ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

SANDRA DELAUNAY

Grands degrés de transcendance pour la fonction exponentielle ; modification des hypothèses techniques dans la méthode de Diaz

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 5, nº 1 (1996), p. 57-68

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1996_6_5_1_57_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. V, n° 1, 1996

Grands degrés de transcendance pour la fonction exponentielle; modification des hypothèses techniques dans la méthode de Diaz(*)

SANDRA DELAUNAY(1)

RÉSUMÉ. — Soient $u_1, \ldots, u_n$ (resp. $v_1, \ldots, v_m$) des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Nous otenons ici, à partir des méthodes développées par Guy Diaz, de nouvelles minorations du degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ de la famille $\{e^{u_i v_j} \mid 1 \le i \le n\,,\ 1 \le j \le m\}$ sous de nouvelles hypothèses techniques.

ABSTRACT. — Let $u_1, \ldots, u_n$ (resp. $v_1, \ldots, v_m$) be complex numbers linearly independent over $\mathbb{Q}$. We obtain new bounds for the transcendence degree over $\mathbb{Q}$ of the family $\{e^{u_i v_j} \mid 1 \le i \le n\,,\ 1 \le j \le m\}$ under new technical hypothesis in Guy Diaz's methods.

1. Introduction et énoncé des résultats

Soient $u_1, \ldots, u_n$ (resp. $v_1, \ldots, v_m$) des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Notre but est d'obtenir des minorations du degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ de la famille $\{e^{u_i v_j} \mid 1 \le i \le n\,,\ 1 \le j \le m\}$ et, plus particulièrement, d'affaiblir les hypothèses indésirables qui apparaissent dans les démonstrations. En effet, toutes les méthodes permettant d'obtenir de grands degrés de transcendance nécessitent des hypothèses quantifiant l'indépendance linéaire des u_i $(1 \le i \le n)$ et des v_j $(1 \le j \le m)$, hypothèses qui ne sont pas nécessaires pour les degrés de transcendance 1 et 2. Les derniers résultats

(*) Reçu le 4 novembre 1993

(1) Université de Lille I, U.F.R. de Mathématiques, F-59655 Villeneuve d'Asq Cedex (France)

et les meilleurs actuellement sont ceux de Guy Diaz qui obtient en 1986 la minoration suivante

$$\deg\operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\{e^{u_i v_j} \mid 1 \le i \le n\,,\ 1 \le j \le m\} \ge \left[\frac{mn}{m+n}\right] .$$

À partir de ce travail de G. Diaz ([D1],[D2]) et en utilisant un critère pour les mesures d'indépendance algébrique dû à P. Philippon [P2] (voir aussi M. Ably [A]), nous allons montrer que l'on peut, ou bien dans certains cas, obtenir les mêmes minorations, mais en supprimant l'hypothèse technique portant sur une partie des u_i $(1 \le i \le n)$ ou des v_j $(1 \le j \le m)$, ou bien obtenir une meilleure minoration en remplaçant une partie de l'hypothèse technique par une hypothèse inverse. L'outil principal de ces démonstrations est le critère d'indépendance algébrique de P. Philippon [P1] qui consiste à utiliser une suite de familles de polynômes de taille contrôlée prenant des valeurs "petites" au point $\omega = (e^{u_1 v_1}, \dots, e^{u_n v_m})$ et sans zéro commun dans une boule centré en ω; ce dernier point se démontre à l'aide d'un lemme de zéros.

1.1 Notations et définitions

- $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n$, $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{C}^m$.
- Pour $\mu \in \mathbb{Z}^m$, $|\mu| = \max_{1 \le i \le m} |\mu_j|$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{Z}^n$, $\lambda \cdot u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$.
- Pour $\mu \in \mathbb{Z}^m$, $\mu \cdot v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_m$.
- Pour un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_d]$, on note $H(P)$ sa hauteur naïve, c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues de ses coefficients.
- Pour $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_d]$, on note $t(P)$ sa taille, c'est-à-dire $d^\circ P + \underline{h}(P)$, $\underline{h}$ désignant la hauteur logarithmique absolue non invariante telle qu'elle est définie dans [P1] ou [P2].
- Pour J un idéal pur de $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_d]$ et ω un point de $\mathbb{C}^d$, on note $|J(\omega)|$ ce qui est défini dans [P1] sous la notation $\|J\|_\omega$, on note également $T(J)$ la taille de l'idéal J (cf. également [N1], [N2] et [B1]).

1.2 Le théorème de Diaz

THÉORÈME ([D1]).— *Soient $u_1, \dots, u_n$ (resp. $v_1, \dots, v_m$) des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, on note $\omega = (e^{u_1 v_1}, \dots, e^{u_n v_m})$.*

On suppose que ces nombres vérifient les hypothèses "techniques" $\mathrm{HT}(n,m)$ suivantes :

a) il existe $X(u) > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}^n$, $\lambda \neq 0$, et tout $X > X(u)$ on ait :

$$|\lambda \cdot u| \geq \exp\bigl(-X^{mn/(2m+n)}\bigr) \quad \textit{dès que } |\lambda| \leq X\,;$$

b) il existe $a > 0$, $X(v) > 0$ tels que pour tout $\mu \in \mathbb{Z}^m$, $\mu \neq 0$, et tout $X > X(v)$ on ait :

$$|\mu \cdot v| \geq \max\Bigl(\exp\bigl(-aX \log X\bigr)\,;\, \exp\bigl(-X^{mn/(m+2n)}\bigr)\Bigr) \quad \textit{dès que } |\mu| \leq X\,;$$

Alors, dès que $mn > m + n$ on a :

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\omega) \geq \left[\frac{mn}{m+n}\right].$$

$[\cdot]$ désigne la partie entière.

Sa démonstration consiste à construire une suite de famille de polynômes satisfaisant les hypothèses nécessaires au critère de P. Philippon.

Pour tout entier X assez grand, il obtient une famille $Q_{X,1}, \ldots, Q_{X,r(X)}$ vérifiant pour $j = 1, \ldots, r(X)$:

- $t(Q_{X,j}) \leq c_1 X^{m+n}$,
- $\log \max\limits_{1 \leq j \leq r(X)} \bigl|Q_{X,j}(\omega)\bigr| \leq -c_2 X^{mn} \log X$,
- les polynômes $Q_{X,J}$ sont sans zéro commun dans la boule de centre ω et de rayon $\rho = \exp\bigl(-c_3 X^{mn} \log X\bigr)$.

La majoration de $\bigl|Q_{X,j}(\omega)\bigr|$ se fait par une extrapolation; si M et M_1 sont deux entiers vérifiant $M < M_1$, une fonction "petite" sur $E(M) = \bigl\{\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_m \mid |\mu| < M\bigr\}$ reste "petite" sur $E(M_1) = \bigl\{\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_m \mid |\mu| < M_1\bigr\}$, à condition de faire une hypothèse technique sur les v_j, $1 \leq j \leq m$.

C'est un lemme de zéros dû à P. Philippon [P3] qui permet de montrer que ces polynômes sont sans zéro commun au voisinage de ω; l'existence d'un zéro commun à la famille considérée entraîne celle d'un polynôme non identiquement nul s'annulant sur l'ensemble suivant :

$$\Gamma(M) = \left\{ \left(\prod_{j=1}^{m} e^{z_{1j}\mu_j}, \ldots, \prod_{j=1}^{m} e^{z_{nj}\mu_j} \right) \in \mathbb{C}^{*n} \;\middle|\; 0 \leq |\mu| < M \right\},$$

où M est un paramètre réel et $e^{z_{11}}, \ldots, e^{z_{nm}}$ un point de $\mathbb{C}^{*nm}$ “proche” de ω. Le lemme de zéros affirme alors qu'il existe un sous-groupe algébrique connexe G', du groupe multiplicatif $(\mathbf{G}_m)^n$, contenant “beaucoup” de points de $\Gamma(M)$. Ce qui implique l'existence de relations linéaires sur les z_{ij} qui vont contredire les hypothèses techniques faites pour cela sur $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, \ldots, v_m)$.

Ainsi dans la démonstration de Diaz, il apparaît des hypothèses techniques lors de deux étapes distinctes.

1.3 Minoration du degré de transcendance sous de nouvelles hypothèses. Énoncé du théorème

Nous noterons $\mathrm{HT}(n', m')$ l'hypothèse technique portant sur des familles de n' et m' nombres extraites de u et v respectivement.

THÉORÈME .— *Soient $u_1, \ldots, u_n$ (resp. $v_1, \ldots, v_m$) des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_m)$, $\omega = (e^{u_1 v_1}, \ldots, e^{u_n v_m})$. Soient m' et n' vérifiant $m' \leq m$ et $n' \leq n$. Sous l'hypothèse $\mathrm{HT}(n', m')$, on a, lorsque $m'n' > m' + n'$,*

$$\deg \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(\omega) \geq \left[\frac{m'n'}{m'+n'}\right] + 1$$

dans les deux cas suivants :

a) si

$$\left\{\frac{m'n'}{m'+n'}\right\} \geq \frac{m'n'}{m'+n'}\,\frac{m+n}{mn},$$

où $\{\ \}$ désigne la partie fractionnaire ;

b) (hypothèse technique “inverse”) s'il existe une infinité d'entiers N et une infinité de familles d'entiers $\left(a_{N,1}, \ldots, a_{N,n}\right)_{N \in \mathbb{N}}$ satisfaisant :

$$\left|a_{N,j}\right| \leq N \quad \textit{pour tout } j,\ 1 \leq j \leq n$$

et

$$\left|a_{N,1}u_1 + \cdots + a_{N,n}u_n\right| \leq \exp\left(-\phi(N)\log N\right)$$

où ϕ est une mesure d'indépendance algébrique de ω en dimension $k = \left[m'n'/(m'+n')\right] - 1$.

2. Les outils de la démonstration

2.1 Mesure d'indépendance algébrique

DÉFINITION .— *Soient $\omega \in \mathbb{C}^d$ et $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. On dira que ϕ est une mesure d'indépendance algébrique de ω en dimension k sur $\mathbb{Q}$ si, pour tout idéal pur J de dimension k de $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_d]$, on a*

$$\left|J(\omega)\right| \geq \exp\left(-\phi(T(J))\right) ,$$

où $T(J)$ désigne la taille de l'idéal J ([P1],[P2]).

2.2 Un critère pour les mesures ([A])

CRITÈRE .— *Soient $\omega \in \mathbb{C}^d$, $k \in \{0, \ldots, d-1\}$, $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et strictement croissante. On suppose qu'il existe $c_0 \geq 1$ et $N_0 > 0$ tels que, pour tout réel $N \geq N_0$, il existe un idéal $I_N = (Q_{N,1}; \ldots; Q_{N,m(N)})$ de $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_d]$ vérifiant les conditions suivantes :*

1) *l'ensemble des zéros de I_N dans la boule de $\mathbb{C}^d$ de centre ω et de rayon $\exp\left(-c_0 N^{k+1} U(N)\right)$ est vide,*
2) *pour tout j, $1 \leq j \leq m(N)$, $\left|Q_{N,j}(\omega)\right| \leq \exp\left(-N^{k+1} U(N)\right)$,*
3) *pour tout j, $1 \leq j \leq m(N)$, $t(Q_{N,j}) \leq N$.*

Alors, si V désigne la fonction inverse de U, il existe $c_1 = c_1(c_0, d, k)$ tel que la fonction définie par

$$\phi(T) = c_1 T\left(V(c_1 T)\right)^{k+1}$$

soit une mesure d'indépendance algébrique en dimension k de ω.

Application.— Si $u_1, \ldots, u_n$ (resp. $v_1, \ldots, v_m$) sont des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ vérifiant les hypothèses techniques du théorème de G. Diaz et si $mn > m+n$, alors, en appliquant ce critère, on obtient une mesure d'indépendance algébrique de $\omega = (e^{u_1 v_1}, \ldots, e^{u_n v_m})$ en dimension k pour $k \leq \left[mn/(m+n)\right] - 1$;

- si $mn/(m+n) = k+1$, la mesure est donnée par la fonction

$$\phi(T) = \exp\bigl(C(n,m)T\bigr)$$

- si $mn/(m+n) \neq k+1$, la mesure est donnée par la fonction

$$\phi(T) = C(m,n)T^{\alpha}$$

où $\alpha = mn/\bigl(mn - (m/n)(k+1)\bigr)$.

Remarquons que la mesure obtenue n'est bonne que lorsque

$$\frac{mn}{m+n} \neq k+1\,.$$

2.3 Le lemme principal

LEMME .— *Soient $\omega \in \mathbb{C}^d$ et $k \in \{0, \ldots, d-1\}$. On suppose :*

1) qu'il existe une mesure d'indépendance algébrique ϕ de ω en dimension k,

2) qu'il existe une constante $c = c(\omega, d) > 0$ et une fonction continue et strictement croissante $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $\lim U(N) = +\infty$ *quand N tend vers l'infini et telle que pour une infinité d'entiers N, il existe un polynôme $P_N \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_d]$ de taille $\geq N$, satisfaisant*

$$0 < \bigl|P_N(\omega)\bigr| \leq \exp\bigl(-c\phi(N)U(N)\bigr)\,.$$

Alors

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\omega) \geq k+2\,.$$

Démonstration.— L'existence d'une mesure d'indépendance algébrique de ω en dimension k nous assure que

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\omega) \geq k+1\,.$$

Si l'inégalité est stricte, il n'y a rien à démontrer; supposons donc $\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\omega) = k+1$.

Notons $\overline{\omega}$ le point $(1, \omega_1, \ldots, \omega_d)$ de $\mathbb{C}^{d+1}$. Il existe alors un idéal premier homogène $\mathcal{I}$ de $\mathbb{Z}[X_0, X_1, \ldots, X_d]$ de dimension $k+1$ tel que $Q(\overline{\omega}) = 0$ pour tout $Q \in \mathcal{I}$.

Soit A un entier qui sera choisi suffisamment grand; par l'hypothèse 2), il existe $N > A$ et un polynôme P_N de taille $\leq N$ tel que $P_N(\overline{\omega}) \neq 0$. Considérons ${}^hP_N$ l'homogénéisé de P_N. L'idéal J_N engendré par $\mathcal{I}$ et ${}^hP_N$ est donc de dimension k. D'après le lemme 11 de [N3], il existe un idéal homogène pur $\mathcal{I}_N$ de $\mathbb{Z}[X_0, X_1, \ldots, X_d]$, de dimension k, des constantes positives c_1 et c_2 dépendant de ω tels que

$$T(\mathcal{I}_N) \leq c_1 N \quad \text{et} \quad \log\left|\mathcal{I}_N(\overline{\omega})\right| \leq \log\left|{}^hP_N(\overline{\omega})\right| + c_2 N\,.$$

D'où l'on déduit de l'inégalité de l'hypothèse 2), l'existence d'une constante $c_3(\omega) > 0$ telle que

$$\log\left|\mathcal{I}_N(\overline{\omega})\right| \leq -c_3\phi(N)U(N)\,.$$

D'autre part, de la mesure de l'hypothèse 1), on déduit l'existence d'une constante $c_4(\omega) > 0$ telle que

$$\log\left|\mathcal{I}_N(\overline{\omega})\right| \geq -c_4\phi(N)\,.$$

Or, ces inégalités sont contradictoires quand N tend vers l'infini, ce qui démontre le lemme.

Remarque.— Dans [N4], Y. Nesterenko utilise le même type de raisonnement pour obtenir, à partir d'une mesure d'indépendance algébrique en dimension $r-1$, un degré de transcendance supérieur ou égal à $r+1$. Dans ce même texte, il obtient les mêmes minorations que Diaz, mais avec des hypothèses techniques plus fortes.

3. Démonstration du théorème et corollaires

Démonstration.— On distingue les cas 1) et 2).

Premier cas.— Compte tenu de l'hypothèse $\mathrm{HT}(n', m')$, on a par la construction de Diaz des polynômes de $\mathbb{Z}[Y_{1,1}, \ldots, Y_{n',m'}]$ (donc aussi dans $\mathbb{Z}[Y_{1,1}, \ldots, Y_{n,m}]$) qui vérifient les conditions du critère énoncé dans le pagraphe 2 avec $k+1 = \left[m'n'/(m'+n')\right]$ et, par conséquent, fournissent une mesure d'indépendance algébrique de ω en dimension $k = \big[m'n'/(m' + n')\big] - 1$. Cette mesure est donnée par la fonction $\phi(T) = c_1 T^\alpha$, avec

$$\alpha = \frac{m'n'}{m'n' - (m'+n')\big[m'n'/(m'+n')\big]} \quad \text{et} \quad c_1 = c_1(m', n')\,.$$

Considérons les polynômes de $\mathbb{Z}[Y_{1,1}, \ldots, Y_{n,m}]$ construits par G. Diaz pour le point ω. On ne prend plus en compte tous les polynômes construits, mais uniquement ceux qui vérifient $Q_{\mu,j}(\omega) = 0$ pour $|\mu| < M$ ($M < M_1$), il n'est plus alors nécessaire d'avoir l'hypothèse technique sur v lors de l'extrapolation; en effet, la fonction que l'on construit dans ce cas est nulle sur $E(M)$ et donc "petite" sur $E(M_1)$ sans condition sur la répartition des points. De plus, le lemme de zéros permet de montrer, là encore sans hypothèse technique, mais en utilisant seulement l'indépendance linéaire des u_i, $1 \le i \le n$, et des v_j, $1 \le j \le m$, qu'il existe un indice $\mu \in \mathbb{Z}^m$, $|\mu| < M_1$, tel que $Q_{\mu,j}(\omega) \neq 0$. Quitte à réindexer nos polynômes, on obtient ainsi une suite $(Q_N)_{N \ge N_0} \in \mathbb{Q}[X_{1,1}, \ldots, X_{n,m}]$, et une constante $c = c(u, v, m, n)$ vérifiant

$$t(Q_N) \le N \quad \text{et} \quad \log\big|Q_N(\omega)\big| \le -cN^{mn/m+n} \log N\,,$$

La condition

$$\left\{\frac{m'n'}{m'+n'}\right\} \ge \frac{m'n'}{m'+n'}\,\frac{m+n}{mn}$$

implique alors

$$\log\big|Q_N(\omega)\big| \le -cN^\alpha \log N\,,$$

et le lemme précédent nous donne la minoration attendue.

Deuxième cas.— On a toujours une mesure d'indépendance algébrique ϕ de ω en dimension $k = \big[m'n'/(m'+n')\big] - 1$. L'hypothèse "inverse" faite sur u va nous fournir les polynômes P_N permettant d'appliquer le lemme du paragraphe précédent. En effet, on suppose que pour N suffisamment grand il existe des entiers $a_{N,1}, \ldots, a_{N,n}$ satisfaisant

$$\big|a_{N,i}\big| \le N \quad \text{et} \quad \big|a_{N,1}u_1 + \cdots + a_{N,n}u_n\big| \le \exp\big(-\phi(N)\log N\big)\,.$$

Soit E_N^+ (resp. E_N^-) l'ensemble des $a_{N,i}$, $1 \le i \le n$, positifs (resp. négatifs).

Pour j, $1 \leq j \leq m$, considérons les polynômes suivants :

$$P_{N,j}(\omega) = \prod_{i \in E_N^+} e^{a_{N,i} u_i v_j} - \prod_{i \in E_N^-} e^{-a_{N,i} u_i v_j} .$$

Il existe j, $1 \leq j \leq m$, tel que $P_{N,j}(\omega) \neq 0$; en effet, si pour $1 \leq j_1 \neq j_2 \leq m$, on a

$$P_{N,j_1}(\omega) = P_{N,j_2}(\omega) = 0$$

alors, il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\sum_{r=1}^{n} a_{N,r} u_r v_{j_1} = 2ik_1\pi \quad \text{et} \quad \sum_{r=1}^{n} a_{N,r} u_r v_{j_2} = 2ik_2\pi ,$$

d'où

$$(k_1 v_{j_2} - k_2 v_{j_1}) \sum_{r=1}^{n} a_{N,r} u_r = 0 ,$$

ce qui contredit l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ des u_r, $1 \leq r \leq n$, ou des v_j, $1 \leq j \leq m$.

Quitte à réindexer les polynômes $P_{N,j}$, on peut supposer par exemple $P_{N,1}(\omega) \neq 0$ et c'est alors, avec les polynômes $P_N = P_{N,1}$, que l'on applique le lemme qui permet de conclure. En effet, on a

$$P_{N,1}(\omega) = \prod_{i \in E_N^-} e^{-a_{N,i} u_i v_1} \left(\prod_{i=1}^{n} e^{a_{N,i} u_i v_1} - 1 \right)$$

d'où l'existence de constantes $c_1(u, v, m, n) > 0$ et $c_2(u, v, m, n) > 0$ telles que

$$\left| P_{N,1}(\omega) \right| \leq c_1 \left| \sum_{i=1}^{n} a_{N,i} u_i v_1 \right| \exp \left(\left| \sum_{i \in E_N^-} a_{N,i} u_i v_1 \right| \right) ,$$

et donc

$$0 < \left| P_{N,1}(\omega) \right| \leq \exp\bigl(-c_2 \phi(N) \log N\bigr) .$$

Remarque.— Lorsque $m'n'/(m' + n')$ est entier, l'hypothèse technique "inverse" que l'on est amené à faire est extrêmement contraignante compte tenu de la médiocre mesure dont on dispose ; cependant, même dans le cas où $m'n'/(m'+n')$ n'est pas entier, il y a encore un “trou” entre l'hypothèse technique usuelle et cette hypothèse technique “inverse”, le “trou” étant d'autant plus important que la différence $m'n'/(m'+n') - [m'n'/(m'+n')]$ est petite. Ajoutons que la condition sur m, n, m' et n' pour que l'hypothèse “inverse” soit vraiment le contraire de l'hypothèse usuelle est contenue dans la condition 1) de la proposition, cas pour lequel aucune hypothèse supplémentaire n'est nécessaire. Notons que, lorsque $[m'n'/(m'+n')] = [mn/(m+n)]$, la minoration du degré de transcendance que l'on obtient avec cette hypothèse “inverse” est meilleure que celle obtenue avec l'hypothèse technique usuelle, $[mn/(m+n)]+1$ au lieu de $[mn/(m+n)]$.

COROLLAIRE 1.— *Soit n un entier impair. Soient $u_1, \dots u_n$ (resp. $v_1, \dots, v_{n-1}$) des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Sous* HT$(n, n-2)$, *on a*

$$\begin{aligned} \deg \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}\{e^{u_i v_j} \mid 1 \le i \le n\,,\ 1 \le j \le n-1\} &\ge \left[\frac{n(n-2)}{2n-2}\right] + 1 = \\ &= \left[\frac{n(n-1)}{2n-1}\right]. \end{aligned}$$

Démonstration.— On applique le théorème précédent avec $m = n-1$, $n' = n$ et $m' = n-2$. On a

$$\left[\frac{n(n-2)}{2n-2}\right] = \frac{n-3}{2}\,,$$

il suffit alors de vérifier que

$$\frac{n(n-1)}{2n-1} \ge \frac{n(n-2)}{n(n-2)-(n-1)(n-3)}\,;$$

or, cette inégalité est équivalente à $3 \ge 2$.

Remarque.— On obtient ici la même minoration que Diaz, mais l'hypothèse technique porte sur un nombre de moins.

COROLLAIRE 2.— *Soit n un entier impair. Soient $u_1, \dots u_{2n}$ (resp. $v_1, \dots, v_{2n}$) des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Sous* HT(n, n), *on a*

$$\deg \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}\{e^{u_i v_j} \mid 1 \le i \le 2n\,,\ 1 \le j \le 2n\} \ge \frac{n+1}{2}\,.$$

Démonstration.— On applique le même théorème en vérifiant que

$$\frac{4n^2}{4n} \geq \frac{n^2}{n^2 - n(n-1)}$$

et cette inégalité est équivalente à $n \geq n$.

Remarque.— Sous $\mathrm{HT}(n,n)$, on obtient un degré de transcendance $\geq (n+1)/2$ là où Diaz obtenait $(n-1)/2$; il nous a fallu pour cela prendre deux fois plus de u_i et de v_j, mais les hypothèses techniques ne portent que sur la moitié d'entre eux.

COROLLAIRE 3.— *Soient $u_1, \dots u_n$ (resp. $v_1, \dots, v_m$) des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Si $m \geq n(n-1)^2$, alors, sous* $\mathrm{HT}(m, n-1)$, *on a*

$$\begin{aligned} \deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\{e^{u_i v_j} \mid 1 \leq i \leq n\,,\ 1 \leq j \leq m\} &\geq \left[\frac{m(n-1)}{m+n-1}\right] + 1 \\ &\geq \left[\frac{mn}{m+n}\right]. \end{aligned}$$

Démonstration.— On utilise le théorème avec $n' = n - 1$. Notons que dans ce cas $\left[m(n-1)/(m+n-1)\right] = n-2$, on obtient donc un degré de transcendance $\geq n-1$.

Références

[A] ABLY (M.) .— *Résultats quantitatifs d'indépendance algébrique pour les groupes algébriques*, J. Number Theory (à paraître).

[B] BROWNAWELL (W. D.) .— *Applications of Cayley-Chow forms*, dans "Journées arithmétiques, ULM 1987", Lecture notes, Springer **1380** (1989), pp. 1-18.

[D1] DIAZ (G.) .— *Grands degrés de transcendance pour des familles d'exponentielles*, dans "Séminaire d'arithmétique Saint-Étienne 1986-87", Publ. Math. Univ. Saint-Étienne, 30 p.

[D2] DIAZ (G.) .— *Grands degrés de transcendance pour des familles d'exponentielles*, J. of Number Theory **31** (1989), pp. 1-23.

[N1] NESTERENKO (Y.) .— *Bounds for the characteristic function of a prime ideal*, Math, Sbornik **123**, n° 1 (1984), pp. 11-34.

[N2] NESTERENKO (Y.) .— *On algebraic independence of algebraic powers of algebraic numbers*, Math. Sbornik **123**, n° 4 (1984), pp. 435-459; dans "Approximations diophantiennes et nombres transcendants" D. Bertrand et M. Waldschmidt (éd.), Birkaüser 1983, pp. 199-220.

[N3] NESTERENKO (Y.) .— *On a measure of the algebraic independence of the values of some functions*, Math. Sbornik **128**, n° 4 (1985), pp. 545-568.

[N4] NESTERENKO (Y.) .— *Transcendence degree of some fields generated by values of exponential function*, Math. Notes **46**, n° 3-4 (1989), pp. 706-712.

[P1] PHILIPPON (P.) .— *Critères pour l'indépendance algébrique*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **64** (1985), pp. 5-52.

[P2] PHILIPPON (P.) .— *Sur les mesures d'indépendance algébrique*, dans "Séminaire de théorie des nombres de Paris 1983-84", C. Golstein (éd.), Prog. Math. Birkaüser, **59** (1985), pp. 219-233.

[P3] PHILIPPON (P.) .— *Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bull. Soc. Math. France **114**, n° 3 (1986), pp. 355-383.