) .— *Foundations of differential geometry*, Interscience Publishers 1969.

[La] Lalonde (F.) .— *Classes caracteristiques isotropes*, Math. Annalen. **285** (1989), pp. 343-351.

[Le] Lehmann (D.) .— *J-Homotopie dans les espaces de connexion et de classes exotiques de Chern-Simons*, C.R. Acad. Sciences Paris **275** A (1972), pp. 835-838.

[Mo1] MORVAN(J.-M.) .— *Classe de Maslov d'une sous-variété lagrangienne et minimalité*, C.R. Acad. Sci. Paris **292** (1981), pp. 633-636.

[Mo2] MORVAN (J.-M.) .— *Quelques invariants topologiques en géométrie symplectique*, Ann. Institut. H. Poincaré **38** n° 14 (1983), pp. 349-370.

[Mo3] MORVAN (J.-M.) .— *Classes caractéristiques des sous-variétés isotropes*, C.R. Acad. Sci. Paris **308** (1989), pp. 269-272.

[MN1] MORVAN (J.-M.) et NIGLIO (L.) .— *Classes caractéristiques des couples de sous-fibrés lagrangiens*, Ann. Inst. Fourier **37**, n° 2 (1986), pp. 193-209.

[MN2] MORVAN (J.-M) et NIGLIO (L.) .— *Une remarque sur la dernière classe de Maslov*, Séminaire Gaston Darboux, Montpellier (1988).

[MN3] MORVAN (J.-M.) et NIGLIO (L.) .— *Isotropic characteristic classes*, à paraître (Compositio Mathématica).

[Ni1] NIGLIO (L.) .— *Classes caractéristiques d'un couple de sous-fibrés isotropes*, C.R. Acad. Sci. Paris **318** (1991), pp. 859-963.

[Ni2] NIGLIO (L.) .— *Cohomologie des espaces homogènes et réduction de groupe structural dans les fibrés principaux*, C.R. Acad. Sci. Paris **314** (1992), pp. 927-930.

[Va] VAISMAN (I.) .— *Symplectic geometry and secondary characteristic classes*, Progress in Mathematics. Birkäuser 1991.