ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN ESTERLE

Propriétés multiplicatives universelles de certains quotients d'algèbres de Fréchet

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 5, nº 4 (1996), p. 645-659

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1996_6_5_4_645_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. V, n° 4, 1996

Propriétés multiplicatives universelles de certains quotients d'algèbres de Fréchet[(*)]

JEAN ESTERLE[(1)]

RÉSUMÉ. —

Soit A une algèbre de Fréchet commutative unitaire et soit I un idéal premier dense de A qui est réunion d'une série croissante $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ d'idéaux fermés de A. Soit S le semi-groupe multiplicatif des éléments non nuls et non inversibles de l'algèbre quotient A/I.

Alors S contient une copie de tout semi-groupe abélien, non unitaire, concellatif et sans torsion de cardinal $2^{\aleph_0}$ si on admet l'hypothèse du continu.

ABSTRACT. — Let A be a commutative, unital Fréchet algebra, let I be a dense, prime ideal of A and let S be the multiplicative semigroup of nonzero, non invertible elements of A/I. If there exists a nondecreasing sequence $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ of closed ideals of A such that $I = \bigcup_{n\geq 1} I_n$ and if the continuum hypothesis is assumed, then S contains a copy of every abelian, non unital, torsion-free cancellative semigroup of cardinal $2^{\aleph_0}$.

1. Introduction

Soit A une algèbre de Fréchet, commutative unitaire, c'est-à-dire une algèbre commutative unitaire A sur $\mathbb{C}$ munie d'une famille croissante $\left(\|\cdot\|_n\right)_{n>1}$ de semi-normes sous-multiplicatives (dont l'intersection des noyaux est réduite à 0) pour laquelle A est complète. On dira qu'un idéal I de A est de type dénombrable si $I = \bigcup_{n\geq 1} I_n$ où $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'idéaux fermés de A. On sait (voir [11]) qu'un idéal dense de type dénombrable de A n'est jamais maximal. Plus précisément si on désigne par

(*) Reçu le 6 avril 1994

(1) Laboratoire de Mathématiques Pures, E.R.S. 027, 351 cours de la Libération, F-33405 Talence Cedex (France)

$\beta\mathbb{N}$ le compactifié de Stone-Cech de $\mathbb{N}$, il existe une injection $\tau \to M_\tau$ de $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ dans l'ensemble des idéaux maximaux de A de codimension infinie contenant I [11, corollaire 3.2].

On se propose ici de montrer que si I est un idéal premier dense de A de type dénombrable, alors l'ensemble B des éléments non inversibles et non nuls de A/I (qui est non vide d'après ce qui précède) possède une structure multiplicative très riche : il existe une injection $\psi : T'\omega_1 \to B$ telle que

$$\psi(d + d') = \psi(d) \cdot \psi(d'), \quad d,\, d' \in T'\omega_1$$

où $T'\omega_1$ est le "semi-groupe universel" introduit par l'auteur dans [6]. En particulier, si on admet l'hypothèse du continu $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, alors pour tout semi-groupe abélien $(V, +)$ sans torsion, non unitaire, cancellatif (c'est-à-dire que l'application $x \to d + x$ est injective sur V pour tout $d \in V$) ayant la puissance du continu il existe une injection $\varphi : V \to B$ telle que $\varphi(d + d') = \varphi(d)\,\varphi(d')$ $(d,\, d' \in B)$. En faisant apparaître des produits infinis convenables dans A, on déduit les propriétés ci-dessus de propriétés analogues du semi-groupe additif $(\mathcal{E}/\mathcal{R}, +)$ où $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des suites $u = \left(u_n\right)_{n\geq 1}$ d'entiers positifs dominées par une suite

$$p = \left(p_n\right)_{n\geq 1} \quad \text{telle que } p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

arbitrairement donnée, et où $\left(u_n\right)_{n\geq 1} \mathcal{R} \left(v_n\right)_{n\geq 1}$ si les suites $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ et $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$ coïncident à partir d'un certain rang. Nous n'avons pas trouvé cette propriété de $(\mathcal{E}/\mathcal{R}, +)$ dans la littérature, mais il est par contre bien connu depuis le siècle dernier que si on pose

$$\left(u_n\right)_{n\geq 1} > \left(v_n\right)_{n\geq 1} \quad \text{quand } u_n - v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

et si on admet l'hypothèse du continu, alors tout ensemble totalement ordonné S tel que $\operatorname{card} S \leq 2^{\aleph_0}$ est isomorphe en tant qu'ensemble ordonné à un sous-ensemble de $(\mathcal{E}/\mathcal{R}, >)$. Notre démonstration du résultat ci-dessus concernant $(\mathcal{E}/\mathcal{R}, +)$ reprend les méthodes bien connues, à ceci près qu'il faut les appliquer au sous-ensemble de $\mathcal{E}/\mathcal{R}$ formé des suites $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ divisibles à partir d'un certain rang (dépendant de k) par tout entier $k \geq 2$.

Ce travail a été motivé par le problème toujours ouvert de la continuité des caractères sur les algèbres de Fréchet ([2], [3], [4], [15]). L'existence d'un caractère discontinu sur une algèbre de Fréchet commutative est équivalent à l'existence d'un caractère sur un certain quotient $\mathcal{U}/I$ où $\mathcal{U}$ est une algèbre de Fréchet de "fonctions entières" en une infinité de variables (c'est la deuxième des algèbres introduites par Clayton dans [3], et c'est la version commutative de l'algèbre de séries formelles pondérées en une infinité d'indéterminées introduite par Dixon et l'auteur dans [4]) et où I est un idéal premier dense de type dénombrable de $\mathcal{U}$ (voir [12]).

Moyennant des complications techniques, on peut étendre les propriétés multiplicatives universelles de B à l'intersection $\bigcap_{n\geq 1} a^n \cdot B$ pour un élément quelconque a de B (voir également [12]); il nous a plutôt paru utile ici de présenter la méthode basée sur les produits convergents et l'utilisation de $(\mathcal{E}/\mathcal{R}, +)$ dans toute sa simplicité, d'autant plus que cette méthode nouvelle a suggéré à l'auteur des simplifications majeures dans la partie la plus technique ([7], [9], [10], [17], [18]) de sa construction d'homomorphismes discontinus de $\mathcal{C}(K)$ (voir l'article [13] en préparation).

2. Sur certains quotients d'algèbres de Fréchet

Soit $(E, <)$ un ensemble partiellement ordonné. Si A, B sont deux parties non vides de E, on note $A < B$ quand $x < y$ pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$. Si A est non vide, on écrit par convention $\emptyset < A$ et $A < \emptyset$ et on écrira x au lieu de $\{x\}$ quand ces relations concernent des singletons.

DÉFINITION 2.1.— *Un ensemble partiellement ordonné $(E, <)$ est dénombrablement saturé si pour tout couple (A, B) de parties au plus dénombrables de E telles que $A \cup B \neq \emptyset$, $A < B$, il existe $x \in E$ tel que $A < x < B$. On appellera semi-groupes les couples $(V, +)$ (resp. $(V, \cdot)$) où V est un ensemble non vide muni d'une loi abélienne associative notée additivement (resp. multiplicativement).*

Le semi-groupe sera dit cancellatif si l'application $x \to x + y$ (resp. $x \to x.y$) est injective sur V pour tout $y \in V$, et il sera dit sans torsion si $n.c \neq n.d$ (resp. $c^n \neq d^n$) pour c, $d \in V$, $c \neq d$, $n \geq 2$. Un groupe abélien $(G, +)$ est dit divisible si l'équation $n.x = d$ possède une solution dans G pour tout $d \in V$ et tout $n \geq 2$. Si G est divisible et totalement ordonné l'équation $q.x = p.d$ possède alors une unique solution dans G pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $q \geq 1$, et ceci permet de définir sur G une structure d'espace vectoriel sur Q pour laquelle $p.d$ a le sens habituel pour $p \in \mathbb{Z}$ [14]. Pour tout groupe totalement ordonné G, on note G_+ l'ensemble des éléments positifs de G et G_+^* l'ensemble des éléments strictement positifs de G.

DÉFINITION 2. 2.— *Soit $(V,+)$ (resp. $(V,\cdot)$) un semi-groupe. On dira que $(V,+)$ (resp. $(V,\cdot)$) est universel s'il existe un groupe totalement ordonné divisible dénombrablement saturé $(G,+)$ et une application injective $\psi : G_+^* \to V$ telle que $\psi(d+d') = \psi(d)+\psi(d')$ (resp. $\psi(d)\cdot\psi(d')$), d, $d' \in G_+^*$.*

Soit ω_1 le premier ordinal non dénombrable. On note S_{ω_1} l'ensemble des suites transfinies dyadiques $(x_\xi)_{\xi<\omega_1}$ telles que $\{\xi < \omega_1 \mid x_\xi = 1\}$ soit non vide et possède un plus grand élément. Muni de l'ordre lexicographique, S_{ω_1} est un ensemble totalement ordonné dénombrablement saturé (cette construction est due à Sierpinski [16], voir les références dans [1], [5], [6] et [8]). Soit maintenant $G_{\omega_1}^{(1)}$ l'ensemble des applications $f : S_{\omega_1} \to \mathbb{R}$ telles que $\operatorname{supp} f = \{x \in S_{\omega_1} \mid f(x) \neq 0\}$ soit un ensemble bien ordonné au plus dénombrable. Pour f, $g \in G_{\omega_1}^{(1)}$, on pose

$$f > g \quad \text{si } f(x) > g(x)\,, \quad x = \inf\{y \in S_{\omega_1} \mid f(y) \neq g(y)\}\,.$$

Muni de l'addition usuelle des fonctions, $G_{\omega_1}^{(1)}$ est un groupe totalement ordonné divisible dénombrablement saturé [5] et $G_{\omega_1}^{(1)}$ est minimal en ce sens que tout groupe totalement ordonné dénombrablement saturé $(G,+)$ possède un sous-groupe divisible isomorphe en tant que groupe totalement ordonné à $G_{\omega_1}^{(1)}$ [5]. Autrement dit, si on pose $T'_{\omega_1} = \{f \in G_{\omega_1}^{(1)} \mid f > 0\}$, on voit qu'un semi-groupe $(V,+)$ (resp. $(V,\cdot)$) est universel si et seulement s'il existe une application injective $\psi : T'_{\omega_1} \to V$ telle que $\psi(d+d') = \psi(d)+\psi(d')$ (resp. $\psi(d)\cdot\psi(d')$), d, $d' \in T'_{\omega_1}$.

Si $(G,+)$ est un groupe totalement ordonné abélien, avec $\operatorname{card} G \leq \aleph_1$, alors G est isomorphe en tant que groupe totalement ordonné à un sous-groupe de $G_{\omega_1}^{(1)}$ [5]. On en déduit la proposition suivante, implicitement contenue dans [5] et [8].

PROPOSITION 2.3.— *Soit $(V,+)$ (resp. $(V,\cdot)$) un semi-groupe universel, et soit $(W,+)$ un semi-groupe cancellatif, non unitaire et sans torsion. Si $\operatorname{card}(W) \leq \aleph_1$, il existe une injection $\psi : W \to V$ telle que $\psi(d+d') = \psi(d)+\psi(d')$ (resp. $\psi(d)\cdot\psi(d')$), d, $d' \in W$.*

Preuve.— On munit le produit cartésien $W \times W$ de l'addition terme à terme et de la relation $(c,d)\,\mathcal{R}\,(c',d')$ si et seulement si $c+d' = c'+d$. Cette relation est compatible avec l'addition de $W \times W$, et le quotient

$G = W \times W/\mathcal{R}$ est un groupe pour la loi induite, dont l'élément neutre 0 est la classe (c, c), c désignant un élément quelconque de W. Soit $\theta : W \times W \to G$ la surjection canonique. L'application $\varphi : c \to \theta(2c, c)$ est une injection de W dans G telle que

$$\varphi(c + d) = \varphi(c) + \varphi(d)\,, \quad c,\, d \in W$$

(le fait que φ est injective vient du fait que W est cancellatif). En particulier $0 \notin \varphi(W)$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties U de G, stables par addition et contenant $\varphi(W)$, telles que $0 \notin U$. Il résulte immédiatement du lemme de Zorn que $\mathcal{F}$ possède un élément U_0 maximal pour l'inclusion, et il est clair que $\{0\}$, U_0, $-U_0$ sont disjoints deux à deux. Nous allons montrer que

$$G = U_0 \cup \{0\} \cup (-U_0)\,.$$

Pour $z \in G$, posons

$$U_0(z) = \left(\bigcup_{n \geq 0} (U_0 + n.z) \right) \cup \{m.z\}_{m \geq 1}$$

de sorte que $U_0(z)$ est stable par addition et contient $U_0 \cup \{z\}$. Si $z \notin U_0$, on a $0 \in U_0(z)$. Si $m.z = 0$ avec $m \geq 1$, soient $c, d \in W$ tels que $z = \theta(c, d)$. On a alors $(mc, md)\,\mathcal{R}\,(c, c)$ soit $m.c = m.d$ d'où $c = d$, $z = \theta(c, c) = 0$ puisque W est sans torsion. Donc si $z \notin U_0 \cup \{0\}$ il existe $n \geq 0$ et $x \in U_0$ tels que $x + nz = 0$, et on a en fait $n \geq 1$. Si $-z \notin U_0$ il existerait de même $m \geq 1$ et $y \in U_0$ tels que $y + m(-z) = 0$, soit $0 = mx + ny \in U_0$, ce qui est absurde. Donc dans ce cas $-z \in U_0$ et $G = U_0 \cup \{0\} \cup (-U_0)$.

Il est alors facile de voir, et bien connu, que la relation $x < y$ si et seulement si $y - x \in U_0$ fait de $(G, +)$ un groupe totalement ordonné. Comme $\operatorname{card} G \leq \aleph_1$, une récurrence transfinie de routine (voir par exemple [5]) montre que G est isomorphe en tant que groupe totalement ordonné à un sous-groupe de $G_{\omega_1}^{(1)}$. Comme $\varphi : c \to \theta(2c, c)$ est une application injective, et comme $\varphi(W) \subset G_+^*$, la proposition en résulte.

On voit donc que si V est un semi-groupe universel cancellatif, non unitaire, sans torsion de cardinal $2^{\aleph_0}$ (par exemple si $V = T'_{\omega_1}$), la structure de V est aussi riche que possible si on admet l'hypothèse du continu $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ puisque dans ce cas V contient une copie de tout semi-groupe cancellatif non unitaire sans torsion W tel que $\operatorname{card} W \leq 2^{\aleph_0} = \operatorname{card} V$. Par contre,

T'_{ω_1} perd cette propriété si on suppose que $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ car dans ce cas il n'existe aucune injection respectant l'addition de T'_{ω_2} dans T'_{ω_1}, où T'_{ω_2} est le semi-groupe construit de manière analogue à T'_{ω_1} à partir de l'ensemble des suites transfinies dyadiques $(x_\xi)_{\xi<\omega_2}$ telles que $\{\xi \mid x_\xi = 1\}$ possède un plus grand élément [5]. □

DÉFINITION 2.4.— *Soit $(V,+)$ un semi-groupe. On dira que $(V,+)$ est un semi-groupe rationnel si on a une application $(r,d) \to r.d$ de $Q_+^* \times V$ dans V possédant les propriétés suivantes :*

$$(r+r').d = r.d + r'.d\,, \quad r,\, r' \in Q_+^*\,,\ d \in V\,, \tag{1}$$

$$1.d = d\,, \quad d \in V\,, \tag{2}$$

$$r.(d+d') = r.d + r.d'\,, \quad r \in Q_+^*\,,\ d,\, d' \in V\,, \tag{3}$$

$$r.(r'd) = (r.r').d\,, \quad r,\, r' \in Q_+^*\,,\ d \in V\,. \tag{4}$$

Notons qu'un semi-groupe rationnel est nécessairement sans torsion car si $n.d = n.d'$ alors
$$d = \frac{1}{n}(n.d) = \frac{1}{n}(n.d') = d'\,.$$

Nous énonçons comme une lemme une propriété élémentaire utilisée notamment dans [7], [10] et [18].

LEMME 2.5.— *Soit $(V,+)$ un semi-groupe rationnel, cancellatif et non unitaire. Pour d, $d' \in V$ posons $d < d'$ si $d' \in d + V$. On suppose que l'on a les trois propriétés suivantes :*

(1) toute suite strictement croissante d'éléments de V est majorée;

(2) toute suite strictement décroissante d'éléments de V est minorée;

(3) si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante d'éléments de V, et si $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement décroissante d'éléments de V telle que $v_n > u_n$ pour tout $n \geq 1$, alors il existe $d \in V$ tel que $v_n > d > u_n$ pour tout $n \geq 1$.

Alors $(V,+)$ est un semi-groupe universel.

Soit maintenant $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\geq 1}$ d'entiers strictement positifs muni de l'addition terme à terme. Pour $u = (u_n)_{n\geq 1}$, $v = (v_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ on pose la condition suivante.

Condition 2.6.— $u \mathcal{R} v$ si et seulement si $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq v_n\}$ est fini ou vide. Il est clair que cette relation d'équivalence est compatible avec l'addition de sorte que $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\mathcal{R}, +)$ est un semi-groupe. Ce semi-groupe est évidemment cancellatif, non unitaire, et sans torsion.

PROPOSITION 2.7.— *Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers positifs telle que*

$$p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty .$$

Soit

$$\mathcal{E} = \left\{ u = (u_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \frac{u_n}{p_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\} .$$

Alors $(\mathcal{E}/\mathcal{R}, +)$ est un semi-groupe universel.

Preuve.— Soit $\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{R}$ l'application canonique, et soit

$$F = \bigcap_{k\geq 1} k \cdot \mathcal{E}/\mathcal{R} .$$

Comme $p_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, on peut construire une suite strictement croissante $(q_k)_{k\geq 1}$ d'entiers positifs, avec $q_0 = 1$, telle que $p_n \geq (k+1)!$ pour $n \geq q_k$. Pour $q_k \leq n < q_{k+1}$, $k \geq 0$, posons $u_n = k!$.

Soit $u = (u_n)_{n\geq 1}$. On a $u_n/p_n \leq 1/k$ pour $q_k \leq n < q_{k+1}$ et par conséquent $u \in \mathcal{E}$. Comme u_n est divisible par k pour $n \geq q_k$, on a $\theta(u) \in F$ et F est non vide. Comme $F \subset \mathcal{E}/\mathcal{R}$, F est sans torsion. De plus si $d \in F$, $n \geq 2$ et si $x \in \mathcal{E}/\mathcal{R}$ vérifie $n.x = d$, alors pour tout $m \geq 1$ il existe $y \in \mathcal{E}/\mathcal{R}$ tel que $n.m.y = d$ et on a $x = m.y$. Donc $F = \bigcap_{n\geq 1} nF$ et on munit $(F, +)$ une structure de semi-groupe rationnel en notant $(p/q).d$ l'unique solution dans F de l'équation $q.x = p.d$ pour $p \geq 1$, $q \geq 1$.

Soient $u = (u_n)_{n\geq 1}$ et $v = (v_n)_{n\geq 1}$ deux éléments de $\mathcal{E}$, et supposons qu'il existe $w = (w_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{E}$ tel que $\theta(u) = \theta(v) + \theta(w)$. Si $\theta(u) \in F$ et $\theta(v) \in F$, alors il existe pour tout $k \geq 2$ un entier q_k tel que u_n et v_n soient divisibles par k pour $n \geq q_k$. Comme $u_n = v_n + w_n$ pour n assez grand, $\theta(w) \in F$ et on voit que la relation d'ordre sur $\mathcal{E}/\mathcal{R}$ au sens du lemme 2.5 coïncide sur F avec la relation d'ordre de F.

Soit $(\alpha_m)_{m\geq 1}$ une suite strictement croissante d'éléments de F et, pour $m \geq 1$, soit

$$u_m = (u_{m,n})_{n\geq 1} \in \mathcal{E} \quad \text{telle que } \theta(u_m) = \alpha_m .$$

On peut construire par récurrence une suite $(q_k)_{k\geq 0}$ strictement croissante d'entiers avec $q_0 = 1$, telle que

$$u_{k+1,n} > u_{k,n}\,, \quad \frac{u_{k+1,n}}{p_n} < \frac{1}{k}$$

et telle que $u_{k+1,n}$ soit divisible par $(k+1)!$ pour $n \geq q_k$, $k \geq 1$. Posons $w_n = u_{k+1,n}$ pour $q_k \leq n < q_{k+1}$. Pour $n \geq 1$ soit $\sigma(n) \geq 0$ l'entier défini par les relations $q_{\sigma(n)} \leq n < q_{\sigma(n)+1}$.

On a $w_n/p_n < 1/\sigma(n)$ pour $n \geq q_1$ et $w = (w_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{E}$. Pour $m \geq 2$, $n \geq q_{m-1}$, on a $\sigma(n) \geq m-1$, et $w_n = u_{\sigma(n)+1,n}$ est divisible par $(\sigma(n)+1)!$, donc par m. Donc $\theta(w) \in F$.

Une récurrence immédiate montre que $u_{k+1,n} \geq u_{m,n}$ pour $n \geq q_k$, $1 \leq m \leq k$, $k \geq 1$. Pour $m \geq 1$ et $n \geq q_m$, on a

$$\sigma(n) \geq m \quad \text{et} \quad w_n = u_{\sigma(n)+1,n} > u_{m,n}\,.$$

Posons

$$r_{m,n} = \begin{cases} w_n - u_{m,n} & \text{si } n \geq q_m \\ 1 & \text{si } 1 \leq n \leq q_m \end{cases} \qquad \text{et} \quad r_m = (r_{m,n})_{n\geq 1}\,.$$

On a $\alpha^m + \theta(r_m) = \theta(w)$ donc $\theta(w) > \alpha_m$, $m \geq 1$. Soient maintenant $(\alpha_m)_{m\geq 1}$ une suite strictement croissante d'éléments de F et $(\beta_m)_{m\geq 1}$ une suite strictement décroissante d'éléments de F telles que $\alpha_m < \beta_m$, $m \geq 1$. Pour $m \geq 1$, soient $u_m = (u_{m,n})_{n\geq 1}$ et $v_m = (v_{m,n})_{n\geq 1}$ des éléments de $\mathcal{E}$ vérifiant

$$\theta(u_m) = \alpha_m\,, \quad \theta(v_m) = \beta_m\,.$$

On définit de même que plus haut une suite strictement croissante $(q_k)_{k\geq 0}$ d'entiers, avec $q_0 = 1$, telle que

$$v_{k,n} > v_{k+1,n} > u_{k+1,n} > u_{k,n}$$

et telle que $v_{k+1,n}$ et $u_{k+1,n}$ soient divisibles par $(k+1)!$ pour $n > q_k$, $k \geq 1$. On définit $w = (w_n)_{n\geq 1}$ et $\sigma(n)$ pour $n \geq 1$ de même que ci-dessus. Une récurrence immédiate montre que $v_{m,n} > v_{k+1,n} > u_{k+1,n} > u_{m,n}$ pour $n \geq q_k$, $1 \leq m \leq k$, $k \geq 1$. Pour $m \geq 1$ et $n \geq q_m$, on a alors

$$v_{m,n} > v_{\sigma(n)+1,m} > u_{\sigma(n)+1,m} > u_{m,n}\,,$$

soit $v_{m,n} > w_n > u_{m,n}$. Si on pose

$$r_{m,n} = w_n - u_{m,n} \,, \quad s_{m,n} = v_{m,n} - w_n \,, \quad n \geq q_m$$
$$r_{m,n} = s_{m,n} = 1 \,, \quad 1 \leq n < q_m$$
$$r_m = \left(r_{m,n}\right)_{n\geq 1} \,, \quad s_m = \left(s_{m,n}\right)_{n>1} \,,$$

on a

$$\theta(s_m) + \theta(w) = \beta_m \,, \quad \theta(w) = \theta(r_m) + \alpha_m \,.$$

On vérifie de même que plus haut $\theta(w) \in F$ et on a $\beta_m > \theta(w) > \alpha_m$, $m \geq 1$.

Soit maintenant $\left(\beta_m\right)_{m\geq 1}$ une suite strictement décroissante d'éléments de F. La suite $\left(v_m\right)_{m\geq 1}$ étant définie comme ci-dessus, on construit par récurrence une suite strictement croissante $\left(q_k\right)_{k\geq 0}$ d'entiers, avec $q_0 = 1$ telle que $v_{k,n} > v_{k+1,n}$ et telle que $v_{k+1,n}$ soit divisible pour $(k+1)!$ pour $n \geq q_k$.

Posons $w_n = v_{k+1,n}$ pour $q_k \leq n < q_{k+1}$ et $w = \left(w_n\right)_{n\geq 1}$. On définit $\sigma(n)$ de même que plus haut pour $n \geq 1$.

Les calculs précédents montrent que pour $m \geq 1$ et $n > q_m$ on a

$$v_{m,n} > v_{\sigma(n)+1,n} = w_n$$

et, en définissant $s_m = \left(s_{m,n}\right)_{n\geq 1}$ comme précédemment, on obtient $\beta_m + \theta(w) = \theta(s_m)$. L'argument précédent montre que $\theta(w) \in F$ et on a $\theta(w) < \beta_m$, $m \geq 1$. Il résulte alors du lemme 2.5 que F est un semi-groupe universel. *A fortiori*, $(\mathcal{E}/\mathcal{R}, +)$ est un semi-groupe universel.

Notons que la richesse de la structure de $(\mathcal{E}/\mathcal{R}, +)$ ne dépend pas du choix de la suite $\left(p_n\right)_{n\geq 1}$. En effet, si $\left(p'_n\right)_{n\geq 1}$ est une autre suite d'entiers positifs telle que $p'_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ et si $p''_n = \inf(p_n, p'_n)$ $(n \geq 1)$, désignons par $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ les ensembles associés à $\left(p'_n\right)_{n\geq 1}$ et $\left(p''_n\right)_{n\geq 1}$. Il est clair que $(\mathcal{E}''/\mathcal{R}, +)$ s'injecte naturellement dans $(\mathcal{E}/\mathcal{R}, +)$ et $(\mathcal{E}'/\mathcal{R}, +)$.

Soit maintenant $\left(q_k\right)_{k\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers, avec $q_0 = 1$, telle que $p''_n \geq p_k$ pour $n \geq q_k$, $k \geq 1$. Pour $u = \left(u_n\right)_{n\geq 1}$ posons $\varphi(u) = \left(v_n\right)_{n\geq 1}$ où $v_n = u_k$ pour $q_k \leq n < q_{k+1}$. On obtient

$$\frac{v_n}{p''_n} \leq \frac{u_{\sigma(n)}}{p_{\sigma(n)}} \quad \text{pour } n \geq q_1 \,,$$

où $\sigma(n)$ est défini par les relations $q_{\sigma(n)} \leq n < q_{\sigma(n)+1}$, et $\varphi(u) \in \mathcal{E}''$. On a $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$, $u, v \in \mathcal{E}$, et l'application $\theta(u) \to \theta(\varphi(u))$ est une injection de $\mathcal{E}/\mathcal{R}$ dans $\mathcal{E}''/\mathcal{R}$ respectant l'addition. Donc il existe une injection respectant l'addition de $(\mathcal{E}/\mathcal{R}, +)$ dans $(\mathcal{E}'/\mathcal{R}, +)$ et de même il existe une injection respectant l'addition de $(\mathcal{E}'/\mathcal{R}, +)$ dans $(\mathcal{E}/\mathcal{R}, +)$.

Soit maintenant A une algèbre de Fréchet commutative unitaire sur $\mathbb{C}$, et soit e l'unité de A. La topologie de A est alors définie par une suite croissante $(\|\cdot\|)_{n\geq 1}$ de semi-normes sous-multiplicatives telles que $\|e\|_n = 1$, $n \geq 1$. On note $\widehat{A}$ l'ensemble des caractères continus de A, et le spectre d'un élément quelconque a de A coïncide avec l'ensemble $\{\chi(a)\}_{\chi\in\widehat{A}}$ [15] (un résultat analogue, mais plus difficile à établir, est valable pour le spectre simultané d'une famille finie d'éléments de A [2]). Si $\chi \in \widehat{A}$, il existe $n \geq 1$ et $K > 0$ tel que $|\chi(x)| \leq K\|x\|_n$, $x \in A$. Soit

$$F = \{x \in A \mid \|x\|_n = 0\} .$$

L'application $p : x + F \to \|x\|_n$ définit une norme sur l'algèbre quotient A/F, et l'application $\widetilde{\mathcal{X}} : x+F \to \chi(x)$ est un caractère continu sur $(A/F, p)$. Donc $|\widetilde{\mathcal{X}}(x+F)| \leq p(x+F)$, c'est-à-dire que $|\chi(x)| \leq \|x\|_n$ pour tout $x \in A$ (et on a en fait $K = 1$ dans l'inégalité ci-dessus). □

Dans ce qui suit le terme idéal désignera toujours un idéal propre, c'est-à-dire strictement contenu dans l'algèbre correspondante.

LEMME 2.8.— *Soit I un idéal dense d'une algèbre de Fréchet commutative unitaire A, soit $J \subset I$ un idéal fermé de A, et soit $\pi : A \to A/J$ l'application canonique. Il existe alors une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de I telle que $z_n \to 0$, $n \to \infty$, et telle que $\pi(e + z_n) \notin \mathrm{Inv}(A/J)$, $n \geq 1$.*

Preuve.— Traitons tout d'abord le cas où $J = \{0\}$, et soit $n \geq 1$. Il existe $x \in I$ tel que $\|x - e\|_n < 1$ et il existe $\chi \in \widehat{A}$ tel que $\chi(x) = 0$. On a alors $|\chi(x) - e| > \|x - e\|_n$ et, par conséquent, χ est discontinu pour la semi-norme $\|\cdot\|_n$. Comme I est dense dans A, il existe $u \in I$ tel que $\chi(u) = 1$ et il existe $y \in A$ tel que

$$\chi(y) = 1 \quad \text{et} \quad \|y\|_n < \frac{1}{n(1 + \|u\|_n)} .$$

Posons $z_n = -u.y$. On a $\chi(e + z_n) = 0$, $z_n \in I$ et $\|z\|_n < 1/n$. Donc

$$z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad e + z_n \notin \mathrm{Inv}\, A .$$

Considérons maintenant un idéal fermé J de A tel que $J \subset I$ et soit $\pi : A \to A/J$ l'application canonique. Alors $\pi(I)$ est un idéal dense de l'algèbre de Fréchet A/J. Il existe d'après ce qui précède une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\pi(I)$ telle que $u_n \to 0$, $n \to \infty$, et telle que $e + u_n \notin \mathrm{Inv}(A/J)$, $n \geq 1$. Mais il existe alors une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de I telle que

$$z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \pi(z_n) = u_n\,, \quad n \geq 1\,,$$

ce qui achève la démonstration du lemme. □

Rappelons qu'un idéal I d'une algèbre commutative A est dit modulaire quand l'algèbre quotient A/I est unitaire. Si A est une algèbre non unitaire, on notera $A^\sharp = A \oplus \mathbb{C}e$ l'algèbre obtenue en adjoignant une unité e à A. Si $(A, \|\cdot\|_n)_{n\geq 1}$ est une algèbre de Fréchet, on munit $A^\sharp$ d'une structure d'algèbre de Fréchet en posant $\|x + \lambda e\|_n = \|x\|_n + |\lambda|$, $x \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

LEMME 2.9.— *Soit I un idéal dense de type dénombrable d'une algèbre de Fréchet commutative non unitaire A. Si I est modulaire, il existe un idéal dense de type dénombrable J de $A^\sharp$ tel que les algèbres quotient A/I et $A^\sharp/J$ sont isomorphes.*

Preuve.— Soit $f \in A$ tel que $x - xf \in I$, $x \in A$, et soit $(I_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'idéaux fermés de A telle que $I = \bigcup_{n\geq 1} I_n$. Posons

$$U_n = \{x \in A \mid x - xf \in I_n\}\,, \quad n \geq 1\,.$$

On a $A = \bigcup_{n\geq 1} U_n$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de sous-espaces fermés de A. Il résulte alors de la propriété de Baire que $A = U_n$ pour n assez grand, et on peut en fait supposer que $x - xf \in I_n$ pour tout $x \in A$ et pour tout $n \geq 1$. Posons

$$J = I + (f - e)\,\mathbb{C}\,, \quad J_n = I_n + (f - e)\,\mathbb{C}\,, \quad n \geq 1\,.$$

On vérifie immédiatement que J et J_n, $n \geq 1$, sont des idéaux de $A^\sharp$; on a $J = \bigcup_{n\geq 1} J_n$. D'autre part J_n, somme d'un sous-espace fermé et d'un sous-espace de dimension 1 de $A^\sharp$, est fermé dans $A^\sharp$ pour $n \geq 1$; J est de type dénombrable. Il existe une suite $(u_p)_{p\geq 1}$ d'éléments de I telle que $u_p \to f$ $(p \to \infty)$. On a alors $u_p + e - f \to e$ $(p \to \infty)$ et J est dense dans $A^\sharp$.

Soit $\pi : A^\sharp \to A^\sharp/J$ l'application canonique. On a $J \cap A = I$, $\pi(f) = \pi(e)$. Donc $\pi(A) = A^\sharp/J$ et comme $\ker \pi \cap A = J \cap A = I$, les algèbres quotient A/I et $A^\sharp/J$ sont isomorphes, ce qui démontre le lemme. □

THÉORÈME 2.10.— *Soit I un idéal premier modulai re dense de type dénombrable d'une algèbre de Fréchet commutative sur $\mathbb{C}$, et soit B l'ensemble des éléments non nuls et non inversibles de A/I. Alors $(B, \cdot)$ est un semi-groupe universel.*

Preuve.— Il résulte du lemme 2.9 que l'on peut supposer que A est unitaire. On a

$$I = \bigcup_{n \geq 1} I_n$$

où $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'idéaux fermés de A. Pour $U \subset A$, on notera $A \setminus U = \{x \in A \mid x \notin U\}$ le complémentaire de U dans A. On a

$$A \setminus I = \bigcap_{n \geq 1} (A \setminus I_n),$$

et par conséquent $A \setminus I$ est un G_δ de A. D'après un résultat élémentaire bien connu la topologie induite sur $A \setminus I$ par celle de A peut être définie par une distance d pour laquelle $A \setminus I$ est complet.

Soit $\pi : A \to A/I$ (resp. $\pi_n : A \to A/I_n$) l'application canonique. Comme I est premier, $A \setminus I$ est stable par produits et $e + z \in A \setminus I$ pour $z \in I$. Soit $\left(p_n\right)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers positifs telle que $p_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Il résulte du lemme 2.8 que l'on peut construire par récurrence une suite $\left(z_n\right)_{n\geq 1}$ d'éléments de I vérifiant les conditions suivantes :

$$\pi_n(e + z_n) \notin \mathrm{Inv}(A/I_n), \quad n \geq 1, \tag{5}$$

$$d\left[\prod_{k=1}^{n} (e + z_k)^{m_k}, \prod_{k=1}^{n+1} (e + z_k)^{m_k}\right] < 2^{-n} \tag{6}$$

$(0 \leq m_k \leq p_k,\ k \leq n+1,\ n \geq 1)$. Soit

$$\mathcal{E} = \left\{ u = \left(u_n\right)_{n\geq 1} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \frac{u_n}{p_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

Il résulte de (6) que la suite $\left(\prod_{k=p}^{n}(e+z_k)^{u_k}\right)$ converge dans $A \setminus I$ pour tout $p \geq 1$ et pour tout $u = \left(u_n\right)_{n\geq 1} \in \mathcal{E}$. Soit $\varphi_p(u)$ sa limite. On a

$$\varphi_p(u+v) = \varphi_p(u) \cdot \varphi_p(v)\,, \quad u,\, v \in \mathcal{E}\,,\; p \geq 1$$

et

$$(\pi \circ \varphi_p)(u) = (\pi \circ \varphi_1)(u)\,, \quad u \in \mathcal{E}\,,\; p \geq 1\,.$$

Si $u \mathcal{R} v$, on a $\varphi_p(u) = \varphi_p(v)$ pour p assez grand et par conséquent $\varphi : \theta(u) \longrightarrow (\pi \circ \varphi_1)(u)$ est une application bien définie de $\mathcal{E}/\mathcal{R}$ dans A/I telle que $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)$, α, $\beta \in \mathcal{E}/\mathcal{R}$. Soit $u \in \mathcal{E}$. Comme $\varphi_1(u) \in A \setminus I$, $\varphi\big[\theta(u)\big] \neq 0$.

Comme $I = \bigcup_{n\geq 1} I_n$ on voit que

$$\pi^{-1}\big(\mathrm{Inv}(A/I)\big) = \bigcup_{n\geq 1} \pi_n^{-1}\big(\mathrm{Inv}(A/I_n)\big)\,.$$

Mais si $u = \left(u_n\right)_{n\geq 1} \in \mathcal{E}$, on a

$$\pi_n\big(\varphi_1(u)\big) = \pi_n\left(\prod_{k=1}^{n}(e+z_k)^{u_k}\right)\cdot \pi_n\big(\varphi_{n+1}(u)\big)\,.$$

Comme $\pi_n(e+z_n) \notin \mathrm{Inv}\, A/I_n$,

$$\pi_n\big(\varphi_1(u)\big) \notin \mathrm{Inv}(A/I_n\,, \quad n \geq 1\,,$$

et

$$\varphi\big(\theta(u)\big) = \pi\big(\varphi_1(u)\big) \notin \mathrm{Inv}(A/I)\,.$$

Par conséquent $\varphi(\mathcal{E}/\mathcal{R}) \subset B$.

D'après la proposition 2.7, il existe un morphisme de semi-groupes $\rho : T'_{\omega_1} \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{R}$. Posons $\psi = \varphi \circ \rho$. On a alors $\psi(d+d') = \psi(d)\cdot\psi(d')$, d, $d' \in T'_{\omega_1}$. Si $d' > d$, alors $\psi(d-d') \in B$, donc $\psi(d-d') \neq e$. Comme $\psi(d) \neq 0$ et comme A/I est intègre, on a alors $\psi(d') = \psi(d'-d)\cdot\psi(d) \neq \psi(d)$ et ψ est injectif. Ceci achève la démonstration du théorème. □

Après avoir obtenu $\psi : T'_{\omega_1} \longrightarrow B$, on serait tenté d'essayer, comme dans [6], d'obtenir un morphisme d'algèbre injectif δ de l'algèbre $\mathbb{C}_{\omega_1}$ (introduite dans [6]) dans A/I pour lequel l'image de l'unique idéal maximal de $\mathbb{C}_{\omega_1}$ serait contenue dans $B \cup \{0\}$. L'outil utilisé dans [6] pour réaliser les extensions transcendantes reste valable dans A/I [12, Corollaire 3.4]. Par contre, le radical de A/I peut être réduit à $\{0\}$ (c'est le cas de l'algèbre quotient liée au problème de Michael mentionnée dans l'introduction) et dans cette situation le seul homomorphisme $\delta : \mathbb{C}_{\omega_1} \to A/I$ est de la forme $f \to \chi(f) \cdot e$ où χ est l'unique caractère de $\mathbb{C}_{\omega_1}$.

La méthode inaugurée dans le présent article, basée sur le fait que $(\mathcal{E}/\mathcal{R}, +)$ est universel permet, moyennant des lemmes faciles de relèvement, de montrer que $\bigcap_{n\geq 1} a^n.B$ est universel pour tout $a \in B$, les notations étant celles du théorème 2.10. Elle permet également de simplifier considérablement la construction d'homomorphismes discontinus de $\mathcal{C}(K)$ proposée par l'auteur. Des indications à ce sujet sont données dans [12]; ce dernier point fera l'objet d'un article ultérieur détaillé [13].

Références

[1] ALLING (N.) .— *On ordered divisible groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1972), pp. 329-340.

[2] ARENS (R.) .— *Dense inverse limit rings*, Michigan Math. J. **5** (1958), pp. 168-182.

[3] CLAYTON (D.) .— *A reduction of the continuous homomorphism problem for F-algebras*, Rocky Mountains Math. J. **5** (1975), pp. 337-344.

[4] DIXON (P.-G.) et ESTERLE (J.) .— *Michael's problem and the Poincaré–Fatou–Bieberbach phenomenon*, Bull. Amer. Math. Soc. **15** (1986), pp. 127-187.

[5] ESTERLE (J.) .— *Solution d'un problème d'Erdös, Gilman et Henriksen et application à l'étude des homomorphismes de $\mathcal{C}(K)$*, Acta. Math. (Hungarica), **30** (1977), pp. 113-127.

[6] ESTERLE (J.) .— *Sur l'existence d'un homomorphisme discontinu de $\mathcal{C}(K)$*, Proc. London Math. Soc. **36**, n° 3 (1978), pp. 46-58.

[7] ESTERLE (J.) .— *Injection de semigroupes divisibles dans les algèbres de convolution et construction d'homomorphismes discontinus de $\mathcal{C}(K)$*, Proc. London Math. Soc. **36**, n° 3 (1978), pp. 59-85.

[8] ESTERLE (J.) .— *Homomorphismes discontinus des algèbres de Banach commutatives séparables*, Studia Math. **66** (1979), pp. 119-141.

[9] ESTERLE (J.) .— *Universal properties of some commutative radical Banach algebras*, J. für Reine und Ang. Math. **321** (1981), pp. 1-24.

[10] ESTERLE (J.) .— *Real semigroups in commutative Banach algebras*, Springer Lect. Notes **1221** (1986), pp. 16-35.

[11] ESTERLE (J.) .— *Idéaux maximaux denses dans les algèbres de Fréchet*, Bull. Sci. Math. **119** (1995), pp. 187-194.

[12] ESTERLE (J.) .— *Picard's theorem, Mittag-Leffler methods, and continuity of characters on Fréchet algebras*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup. **29** (1996), pp. 539-582.

[13] ESTERLE (J.) .— *Embedding divisible semigroups in radical Banach algebras*, en préparation.

[14] FUCHS (L.) .— *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press, Oxford, 1963.

[15] MICHAEL (E. A.) .— *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **11** (1952).

[16] SIERPINSKI (W.) .— *Sur une propriété des ensembles ordonnés*, Fund. Math. **5** (1949), pp. 14-19.

[17] ZOUAKIA (F.) .— *The theory of Cohen elements*, Springer Lect. Notes **975** (1983), pp. 163-178.

[18] ZOUAKIA (F.) .— *Semi-groupes réels dans les algèbres de Banach commutatives*, J. London Math. Soc. **36**, n° 2 (1987), pp. 543-552.