MUSTAPHA BOUHAR

Sur la symétrie radiale et l'unicité de solutions d'équations elliptiques semi-linéaires

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 6, nº 1 (1997), p. 105-120

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1997_6_6_1_105_0>

Sur la symétrie radiale et l'unicité de solutions d'équations elliptiques semi-linéaires[*]

MUSTAPHA BOUHAR[1]

RÉSUMÉ. — On étudie ici la symétrie radiale des solutions de l'équation :

$$u_{tt} + au_t + u_{\sigma\sigma} - \lambda u + \phi(t) + f(u) = 0 \quad \text{dans } I \times S^1 ,$$

où $I = [0, +\infty[$, $S^1 = [0, 2\pi]$, f vérifiant certaines hypothèses, ϕ est une fonction positive, a et λ sont deux nombres réels. On étudie aussi l'unicité des solutions radiales quand $\phi \equiv 0$.

ABSTRACT. — We study here the radial symmetry of the solutions of:

$$u_{tt} + au_t + u_{\sigma\sigma} - \lambda u + \phi(t) + f(u) = 0 \quad \text{in } I \times S^1 ,$$

where $I = [0, +\infty[$ and $S^1 = [0, 2\pi]$ and f satisfy some properties and ϕ is a positive function and a, λ are two real numbers. We study also the uniqueness for radial solutions when $\phi \equiv 0$.

1. Introduction

On considère l'équation différentielle non linéaire :

$$u_{tt} + au_t + u_{\sigma\sigma} - \lambda u + \phi(t) + f(u) = 0 \quad \text{dans } I \times S^1 , \tag{1}$$

où S^1 désigne la sphère de $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et de rayon 1, $I = [0, +\infty[$, $\phi(t)$ est une fonction positive, a et λ sont deux nombres réels tel que a soit différent de zéro.

(*) Reçu le 12 octobre 1993

(1) Laboratoire de Mathématiques et Applications, Université de Tours, Faculté des Sciences et Techniques, Parc de Grandmont, F-37200 Tours (France)

Rappelons que certaines hypothèses sur f permettent de mettre en évidence une estimation a priori pour les solutions positives de (1) (M. Bouhar [2] et M. Bouhar et L. Veron [3]) et par conséquent de définir leur comportement asymptotique au voisinage de l'infini (M. F. Bidaut-Veron et M. Bouhar [1]). Ici on s'intéresse, dans un premier temps, à la symétrie radiale des solutions positives u de (1) avec des données mixtes au bord. Notre premier résultat est le suivant.

THÉORÈME 1.— *Supposons que l'hypothèse suivante soit vérifiée.*

(H1) *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $f(s) - \lambda s$ soit décroissante sur $[0, \varepsilon_0]$ et considérons une solution positive u de (1) vérifiant :*

$$\limsup_{t \to +\infty} \big(u(t,\sigma)\big) \leq \varepsilon_0 \quad \textit{uniformément sur } S^1 , \tag{2}$$

et il existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ assez grand tel que :

$$u(t_0, \sigma) = u(t_0) \quad \textit{pour tout } \sigma \in S^1 . \tag{3}$$

Alors

$$u(t_0, \sigma) = u(t_0) \quad \textit{pour tout } t \geq t_0 \textit{ et } \sigma \in S^1 . \tag{4}$$

Notre second résultat est le suivant.

THÉORÈME 2.— *Supposons que l'hypothèse suivante soit vérifiée.*

(H2) *Il existe $\delta_0 < 0$ tel que :*

$$\operatorname{sign}(-a)\delta_0 \left(s\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(s) - f(s) \right) \geq 2f(s) \quad \textit{pour } s \geq 0 \textit{ et } \lambda < \frac{a^2}{4} .$$

Considérons une solution positive u de (1) vérifiant

$$u(t_0, \cdot\,) = 0 \quad \textit{sur } S^1 \textit{ pour un certain } t_0 \in \mathbb{R}^+ . \tag{5}$$

Alors

$$u(t_0, \sigma) = u(t) \quad \textit{pour tout } \sigma \in S^1 \textit{ et } t \geq t_0 . \tag{6}$$

Ensuite, on suppose que a et λ sont strictement positives et on caractérise, pour $\xi \leq 0$ donné, les solutions du problème (PVI) suivant :

$$u_{tt} + au_t - \lambda u + f(u) = 0 , \quad t \geq 0 ,\ u > 0 ,\ t > 0 , \tag{7}$$

$$u'(0) = \xi , \tag{8}$$

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0 . \tag{9}$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(r) = f(r) - \lambda r$ et G sa primitive qui s'annule en zéro. Enfin, soit $U_0 = \inf\{u \in]0, +\infty[\mid G(u) > 0\}$. Dans leur article [4], L. A. Peletier et J. Serrin ont montré que si g vérifiait les hypothèses suivantes :

(H3) g est définie, continue et localement lipschitzienne sur $]0, +\infty[$,

(H4) $\displaystyle\lim_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} = -\lambda$,

(H5) $\int_0^\delta g(u)\, du > 0$ pour un réel δ positif,

(H6) $g(u)/(u - U_0)$ est décroissante sur $]U_0, +\infty[$, où $g(u) > 0$,

alors le problème suivant :

$$u_{tt} + \frac{n-1}{t} u_t + g(u) = 0\,, \quad t \geq 0\,,\ u \geq 0\,,\ t \geq 0\,, \tag{10}$$

$$u'(0) = 0\,, \quad \lim_{t\to+\infty} u(t) = 0 \tag{11}$$

admettait au plus une solution. Leurs techniques nous permettent d'établir des résultats d'unicité similaires pour les solutions de (PVI).

THÉORÈME 3.— *Supposons que (H3), (H4), (H5) et (H6) soit vérifiées. Alors le problème (PVI) admet au plus une solution.*

2. Démonstration du théorème 1

Comme dans la démonstration du théorème 2.1 (L. Veron [5]), on introduit la fonction moyenne :

$$\overline{u}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} u(t,\sigma)\, d\sigma\,. \tag{12}$$

Celle-ci vérifie l'équation :

$$\overline{u}_{tt} + a\overline{u}_t - \lambda\overline{u} + \phi(t) + \overline{f(u)} = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0\,. \tag{13}$$

Considérons $w(t,\sigma) = u(t,\sigma) - \overline{u(t)}$. w vérifie l'équation :

$$w_{tt} + aw_t + w_{\sigma\sigma} - \lambda w + f(u) - \overline{f(u)} = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0\,. \tag{14}$$

Ensuite, on multiplie (14) par w et on intègre sur S^1 . On obtient pour tout $t \geq 0$:

$$\int_{S^1} w w_{tt} \, \mathrm{d}\sigma + a \int_{S^1} w w_t \, \mathrm{d}\sigma + \int_{S^1} w w_{\sigma\sigma} \, \mathrm{d}\sigma + \int_{S^1} \big(f(u) - \overline{f(u)} - \lambda w\big) w \, \mathrm{d}\sigma = 0 \,. \tag{15}$$

Comme $\overline{u}$ est la projection de u sur le premier espace propre associé à $-\Delta u_{S^1}$ ayant 1 comme deuxième valeur propre, on a

$$-\int_{S^1} w_{\sigma\sigma} w \, \mathrm{d}\sigma \geq \int_{S^1} w^2 \, \mathrm{d}\sigma \,. \tag{16}$$

D'autre part, (H5) et (2) montrent qu'il existe $T \in \mathbb{R}^+$ assez grand tel que :

$$\big(f(u) - f(\overline{u}) - \lambda(u - \overline{u})\big)(u - \overline{u}) \leq 0 \quad \text{pour } t \geq T \,. \tag{17}$$

Ensuite comme

$$\begin{aligned} \int_{S^1} \Big(f(u) - \lambda u - \big(\overline{f(u)} - \lambda \overline{u}\big)\Big) (u - \overline{u}) \, \mathrm{d}\sigma = \\ = \int_{S^1} \big(f(u) - \lambda u - \big(f(\overline{u}) - \lambda \overline{u}\big)\big) (u - \overline{u}) \, \mathrm{d}\sigma + \\ + \int \Big(\big(f(\overline{u})\overline{f(u)}\big)(u - \overline{u})\Big) \, \mathrm{d}\sigma = \\ = \int_{S^1} \big(f(u) - f(\overline{u}) - \lambda w\big) w \, \mathrm{d}\sigma \,, \end{aligned} \tag{18}$$

on déduit de (17) :

$$\int_{S^1} \big(f(u) - f(\overline{u}) - \lambda w\big) w \, \mathrm{d}\sigma \leq 0 \quad \text{pour tout } t \geq T \,. \tag{19}$$

En utilisant (16) et (19), (15) devient

$$\int_{S^1} w_{tt} w \, \mathrm{d}\sigma + a \int_{S^1} w_t w \, \mathrm{d}\sigma \geq \int_{S^1} w^2 \, \mathrm{d}\sigma \quad \text{pour tout } t \geq T \,. \tag{20}$$

Soit

$$X(t) = \left(\int_{S^1} w^2 \, \mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \widetilde{X}(t) = \big(\eta^2 + X(t)^2\big)^{\frac{1}{2}} \,,$$

où η désigne un réel strictement positif. Un calcul rapide montre que $\widetilde{X}_t\widetilde{X}(t) = \int_{S^1} w_t w \,\mathrm{d}\sigma$ et

$$\widetilde{X}_{tt}\widetilde{X}(t) = \int_{S^1} w_{tt} w \,\mathrm{d}\sigma + \int_{S^1} w_t^2 \,\mathrm{d}\sigma - X_t^2 \geq \int_{S^1} w_{tt} w \,\mathrm{d}\sigma\,.$$

D'où :

$$\widetilde{X}_{tt} + a\widetilde{X}_t - \left(\widetilde{X} - \frac{\eta}{\widetilde{X}}\right) \geq 0 \quad \text{pour tout } t \geq T\,. \tag{21}$$

En faisant tendre η vers 0, on obtient

$$X_{tt} + aX_t - X \geq 0 \quad \text{pour tout } t \geq T\,. \tag{22}$$

L'équation associée à (22) :

$$Y_{tt} + aY_t - Y = 0 \quad \text{pour tout } t \geq T \tag{23}$$

admet comme solution générale :

$$Y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{pour tout } t \geq T\,, \tag{24}$$

où A et B désignent deux constantes réelles et

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2+4}}{2} > 0 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2+4}}{2} < 0\,. \tag{25}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $Y_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{r_1 t}$. Montrons que $X(t)$ est inférieur à $Y_\varepsilon(t)$ sur $[t_0\,, +\infty[$ (t_0 étant défini par (3) et supérieur à T). On introduit alors la fonction $Z(\cdot) = X(\cdot) - Y_\varepsilon(\cdot)$. Elle vérifie l'inéquation :

$$Z_{tt} + aZ_t - Z \geq 0 \quad \text{pour tout } t \geq t_0\,. \tag{26}$$

Comme $Z(t_0) = -\varepsilon e^{r_1 t_0} < 0$ et $Z(t) < 0$ au voisinage de $+\infty$, d'après le principe de maximum on a $Z(t) < 0$ sur $[t_0\,, +\infty[$. D'où

$$X(t) < \varepsilon e^{r_1 t} \quad \text{sur } [t_0\,, +\infty[\,. \tag{27}$$

Lorsque l'on fait tendre ε vers 0, on obtient

$$X \equiv 0 \quad \text{sur } [t_0\,, +\infty[\,. \tag{28}$$

3. Démonstration du théorème 2

La démonstration du théorème 2 repose essentiellement sur le résultat dû à B. Gidas [6] que nous rappelons ici.

THÉORÈME .— *Supposons* $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < R\}$. *Soit* v *une solution strictement positive de* $C^2(\Omega)$ *du problème suivant :*

(B1) $\Delta v + g(r, v) = 0$ *dans* Ω,

(B2) $v = 0$ *sur* $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| = R\}$,

g *est une fonction de* C^1 *en* u *et décroissante en* r. *Alors* $v(x)$ *a une symétrie radiale et* $v_r < 0$ *pour* $0 < r < R$.

L'idée de la démonstration consiste à chercher un changement de variable de type :

$$t = -\log r^{\alpha} \quad \text{et} \quad v(r, \sigma) = r^{-\delta} u(t, \sigma)\,, \tag{29}$$

qui permet de transformer (1) et (5) en un problème de type (B). Un calcul rapide montre que :

$$u_t = -\frac{1}{\alpha}\, r^{\delta+2} \left(\frac{v_r}{r} + \frac{\delta v}{r^2} \right)$$

et

$$u_{tt} = -\frac{1}{\alpha^2}\, r^{\delta+2} \left(v_{rr} + (2\delta + 1)\frac{v_r}{r} + \frac{\delta^2 v}{r^2} \right).$$

Par conséquent (1) devient

$$\begin{aligned} v_{rr} + (2\delta + 1 - a\alpha)\frac{v_r}{r} + \frac{v_{\sigma\sigma}}{r^2} + \frac{v_r}{r^2}(\delta^2 - a\alpha\delta - \lambda\alpha^2) + \\ + \alpha^2 r^{-(\delta+2)} f(r^{\delta} v) = 0 \quad \text{dans } \Omega\,, \end{aligned} \tag{30}$$

où $\Omega = B(0, R_0)$, ou son complémentaire selon que α est strictement négatif ou strictement positif, et $R_0 = e^{-t_0/\alpha}$. Avec les deux conditions suivantes :

(I) $2\delta - a\alpha = 0$,

(II) $\delta^2 - a\alpha\delta - \lambda\alpha^2 = 0$,

(29) devient :

$$\Delta v + \alpha^2 r^{-(\delta+2)} f(r^{\delta} v) = 0 \quad \text{dans } \Omega\,. \tag{31}$$

Or le système (I)-(II) n'a de sens que pour $\lambda = -\alpha^2/4$. On distingue alors deux cas.

Cas 1. $\lambda = -\dfrac{a^2}{4}$

Cas 1.1.— $a < 0$. On choisit $\alpha > 0$ de telle façon que le changement de variable (12) transforme (1) en un problème intérieur. Par conséquent, δ est strictement négatif. Considérons ensuite la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(r, v) = \alpha^2 r^{-(\delta+2)} f(r^\delta v)\,. \tag{32}$$

Un calcul rapide montre que

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, v) = \alpha^2 r^{-(\delta+2)} \big(-(\delta+2) f(r^\delta v) + \delta r^\alpha v f(r^\delta v)\big)\,. \tag{33}$$

On pose $X = r^\delta v$, g est alors décroissante en r si seulement si

$$-(\delta+2) f(X) + \delta X f'(X) \leq 0 \quad \text{avec } X \geq 0\,. \tag{34}$$

Inégalité garantie par l'hypothèse (H6).

Cas 1.2.— $a > 0$. Cette fois on ne peut choisir $\alpha > 0$ puisque, sous l'hypothèse (H6), (34) n'est pas vérifiée en général. (1) se transforme en un problème extérieur. On introduit alors la transformation de Kelvin en dimension 2 :

$$w(y) = v\left(\frac{y}{|y|^2}\right), \quad y \in B(0, R_0)\,. \tag{35}$$

w vérifie

$$\Delta w(y) + \alpha^2 |y|^{\delta-2} f\big(|y|^\delta w(y)\big) = 0\,. \tag{36}$$

On pose alors

$$g(r, w) = \alpha^2 |y|^{\delta-2} f\big(|y|^\delta w(y)\big) = 0\,. \tag{37}$$

On a

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, v) = \alpha^2 r^{\delta-3} \big((\delta-2) f(r^{-\delta} v) - \delta r^{-\delta} v f'(r^{-\delta} v)\big)\,. \tag{38}$$

Soit $Y = r^{-\delta} w$, g est alors décroissante en r si et seulement si

$$(\delta-2) f(Y) - \delta Y f'(Y) \leq 0 \quad \text{avec } Y \geq 0\,. \tag{39}$$

Celle-ci est vérifiée grâce à (H6).

Cas 2. $\lambda < -\dfrac{a^2}{4}$

L'idée de base consiste à se ramener au cas précédent avec une nouvelle fonction f vérifiant (H6). En effet (1) peut s'écrire :

$$u_{tt}+au_t+u_{\sigma\sigma}-\frac{a^2}{4}u+\phi(t)+\left(\frac{a^2}{4}-\lambda\right)u+f(u)=0 \quad \text{dans } \mathbb{R}\times S^1 . \tag{40}$$

On introduit une nouvelle fonction $\widetilde{f}$ telle que

$$\widetilde{f}(u)=\left(\frac{a^2}{4}-\lambda\right)u+f(u).$$

Avec l'expression de f, en fonction de $\widetilde{f}$, (H6) devient :

$$\begin{aligned}&\operatorname{sign}(a)\,\delta_0\big(X\widetilde{f}'(X)-\widetilde{f}(X)\big)\geq\\ &\quad\geq -2f(X)+\left(\frac{a^2}{4}u+\phi(t)\right)+\left(\frac{a^2}{4}-\lambda\right)X \quad \text{avec } X\geq 0 .\end{aligned} \tag{41}$$

Si l'on prend $\lambda < a^2/4$, alors $\widetilde{f}$ vérifie (H6). Ceci démontre le théorème 2.

4. Théorème d'unicité

4.1 Résultats préliminaires

PROPOSITION 4.1.— *On suppose $a > 0$. Soit u une solution de (7) et (8). Alors u admet au plus un point critique $t_0 \in [0\,,+\infty[$ et on a*

$$u(t_0)\geq U_0 . \tag{42}$$

Si de plus u est solution de (PVI) alors $u'(t) < 0$ pour tout $t > 0$.

Démonstration.— Considérons deux étapes.

Première étape.— Supposons que u admette un point critique t_0 et soit t_1 un point tel que $t_1 > t_0$. En multipliant (1) par u et intégrant sur $[t_0\,, t_1]$ on obtient :

$$\frac{u'(t_1)^2}{2}-\frac{u'(t_0)^2}{2}=-\int_{u_0}^{u_1}g(s)\,\mathrm{d}s-a\int_{t_0}^{t_1}u'(s)^2\,\mathrm{d}s\,, \tag{43}$$

où $u_i = u(t_i)$ avec $i = 0$ ou 1. D'où

$$\frac{u'(t_1)^2}{2} < -\int_{u_0}^{u_1} g(s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{44}$$

En faisant tendre t_1 vers $+\infty$ dans (44), on obtient :

$$0 \leq -\int_{u_0}^{u_1} g(s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{45}$$

Ce qui équivaut à (42).

Deuxième étape.— Soit $\zeta \in [0, +\infty[$ un point critique de $u(t)$. On a

$$u''(\zeta) + g\big(u(\zeta)\big) = 0\,. \tag{46}$$

Comme $t_{1,2}$ est un minimum de u, on a $u''(t) \geq 0$ au voisinage de $t_{1,2}$. (46) implique alors :

$$g\big(u(t_{1,2})\big) \leq 0\,. \tag{47}$$

Or $u(t_{1,2})$ est différent de zéro sinon, d'après le théorème standard d'unicité locale, u serait identiquement nulle sur $[0, +\infty[$. D'où :

$$\frac{g\big(u(t_{1,2})\big)}{u(t_{1,2})} \leq 0\,. \tag{48}$$

D'autre part, on montre facilement en utilisant (H1) et (H2) que :

$$\frac{2G(u)}{u^2} < \frac{g(u)}{u} \quad \text{pour } u > 0\,. \tag{49}$$

En combinant (42), (48) et (49), on obtient une contradiction.

Remarque 4.2.— D'après la proposition 4.1, si u est une solution positive de (7) et (8) alors sa courbe admet l'une des formes suivantes.

PROPOSITION 4.2.— *Sous les hypothèses de la proposition 4.1, on a*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u'(t)}{u(t)} = -\beta\,. \tag{50}$$

D'autre part pour $\varepsilon \in [0\,,\beta[$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \sup u(t)e^{t\sqrt{\beta-\varepsilon}} < \infty \tag{51}$$

avec

$$\beta = \frac{1+\sqrt{1-4g'(0)}}{2}. \tag{52}$$

Démonstration.— On introduit la fonction z telle que $z(t) = -u'(t)/u(t)$. D'après la proposition 4.1, il existe $t_1 \in [0\,, +\infty[$ tel que $z(t) > 0$ pour $t \geq t_1$.

Première étape.— z est bornée au voisinage de $+\infty$. En effet, un calcul rapide montre que z vérifie :

$$z' = -\frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2} = z^2 - z + \frac{g(u)}{u}. \tag{53}$$

Considérons l'ensemble $E = \left\{(t,z) \mid t \geq t_1 \text{ et } z \geq 1+\sqrt{2\lambda+1}\right\}$. D'après (H1) et (H3), on a

$$z^2 - z + \frac{g(u)}{u} \geq \frac{1}{2}z^2 + \left(\frac{1}{2}z^2 - z - \lambda\right) \geq \frac{1}{2}z^2 \quad \text{dans } E. \tag{54}$$

D'où

$$z(t) \geq \frac{2}{\dfrac{2}{z(t_1)} - (t-t_1)} \quad \text{pour } t \geq t_1. \tag{55}$$

$z(t)$ explose au bout d'un temps fini, ce qui est impossible. Par conséquent :

$$\lim_{t\to+\infty} \sup z(t) \leq 1+\sqrt{2\lambda+1}. \tag{56}$$

Deuxième étape.— $z(t)$ admet une limite finie quand t tend vers $+\infty$. En effet d'après la première étape, il suffit de montrer que $z(t)$ est monotone pour t assez grand. Considérons z comme une fonction de u. On a

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}u' = -uz\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}.$$

D'où l'équation

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = -\frac{z^2 - z + \dfrac{g(u)}{u}}{uz} = H(u;z). \tag{57}$$

$z(u)$ admet un signe constant quand u devient très petit. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe une suite tendant vers zéro telle que :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}(u_n) = (-1)^n \left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}(u_n)\right| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,. \tag{58}$$

Soit $\alpha \in \left]0\,,\, u_0\right]$ un point critique de z. D'après (57) on a

$$z^2(\alpha) - z(\alpha) + \frac{g(z)}{\alpha} = 0 \tag{59}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}u^2}(\alpha) &= H_u\big(\alpha; z(\alpha)\big) + H_z\big(\alpha; z(\alpha)\big)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}(\alpha)\\ &= H_u\big(\alpha; z(\alpha)\big)\,.\end{aligned} \tag{60}$$

Or

$$H_u\big(\alpha; z(\alpha)\big) = -\frac{g'(\alpha)u - g(u)}{u^3 z}\,z + \frac{\left(z^2 - z + \dfrac{g(u)}{u}\right)}{zu^2}\,;$$

en utilisant alors (59), on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}u^2} = -\frac{g'(\alpha)\alpha - g(\alpha)}{\alpha^3 z(\alpha)} < 0\,. \tag{61}$$

D'après (58), il existe une suite $\{u_n\}$ convergeant vers zéro telle que $z(u_n)$ soit un minimum local pour z et par conséquent

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}u^2}(u_n) \geq 0\,; \tag{62}$$

ce qui contredit (61). Ensuite comme z est bornée, la seconde étape implique que z admet une limite finie quand u tend vers zéro. Le second membre de (53) admet donc une limite finie quand t tend vers $+\infty$. D'où :

$$\lim_{t\to+\infty} z'(t) = 0 \tag{63}$$

(sinon z ne serait plus bornée). Soit ℓ tel que $\ell = \lim_{t\to+\infty} z(t)$. Elle vérifie l'équation $\ell^2 - \ell - g'(0) = 0$. D'où :

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{1 - 4(4(f'(0) - \lambda)}}{2}\,.$$

Enfin pour avoir (51), il suffit de remarquer que d'après (50) on a pour $\varepsilon \in \left]0\,,\beta\right[$:

$$-\frac{u'(t)}{u(t)} \geq \beta - \varepsilon \quad \text{pour } t \text{ assez grand.} \tag{64}$$

PROPOSITION 4.3.— *Considérons deux solutions positives u et v de (PVI). On a les propriétés suivantes :*

i) $u(t) - v(t)$ ne peut avoir qu'un nombre fini de zéros sur $[0\,, +\infty[$;

ii) supposons que $t(u) - r(u) > 0$ pour u suffisamment petit, alors

$$\big(t(u) - r(u)\big)' < 0\,; \tag{65}$$

iii)supposons $u(t) > v(t)$ pour $t > T$, alors $t(u) - r(u)$ est positive décroissante sur $\big[0\,, v(T)\big]$.

Démontration

Première étape.— Montrons i). Soit $\phi(t) = u(t) - v(t)$. Supposons que $\phi(\zeta) = 0$ pour un certain $\zeta \geq 0$. Si $\phi'(\zeta) = 0$ alors le théorème standard d'unicité implique que $\phi(\zeta) \equiv 0$ sur $[0\,, +\infty[$. D'où $\phi'(\zeta) = 0$ et les zéros de ϕ sont isolés et forment un sous-ensemble fermé de $[0\,, +\infty[$. S'il existe un nombre infini de zéros de ϕ, on peut les ordonner comme suit, $\zeta_1 < \zeta_2 < \ldots$, et $\zeta_k \to +\infty$ quand $k \to +\infty$. Comme u(t) tend vers zéro quand t tend vers l'infini, il existe $\overline{k}$ tel que

$$u(\zeta_{\overline{k}}) < \alpha = \inf\big\{u \in \left]0\,, +\infty\right[\mid g(u) > 0\big\}\,.$$

Or d'après la proposition 1.1, on sait qu'il existe $t'_0 \in [0\,, +\infty[$ tel que $u(t)$ et $v(t)$ soient monotones décroissantes sur $[t'_0\,, +\infty[$. Soient ζ_k et $\zeta_{k+1} \in [t'_0\,, +\infty[$ tels que $k \geq \overline{k}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\big(u'(t_1)^2 - v'(t_1)^2\big)e^{2t_1} - \frac{1}{2}\big(u'(t_0)^2 - v'(t_0)^2\big)e^{2t_2} &= \\ = \int_{u_1}^{u_0} \big(e^{2t(u)} - e^{2r(u)}\big) g(u)\, du\,,&\end{aligned} \tag{66}$$

où $t_0 = \zeta_k$, $t_1 = \zeta_{k+1}$ et $t(u)$ et $r(u)$ sont les inverses de $u(t)$ et $v(t)$. Comme $u_1 = u(t_1) < u_0 = u(t_0) < \alpha$, on a $g'(u) \leq 0$. On suppose $u > v$ (l'autre cas se traite de la même façon). Donc $r(u) - t(u) < 0$ dans $]u_0\,, u_1[$. Le second membre de (66) est donc négatif. D'autre part, $v'(t_0) < u'(t_0) < 0$ et

$u'(t_1) < v'(t_1) < 0$. Par conséquent, le membre de droite de (66) est positif. La contradiction, qu'on vient d'obtenir, montre alors qu'il ne peut y avoir pour ϕ qu'un nombre fini de zéros.

Deuxième étape. — Montrons ii). Comme dans [4], on pose $u = e^{-w}$ et on considère la fonction $t(w)-r(w)$. Il suffit alors de montrer que $-\big(t-r\big)_w < 0$. D'après la proposition 4.3, soit $\big(t-r\big)_w$ est strictement positif, soit $\big(t-r\big)_w$ est strictement négatif. Supposons alors $\big(t-r\big)_w < 0$. Un calcul rapide montre que

$$\big(t-r\big)_{ww} + \big(t-r\big)_w + \big(t_w^2 - r_w^2\big) - e^w g(e^{-w})\big(t_w^3 - r_w^3\big) = 0\,. \tag{67}$$

D'où :

$$\big(t-r\big)_{ww} = -\left\{1 + (t_w + r_w) - e^w g(e^{-w})\frac{(t_w^3 - r_w^3)}{(t_w + r_w)}\right\}\big(t-r\big)_w\,. \tag{68}$$

Quand u tend vers zéro, on a w, t et $r \to +\infty$. Et d'après la proposition 4.2, $e^w f(e^w) - \lambda$, t_w et r_w convergent respectivement vers $f'(0) - \lambda$ et β. Par conséquent lorsque l'on fait tendre u vers 0 dans (67), le coefficient de $\big(t-r\big)_w$ est $2\beta - 1 - g'(0)(2\beta + \beta^2) > 0$. Si $\big(t-r\big)_w < 0$ alors $\big(t-r\big)_{ww} < 0$. Or pour w suffisamment petit, les trois conditions $t - r > 0$, $\big(t-r\big)_w > 0$ et $\big(t-r\big)_{ww} > 0$ sont incompatibles puisque $(t-r)$ est définie sur un intervalle non borné supérieurement. D'où (66).

Troisième étape. — Montrons iii). Montrons que $t(u) - r(u)$ est ou bien décroissante ou bien croissante sur $[T\,,+\infty[$. En un point critique, on a $\big(t-r\big)_w = 0$. On en déduit, en utilisant (67), que $\big(t-r\big)_{ww} = 0$. D'après le théorème standard d'unicité locale, on a alors $t - r = 0$. Par conséquent $(t-r)$ n'admet pas de points critiques. D'après ii), $(t-r)$ est alors strictement décroissante sur $[0\,, v(T)]$.

PROPOSITION 4.4. — *On suppose que (H3), (H4) et (H5) sont vérifiées. Soient u et v deux solutions de (7) et (9). Si les graphes de u et de v se rencontrent en un point (T, U), où $U > 0$, alors $U > U_0$.*

Démonstration. — Soit (T, U) le dernier point de rencontre des graphes de u et de v. On a

$$\frac{1}{2}\, e^{2t} u'(t)^2 - \frac{1}{2}\, e^{2T} u'(T)^2 = \int_{u(t)}^{U} e^{2t(u)} g(u)\, du \quad \text{pour tout } t > T\,. \tag{69}$$

D'après la proposition 4.2, pour chaque $\varepsilon > 0$ donné on a

$$u(t) \leq C(\varepsilon) e^{-(\beta-\varepsilon)t} \quad \text{pour } t \text{ assez grand}, \tag{70}$$

où $C(\varepsilon)$ est une constante strictement positive et β est donné par (52). En considérant la fonction inverse $t(u)$ de u, on a

$$e^{2t(u)}|g(u)| \leq C'(\varepsilon)\frac{|g(u)|}{u^{\sigma}} \quad \text{pour } t \text{ assez petit}. \tag{71}$$

$C'(\varepsilon)$ est une nouvelle constante positive et $\sigma = 2/(\beta - \varepsilon)$. D'autre part d'après (H4), on a $g(u)/u^{\sigma} \cong u^{-\sigma+1}$ proche de zéro. Par définition de β, on peut toujours choisir $\varepsilon > 0$ de telle sorte que la fonction $f(u)/u^{\sigma}$ soit intégrable sur tout intervalle de la forme $[\,0\,,\,T^*\,]$ avec $T^* < \infty$ (par exemple $\varepsilon_0 = (1 + \sqrt{1+4\lambda})/2$). L'intégrale de (69) est donc convergente lorsque t tend vers l'infini. D'autre part, d'après (52), il est clair que u' décroît aussi exponentiellement au voisinage de l'infini. Avec ε_0 déjà choisi si t tend vers l'infini dans (69), on obtient

$$\frac{1}{2}\, e^{2T} u'(T)^2 = -\int_0^U e^{2t(u)} g(u)\, du\,. \tag{72}$$

De la même façon, on obtient un résultat analogue pour $v(t)$. D'où :

$$\frac{1}{2}\, e^{2T}\left(v'(T)^2 - u'(T)^2\right) = -\int_0^U \psi(u) g(u)\, du\,, \tag{73}$$

où $\psi(u) = e^{2t(u)} - e^{2r(u)}$. On suppose que $u > v$ pour $t > T$. Alors, on a $v'(T) < u'(T) < 0$, d'où $v'(T)^2 > u'(T)^2$. Il en découle que $\int_0^U \psi(u)g(u)\,du > 0$. Or la proposition 4.3, implique que $t(u) - r(u)$ est positive et strictement décroissante pour $u \in \,]\,0\,,\,U\,[$. Donc $\psi(u) > 0$ sur $]\,0\,,\,U\,[$ et $\psi'(u) = 2\{e^{2t}(t - r') + (e^{2t} - e^{2r})r'\} < 0$.

Supposons par l'absurde que $U \leq \beta$. Alors $G(U) \leq 0$. D'autre part, on a

$$\lim_{u \to 0 \text{ ou } U} \psi(u) G(u) = 0\,. \tag{74}$$

Donc

$$0 \leq \int_0^U \psi(u) g(u)\, du = -\int_0^U \psi'(u) G(u)\, du \leq 0\,.,$$

ce qui est impossible.

4.2 Démonstration du théorème d'unicité

D'après la proposition 4.4, il suffit de montrer que les graphes de u et de v ne se rencontrent pas au-dessus de la droite $U = U_0$.

On raisonne par l'absurde. Soit (U,T) le dernier point de rencontre des graphes de u et de v. On introduit les mêmes notations que dans [4] (démonstration du théorème 2). Soit ε assez petit pour que $\beta + \varepsilon < U$. Puisque u est décroissante, il existe un nombre réel unique $\zeta > T$ tel que $u(\zeta) = \beta + \varepsilon$. On a alors $u(\zeta) < v(\zeta)$. Posons $\overline{u} = u - (\beta+\varepsilon)$, $\overline{v} = v - (\beta+\varepsilon)$ et soit $\eta = \inf\{\tau > 0 \mid \tau\overline{v} > \overline{u} \text{ sur } [0\,,\zeta]\}$.

Puisque $\overline{u} > \overline{v}$ dans un voisinage à gauche de T, on a $\eta > 1$. En effet dans le cas contraire, par définition de la borne inférieure, il existerait une suite (τ_n) tendant vers 1 telle que $\overline{u} < \tau_n\overline{v}$. Quand n tend vers l'infini on obient $\overline{u} \leq \overline{v}$, ce qui est impossible. Ensuite posons $z = \eta\overline{v} - \overline{u}$. Alors $z \geq 0$ sur $[t\,,\zeta]$. En plus, il existe $t_0 \in [0\,,\zeta]$ tel que $z(t_0) = 0$. En effet, soit $\gamma = \sup z(t)$ sur $[0\,,\zeta]$. Comme z est continue sur $[0\,,\zeta]$, il existe $\xi \in [0\,,\zeta]$ tel que $\gamma = z(\xi)$. Si $\gamma > 0$, en choisissant

$$\tau = \frac{\eta\overline{v}(0) + \dfrac{1}{2}\gamma}{\overline{v}(0)}\,,$$

on montre facilement que $\overline{u} < \tau\overline{v} < \eta\overline{v}$. Ceci contredit la définition de la borne inférieure. De plus par définition de ζ, on a $t_0 \neq \zeta$. Par conséquent

$$z''(t_0) + az'(t_0) \geq 0 \tag{75}$$

et, en utilisant (7), on obtient :

$$\eta g\big(\overline{v}(t_0) + U_0 + \varepsilon\big) \leq g\big(\overline{u}(t_0) + U_0 + \varepsilon\big)\,. \tag{76}$$

Puisque $z(t_0) = 0$, on peut écrire

$$\frac{g\big(\overline{v}(t_0) + U_0 + \varepsilon\big)}{\overline{v}(t_0)} \leq \frac{g\big(\overline{u}(t_0) + U_0 + \varepsilon\big)}{\overline{u}(t_0)}\,. \tag{77}$$

Comme $U > U_0$, on a $u(0) > U_0$. D'après (H6) :

$$\frac{g(u)}{u - (U_0 + \varepsilon)}$$

est strictement décroissante sur $\big]\,U_0 + \varepsilon\,, u(0)\big]$. D'où :

$$\frac{g(s)}{s - (U_0 + \varepsilon)} > \frac{g(t)}{t - (U_0 + \varepsilon)} \quad \text{pour } U_0 + \varepsilon < s < t < u(0)\,. \tag{78}$$

Si l'on pose $s = \overline{v}(\eta) + U_0 + \varepsilon$ et $t = \overline{u}(\eta) + U_0 + \varepsilon$, on obtient une contradiction avec (77).

Références

[1] BIDAUT-VERON (M.- F.) et BOUHAR (M.) .— *On characterization of some nonlinear differential equations and applications*, Siam J. of Math Analysis, **25** (1994), pp. 859-875.

[2] BOUHAR (M.) .— *Comportement limite de solutions d'équations semi-linéaires dans des cylindres infinis*, Ph. D. Thesis, Uni. Tours (1991).

[3] BOUHAR (M.) et VÉRON (L.) .— *Integral representation of solutions of semilinear eliptic systems in cylinders and applications*, Nonlinear Analysis, **23** (1994), pp. 275-296.

[4] PELETIER (L. A.) et SERRIN (J.) .— *Uniqueness of positive solutions of semilinear equations in* $\mathbb{R}^N$, Arch. Rational Mechanics Anal. **81** (1983), pp. 181-197.

[5] VERON (L.) .— *Geometric invariance of singular solutions of some nonlinear partial differential equations*, Indiana Univ. Math. J. (in press).

[6] GIDAS (B.) .— *Symmetry properties and isolated singularities of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering and Applied Science; edited by R. Sternberg, A. Kalinowski and J. Papadakis, Marcel Dehker, New-York 1980.