ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

SANDRA DELAUNAY

Grands degrés de transcendance pour la fonction exponentielle ; modification des hypothèses techniques dans la méthode de Brownawell

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 5, nº 1 (1996), p. 69-104

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1996_6_5_1_69_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. V, n° 1, 1996

Grands degrés de transcendance pour la fonction exponentielle; modification des hypothèses techniques dans la methode de Brownawell[(*)]

SANDRA DELAUNAY[(1)]

RÉSUMÉ. — Soient $u_1, \ldots, u_n$ (resp. $v_1, \ldots, v_m$) des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Nous obtenons ici, à partir des méthodes développées par Dale Brownawell, de nouvelles minorations du degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ de la famille $\left\{e^{u_i v_j} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\right\}$ sous de nouvelles hypothèses techniques, et un point de vue plus géométrique.

ABSTRACT. — Let $u_1, \ldots, u_n$ (resp. $v_1, \ldots, v_m$) be complex numbers linearly independent over $\mathbb{Q}$. We obtain new bounds for the transcendence degree over $\mathbb{Q}$ of the family $\left\{e^{u_i v_j} \mid 1 \leq i \leq n\,,\ 1 \leq j \leq m\right\}$ under new technical hypothesis in Dale Brownawell's methods, and a more geometrical point of view.

1. Introduction et énoncés des résultats

Soient $u_1, \ldots, u_n$ (resp. $v_1, \ldots, v_m$) des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$; nous nous proposons de minorer le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ de la famille $\left\{e^{u_i v_j} \mid 1 \leq i \leq n\,,\ 1 \leq j \leq m\right\}$. C'est une méthode due à D. Brownawell que nous utiliserons ici, dont l'outil principal est une généralisation de l'inégalité de Liouville proposée comme alternative au critère d'indépendance algébrique de P. Philippon. Comme dans toutes les démonstrations connues à ce jour, des hypothèses techniques quantifiant l'indépendance linéaire des u_i $(1 \leq i \leq n)$ et des v_j $(1 \leq j \leq m)$ sont nécessaires pour obtenir des degrés de transcendance strictement supérieurs à 2.

(*) Reçu le 9 novembre 1993

(1) Université de Lille I, U.F.R. de Mathématiques, F-59655 Villeneuve d'Asq Cedex (France)

Ce sont ces hypothèses que nous allons modifier en ajoutant une hypothèse "inverse", c'est-à-dire en supposant les u_i $(1 \leq i \leq n)$ "presque" linéairement dépendants sur $\mathbb{Z}$, nous obtenons ainsi de nouveaux résultats.

1.1 Notations et définitions

- $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^n$, $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{C}^m$.
- Pour $\mu \in \mathbb{Z}^m$, $|\mu| = \max_{1 \leq i \leq m} |\mu_j|$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{Z}^n$, $\lambda \cdot u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$.
- Pour $\mu \in \mathbb{Z}^m$, $\mu \cdot v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_m$.
- Pour un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_d]$, on note $H(P)$ sa hauteur naïve, c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues de ses coefficients.
- Pour $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_d]$, on note $t(P)$ sa taille, c'est-à-dire $d^\circ P + \underline{h}(P)$, $\underline{h}$ désignant la hauteur logarithmique absolue non invariante telle qu'elle est définie dans [P2] ou [P3]. Mais dans la mesure où nous ne considérons que les polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$, on a l'inégalité suivante
$$\underline{h}(P) \leq \log H(P) + d \log(d^\circ P)$$
et donc
$$t(P) \leq \left(1 + \frac{d}{2}\right) d^\circ P + \log H(P).$$
- Pour J un idéal pur de $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_d]$, on note $T(J)$ la taille de l'idéal J telle qu'elle est définie dans [P1] et si ω est un point de $\mathbb{C}^d$, on note $|J(\omega)|$ ce qui est défini dans [P2] sous la notation $\|J\|_\omega$ (cf. également [N1], [N2], [B1]).

Nous rappelons brièvement ici les définitions suivantes [PW].

Soit G' un sous-groupe algébrique connnexe de $(\mathbf{G}_m)^n$, de dimension $n' = n - r$, défini par des équations de degré $\leq D$.

Il existe des éléments $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)}$ de $\mathbb{Z}^n$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$ tels que G' soit défini par les équations
$$\prod_{i=1}^{n} X_i^{\lambda_i^{(t)}} = 1, \quad 1 \leq t \leq r,$$
et si $|\lambda^{(1)}| \leq |\lambda^{(2)}| \leq \ldots \leq |\lambda^{(r)}|$, on a
$$|\lambda^{(1)}| \leq n^{3/2} D \quad \text{et} \quad |\lambda^{(1)}| \cdot |\lambda^{(2)}| \leq n^3 D^2 \quad \text{si } r \geq 2.$$

À G' correspond le sous-espace vectoriel L', rationnel sur $\mathbb{Q}$, de dimension n', défini par les équations

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(t)} X_i = 0\,, \quad 1 \le t \le r\,.$$

On désignera par le même symbole Λ, la matrice $(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)})$ et le sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ engendré par les vecteurs qui la composent. Ce sous-groupe s'identifie au sous-groupe de $\mathrm{Hom}\big((\mathbf{G}_m)^n, \mathbf{G}_m\big)$ des caractères qui prennent la valeur 1 sur G'.

On définit $H(\Lambda; X_1, \ldots, X_n)$ de la manière suivante : notons $\phi_{r,n}$ l'ensemble de toutes les suites croissantes de r éléments de $\{1, \ldots, n\}$; pour θ dans $\phi_{r,n}$, on note Λ_θ le mineur de Λ dont les colonnes sont indexées par θ, on a alors

$$H(\Lambda; X_1, \ldots, X_n) = (n-r)! \sum_{\theta \in \phi_{r,n}} \big|\det \Lambda_\theta\big| \prod_{i \notin \theta} X_i\,.$$

Ainsi, on note $H(\Lambda; 1, \ldots, 1) = H(\Lambda)$, ce qui représente le “volume” du réseau Λ et $\sigma(\Lambda)$ le plus grand de ses minimums successifs. On définira la hauteur du sous-espace vectoriel L' par $H(L') = H(L' \cap \mathbb{Z}^n) = H(\Lambda)$.

On a

$$H(G'; X_1, \ldots, X_n) = H(\Lambda; X_1, \ldots, X_n)$$

où, dans le cas d'un sous-groupe, la fonction H est celle qui apparaît dans les lemmes de zéros de Philippon ; $H(G'; 1, \ldots, 1)$ est le “degré” de G'.

Si L est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$, et u un point de $\mathbb{C}^n$, on définit la distance de u à L par

$$\mathrm{dist}(u, L) = \min\big(1\,, \min\{|u - x| \mid x \in L\}\big)\,.$$

1.2 Les théorèmes de Brownawell

THÉORÈME [B1].— *Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ de dimension d vérifiant $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$. Notons δ le degré de $\mathfrak{p}$ et σ sa taille.*

Soient $Q_1, \ldots, Q_k$ *des polynômes de* $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ *vérifiant* $\deg Q_i \leq D$ *et* $t(Q_i) \leq T$. *Si* ω *est un point de* $\mathbb{C}^n$ *et que* $\mathfrak{p}$, $Q_1, \ldots, Q_k$ *sont sans zéro commun dans la boule de centre* ω *et de rayon* $\rho \leq 1$ *alors on a*

$$\log\max\left\{\|\mathfrak{p}\|_\omega,\ |Q_i(\omega)|\,,\ 1 \leq i \leq k\right\} \geq$$
$$\geq -cD^{d+1}\sigma - c\delta TD^d + c\delta D^d \log\left(\frac{\rho}{|\omega|}\right),$$

où $c = 11(n+1)^5$ *et* $|\omega| = \max\{1,\ |\omega_i|\,,\ 1 \leq i \leq n\}$.

Démonstration. — Voir [B1], [B2] et pour plus de détails [B3].

C'est cette inégalité qui permet à Brownawell d'obtenir le résultat suivant.

THÉORÈME [B2]. — *Soient* $u_1, \ldots, u_n$ *(resp.* $v_1, \ldots, v_m$*) des nombres complexes linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$ *et notons*

$$\omega = \left(e^{u_i v_j}\right)_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq m}.$$

Soit $\eta < 1/2$, *on suppose que pour une infinité de* N *les hypothèses suivantes (HTB) sont satisfaites*

$$\left|a_1u_1 + \cdots + a_nu_n\right| \geq \exp(-N^\eta)\,, \quad \textit{pour tout } a \in \mathbb{Z}^n,\ |a| \leq N$$

et

$$\left|b_1u_1 + \cdots + b_mu_m\right| \geq \exp(-N^\eta)\,, \quad \textit{pour tout } b \in \mathbb{Z}^m,\ |b| \leq N\,.$$

Alors, si $mn > m + n$, *on a*

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\omega) \geq \frac{mn}{m+n} - 1\,.$$

Pour appliquer l'inégalité énoncée ci-dessus, il construit, par la méthode dite des "fausses variables", une fonction auxiliaire qui fournit une famille de polynômes "petits" en ω et dont on contrôle le degré et la hauteur. C'est un lemme de zéros dû à P. Philippon [P1] qui permet de montrer que ces polynômes sont sans zéro commun au voisinage de ω ; l'existence d'un zéro commun à la famille considérée entraîne celle d'un polynôme non identiquement nul s'annulant sur l'ensemble suivant

$$\Gamma(M) = \left\{\left(\prod_{j=1}^m e^{z_{1j}\mu_j}, \ldots, \prod_{j=1}^m e^{z_{nj}\mu_j}\right) \in \mathbb{C}^{*n} \mid 0 \leq |\mu| < M\right\},$$

où M est un paramètre réel et $e^{z_{11}}, \ldots, e^{z_{nm}}$ un point de $\mathbb{C}^{*nm}$ "proche" de ω. Le lemme de zéros affirme alors qu'il existe un sous-groupe algébrique connexe G', du groupe multiplicatif $(\mathbf{G}_m)^n$, contenant "beaucoup" de points de $\Gamma(M)$. Ce qui implique l'existence de relations linéaires sur les z_{ij} qui vont contredire les hypothèses techniques faites pour cela sur $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, \ldots, v_m)$. C'est en utilisant ce "mauvais sous-groupe" pour construire notre fonction auxiliaire que nous démontrons les théorèmes suivants.

1.3 Énoncés des résultats

THÉORÈME 1.— *Soient $u_1, \ldots, u_n$ (resp. $v_1, \ldots, v_m$) des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et $\omega = (e^{u_1 v_1}, \ldots, e^{u_n v_m})$.*

On suppose que pour tout $M > 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{Z}^n$, $|\lambda| \geq M$, vérifiant

$$\left|\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n\right| < \exp\left(-|\lambda|^n\right)$$

et tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, $|\alpha| \leq |\lambda|$, avec α et λ linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, on ait

$$\left|\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n\right| \geq \exp\left(-|\lambda|^{(n+m)/m}\right).$$

D'autre part, soit $\eta < 1/2$; on suppose qu'il existe $X(v)$ tel que pour tout $X \geq X(v)$ et pour tout $\mu \in \mathbb{Z}^m$ on ait

$$\left|\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_n\right| \geq \exp\left(-X^\eta\right)$$

dès que $|\mu| \leq X$. Alors, si $nm > n + m$, on a

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\omega) \geq \frac{mn}{n+m-1} - 1.$$

Remarque.— $mn/(m+n-1) > mn/(m+n)$, ainsi, dans certains cas, par exemple lorsque $mn/(m+n)$ est entier, notre hypothèse technique "inverse" améliore de 1 le résultat de Brownawell (corol. 1 et 2 du théorème 1, sect. 3). Avec des hypothèses techniques "classiques" (mesure d'indépendance linéaire) la plus fine minoration du degré de transcendance est à ce jour celle de G. Diaz qui obtient un degré $> \left[mn/(m+n)\right]$, c'est-à-dire un de plus que Brownawell lorsque $mn/(m+n)$ est entier. Cependant ses hypothèses sont plus contraignantes, car elles sont nécessaires pour toutes les valeurs de N et non plus pour une infinité d'entre elles. L'outil principal de Diaz est le critère d'indépendance algébrique de Philippon.

Notre résultat permet d'obtenir la minoration de Diaz avec des hypothèses analogues à celle de Brownawell, mais, en ajoutant une hypothèse inverse. De plus, une formulation géométrique permet de le généraliser et d'obtenir ce deuxième théorème.

THÉORÈME 2.— *Soient $u_1, \ldots, u_n$ (resp. $v_1, \ldots, v_m$) des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et $\omega = (e^{u_1 v_1}, \ldots, e^{u_n v_m})$.*

On suppose qu'il existe un entier $n' \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que, pour tout $M > 0$, il existe un sous-espace vectoriel L de $\mathbb{C}^n$, de dimension n', rationnel sur $\mathbb{Q}$, vérifiant $H(L) \geq M$, tel que

$$\mathrm{dist}(u, L) < \exp\bigl(-H(L)^{n'+1}\bigr)$$

et que, pour tout sous-espace vectoriel L' de L, $L' \neq L$ rationnel sur $\mathbb{Q}$, de dimension $n'-1$ et tel que $H(L')/H(L)^2$ soit borné, on ait

$$\mathrm{dist}(u, L'_N) \geq \exp\bigl(-H(L)^{(n'+m)/m}\bigr) .$$

D'autre part, soit $\eta < 1/2$; on suppose qu'il existe $X(v)$ tel que pour tout $X \geq X(v)$ et pour tout $u \in \mathbb{Z}^m$ on ait

$$\bigl|\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_m\bigr| \geq \exp(-X^\eta)$$

dès que $|\mu| \leq X$. Alors si $m + n < mn$, on a

$$\deg \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(\omega) \geq \frac{(n'+1)m}{n'+m} - 1 .$$

2. Préliminaires

2.1 Construction d'une fonction auxiliaire par la méthode des fausses variables

Soient m et n deux entiers, $m \geq 2$, $n \geq 2$, $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_m$ des nombres complexes, les v_j $(1 \leq j \leq m)$ sont supposés linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, et $\omega = \bigl(e^{u_i v_j}\bigr)_{1 \leq j-i \leq n,\, 1 \leq j \leq m}$. Notre but est de construire une famille de polynômes de hauteur et de degré contrôlés qui soient "petits" en ω.

Fixons p un entier positif, que nous choisirons suffisamment grand par rapport à m et n. Soient D et S deux paramètres entiers positifs. Dans toute cette partie, les constantes notées c_1, c_2, c_3 ne dépendent que de m, n, u, v, $|\omega|$ et p.

Nous allons construire un polynôme $P \in \mathbb{Z}[Z_{1,1}, \ldots, Z_{n,p}]$ de degrés partiels majorés par D tel que la fonction F définie par

$$F(z_1, \ldots, z_p) = P\big(e^{u_1 z_1}, \ldots, e^{u_n z_p}\big)$$

s'annule sur l'ensemble $\Sigma(S)$, où

$$\Sigma(S) = \big\{z_s = (s_{1,1}v_1 + \cdots + s_{1,m}v_m, \ldots, s_{p,1}v_1 + \cdots + s_{p,m}v_m) \mid \\ \mid s_{k,j} \in \mathbb{Z}\,,\ 0 \leq s_{k,j} < S\big\}\,.$$

Pour $s \in \mathbb{Z}^{mp}$, on définit des polynômes $Q_s \in \mathbb{Z}[X_{1,1}, \ldots, X_{n,m}]$ par

$$Q_s(\omega) = F(z_s)\,.$$

Si

$$P(Z) = \sum_{|\lambda|<D} p_\lambda \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{p} Z_{ik}^{\lambda_{i,k}}\,,$$

où $|\lambda| = \max|\lambda_{i,k}|$, on a

$$F(z_s) = \sum_{|\lambda|<D} p_\lambda \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{p} e^{u_i v_j \lambda_{i,k} s_{k,j}}\,,$$

ou encore

$$F(z_s) = \sum_{|\mu|<pDS} q_{s,\mu} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} e^{u_i v_j \mu_{i,j}}$$

et

$$q_{s,\mu} = \sum_{|\lambda|<D} a_\lambda p_\lambda$$

avec $a_\lambda = 1$ si $\mu_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_{i,k} s_{k,j}$ et 0 sinon.

On résout alors le système suivant : $q_{s,\mu} = 0$ pour tout $s \in \mathbb{Z}^{mp}$, $|s| < S$, et pour tout $\mu \in \mathbb{Z}^{mn}$, $|\mu| < pDS$. C'est un système de $(pDS)^{mn} S^{mp}$ équations en les D^{np} inconnues p_λ.

Ainsi sous la condition

$$D^{np} \geq 2(pDS)^{mn} S^{mp} \tag{1}$$

condition qui s'écrit encore

$$D^n \geq \left(2p^{mn}\right)^{1/(p-m)} S^{m(n+p)/(p-m)}, \tag{1bis}$$

on a par un lemme de Siegel [W1] l'existence d'une solution

$$\left\{p_\lambda \in \mathbb{Z} \mid |\lambda| < D\right\}$$

vérifiant

$$|p_\lambda| \leq \sqrt{2} D^{np}.$$

Soit S_1 un nouveau paramètre satisfaisant la condition

$$S_1 > S > 1. \tag{2}$$

La fonction F définie précédemment ayant été construite nulle sur $\Sigma(S)$, nous pouvons montrer par un lemme de Schwarz [W2, prop. 7.2.1] qu'elle reste petite sur $\Sigma(S_1)$.

Pour $z \in \mathbb{C}^p$, notons $|z| = \max_{1 \leq k \leq p} |z_k|$. Soient r et r_1 deux entiers tels que $\Sigma(S)$ soit contenu dans le polydisque $D(0,r) = \left\{z \in \mathbb{C}^p \mid |z| \leq r\right\}$ et $\Sigma(S_1)$ dans $D(0,r_1) = \left\{z \in \mathbb{C}^p \mid |z| \leq r_1\right\}$. Soit R un entier vérifiant $R \geq 3r_1$, $R > r$, on a

$$\left|F\right|_{r_1} \leq \left|F\right|_R \exp\left(-S^m \log \frac{R-r}{r_1+r}\right),$$

En prenant $r = |v|S$, $r_1 = |v|S_1$ et $R = 5r_1$, on obtient

$$\left|F\right|_R \leq \sum_{|\lambda|<D} |p_\lambda| \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{p} e^{|u_i|R|\lambda_{i,k}|},$$

d'où

$$\left|F\right|_R \leq \sqrt{2}\, D^{2np} \exp\left(pn|u|RD\right) \leq \sqrt{2}\, D^{2np} \exp\left(5pn|u|\,|v|DS_1\right),$$

c'est-à-dire

$$\log\left|F\right|_R \leq 6pn|u|\,|v|DS_1$$

dès que les paramètres D et S_1 sont assez grands.

D'autre part,

$$|F|_{r_1} \le |F|_R \exp(-S^m \log 2)\,.$$

Ainsi sous la condition

$$S^m > 9pn|u|\,|v|DS_1 \tag{3}$$

il existe une constante positive c_1 telle que

$$|Q_s(\omega)| \le \exp(-c_1 S^m)$$

pour tout $s \in \mathbb{Z}^{np}(S_1)$.

Conclusion de la construction

Pour D, S, S_1 suffisamment grands et satisfaisant les contraintes (1bis), (2) et (3), il exis^te des constantes positives c_2 et c_3 telles que la famille de polynômes

$$\{Q_s \in \mathbb{Z}[X_{1,1}, \ldots, X_{n,m}] \mid s \in \mathbb{Z}^{mp},\ |s| < S_1\}\,,$$

définis par

$$Q_s(X) = \sum_{|\lambda|<D} p_\lambda \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{p} X_{i,j}^{\lambda_{i,k} s_{k,j}}\,,$$

vérifie

$$t(Q_s) \le c_2 DS_1 \quad \text{et} \quad |Q_s(\omega)| \le \exp(-c_3 S^m)\,.$$

2.2 L'utilisation du lemme de zéros dans le cadre des fausses variables

On considère $(\mathbb{C}^*)^n$ comme l'ensemble des points complexes du groupe algébrique $(\mathbf{G}_m)^n$. Nous considérons également ce groupe algébrique plongé dans $(\mathbf{P}_1)^n$. Rappelons que, pour toute sous-variété X de $(\mathbf{P}_1)^n$, on a une forme multidegré $H(X; D_1, \ldots, D_n)$ homogène de degré $\dim X$ en les variables $D_1, \ldots, D_n$, et si l'on plonge $(\mathbf{P}_1)^n$ dans $\mathbf{P}_{2^n-1}$ par le plongement de Segré, on a l'égalité

$$H(X; D, \ldots, D) = \deg X D^{\dim X}\,.$$

Nous utiliserons le corollaire suivant du lemme de zéros général de Philippon [P1].

LEMME 1.— *Soient G un sous-groupe algébrique connexe de $(\mathbf{G}_m)^n$, S et D des entiers positifs et $z_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, des nombres complexes. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ non-identiquement nul sur G, de degrés partiels majorés par D. On suppose que P s'annule sur le sous-ensemble de G suivant*

$$\Gamma(S) = \left\{ \left(\prod_{j=1}^{m} e^{z_{1j}\mu_j}, \ldots, \prod_{j=1}^{m} e^{z_{nj}\mu_j} \right) \in (\mathbb{C}^*)^n \mid 0 \leq \mu_j < S \,,\ 1 \leq j \leq m \right\}.$$

Alors il existe un sous-groupe algébrique, propre, connexe G' de G, défini par des équations de degré $\leq D$ tel que

$$\operatorname{card}\left(\frac{\Gamma(S/n) + G'}{G'} \right) \leq \frac{H(G; D, \ldots, D)}{H(G'; D, \ldots, D)}\,.$$

Il s'agira afin d'appliquer l'inégalité de Brownawell, d'utiliser ce lemme pour montrer que les polynômes que l'on a construits sont sans zéro commun dans une “petite” boule centrée en ω. Pour cela, nous allons donner la définitin suivante.

DÉFINITION .— *Soient $u_1, \ldots, u_n$ (resp. $v_1, \ldots, v_m$) des nombres complexes. Soient G un sous-groupe algébrique connexe de $(\mathbf{G}_m)^n$, S et D deux entiers strictement positifs. Soit $\omega = \left(e^{u_i v_j}\right)_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m}$ un point de G^m.*

On dira que ω vérifie la propriété $\mathrm{LZ}(G; D, S)$ si pour tout

$$\left(z_{i,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathbb{C}^{nm}$$

vérifiant

$$\log\left| e^{u_i v_j} - e^{z_{ij}} \right| \leq -DS\,, \quad 1 \leq i \leq n\,,\ 1 \leq j \leq m\,,$$

tout polynôme de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ de degrés partiels majorés par D, qui s'annule sur

$$\Gamma(S) = \left\{ \left(\prod_{j=1}^{m} e^{z_{1j}\mu_j}, \ldots, \prod_{j=1}^{m} e^{z_{nj}\mu_j} \right) \in (\mathbb{C}^*)^n \mid 0 \leq m_j < S \,,\ 1 \leq j \leq m \right\}$$

est identiquement nul.

Nous verrons par la suite, suivant les cas traités, comment, sous des hypothèses adéquates, lorsque G est le “mauvais” sous-groupe, le lemme de zéros permet de montrer que ω vérifie $\mathrm{LZ}(G;\, D, S_1)$ pour un choix convenable des paramètres D et S_1 de la construction précédente (§ 2.1).

LEMME 2.— *Soient G un sous-groupe algébrique connexe de $(\mathbf{G}_m)^n$, p un entier positif et $P \in \mathbb{C}[Z_{1,1}, \ldots, Z_{n,p}]$ de degrés partiels majorés par D, non identiquement nul sur G. Pour $s \in \mathbb{Z}^{mp}$, $|s| \leq S_1$, on définit $P_s \in \mathbb{C}[X_{1,1}, \ldots, X_{n,m}]$ par*

$$P_s(X_{1,1}, \ldots, X_{n,m}) = P\left(\prod_{j=1}^{m} X_{1,j}^{s_{1,j}}, \ldots, \prod_{j=1}^{m} X_{n,j}^{s_{p,j}}\right).$$

Soit encore $\omega = \left(e^{u_i v_j}\right)_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m} \in G^m$, on suppose que ω vérifie $\mathrm{LZ}(G;\, D, S_1)$. Alors les polynômes P_s sont sans zéro commun dans la boule $B(\omega\,, \exp(-DS_1)) \cap G^m$ de centre ω et de rayon $\exp(-DS_1)$.

Démonstration.— Par récurrence sur p.

Si $p = 1$, c'est la définition de la propriété $\mathrm{LZ}(G;\, D, S_1)$, en effet, si $\omega' = (e^{z_{ij}})$ est un zéro commun des P_s, alors P est nul sur $\Gamma(S_1)$ et donc identiquement nul sur G^m, ce qui contredit l'hypothèse.

Supposons le lemme vrai pour $p - 1$. On a

$$P(Z_{1,1}, \ldots, Z_{n,p}) = \sum_{\substack{|\lambda| \leq D \\ \lambda \in Z^{np}}} p_\lambda Z_{1,1}^{\lambda_{1,1}} \cdots Z_{n,p}^{\lambda_{n,p}}$$

que l'on écrit sous la forme

$$P(Z_{1,1}, \ldots, Z_{n,p}) = \\ = \sum_{\substack{|\mu| < D \\ \mu \in Z^{n(p-1)}}} P_\mu(Z_{1,1}, \ldots, Z_{1,p-1}, \ldots, Z_{n,1}, \ldots, Z_{n,p-1}) Z_{1,p}^{\mu_1} \cdots Z_{n,p}^{\mu_n}$$

où $P_\mu(Z_{1,1}, \ldots, Z_{n,p-1}) = \sum p_\lambda Z_{1,1}^{\lambda_{1,1}} \cdots Z_{n,p-1}^{\lambda_{n,p-1}}$, la somme étant prise sur les $\lambda \in \mathbb{Z}^{np}$ vérifiant $\lambda_{i,p} = \mu_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Comme $P \not\equiv 0$, il existe μ tel que $P_\mu \not\equiv 0$. Soit $\omega' = (e^{z_{ij}})$ un point de $B\big(\omega\,,\, \exp(-DS_1)\big)$. Par hypothèse de récurrence, il existe $\underline{\sigma} \in \mathbb{Z}^{m(p-1)}$, $|\underline{\sigma}| < S_1$ tel que

$$C_{\mu,\sigma} = P_\mu \left(\prod_{j=1}^m e^{z_{1,j}\sigma_{1,j}}, \ldots, \prod_{j=1}^m e^{z_{n,j}\sigma_{p-1,j}} \right) \neq 0\,.$$

Ainsi, le polynôme

$$R(Z_1, \ldots, Z_n) = \sum_{|\mu|<D} C_{\mu,\sigma} Z_1^{\mu_1} \cdots Z_n^{\mu_n}$$

n'est pas identiquement nul sur $(\mathbf{G}_m)^n$, et donc, par la propriété $\mathrm{LZ}(G;\, D, S_1)$, il existe des entiers $\sigma_{p,1}, \ldots, \sigma_{p,m}$ vérifiant $|\sigma_{pj}| < S_1$ et tels que

$$R \left(\prod_{j=1}^m e^{z_{1,j}\sigma_{p,j}}, \ldots, \prod_{j=1}^m e^{z_{n,j}\sigma_{p,j}} \right) \neq 0\,,$$

mais

$$\begin{aligned} R\left(\prod_{j=1}^m e^{z_{1,j}\sigma_{p,j}}, \ldots, \prod_{j=1}^m e^{z_{n,j}\sigma_{p,j}} \right) &= P\left(\prod_{j=1}^m e^{z_{1,j}\sigma_{1,j}}, \ldots, \prod_{j=1}^m e^{z_{n,j}\sigma_{p,j}} \right) \\ &= P_\sigma(\omega')\,. \end{aligned}$$

Il existe donc $\sigma \in \mathbb{Z}^{mp}$, $\sigma = (\underline{\sigma},\, \sigma_{p,1}, \ldots, \sigma_{p,m})$ tel que $P_\sigma(\omega') \neq 0$, ainsi les polynômes P_s n'ont pas de zéros communs dans la boule $B\big(\omega\,,\, \exp(-DS_1)\big)$; le lemme est démontré.

Remarque.— Grâce à ce lemme, il suffira de démontrer que les polynômes Q_s de notre construction vérifient la propriété $\mathrm{LZ}(G;\, D, S_1)$ pour qu'ils soient sans zéro dans la boule nécessaire à l'application de l'inégalité de Brownawell.

3. Le cas de codimension un, théorème 1

Démonstration du théorème 1.— Commençons par la remarque suivante : le minorant du degré de transcendance de notre théorème est égal à $mn/(n+m-1)-1$, or si $mn/(n+m-1)-1 \leq 2$, ce résultat s'obtient sans aucune hypothèse technique [W4], on supposera donc

$$\frac{mn}{n+m-1}-1>2\,.$$

Soit $M>0$, il existe $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $|\lambda|>M$ et pour lequel les hypothèses du théorème sont satisfaites. Posons $N=|\lambda|=\max(|\lambda_i|\,,\,1\leq i\leq n)$. Soient D, S, S_1 des paramètres entiers positifs.

Il existe des nombres complexes $u'_1, \ldots, u'_n$ vérifiant

$$\lambda_1 u'_1+\cdots+\lambda_n u'_n=0 \quad \text{et} \quad \log|u-u'|\leq -N^n\,.$$

Notons $\omega'=(e^{u'_1 v_1}, \ldots, e^{u'_n v_m})$; c'est un point de $\left(\mathbb{C}^*\right)^{nm}$ “proche” de ω, c'est-à-dire qu'il existe une constante c_4 ne dépendant que de u et v telle que

$$|\omega-\omega'|\leq \exp(-c_4 N^n)\,.$$

Appelons G', le sous-groupe algébrique de $(\mathbf{G}_m)^n$ de codimension 1, défini par l'équation

$$\prod_{i=1}^{n} X_i^{\lambda_i}-1=0\,.$$

On a alors, $\omega' \in \left(G'\right)^m$.

Premier pas

Il s'agit maintenant pour nous de construire une fonction auxiliaire à partir d'un polynôme non identiquement nul sur G'. On peut supposer que les λ_i, $1\leq i\leq n$ sont sans diviseur commun. Alors, pour qu'un polynôme de degrés partiels majorés par D soit non nul sur G', il suffira de prendre $D<N$ et de construire P non nul sur $(\mathbf{G}_m)^n$. Fixons un entier p suffisamment grand en fonction de m et n. Les constantes notées c_5 et c_{14} dépendent des données n, m, p, u', v et $|\omega'|$.

En remplaçant u par u', on utilise la construction de fonction auxiliaire développée dans le préliminaire et on obtient, pour D, S, S_1 suffisamment grands et satisfaisant les contraintes

$$D < N \tag{0}$$

$$D^n \geq \left(2p^{mn}\right)^{1/(p-m)} S^{m(n+p)/(p-m)} \tag{1}$$

$$S_1 > S > 1 \tag{2}$$

$$S^m > \left(9\,pn|u'|\,|v|\right) D S_1 \tag{3}$$

des constantes c_5 et c_6 et une famille de polynômes

$$\left\{ Q_s \in \mathbb{Z}[X_{1,1}, \ldots, X_{n,m}] \mid |s| < S_1 \right\},$$

définis par

$$Q_s(X) = \sum_{|\lambda|<D} p_\lambda \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{p} X_{ik}^{\lambda_{i,k} s_{k,j}},$$

vérifiant

$$t(Q_s) \leq c_5 D S_1 \quad \text{et} \quad \left|Q_s(\omega')\right| \leq \exp(-c_6 S^m).$$

Deuxième pas

Nous voulons montrer que ces polynômes n'ont pas de zéro commun dans la boule $B' = B\left(\omega', \exp(-DS_1)\right) \cap \left(G'\right)^m$. Pour cela, nous allons établir que, pour un choix convenable des paramètres, ω' vérifie la propriété $\mathrm{LZ}(D, S_1)$.

Soit $\omega'' = \left(e^{z_{i,j}}\right)_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq m}$ un point de B'. Soit P un polynôme de degrés partiels majorés par D, et s'annulant sur

$$\Gamma(S_1) = \left\{ \left(\prod_{j=1}^{m} e^{z_{1,j}\mu_j}, \ldots, \prod_{j=1}^{m} e^{z_{n,j}\mu_j} \right) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^n \mid 0 \leq |\mu| < S_1 \right\}.$$

Alors, si P n'est pas identiquement nul sur G', comme $\Gamma(S_1)$ est inclus dans G', d'après le lemme de zéros, il existe un sous-groupe algébrique propre, connexe, H' de G', défini par des équations de degré $\leq D$ tel que

$$\mathrm{card}\left(\frac{\Gamma(S_1/n) + H'}{H'}\right) \leq \frac{H(G'; D, \ldots, D)}{H(H'; D, \ldots, D)}.$$

Ainsi, si r' est la codimension de H' dans G', on a

$$\frac{H(G';\, D\,,\ldots,\, D)}{H(H';\, D\,,\ldots,\, D)} \leq n!\, N D^{r'}\,,$$

car $H(G';\, 1\,,\ldots,\, 1) \leq n!\, N$.

De plus, H' étant un sous-groupe de G', il existe un élément α de $\mathbb{Z}^n$ tel que pour tout $x \in H'$,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = 1 \quad \text{et} \quad |\alpha| \leq n^{3/2} D\,.$$

Choisissons $D = [\, N/n^2\,]$, alors $|\alpha| < N$ et donc α et λ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, car les λ_i sont sans diviseur commun.

Nous procédons alors comme dans [W3]. Soit k l'entier vérifiant

$$\left(\frac{S_1}{n}\right)^{m-k} \leq n!\, n^2 D^{r'+1} < \left(\frac{S_1}{n}\right)^{m-k+1}.$$

En imposant la condition

$$\left(S_1\right)^{m-1} > m^{m+1} n!\, D^n\,, \tag{4}$$

on a $k > 1$, ainsi le lemme 3 de [M] joint à l'inégalité

$$\operatorname{card}\left(\frac{\Gamma(S_1/n) + H'}{H'}\right) < \left(\frac{S_1}{n}\right)^{m-k+1}$$

montre qu'il existe au moins deux éléments $h^{(1)}$, $h^{(2)}$ de $\mathbb{Z}^m$ vérifiant $\max\left(h^{(1)}\,,\, h^{(2)}\right) \leq S_1/n$ et linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, tels que

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} e^{\alpha_i h_j^{(1)} z_{i,j}} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} e^{\alpha_i h_j^{(2)} z_{i,j}} = 1\,.$$

Par conséquent, il existe deux entiers k_1 et k_2 tels que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} z_{i,j}\alpha_i h_j^{(1)} = 2ik_1\pi \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} z_{i,j}\alpha_i h_j^{(2)} = 2ik_2\pi\,.$$

On a

$$\max(|k_1|\,,\, |k_2|) \leq \frac{m}{2\pi}\max_{i,j}|z_{i,j}|\, DS_1$$

et

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} z_{i,j}\alpha_i\bigl(k_2h_j^{(1)} - k_1h_j^{(2)}\bigr) = 0 .$$

Notons $\gamma_j = k_2h_j^{(1)} - k_1h_j^{(2)}$, on a $|\gamma_j| \leq c_7DS_1^2$ pour $1 \leq j \leq m$. De l'égalité ci-dessus, on déduit

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_i'\alpha_i\right| \left|\sum_{j=1}^{m}\gamma_j v_j\right| \leq c_8D \cdot DS_1^2 \max_{i,j}|z_{i,j} - u_i'v_j| ,$$

ce qui implique, dès que D et S_1 sont assez grands, l'existence d'une constante positive c_9 telle que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_i'\alpha_i\right| \left|\sum_{j=1}^{m}\gamma_j v_j\right| \leq \exp(-c_9DS_1) . \qquad (*)$$

Troisième pas. Choix des paramètres et hypothèses techniques

Il s'agit de choisir les paramètres D, S, S_1 satisfaisant les contraintes (0) à (4) ci-avant énoncées.

On a posé $D = [N/n^2]$ et on choisit S le plus grand entier satisfaisant la condition (1) et S_1 le plus petit entier satisfaisant la condition (4).

Remarquons qu'il existe des constantes positives c_{10} et c_{11} dépendant de m et n, telles que

$$c_{10}N^{(n+m-1)/(m-1)} \leq DS_1 \leq c_{11}N^{(n+m-1)/(m-1)} .$$

Pour N assez grand, dès que $n(m-1) > n+m-1$ les contraintes (0) à (4) sont alors satisfaites.

Les hypothèses techniques, qui ont été écrites pour cela, impliquent LZ(DS_1)

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_i\alpha_i\right| \left|\sum_{j=1}^{m}\gamma_j v_j\right| \geq \exp(-N^{(n+m)/m}) \exp\left(-(c_7DS_1^2)^{\eta}\right) ,$$

d'où

$$\log\left|\sum_{i=1}^{n} u_i\alpha_i\right| \left|\sum_{j=1}^{m}\gamma_j v_j\right| \geq -N^{(n+m)/m} - c_{12}N^{\eta(2n+m-1)/(m-1)}$$

et, contredisent l'inégalité $(*)$,

$$\log\left|\sum_{i=1}^{n} u_i'\alpha_i\right|\left|\sum_{j=1}^{m}\gamma_j v_j\right| \leq -c_6 DS_1 \leq -c_{13}N^{(n+m-1)/(m-1)}\,.$$

Le polynôme P est donc identiquement nul et ω' vérifie la propriété LZ(DS_1). Les polynômes Q_s n'ont pas de zéro commun dans la boule $B' = B(\omega'\,,\,\exp(-DS_1)) \cap (G')^m$.

Quatrième pas. Application de l'inégalité de Brownawell et conclusion

Dans ce qui précède, nous avons travaillé en fixant un $\lambda \in \mathbb{Z}^n$, $|\lambda| = N$, tel que les hypothèses du théorème soient vérifiées; pour ne pas alourdir les notations, nous n'avions pas fait figurer cette dépendance en N. Par exemple, nous avions considéré un point ω' et un sous-groupe G', nous noterons désormais ω'_N et G'_N ces objets. Comme il existe une infinité de tels N, nous obtenons ainsi une suite de sous-groupes G'_N de codimension 1 et une suite de points ω'_N "proches" de ω. Nous noterons également $B_N(\omega)$ la boule de centre ω et de rayon $\exp(-DS_1)$; il existe une constante c_{14}, telle que

$$B(\omega\,,\,\exp(-c_{14}N^{(n+m-1)/(m-1)})) \supset B_N(\omega)$$

et on a $\omega'_N \in B_N(\omega)$.

Notons $\mathcal{I}$ l'idéal des polynômes de $\mathbb{Z}[X_{1,1},\,\ldots\,,\,X_{n,m}]$ s'annulant en ω et X la $\overline{\mathbb{Q}}$-adhérence de Zariski de ω. Soit Y_N une composante irréductible de $X \cap (G'_N)^m$ et $\mathfrak{p}_N$ son idéal. Il s'agit de minorer le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}(\omega)$, c'est-à-dire $\dim X$. Nous considérons deux cas :

- si Y_N rencontre $B_N(\omega)$, nous minorons la dimension de Y_N grâce à l'inégalité de Brownawell, puis, en écrivant $\dim X = (\dim X - \dim Y_N) + \dim Y_N$, et en montrant que $\dim X - \dim Y_N \geq 1$, nous obtenons la minoration de $\dim X$ annoncée;
- si Y_N ne rencontre pas $B_N(\omega)$, nous appliquons l'inégalité de Brownawell directement à X.

Notons $d_N = \dim Y_N$, $d'_N = \dim X - \dim Y_N$ et $d = \dim X$.

Considérons les polynômes P_j, $1 \leq j \leq m$,

$$P_j(X_{1,1}, \ldots, X_{n,m}) = \prod_{i \in \Lambda^+} X_{i,j}^{\lambda_i} - \prod_{i \in \Lambda^-} X_{i,j}^{-\lambda_i}$$

où $\Lambda^+ = \{i \mid 1 \leq i \leq n \text{ tels que } \lambda_i > 0\}$ et $\Lambda^- = \{i \mid 1 \leq i \leq n \text{ tels que } \lambda_i < 0\}$. Ce sont des binômes correspondant à l'équation de $(G'_N)^m$ dans $(\mathbf{G}_m)^{mn}$.

Les constantes notées c_{14} à c_{22} qui apparaissent dans ce quatrième pas peuvent dépendre de m, n, p, $|\omega|$ ainsi que de la taille et du degré de $\mathcal{I}$.

Nous distinguons deux cas :

(1) Si $X \cap (G'_N)^m \cap B_N(\omega)$ est vide, l'idéal $(\mathcal{I}\,,\, P_1, \ldots, P_m)$ n'a pas de zéro dans $B_N(\omega)$, comme $\omega \in X$, l'inégalité de Brownawell implique

$$\log \max_{1 \leq j \leq m} |P_j(\omega)| \geq -c\sigma D^{d+1} - c\delta D^{d+1} - c\delta D^{d+1} S_1 - c\delta D^d \log|\omega|\,,$$

où, rappelons le, $c = 11(nm+1)^5$ et $|\omega| = \max\bigl(1, |\omega_{ij}|, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\bigr)$, et où σ et δ désignent respectivement le degré et la taille de $\mathcal{I}$ et peuvent ainsi être considérés comme des "constantes".

On a donc, d'une part

$$\begin{aligned} \log \max_{1 \leq j \leq m} |P_j(\omega)| &\geq -c_{13} N^{d+1} - c_{14} N^d N^{(m+n-1)/(m-1)} \\ &\geq -c_{15} N^{d+(m+n-1)/(m-1)}\,, \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\log|P_j(\omega)| \leq -c_{16} N^n\,,$$

car $P_j(\omega'_N) = 0$ et $\log|\omega - \omega'_N| \leq -c_4 N^n$. Ce qui implique

$$d \geq n - \frac{n+m-1}{m-1}$$

ou encore

$$d \geq n\left(\frac{m-2}{m-1}\right) - 1 \geq \frac{mn}{n+m-1} - 1\,.$$

Remarquons que, dans ce cas, la minoration obtenue est bien meilleure que celle annoncée.

(2) Si $X \cap (G'_N)^m \cap B_N(\omega)$ est non vide, $d_N = \dim Y_N \geq 0$ et $d'_N \leq \dim X$. Comme l'idéal $\mathfrak{p}_N$ est un idéal premier associé à $(\mathcal{I}, P_1, \ldots, P_m)$, on a la majoration suivante (cf. [P2, prop. 2.6 et 2.8]) :

$$T(\mathfrak{p}_N) \leq c_{15} N^{\dim X - \dim Y_N} = c_{15} N^{d'_N}.$$

Les polynômes Q_s étant sans zéro commun dans la boule $B(\omega'_N, \exp(-DS_1))$ l'inégalité de Brownawell implique alors, avec D et T remplacés par DS_1,

$$\log \max \{ |\mathfrak{p}_N(\omega'_N)|, |Q_s(\omega'_N)| \} \geq -c_{16} (DS_1)^{d_N+1} N^{d'_N};$$

mais, d'autre part, il découle de la définition de $|\mathfrak{p}_N(\omega'_N)| = \|\mathfrak{p}_N\|_{\omega'_N}$, (sect. 1) que

$$\log |\mathfrak{p}_N(\omega'_N)| \leq -c_{17} \log |\omega - \omega'_N| + c_{18} T(\mathfrak{p}_N) \leq -c_{19} N^n + c_{20} N^{d'_N}.$$

Si $n \leq d'_N$, alors $\dim X \geq n$ et c'est inespéré mais, si $n \geq d'_N$, on a

$$\log |\mathfrak{p}_N(\omega'_N)| \leq -c_{21} N^n.$$

Par ailleurs (premier et troisième pas), on a

$$\log \max_s |Q_s(\omega'_N)| \leq -c_6 S^m \leq -c_{22} N^{n(p-m)/(p+n)}.$$

Ainsi, compte tenu du choix de nos paramètres, ces inégalités sont incompatibles lorsque

$$(d_N + 1)\frac{n+m-1}{m-1} + d'_N < n\frac{p-m}{p+n}$$

d'où l'on déduit, lorsque p est assez grand, que

$$\dim Y_N = d_N \geq \frac{n(m-1)}{n+m-1} - d'_N \frac{m-1}{n+m-1} - 1$$

et donc

$$\dim X = d_N + d'_N \geq \frac{n(m-1)}{n+m-1} - 1 + d'_N \frac{n}{n+m-1}.$$

On conclut alors en montrant que $d'_N = \dim X - \dim Y_N \geq 1$, c'est-à-dire que pour tout N

$$\dim X - \dim (X \cap (G'_N)^m \cap B_N(\omega)) \geq 1.$$

En effet, supposons que l'on ait $\dim X = \dim Y_N$, comme Y_N est inclus dans X qui est irréductible, on aurait $X = Y_N$ et donc $\omega \in \left(G'_N\right)^m$. Ce qui contredit le fait que $u_1, \ldots, u_n$ (resp. $v_1, \ldots, v_m$) sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

On a donc, dans les deux cas,

$$\dim X \geq \frac{nm}{n+m-1} - 1$$

et le théorème est démontré.

Remarque.— Cette minoration implique

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\omega) \geq \left[\frac{mn}{m+n}\right],$$

elle est donc en un certain sens plus fine que celle obtenue par Brownawell, mais l'intérêt de ce résultat réside dans sa possibilité d'être formulé d'un point de vue géométrique et ainsi d'être généralisé (cf. sect. 4). On peut cependant démontrer quelques corollaires intéressants.

COROLLAIRE 1.— *Soit u un nombre complexe transcendant, et $\omega = (e, e^u, \ldots, e^{u^{2n-4}})$. On suppose que quel que soit $M > 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{Z}^n$, $|\lambda| \geq M$ tel que*

$$|\lambda_1 + \lambda_2 u + \cdots + \lambda_n u^{n-1}| \leq \exp(-|\lambda|^n).$$

Alors,

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\omega) \geq \frac{n(n-2)}{2n-3} - 1.$$

Démonstration.— On applique le théorème 1, la famille $\{1, u, \ldots, u^{n-1}\}$ jouant le rôle des u_i et la famille $\{1, u, \ldots, u^{n-3}\}$ celui des v_j. Pour cela, il faut vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, $|\alpha| \leq |\lambda|$, α et λ linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, on a

$$\left|\alpha_1 + \alpha_2 u + \cdots + \alpha_n u^{n-1}\right| \geq \exp\left(-|\lambda|^{(2n-2)/(n-2)}\right).$$

Notons $N := |\lambda|$ et P_N le polynôme, que l'on peut supposer irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$, défini par

$$P_N(X) = \lambda_1 + \lambda_2 X + \cdots + \lambda_n X^{n-1},$$

on a $H(P_N) = N$ et $\deg(P_N) = n-1$. Ainsi, si ξ est une racine de P_N à distance minimale de u, et si s est la multiplicité de ξ, d'après un lemme de Diaz et Mignotte [DM], on a

$$\left|u-\xi\right|^s \leq \left(N^2(n-1)n^{3/2}\right)^{n-2}\left|P_N(u)\right| ;$$

donc il existe une constante c_1, ne dépendant que de n, telle que

$$|u-\xi| \leq \exp(-c_1 N^n)$$

dès que N est assez grand.

Considérons maintenant le polynôme $Q(X) = \alpha_1 + \alpha_2 X + \cdots + \alpha_n X^{n-1}$, soit ζ une de ses racines. ζ et ξ sont deux nombres algébriques distincts et non conjugués, ainsi par un lemme dû à R. Güting [G], on a

$$|\zeta - \xi| \geq 2^{2-n}(nN)^{2-2n} .$$

Or

$$|u-\xi| \leq \exp\left(-c_1 N^n\right) \leq \frac{1}{2}\, 2^{2-n}\left(nN\right)^{2-2n}$$

d'où l'existence de constantes c_2 et c_3, ne dépendant que de n, telle que

$$|u-\zeta| \geq \exp(-c_2 \log N)$$

et donc

$$\left|Q(u)\right| \geq \exp(-c_3 \log N) .$$

L'hypothèse nécessaire à l'application du théorème est donc largement vérifiée.

Par contre, l'hypothèse faite sur les v_j n'est pas énoncée de manière optimale dans le théorème, nous allons donc reprendre quelques points de la démonstration dans notre cas particulier afin d'obtenir le résultat du corollaire.

Notons

$$\omega' = \left(e, e^{\xi}, \ldots, e^{\xi^{n-1}}, e^{u}, \ldots, e^{u\xi^{n-1}}, \ldots, e^{u^{n-3}\xi^{n-1}}\right) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^{n(n-2)} ,$$

ω' est un point de $\left(G'\right)^{n-2}$ où G' est un sous-groupe de $\left(\mathbf{G}_m\right)^n$, défini par l'équation

$$\prod_{i=1}^{n} X_i^{\lambda_i} - 1 = 0 .$$

D et S_1 étant des paramètres satisfaisant les contraintes nécessaires, on a construit une famille de polynômes de taille contrôlée, “petits” en ω'. L'existence d'un zéro commun à ces polynômes dans $B(\omega', \exp(-DS_1) \cap (G')^{n-2})$ implique l'existence d'éléments $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, $|\alpha| < N$, et $\gamma \in \mathbb{Z}^{n-2}$, $|\gamma| \leq c_4 N^{(3n-2)/(n-2)}$ tels que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^i\right| \left|\sum_{j=1}^{n-2} \gamma_j \xi^j\right| \leq \exp\left(-c_5 N^{(2n-2)/(n-2)}\right)$$

où c_4 et c_5 ne dépendent que de n et u.

Or, on a

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^i\right| \geq \exp(-c_3 \log N) \quad \text{et} \quad \left|\sum_{j=1}^{n-2} \gamma_j \xi^j\right| \leq \exp(-c_6 \log N)\,,$$

$c_6 = c_6(n)$, car ξ est algébrique non racine du polynôme $\sum_{j=1}^{n-2} \gamma_j X^j$. On a donc une contradiction, et le théorème nous fournit la minoration annoncée.

Remarque.— Les nombres considérés vérifient les hypothèses “techniques” du théorème de Brownawell, en appliquant celui-ci, on obtient la minoration suivante

$$\deg \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(\omega) \geq \frac{n(n-2)}{2n-2} - 1\,.$$

Notre résultat améliore donc de 1 cette minoration lorsque n est impair, on obtient en effet

$$\deg \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(\omega) \geq \frac{n-1}{2} \quad \text{au lieu de} \quad \deg \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(\omega) \geq \frac{n-3}{2}\,.$$

COROLLAIRE 2.— *Soit u un nombre réel transcendant, et*

$$\omega = (e, e^u, \ldots, e^{2n-2})\,.$$

On suppose que, quel que soit $M > 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{Z}^n$, $|\lambda| \geq M$, tel que

$$|\lambda_1 + \lambda_2 u + \cdots + \lambda_n u^{n-1}| \leq \exp\left(-|\lambda|^n\right)\,.$$

Alors,

$$\deg \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(\omega) \geq \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}\,.$$

Démonstration. — On applique le théorème 1, la famille $\{1, u, \ldots, u^{n-1}\}$ jouant le rôle des u_i et des v_j. On procède comme dans le corollaire 1.

Notons $N := |\lambda|$ et P_N le polynôme, défini par $P_N(X) = \lambda_1 + \lambda_2 X + \cdots + \lambda_n X^{n-1}$, Il existe une racine de P_N, ξ et une constante c_1 ne dépendant que de n, telles que

$$|u - \xi| \leq \exp(-c_1 N^n).$$

La seconde hypothèse du théorème est bien satisfaite, c'est-à-dire que pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, $|\alpha| \leq |\lambda|$, α et λ linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, on a

$$\left|\alpha_1 + \alpha_2 u + \cdots + \alpha_n u^{n-1}\right| \geq \exp(-c_2 \log N), \quad c_2 = c_2(n).$$

Notons

$$\omega' = \left(e, e^{\xi}, \ldots, e^{\xi^{n-1}}, e^{u}, \ldots, e^{u\xi^{n-1}}, \ldots, e^{u^{n-1}\xi^{n-1}}\right) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^{n^2}.$$

D et S_1 étant des paramètres satisfaisant les contraintes (0) à (3), on a construit une famille de polynômes, de taille contrôlée, "petits" en ω'. Pour montrer que ces polynômes sont sans zéro commun dans $B\left(\omega', \exp(-DS_1)\right)$, on remplace la contrainte (4) par

$$(S_1)^n > n^{n+2} n!\, D^n ; \tag{4bis}$$

S_1 est alors de l'ordre de D.

Si $\omega'' = \left(e^{z_{i,j}}\right)_{1 \leq i,\, j \leq n}$ est un tel zéro, alors il existe des éléments $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, $|\alpha| < N$, $h \in \mathbb{Z}^n$, $|\overline{h}| \leq (S_1)/n$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} z_{i,j} \alpha_i h_j = 2ik\pi.$$

Or, d'une part, $\omega'' \in B\left(\omega', \exp(-DS_1)\right)$, on peut donc choisir les $z_{i,j}$ tels que

$$\left|z_{i,j} - u^i \xi^j\right| \leq \exp\left(-\frac{2}{3} DS_1\right) ;$$

d'autre part, $|u - \xi| \leq \exp(c_1 N^n)$, il existe donc une constante c_3, dépendant de n et u, telle que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u^{i+j} \alpha_i h_j - 2ik\pi\right| \leq \exp\left(-c_3 N^2\right).$$

Comme u est supposé réel ceci n'est possible que si $k = 0$, mais alors, on a

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^i \sum_{j=1}^{n} h_j u^j \right| \leq \exp\left(-c_3 N^2\right).$$

Or, D est choisi égal à la partie entière de N/n^2, et on peut choisir S_1 satisfaisant (4bis) et

$$\frac{S_1}{n} < N,$$

c'est-à-dire h et λ linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, car peut supposer les λ_i, $1 \leq i < n$, premiers entre eux.

On a donc une contradiction, et le théorème, compte tenu de ce nouveau choix de paramètres nous permet d'obtenir la minoration annoncée.

Remarque.— Là encore, en appliquant le théorème de Brownawell, on obtient

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\omega) \geq \frac{n-2}{2}.$$

Notre résultat améliore de 1 la minoration de Brownawell lorsque n est pair.

4. Généralisation au cas de codimension quelconque Théorème 2

Démonstration du théorème 2

Fixons L un sous-espace pour lequel les hypothèses du théorème sont vérifiées et notons $N = H(L)$. Soient encore D, S, S_1 des paramètres entiers positifs.

Soit $r = n - n'$, on suppose $r > 1$; notons Λ est le sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ des équations de L et $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)}$ les éléments de $\mathbb{Z}^n$ réalisant les minimums successifs de Λ. Soit G' le sous-groupe algébrique connexe de $\left(\mathbf{G}_m\right)^n$ défini par les équations

$$\prod_{i=1}^{n} X_i^{\lambda_i^{(\rho)}} = 1, \quad 1 \leq \rho \leq r.$$

Comme $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)}$ réalisent les minimums successifs, on a

$$\left|\lambda^{(1)}\right| \leq \left|\lambda^{(2)}\right| \leq \cdots \leq \left|\lambda^{(r)}\right| = \sigma(\Lambda)$$

et, d'après le théorème de Minkowski [BP], il existe deux constantes positives $c(n,r)$ et $c'(n,r)$ telles que

$$c(n,r)H(\Lambda) \leq \prod_{\rho=1}^{r} |\lambda^{(\rho)}| \leq c'(n,r)H(\Lambda)\,.$$

Soient $u' = (u'_1, \ldots, u'_n)$ un point de L tel que la distance de u à u' soit minimale, on a

$$|\lambda_1^{(\rho)} u'_1 + \cdots + \lambda_n^{(\rho)} u'_n| = 0 \quad \text{pour } 1 \leq \rho \leq r$$

et

$$\log |u - u'| \leq -H(\Lambda)^{n'+1}\,.$$

Notons $\omega' = (e^{u'_1 v_1}, \ldots, e^{u'_n v_m})$, c'est un point de $(\mathbb{C}^*)^{nm}$ "proche" de ω et $\omega' \in (G')^m$.

Premier pas. Construction de la fonction auxiliaire

Nous reprenons la construction avec "fausses variables", mais pour construire, comme dans le cas $r = 1$, un polynôme $P \in \mathbb{Z}[Z_{1,1}, \ldots, Z_{n,p}]$ de degrés partiels majorés par D, *non identiquement nul* sur G'.

Soit p un entier que l'on choisira suffisamment grand par rapport à m et n. Soient S et D deux paramètres réels.

Les constantes notées c_1 à c_{16} qui apparaissent au cours des trois premiers pas de la démonstration peuvent dépendre de u, v, u', m, n, n' et p.

Nous allons construire un polynôme $P \in \mathbb{Z}[Z_{1,1}, \ldots, Z_{n,p}]$ de degrés partiels majorés par D tel que la fonction F définie par

$$F(z_1, \ldots, z_p) = P(e^{u'_1 z_1}, \ldots, e^{u'_n z_p})$$

s'annule sur l'ensemble $\Sigma(S)$, où

$$\Sigma(S) = \{z_s = (s_{1,1}v_1 + \cdots + s_{1,m}v_m, \ldots, s_{p,1}v_1 + \\ + \cdots + s_{p,m}v_m) \mid 0 \leq s_{k,j} < S\}\,.$$

On définit des polynômes $Q_s \in \mathbb{Z}[X_{1,1}, \ldots, X_{n,m}]$ par

$$Q_s(\omega') = F(z_s) \quad \text{pour } s \in z^{mp}\,.$$

Pour construire P non identiquement nul sur G', considérons $\Delta(D)$ un ensemble de représentants des classes de $\mathbb{Z}^n(D)$ modulo Λ. Pour $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ appartenant à $\Delta(D)$, les monômes rationnels $X_1^{\lambda_1} \cdots X_n^{\lambda_n}$ sont distincts modulo l'idéal de définition de G'. Ils sont donc, d'après le théorème d'Artin d'indépendance linéaire des caractères [L, théorème 4.1, p. 319], linéairement indépendants modulo l'idéal de définition de G'.

Notons

$$\begin{aligned} \Delta_p(D) &= (\Delta(D))^p \\ &= \{(\lambda_{1,1}, \ldots, \lambda_{n,1}, \ldots, \lambda_{1,p}, \ldots, \lambda_{n,p}) \in \mathbb{Z}^{np}, \\ &\qquad \text{avec } (\lambda_{1,k}, \ldots, \lambda_{n,k}) \in \Delta(D), \text{ pour } 1 \leq k \leq p\}. \end{aligned}$$

Soit

$$R(Z) = \sum_{\nu \in \Delta_p(D)} p_\nu \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{p} Z_{i,k}^{\nu_{i,k}},$$

et

$$P(Z) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{p} Z_{i,k}^{D} R(Z).$$

Notons

$$\Phi(z_1, \ldots, z_p) = R(e^{u_1' z_1}, \ldots, e^{u_n' z_1}, \ldots, e^{u_1' z_p}, \ldots, e^{u_n' z_p}).$$

On a

$$\Phi(z_s) = \sum_{\nu \in \Delta_p(D)} p_\nu \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{p} e^{u_i' v_j \nu_{i,k} s_{k,j}},$$

ou encore

$$\Phi(z_s) = \sum_{|\mu| < pDS} q_{s,\mu} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} e^{u_i' v_j \mu_{i,j}}$$

avec

$$\mu_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} \nu_{i,k} s_{k,j}, \quad \text{et} \quad q_{s,\mu} = \sum_{\nu \in \Delta_p(D)} a_\nu p_\nu$$

où $a_\nu = 1$ si $\mu_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} \nu_{i,k} s_{k,j}$ et 0 sinon.

On résout alors le système suivant :

$$q_{s,\mu} = 0 \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{Z}^{mp}\,,\ |s| < S$$
$$\text{et pour tout } \mu \in \mathbb{Z}^{mn}\,,\quad |\mu| < pDS\,.$$

C'est un système dont le nombre d'équations est inférieur ou égal à

$$(pDS)^{mn} S^{mp}$$

et le nombre d'inconnues p_ν est égal à card $\Delta_p(D)$.

Pour évaluer ce cardinal, nous aurons besoin du lemme suivant que nous démontrerons en appendice.

LEMME .— *Si $D > \sigma(\Lambda)$, alors, il existe une constante c, non nulle, dépendant de n et de r, telle que*

$$\operatorname{card} \Delta(D) \geq cH(\Lambda)D^{n'}\,.$$

Ainsi, pour des paramètres vérifiant les contraintes

$$D > \sigma(\Lambda) \tag{0}$$

$$c^p H(\Lambda)^p D^{n'p} \geq 2(pDS)^{mn} S^{mp}\,, \tag{1}$$

il existe, par un lemme de Siegel, une solution non nulle

$$\{p_\nu \in \mathbb{Z} \mid |\nu| < D\}$$

vérifiant

$$|p_\nu| \leq \sqrt{2}\, D^{np}\,.$$

Le polynôme $P \in \mathbb{Z}[Z_{1,1}, \ldots, Z_{n,p}]$ ainsi obtenu, n'est pas identiquement nul sur $(G')^p$, car les monômes de $\Delta(D)$ sont linéairement indépendants modulo l'idéal de définition de G'; donc les éléments de $\Delta_p(D)$ sont également linéairement indépendants modulo l'idéal de définition de $(G')^p$.

Soit S_1 un nouveau paramètre satisfaisant

$$S_1 > S > 1\,. \tag{2}$$

Comme dans la construction précédente (lemme de Schwarz), la fonction F, construite nulle sur $\Sigma(S)$ va être "petite" sur $\Sigma(S_1)$. Sous la condition

$$S^m > (9pn|u'|\,|v|)DS_1\,, \tag{3}$$

on a

$$\log\bigl|Q_s(\omega')\bigr| \leq -c_2 S^m\,,$$

pour tout $s \in \mathbb{Z}^{np}(S_1)$.

On a donc obtenu, sous les contraintes (0) à (3), une famille de polynômes $\{Q_s \in \mathbb{Z}[X_{1,1}, \ldots, X_{n,m}] \mid s \in \mathbb{Z}^{mp},\ |s| < S_1\}$,

$$Q_s(X) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{p} e^{u_i' v_j s_{k,j} D} \sum_{\nu\in\Delta_p(D)} P_\lambda \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{p} X_{i,j}^{\lambda_{i,k}s_{k,j}}$$

vérifiant

$$t(Q_s) \leq c_3 DS_1\,, \quad \log\bigl|Q_s(\omega')\bigr| \leq -c_2 S^m\,.$$

Deuxième pas. Lemme de zéros

Comme dans le cas précédent, pour démontrer que ces polynômes n'ont pas de zéro commun dans la boule $B' = B\bigl(\omega', \exp(-DS_1)\bigr) \cap \bigl(G'\bigr)^m$, nous allons établir que pour un choix convenable des paramètres, ω' vérifie la propriété $\mathrm{LZ}(G';\, D, S_1)$.

Soit $\omega'' = \bigl(e^{z_{i,j}}\bigr)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ un point de B'. Soit P un polynôme de degrés partiels majorés par D, et s'annulant sur

$$\Gamma(S_1) = \left\{ \left(\prod_{j=1}^{m} e^{z_{1,j}\mu_j}, \ldots, \prod_{j=1}^{m} e^{z_{n,j}\mu_j} \right) \in \bigl(\mathbb{C}^*\bigr)^n \;\Big|\; 0 \leq |\mu| < S_1 \right\}.$$

Si P n'est pas identiquement nul sur G', comme $\Gamma(S_1)$ est inclus dans G', d'après le lemme de zéros, il existe un sous-groupe algébrique propre, connexe H' de G', défini par des équations de degrés $\leq D$ tel que

$$\operatorname{card}\left(\frac{\Gamma(S_1/n) + H'}{H'}\right) \leq \frac{H(G';\, D, \ldots, D)}{H(H';\, D, \ldots, D)}\,.$$

Comme $H(G';\, D, \ldots, D) = H(\Lambda;\, D, \ldots, D) = H(\Lambda)D^{n'}$, si r' est la codimension de H' dans G', on a

$$\frac{H(G';\, D, \ldots, D)}{H(H';\, D, \ldots, D)} \leq H(\Lambda)D^{r'}\,.$$

De plus, il existe $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, vérifiant

$$|\alpha| \leq c_4 H(\Lambda) D$$

tel que α, $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)}$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$ et pour $(x_1, \ldots, x_n) \in H'$,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = 1 .$$

Soit L' le sous-espace vectoriel de L défini par

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 ,$$

d'après l'hypothèse technique, on a

$$\log \operatorname{dist}(u, L') \geq -H(L)^{(n'+m)/m} .$$

Soit k l'entier tel que

$$\left(\frac{S_1}{n}\right)^{m-k} \leq H(\Lambda) D^{r'} < \left(\frac{S_1}{n}\right)^{m-k+1} .$$

En imposant la condition

$$(S_1)^{m-1} > n^{m-1} H(\Lambda) D^{n'} , \tag{4}$$

on a $k > 1$ et il existe au moins deux éléments $h^{(1)}$, $h^{(2)}$ de $\mathbb{Z}^m$ vérifiant $\max(h^{(1)}, h^{(2)}) < S_1/n$ et linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, tels que

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} e^{\alpha_i h_j^{(1)} z_{i,j}} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} e^{\alpha_i h_j^{(2)} z_{i,j}} = 1 .$$

Par conséquent, comme dans le cas précédent (sect. 3, deuxième pas), il existe deux entiers k_1 et k_2 vérifient $\max(|k_1|, |k_2|) < c_5 H(\Lambda) D S_1$, tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} z_{i,j} a_i \left(k_2 h_j^{(1)} - k_1 h_j^{(2)}\right) = 0 .$$

Ce qui implique

$$\log\left|\sum_{i=1}^{n} u_i'\alpha_i\right|\left|\sum_{j=1}^{m}\gamma_j v_j\right| \leq -c_6 DS_1 \tag{$*$}$$

avec $\gamma_j = k_2 h_j^{(1)} - k_1 h_j^{(2)}$, $|\gamma_j| \leq c_7 H(\Lambda) DS_1^2$ pour $1 \leq j \leq m$. Les hypothèses techniques viendront contredire $(*)$.

Troisième pas. Choix des paramètres, hypothèses techniques et conclusion de la construction

Les contraintes que nous imposons aux paramètres sont les conditions (0) à (4).

Posons $D = 2H(\Lambda) = 2N$, et choisissons S le plus grand entier vérifiant (1) et S_1 le plus petit entier vérifiant (4).

Notons

$$\alpha_p = \frac{n+p}{(p - mn/(n'+1))},$$

on a

$$D^{(n'+1)} \geq \left(\frac{2^{p+1}p}{c^p}\right)^{\frac{\alpha_p}{n+p}} S^{m\alpha_p}$$

et également

$$c_8 N^{(n'+m)/(m-1)} \leq DS_1 \leq c_9 N^{(n'+m)/(m-1)}.$$

Pour N et p assez grands, dès que $m + n' < (m-1)(n'+1)$, les contraintes sont satisfaites.

Les hypothèses techniques impliquent, d'une part

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\gamma_j v_j\right| \geq -c_{10}(D^2 S_1^2)^{\eta}$$

et, d'autre part, comme

$$|u - u'| \leq -\exp(N^{n'+1}) \leq \frac{1}{2}\exp(-N^{(n'+m)/m}) \leq \frac{1}{2}\operatorname{dist}(u, L'),$$

on a

$$\log \operatorname{dist}(u', L') \geq -D^{(n+m)/m} - \log 2.$$

Mais $u' \in L$ ainsi $\operatorname{dist}(u', L') = \left|\sum_{i=1}^{n} u'_i a_i\right| / |\alpha|$ et donc les hypothèses techniques contredisent l'inégalité $(*)$:

$$\log \left|\sum_{i=1}^{n} u'_i \alpha_i\right| \left|\sum_{j=1}^{m} \gamma_j v_j\right| \leq -c_{11} D^{(n'+m)/(m-1)} .$$

Avec ce choix de paramètres, on obtient donc une famille de polynômes $\{Q_s \in \mathbb{Z}[X_{1,1}, \ldots, X_{n,m}] \mid s \in \mathbb{Z}^{mp},\ |s| < S_1\}$,

$$Q_s(X) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{p} e^{u'_i v_j s_{k,j} D} \sum_{\nu \in \Delta_p(D)} p_\lambda \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{p} X_{i,j}^{\lambda_{i,k} s_{k,j}}$$

vérifiant

$$t(Q_s) \leq c_3 D S_1 , \quad \log\left|Q_s(\omega')\right| \leq -c_2 S^m .$$

et les Q_s sont sans zéro commun dans la boule de $(G')^m$,

$$B' = B\big(\omega', \exp(-DS_1)\big) .$$

Quatrième pas. Application de l'inégalité de Brownawell

On procède comme dans le cas $r = 1$.

On a fixé un sous-espace L et noté $N = H(L)$; nous avons considéré un point ω' et un sous-groupe G', nous noterons désormais ω'_N et G'_N ces objets. Comme il existe une infinité de tels N, nous obtenons ainsi une suite de sous-groupes G'_N de codimension $r = n - n'$ et une suite de points ω'_N "proches" de ω. Nous noterons encore $B_N(\omega)$ la boule de centre ω et de rayon $\exp(-DS_1)$, il existe une constante c_{12}, telle que

$$B\left(\omega, \exp\left(-c_{12} N^{(n'+m)/(m-1)}\right)\right) \supset B_N(\omega)$$

et on a $\omega'_N \in B_N(\omega)$..

Soient $\mathcal{I}$ l'idéal des polynômes de $\mathbb{Z}[X_{1,1}, \ldots, X_{n,m}]$ s'annulant en ω, X la $\overline{\mathbb{Q}}$-adhérence de Zariski de $\{\omega\}$, Y_N une composante irréductible de $X \cap (G'_N)^m$ et $\mathfrak{p}_N$ son idéal. Suivant que Y_N rencontre ou non la boule $B_N(\omega)$, on appliquera l'inégalité de Bronawell à X ou à Y_N. Comme dans le cas de codimension 1, on écrit $\dim X = (\dim X - \dim Y_N) + \dim Y_N$ et nous montrons que $\dim X - \dim Y_N \geq 1$. Notons encore $d_N = \dim Y_N$ et $d'_N = \dim X - \dim Y_N$.

Considérons les polynômes $P_{j,\rho}$, $1 \le j \le m$, $1 \le \rho \le r$

$$P_{j,\rho}(X_{1,1}, \dots, X_{n,m}) = \prod_{i \in \Lambda^+} X_{i,j}^{\lambda_i^{(\rho)}} - \prod_{i \in \Lambda^-} X_{i,j}^{\lambda_i^{(\rho)}} ,$$

où

$$\Lambda^+ = \{ i \mid 1 \le i \le n \text{ tels que } \lambda_i^{(\rho)} \ge 0 \}$$

et

$$\Lambda^- = \{ i \mid 1 \le i \le n \text{ tels que } \lambda_i^{(\rho)} < 0 \} .$$

L'idéal $\mathfrak{p}_N$ est un idéal premier associé à $(\mathcal{I}, P_{1,1}, \dots, P_{m,r})$.

Les constantes notées c_{13} à c_{24} qui apparaissent dans ce quatrième pas peuvent dépendre de m, n, p, $|\omega|$ ainsi que de la taille et du degré de $\mathcal{I}$.

Nous distinguons deux cas :

1.— Si $X \cap (G'_N)^m \cap B_N(\omega)$ est vide, l'idéal $(\mathcal{I}, P_{1,1}, \dots, P_{m,r})$ n'a pas de zéro dans $B_N(\omega)$, comme $\omega \in X$, l'inégalité de Brownawell implique

$$\begin{aligned} \log \max_{j,\rho} \left| P_{j,\rho}(\omega) \right| &\ge -c_{13} N^{d+1} - c_{14} N^d N^{(m+n')/m-1} \\ &\ge -c_{15} N^{d+(m+n')/(m-1)} , \end{aligned}$$

où $d = \dim X$. D'autre part, on a

$$\log \left| P_j(\omega) \right| \le -c_{16} N^{n'+1}$$

car $P_{j,r}(\omega') = 0$ et $\log |\omega - \omega'| \le -c_{17} N^{n'+1}$. Ce qui implique

$$d \ge n' + 1 - \frac{n'+m}{m-1} ,$$

ou encore

$$d \ge (n'+1) \left(\frac{m-2}{m-1} \right) - 1 \ge \frac{(n'+1)m}{n+m} - 1 .$$

2.— Si $X \cap (G'_N)^m \cap B_N(\omega)$ est non vide, la taille de $\mathfrak{p}_N$ est majorée par

$$T(\mathcal{I}) N^{\dim X - \dim Y_N} \le c_{18} N^{d'_N}$$

L'inégalité de Brownawell implique

$$\log \max \{ \left| \mathfrak{p}_N(\omega'_N) \right| , \left| Q_s(\omega'_N) \right| \} \ge -c_{19} (D S_1)^{d_N + 1} N^{d'_N} .$$

D'autre part, on a

$$\log\left|\mathfrak{p}_N(\omega'_N)\right| \le c_{20}\log|\omega-\omega'_N| + c_{21}T(\mathfrak{p}_N) \le -c_{22}N^{n'+1} + c_{23}N^{d'_N}$$

si $n'+1 \le d'_N$ alors $\dim X \ge n'+1$, mais si $n'+1 > d'_N$ alors $\log\left|\mathfrak{p}_N(\omega'_N)\right| < -c_{24}N^{n'+1}$.

Par ailleurs (premier et troisième pas)

$$\log\left|Q_s(\omega'_N)\right| \le -c_2S^m \le -c_{25}N^{(n'+1)/\alpha_p}\,.$$

Ainsi, compte tenu du choix de nos paramètres, ces inégalités sont contradictoires lorsque

$$(d_N+1)\frac{n'+m}{m-1} + d'_N \le \frac{n'+1}{\alpha_p}\,,$$

d'où l'on déduit, lorsque p est assez grand, que

$$\dim Y_n = d_N \ge \frac{(n'+1)(m-1)}{n'+m} - 1 - d'_N\frac{m-1}{n'+m'}$$

et donc

$$\dim X = d_N + d'_N \ge \frac{(n'+1)(m-1)}{n'+m} - 1 + d'_N\frac{n'+1}{n'+m}\,.$$

On conclut alors, comme dans le cas précédent, en montrant que $\dim X - \dim Y_N \ge 1$. On obtient la minoration

$$\dim X \ge \frac{(n'+1)m}{n'+m} - 1$$

et le théorème est démontré. □

Appendice

Démonstration du lemme du premier pas

Rappelons que Λ désigne la matrice $\left(\lambda^{(1)}\ \ldots\ \lambda^{(r)}\right)$ et le sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ engendré par les vecteurs qui la composent. On considère que $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)}$ réalisent les minimums successifs de Λ, on a

$$\left|\lambda^{(1)}\right| \le \left|\lambda^{(2)}\right| \le \cdots \le \left|\lambda^{(r)}\right| = \sigma(\Lambda)\,.$$

$\Delta(D)$ est un ensemble de représentants des classes de $\mathbb{Z}^n(D)$ modulo Λ.

Il s'agit de montrer qu'il existe une constante c dépendant de n et de r telle que dès que $D > \sigma(\Lambda)$, on ait

$$\operatorname{card} \Delta(D) \geq cH(\Lambda) D^{n'} .$$

On a

$$H(\Lambda, X_1, \ldots, X_n) = (n-r)! \sum_{\theta \in \phi_{r,n}} \left|\det \Lambda_\theta\right| \prod_{i \notin \theta} X_i .$$

Notons encore θ l'élément de $\phi_{r,n}$ tel que $\left|\det \Lambda_\theta\right|$ soit le plus grand des mineurs d'ordre r de la matrice

$$\left(\lambda_j^{(i)}\right)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}} .$$

Il existe des constantes $c_1(n,r)$ et $c_2(n,r)$ telles que

$$c_1(n,r)\left|\det \Lambda_\theta\right| \leq H(\Lambda) \leq c_2(n,r)\left|\det \Lambda_\theta\right| .$$

Considérons les vecteurs tronqués suivants

$$\lambda_\theta^{(i)} = \left(\lambda_{\theta_1}^{(i)} \ldots \lambda_{\theta_r}^{(i)}\right) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq r .$$

L'inégalité $\left|\lambda^{(i)}\right| \leq \sigma(\Lambda)$, pour tout i, entraîne que dès que $D > \sigma(\Lambda)$, le cube $\mathbb{Z}^r(D)$ contient un domaine fondamental du réseau Λ_θ engendré par $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)}$, et donc au moins $\left|\det \Lambda_\theta\right|$ éléments distincts modulo Λ_θ.

Ainsi

$$\operatorname{card}\left(\mathbb{Z}^r(D)/\Lambda_\theta\right) \geq \left|\det \Lambda_\theta\right| \geq c_3(n,r) H(\Lambda) .$$

D'autre part, considérons $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ des points de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$(x_{\theta_1}, \ldots, x_{\theta_r}) \not\equiv (y_{\theta_1}, \ldots, y_{\theta_r}) \operatorname{mod} \Lambda_\theta ,$$

alors

$$(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv (y_1, \ldots, y_n) \operatorname{mod} \Lambda .$$

En effet, si $x - y \in \Lambda$, alors il existe des entiers $c_1, \ldots, c_r$ tels que

$$x - y = c_1 \lambda^{(1)} + \cdots + c_r \lambda^{(r)} ,$$

mais alors,

$$(x_{\theta_1}, \dots, x_{\theta_r}) - (y_{\theta_1}, \dots, y_{\theta_r}) = c_1\lambda_\theta^{(1)} + \cdots + c_r\lambda_\theta^{(r)} \in \Lambda_\theta$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Ainsi on a bien

$$\operatorname{card}\Delta(D) = \operatorname{card}\big(\mathbb{Z}^r(D)/\Lambda\big) = \operatorname{card}\big(\mathbb{Z}^{n-r}(D)\big)\operatorname{card}\big(\mathbb{Z}^n(D)/\Lambda_\theta\big)$$

d'où

$$\operatorname{card}\Delta(D) \geq cH(\Lambda)D^{n'} .$$

Références

[B1] BROWNAWELL (W. D.) .— *Applications of Caley-Chow forms*, dans "Journées arithmétiques, U.L.M. 1987", Lecture Notes , Springer, **1380** (1989), pp. 1-18.

[B2] BROWNAWELL (W. D.) .— *Large transcendance degree revisited I, Exponential and non-CM cases*, dans "Bonn Workshop on transcendance" 1985, G. Wüstholtzz (éd.), Lecture Notes, Springer, **1290** (1987), pp. 149-173.

[B3] BROWNAWELL (W. D.) .— *Local diophantine Nullstellen inequalities*, J. of the American Math. Soc. **1**, n° 2 (1988), pp. 311-322.

[BP] BERTRAND (D.) et PHILIPPON (P.) .— *Sous-groupes algébriques de groupes algébriques commutatifs*, Illinois J. of Math. **2**, n° 2 (1988), pp. 263-279.

[DM] DIAZ (G.) et MIGNOTTE (M.) .— *Passage d'une mesure d'approximation à une mesure de transcendance*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, Vol. XIII, n° 4 (1991).

[G] GÜTING (R.) .— *Approximation of algebraic numbers by algebraic numbers*, Mich. math. J. **8** (1961), pp. 149-159.

[L] LANG (S.) .— *Algebra* (*third edition*) Addison-Wesley (éd.) 1993.

[M] MASSER (D. W.) .— *On polynomials and exponential polynomials in several variables*, Invent. Math. **63** (1981), pp. 81-95.

[N1] NESTERENKO (Y.) .— *On algebraic independence of algebraic powers of algebraic numbers*, Math. Sbornik **123**, n° 4 (1984), pp. 435-459; et dans "Approximations diophantiennes et nombres transcendants" D. Bertrand et M. Waldschmidt (éd.), Birkhaüser (1983), pp. 199-220.

[N2] NESTERENKO (Y.) .— *On a measure of the algebraic independence of the values of some functions*, Math. Sbornik **128**, n° 4 (1985), pp. 545-568.

[P1] PHILIPPON (P.) .— *Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bull. Soc. Math. France **114**, n° 3 (1986), pp. 355-383.

[P2] PHILIPPON (P.) .— *Critères pour l'indépendance algébrique*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **64** (1985), pp. 5-52.

[P3] PHILIPPON (P.) .— *Sur les mesures d'indépendance algébrique*, dans "Séminaire de théorie des nombres de Paris 1983-84", Progr. Math., C. Goldstein (éd.), Birkaüser, **59** (1985), pp. 219-233.

[PW] PHILIPPON (P.) et WALDSCHMIDT (M.) .— *Lower bounds for linear forms in logarithms*, dans New Advances in Transcendance Theory, Proc. conf. Durham 1986, A. Baker (éd.), Cambridge Univ. Press, chap. 18.

[W1] WALDSCHMIDT (M.) .— *Nombres transcendants*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, **402** (1974).

[W2] WALDSCHMIDT (M.) .— *Nombres transcendants et groupes algébriques*, Soc. Math. France, Astérique **69-70** (1979).

[W3] WALDSCHMIDT (M.) .— *Lemmes de zéros pour les polynômes exponentiels*, dans "Séminaire d'arithmétique Saint-Etienne 1986-87", Publ. Math. Univ. Saint-Etienne, 11 p.

[W4] WALDSCHMIDT (M.) .— *Indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle*, Bull. Soc. Math. France **99** (1971), pp. 285-304.